

## Differenciál- és integrálszámítás

### Tételjegyzék

I.mat. alapszak levelező, 2013/2014 II. félév

- 1) Inverz függvény differenciálhatósága. Példák:  $\arcsin x$ ,  $\arctan x$  deriváltjai
- 2)  $x^n$ ,  $\sqrt[n]{x}$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $x^\alpha$  függvények differenciálhatósága
- 3) Középérték-tételek (A Rolle tétel bizonyítása). Az integrálszámítás alaptétele
- 4)  $f$  monotonitásának jellemzése  $f'$ -vel (szükséges és elégséges feltételek; az egyik állítás bizonyítása)
- 5)  $f$  szélsőértékére vonatkozó tételek (az egyik állítás bizonyítása)
- 6) L'Hospital szabály (bizonyítás nélkül). Példák:  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;  
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^n x}{x}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$ ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$
- 7) Példák olyan függvénysorozatokra, ahol  $f_n \rightarrow f$ ,  $f_n$  differenciálható, de  $f$  nem; illetve  $f_n \rightarrow f$ ,  $f_n$  és  $f$  differenciálhatók, de  $f'_n \not\rightarrow f'$
- 8) Hatványsorok tagonkénti differenciálása;  $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$  összegfüggvénye
- 9) Taylor formula
- 10)  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $e^x$  függvények Taylor sorai
- 11) Helyettesítéssel való integrálás formulája primitív függvényre
- 12) Rekurzív formulák:  $\frac{1}{(1+x^2)^n}$  és  $\sin^n x$  primitív függvényei (az egyik részletesen)
- 13) Racionalizáló helyettesítések.  $R(\sin x, \cos x)$  alakú függvények primitív függvénye
- 14) Az alsó és felső összegek tulajdonságai (viselkedésük a beosztás sűrítésekor; összehasonlításuk)
- 15) Az alsó és felső integrálok definíciója, összehasonlításuk. A Riemann féle integrál
- 16) Az oszcillációs kritérium
- 17) Integrálható függvények abszolútértékének integrálhatósága és az integrál becslése
- 18) A monoton függvények integrálhatók
- 19) A folytonos függvények integrálhatók
- 20) Newton-Leibniz formula
- 21) A parciális integrálás formulája Riemann integrálra
- 22) Az integrálfüggvény folytonossága és differenciálhatósága (az egyik állítás bizonyítása)
- 23) Az integrálfüggvény és a primitív függvény kapcsolata. Példák

- 24) Példák olyan függvénysorozatokra, ahol  $f_n \rightarrow f$ ,  $f_n$  integrálható, de  $f$  nem; illetve  $f_n \rightarrow f$ ,  $f_n$  és  $f$  integrálhatók, de  $\int_a^b f_n dx \not\rightarrow \int_a^b f dx$
- 25) Hatványsorok tagonkénti integrálása (bizonyítás nélkül);  $\arctan x$ ,  $\log(1+x)$  hatványsorai
- 26) Az improprius integrál definíciójának alapesetei. Példák
- 27)  $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  improprius integrál létezése
- 28) Görbeív alatti terület, zárt görbe által határolt terület
- 29) Forgástest térfogata
- 30) Rektifikálható görbe ívhossza; az ívhossz kiszámítása

Definíció és tételkimondás szintjén tudni kell még:

A differenciálhányados fogalma, geometriai jelentése és kapcsolata a folytonossággal; a differenciálás műveleti szabályai, elemi függvények deriváltjai. A konvexitás fogalma és jellemzése. Függvénysorozat határfüggvényének differenciálhatósága, függvénysor összegfüggvényének differenciálhatósága. A Taylor formula. A Taylor sor.

A primitív függvény fogalma. A helyettesítéses és parciális integrálás formulái. A primitív függvény keresésének tanult módszerei.

Integrálközelítő összegek; Riemann összeg; Darboux tétele. Az integrálhatóság kritériumai; Riemann kritérium. Az integrál linearitása; tulajdonságai. Szorzat és hányadosfüggvény integrálhatósága. Integrálhatóság részintervallumon,  $\int_b^a f$  és  $\int_a^a f$  definíciója, intervallum szerinti additivitás. A helyettesítéses integrálás formulája Riemann integrálra. Függvénysorozat határfüggvényének integrálása, függvénysor összegfüggvényének integrálása. Az improprius integrál létezésére vonatkozó majoráns kritérium.  $\int_0^\infty x^p e^{-x} dx$ ,  $p > -1$  improprius integrál létezése. Pozitív tagú sorokra vonatkozó integrálkritérium.

Terület, ívhossz, forgástest térfogata kiszámításuk ( $y = f(x)$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $r = r(\varphi)$  alakban adott görbék esetei).