Numerikus módszerek

Alkalmazott és Numerikus Matematika Tanszék
Bolyai Intézet
Szegedi Tudományegyetem

Számonkérés

- Gyakorlat 3 ZH: Február 27, Április 3, Május 15
- Előadás irásbeli vizsga, hasonló a ZH-hoz plusz elméleti kérdésekkel
- Előadásra megajánlott jegy kapható a 3 ZH-n összesen elért pontok alapján (esetleges plusz pontok nem számítanak):
  - 75 . . . 82 százalék: közepes (3)
  - 83 . . . 92 százalék: jó (4)
  - 93 . . . 100 százalék: jeles (5)

Tematika

- A számítógépes számítások pontatlansága, közelítések, hiba
- Lineáris algebra: alapismeretek
- Lináris egyenletrendszerek megoldása
- Mátrixok sajátértékeinek becslése, közelítése
- Nemlineáris egyenletek megoldása
- Függvények közelítése: interpolációs polinom, legkisebb négyzetek
- Numerikus deriválás, numerikus integrálás

Ajánlott irodalom

- Móricz Ferenc: Bevezetés a numerikus matematikába, Polygon, Szeged, 2008.
- Josef Stoer, Ronald Bulirsch: Introduction to Numerical Analysis, Springer, 2002.
- Csendes Tibor: Közelítő és szimbolikus számítások, Polygon, Szeged, 2007.
- Virágh János: Numerikus Matematika, JATEPress, Szeged, 1997.
- Wettl Ferenc: Lineáris Algebra `http://tankonyvtar.ttk.bme.hu/pdf/14.pdf`

ISMÉTLÉS

Számhalmazok

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ természetes számok
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ egész számok
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \ : \ p, q \in Z, \ q \neq 0\right\}$ racionális számok
- $\mathbb{Q}^*$ pl. $\pi, \sqrt{2}$ irracionális számok
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$ valós számok
- $\mathbb{C} = \{a + b\mathbf{i} \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}$

Elemi függvények

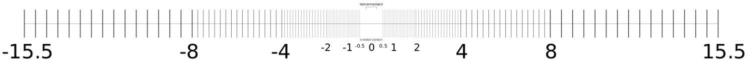
- függvény, grafikon
- x^2, x^3, x^4, x^5, x^6
- polinomok $3x^4 + 2x^2 + 7x + 3$
  $= 3 + x(7 + x(2 + 3x^2))$ (Horner séma)
- $\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}$
- $\sin(x), \cos(x), e^x, \ln x$
- egyenes egyenlete $y = mx + b$ ahol m az egyenes meredeksége
- Az (x_0, y_0) és (x_1, y_1) pontokon átmenő egyenes
  $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$
- derivált, érintő egyenlete

Lebegőpontos számok

- A számítógépben csak véges sok szám reprezentálható
- Tipikusan 64bites úgynevezett `double` számokkal dolgozunk
- Egy ilyen szám felépítése a következő:
  $(-1)^{\sigma} \times (1.m_{51}m_{50}\dots m_1m_0)_{(2)} \times 2^{(e_0e_1\dots e_{10})_{(2)}-1023}$
- σ az előjel: 1 bit
- $m = m_{51}m_{50}\dots m_1m_0$ a mantissza (lényegi rész): 52 bit
- $e = e_0e_1\dots e_{10}$ az exponens: 11 bit

Lebegőpontos számok

A következő ábra mutatja, hogy néz ki a lebegőpontos számokból álló számegyenes



A 0 körüli lyukat töltik ki egyenletesen a denormalizált számok. Ilyenkor az exponens 0 és a számot az előző felbontásban megjelenő tizedespontot megelőző 1-es mellőzésével kapjuk:

$$(-1)^{\sigma} \times (0.m_{51}m_{50}\dots m_1 m_0)_{(2)} \times 2^{-1023}$$

- Fontos jellemző a legkisebb 1-nél nagyobb lebegőpontos szám. Ez `double` számok esetén $2^0 \times (1 + 2^{-52})$, ennek a távolsága 1-től a gépi epszilon: $\varepsilon = 2^{-52} \approx 2 \times 10^{-16}$
- Következik, hogy maximum 16 számjegyig bízhatunk a számítások eredményében (de azok sem garantáltan helyesek)

Hiba, relatív hiba

Jelöljünk x-szel egy értéket amit közelítünk és legyen x^* a közelítés.

- A közelítés abszolút hibája: $\Delta x = |x - x^*|$
- A közelítés relatív hibája, ha $x \neq 0$: $\delta x = \frac{|x-x^*|}{|x|}$

Példák:

- $x = 1000,\ x^* = 1010 \Rightarrow \Delta x = 10,\ \ \delta x = 0.01$
- $x = 20,\ x^* = 30 \Rightarrow \Delta x = 10,\ \ \delta x = 0.5$
- $x = 1,\ x^* = 0.99 \Rightarrow \Delta x = 0.01,\ \ \delta x = 0.01$
- $x = 0.01,\ x^* = 0.02 \Rightarrow \Delta x = 0.01,\ \ \delta x = 1$
- $x = 0.01,\ x^* = 0.015 \Rightarrow \Delta x = 0.005,\ \ \delta x = 0.5$
- $x = 0.01,\ x^* = 0.0101 \Rightarrow \Delta x = 0.0001,\ \ \delta x = 0.01$

Alapvetően a kis relatív hiba elérése a fontos!

Mátrixok

Definíció (Mátrix)

Legyen T egy halmaz (tipikusan számtest: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Egy m oszlopból és n sorból álló táblázat melynek elemei T-ből valók az egy T feletti $m \times n$-es mátrix. Az ilyen mátrixok halmazának jelölése: $T^{m \times n}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Rövid jelölés: $A = (a_{ij})_{m \times n}$ vagy csak egyszerűen $A = [a_{ij}]$.

Mátrixok a gyakorlatban

- adattárolás, táblázatok, képek pl:
`https://www.gsmarena.com/samsung_galaxy_s9-8966.php`
a Samsung S9-es telefon képernyőjén 2960×1440 képpont van, minden képpont 16 millió féle színt vehet fel
- adatokon (mátrixokon) végzett lineáris műveleteket is mátrixokkal fejezzük ki, pl: forgatás, eltolás, projekciók

Vektorok

Vektorok:

- $1 \times n$-es mátrixokat sorvektoroknak,
- $m \times 1$-es mátrixokat oszlopvektoroknak

nevezzük.