

Differenciál- és integrálszámítás

(Tételjegyzék 2007)

- 1) Függvény differenciálhatóságának és folytonosságának kapcsolata. Példák.
- 2) Inverz függvény differenciálhatósága. Példák: $\arcsin x$, $\arctan x$ függvények differenciálása.
- 3) $\sqrt[n]{x}$ függvény differenciálhatósága; $f(x)^{g(x)}$ típusú függvények differenciálása.
- 4) Középtérték-tételek (Lagrange-féle tétel bizonyítása). Az integrálszámítás alap-tétele.
- 5) Monotonitás jellemzése differenciálhányados függvénnyel.
- 6) Szélsőérték jellemzése első és másodrendű differenciálhányados segítségével (egy tétel bizonyítása).
- 7) L'Hospital szabály (bizonyítás nélkül). Példák: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x}$, $n \in \mathbb{N}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^n x}{x}$, $n \in \mathbb{N}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$.
- 8) Példák olyan függvénysorozatokra, ahol $f_n \rightarrow f$, f_n differenciálhatók, de f nem; illetve $f_n \rightarrow f$, f_n és f differenciálhatók, de $f'_n \not\rightarrow f'$.
- 9) Hatványsorok tagonkénti differenciálása (bizonyítás nélkül).
Alkalmazás: $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n$ összegfüggvénye; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{3^n}$ sor összege.
- 10) Taylor formula.
- 11) $\sin x$, $\cos x$, e^x , $\ln(1+x)$ függvények Taylor sorai.
- 12) Primitív függvény (egy tétel bizonyítása).
- 13) Helyettesítéssel való integrálás formulája primitív függvényre.
- 14) Parciális integrálás formulája primitív függvényre.
- 15) Rekurzív formulák: $\frac{1}{(1+x^2)^n}$ primitív függvénye; $\sin^n x$ vagy $\cos^n x$ primitív függvénye.
- 16) Racionalizáló helyettesítések. $R(\sin x, \cos x)$ primitív függvénye.
- 17) Az alsó és felső összegek. (Összehasonlításuk és viselkedésük, ha a beosztáshoz új osztópontot veszünk hozzá.)
- 18) Az alsó és felső integrálok definíciója, összehasonlításuk. A Riemann féle integrál.
- 19) $\int_a^b x dx$ kiszámítása definíció szerint.
- 20) Az oszcillációs kritérium.
- 21) Integrálható függvények szorzatának és hányadosának integrálhatósága.
- 22) Integrálható függvények abszolútértékének integrálhatósága és az integrál becslése.
- 23) A monoton függvények integrálhatók.

24) A folytonos függvények integrálhatók.

25) Az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ha } x = \frac{p}{q}, (p, q) = 1, q > 0, p, q \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

függvény integrálhatósága a $[0, 1]$ intervallumon.

26) Newton-Leibniz formula.

27) Az integrálfüggvény folytonossága.

28) Az integrálfüggvény és a primitív függvény kapcsolata. Példák.

29) A parciális és a helyettesítéses integrálás Riemann integrálra.

30) Cauchy-Bunyakovszkij-Schwartz féle egyenlőtlenség.

31) Példák olyan függvénysorozatokra, ahol $f_n \rightarrow f$, f_n integrálhatók, de f nem; illetve $f_n \rightarrow f$, f_n és f integrálhatók, de $\int_a^b f_n dx \not\rightarrow \int_a^b f dx$.

32) Hatványsorok tagonkénti integrálása (bizonyítás nélkül); arctan x hatványsora.

33) Az improprius integrál definíciójának alapesetei. Példák.

34) $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ improprius integrál létezése.

35) Integrálkritérium pozitív tagú sorokra.

36) Görbeív alatti terület, zárt görbe által határolt terület.

37) Forgástest térfogata.

38) Rektifikálható görbe ívhossza; az ívhossz kiszámítása.

39) Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek.

40) Bernoulli féle differenciálegyenlet;

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \text{ alakú differenciálegyenlet.}$$

41) Lineáris függőség és Wronski determináns.

42) Homogén lineáris másodrendű differenciálegyenletek megoldáshalmazának szerkezete.

43) Konstans együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenletek.

44) Inhomogén lineáris másodrendű differenciálegyenletek.

Definíció és tételkimondás szintjén tudni kell még:

A differenciálhányados fogalma, geometriai jelentése; a differenciálás műveleti szabályai, elemi függvények deriváltjai. A konvexitás fogalma és jellemzése. A

Taylor-formula alkalmazásai; a Taylor sor. A primitív függvény fogalma; a primitíválhatóság (szüks./elégs.) feltételei. A primitív függvény keresésének tanult módszerei.

Integrálközelítő összegek; Riemann-összegek; Darboux tétele. Az integrál lineáritása; tulajdonságai. Integrálhatóság részintervallumon, $\int_b^a f$ és $\int_a^a f$ definíciója, intervallum szerinti additivitás. Középérték-tétel. Improprius integrál általános fogalma. Cauchy-féle és majoráns kritériumok improprius integrálra.

Terület, ívhossz, forgástest térfogata és palástfelszíne fogalma és kiszámításuk ($y = f(x)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $r = r(\varphi)$ alakban adott görbék esetei).

Differenciálegyenlet, iránymező, általános és szinguláris megoldás. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek. Lineáris függőség. A differenciálegyenletek egzisztencia- és unicitástétele.

2007. május 12.

Bartha Mária, Németh Zoltán