A hatványközepek

Kunos Ádám

2010 .december 4.

Az előadás vázlata:

Az előadás vázlata:

Az előadás vázlata:

Az előadás vázlata:

Az előadás vázlata:

Az előadás vázlata:

Amit már ismerünk

Amit már ismerünk

Számtani közép

Az $a_1, \ldots, a_n$ pozitív(!) számok számtani közepe:

$$A = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

Amit már ismerünk

Számtani közép

Az $a_1, \ldots, a_n$ pozitív(!) számok számtani közepe:

$$A = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

Mértani közép

Az $a_1, \ldots, a_n$ pozitív számok mértani közepe:

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Amit már ismerünk

Számtani közép

Az $a_1, \ldots, a_n$ pozitív(!) számok számtani közepe:

$$A = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

Mértani közép

Az $a_1, \ldots, a_n$ pozitív számok mértani közepe:

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

A közöttük lévő összefüggés

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_1 = \ldots = a_n$.

Problémák megoldása közepek segítségével

1. probléma.

Igazoljuk, hogy egy pozitív szám és reciprokának összege nem kisebb 2-nél.

Problémák megoldása közepek segítségével

1. probléma.

Igazoljuk, hogy egy pozitív szám és reciprokának összege nem kisebb 2-nél.

Megoldás.

Legyen x tetszőleges pozitív szám, ekkor a reciproka $1/x$.

Problémák megoldása közepek segítségével

1. probléma.

Igazoljuk, hogy egy pozitív szám és reciprokának összege nem kisebb 2-nél.

Megoldás.

Legyen x tetszőleges pozitív szám, ekkor a reciproka $1/x$.Felírva ezen két számra a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenséget, adódik az igazolandó:

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 1,$$

Problémák megoldása közepek segítségével

1. probléma.

Igazoljuk, hogy egy pozitív szám és reciprokának összege nem kisebb 2-nél.

Megoldás.

Legyen x tetszőleges pozitív szám, ekkor a reciproka $1/x$.Felírva ezen két számra a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenséget, adódik az igazolandó:

$$\frac{x+\frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 1,$$

azaz:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Problémák megoldása közepek segítségével

2. probléma.

Egység térfogatú egyenes hasábok közül melyiknek a legkisebb a felszíne?

Problémák megoldása közepek segítségével

2. probléma.

Egység térfogatú egyenes hasábok közül melyiknek a legkisebb a felszíne?

Megoldás.

Jelölje a, b, c a hasáb oldalainak hosszát. Ekkor a feltétel $abc = 1$ alakba írható, és mi az $ab + bc + ac$ kifejezés minimumát keressük.

Problémák megoldása közepek segítségével

2. probléma.

Egység térfogatú egyenes hasábok közül melyiknek a legkisebb a felszíne?

Megoldás.

Jelölje a, b, c a hasáb oldalainak hosszát. Ekkor a feltétel $abc = 1$ alakba írható, és mi az $ab + bc + ac$ kifejezés minimumát keressük. Írjuk fel az ab, ac, bc pozitív számokra a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenséget.

$$\frac{ab + ac + bc}{3} \geq \sqrt[3]{ab \cdot ac \cdot bc} = \sqrt[3]{(abc)^2} = 1$$

Megkaptuk tehát $ab + ac + bc$ minimumát,

Problémák megoldása közepek segítségével

2. probléma.

Egység térfogatú egyenes hasábok közül melyiknek a legkisebb a felszíne?

Megoldás.

Jelölje a, b, c a hasáb oldalainak hosszát. Ekkor a feltétel $abc = 1$ alakba írható, és mi az $ab + bc + ac$ kifejezés minimumát keressük. Írjuk fel az ab, ac, bc pozitív számokra a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenséget.

$$\frac{ab + ac + bc}{3} \geq \sqrt[3]{ab \cdot ac \cdot bc} = \sqrt[3]{(abc)^2} = 1$$

Megkaptuk tehát $ab + ac + bc$ minimumát,és azt is tudjuk, hogy ezt akkor veszi fel, ha $ab = ac = bc$, azaz, ha $a = b = c$.

Problémák megoldása közepek segítségével

2. probléma.

Egység térfogatú egyenes hasábok közül melyiknek a legkisebb a felszíne?

Megoldás.

Jelölje a, b, c a hasáb oldalainak hosszát. Ekkor a feltétel $abc = 1$ alakba írható, és mi az $ab + bc + ac$ kifejezés minimumát keressük. Írjuk fel az ab, ac, bc pozitív számokra a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenséget.

$$\frac{ab + ac + bc}{3} \geq \sqrt[3]{ab \cdot ac \cdot bc} = \sqrt[3]{(abc)^2} = 1$$

Megkaptuk tehát $ab + ac + bc$ minimumát,és azt is tudjuk, hogy ezt akkor veszi fel, ha $ab = ac = bc$, azaz, ha $a = b = c$.A válasz tehát: a kocka a legkisebb felszínű, egység térfogatú egyenes hasáb.

További közepek

Harmonikus közép

Az $a_1, \ldots, a_n$ pozitív számok harmonikus közepe:

$$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

További közepek

Harmonikus közép

Az $a_1, \ldots, a_n$ pozitív számok harmonikus közepe:

$$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Négyzetes közép

Az $a_1, \ldots, a_n$ pozitív számok négyzetes közepe:

$$Q = \sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

Az eddig megismert közepeink nagyságsorrendje

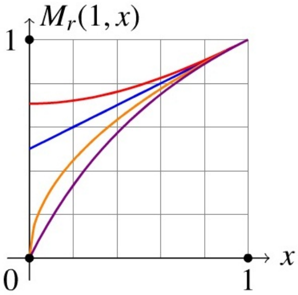
$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}}$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn minden egyenlőtlenségben, ha mindegyik a_i egyenlő.

Az eddig megismert közepeink nagyságsorrendje

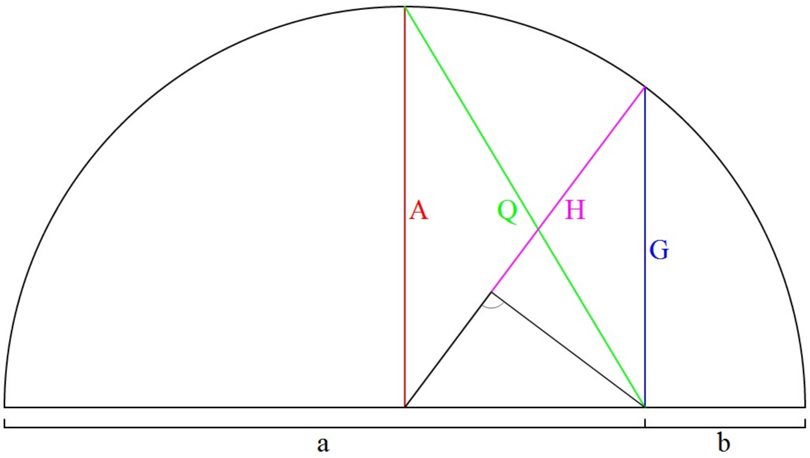
$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n} \leq \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}}$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn minden egyenlőtlenségben, ha mindegyik a_i egyenlő. Egy speciális eset függvénygrafikonokkal szemléltetve:



$$M_r(1,x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{2}}$$
$$M_r(1,x) = \frac{1+x}{2}$$
$$M_r(1,x) = \sqrt{x}$$
$$M_r(1,x) = \frac{2}{1+\frac{1}{x}}$$

Geometriai szemléltetés



Egy - a közepek általánosítását segítő - megfigyelés

A négy eddig megismert közép közül három hasonló alakba írható:

Egy - a közepek általánosítását segítő - megfigyelés

A négy eddig megismert közép közül három hasonló alakba írható:

$$A = \left(\frac{a_1^1 + \ldots + a_n^1}{n} \right)^1$$

Egy - a közepek általánosítását segítő - megfigyelés

A négy eddig megismert közép közül három hasonló alakba írható:

$$A = \left(\frac{a_1^1 + \ldots + a_n^1}{n}\right)^1$$

$$H = \left(\frac{a_1^{-1} + \ldots + a_n^{-1}}{n}\right)^{-1}$$

Egy - a közepek általánosítását segítő - megfigyelés

A négy eddig megismert közép közül három hasonló alakba írható:

$$A = \left(\frac{a_1^1 + \ldots + a_n^1}{n} \right)^1$$

$$H = \left(\frac{a_1^{-1} + \ldots + a_n^{-1}}{n} \right)^{-1}$$

$$Q = \left(\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Egy - a közepek általánosítását segítő - megfigyelés

Ezek alapján a következő általánosítás adja magát:

$$H_\alpha = \left(\frac{a_1^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Egy - a közepek általánosítását segítő - megfigyelés

Ezek alapján a következő általánosítás adja magát:

$$H_\alpha = \left(\frac{a_1^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Ezzel a jelöléssel: $A = H_1, H = H_{-1}, Q = H_2$.

Egy - a közepek általánosítását segítő - megfigyelés

Ezek alapján a következő általánosítás adja magát:

$$H_\alpha = \left(\frac{a_1^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Ezzel a jelöléssel: $A = H_1, H = H_{-1}, Q = H_2$.
De a mértani közép problémás!!! Egyetlen α-ra sem adja a képlet...

A kakukktojás: a mértani közép

Habár a képletünk formálisan nem adja semmilyen α-ra sem a mértani közepet, a következő tétel megmutatja, hogy az hogyan "illeszkedik bele a képbe".

A kakukktojás: a mértani közép

Habár a képletünk formálisan nem adja semmilyen α-ra sem a mértani közepet, a következő tétel megmutatja, hogy az hogyan "illeszkedik bele a képbe".

Tétel.

Legyenek $a_1, \ldots, a_n$ pozitív számok. Ekkor $\alpha < 0 < \beta$ esetén

$$\left(\frac{a_1^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \left(\frac{a_1^\beta + \ldots + a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} .$$

A kakukktojás: a mértani közép

Habár a képletünk formálisan nem adja semmilyen α-ra sem a mértani közepet, a következő tétel megmutatja, hogy az hogyan "illeszkedik bele a képbe".

Tétel.

Legyenek $a_1, \ldots, a_n$ pozitív számok. Ekkor $\alpha < 0 < \beta$ esetén

$$\left(\frac{a_1^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \le \left(\frac{a_1^\beta + \ldots + a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Bizonyítás.

A számtani-mértani közepek közti egyenlőtlenséget felírva $a_1^\alpha, \ldots, a_n^\alpha$ majd $a_1^\beta, \ldots, a_n^\beta$ számokra egyszerűen adódik mindkét oldali egyenlőtlenség.

A kakukktojás: a mértani közép

Habár a képletünk formálisan nem adja semmilyen α-ra sem a mértani közepet, a következő tétel megmutatja, hogy az hogyan "illeszkedik bele a képbe".

Tétel.

Legyenek $a_1, \ldots, a_n$ pozitív számok. Ekkor $\alpha < 0 < \beta$ esetén

$$\left(\frac{a_1^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \left(\frac{a_1^\beta + \ldots + a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Bizonyítás.

A számtani-mértani közepek közti egyenlőtlenséget felírva $a_1^\alpha, \ldots, a_n^\alpha$ majd $a_1^\beta, \ldots, a_n^\beta$ számokra egyszerűen adódik mindkét oldali egyenlőtlenség.

A tétel "jogossá" teszi a $H_0 = G$ definiálását.

A hátványközepek definíciója

Definíció.

Legyenek $a_1, ..., a_n$ pozitív számok. Ekkor minden valós α-ra a

$$H_\alpha = \begin{cases} \left(\frac{a_1^\alpha + ... + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, & \text{ha } \alpha \neq 0 \\ \sqrt[n]{a_1 \cdot ... \cdot a_n} & \text{,ha } \alpha = 0 \end{cases}$$

számot az $a_1, ..., a_n$ számok α-adik hatványközepének nevezzük.

A hátványközepek definíciója

Definíció.

Legyenek $a_1, \ldots, a_n$ pozitív számok. Ekkor minden valós α-ra a

$$H_\alpha = \begin{cases} \left(\frac{a_1^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} & \text{, ha } \alpha \neq 0 \\ \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} & \text{, ha } \alpha = 0 \end{cases}$$

számot az $a_1, \ldots, a_n$ számok α-adik hatványközepének nevezzük.

Észrevétel.

Az eddigi közepeinkre látott egyenlőtlenségek a hatványközepek jelölésrendszerével a

$$H_{-1} \leq H_0 \leq H_1 \leq H_2$$

alakot öltik.

A sejtés

Sejtés.

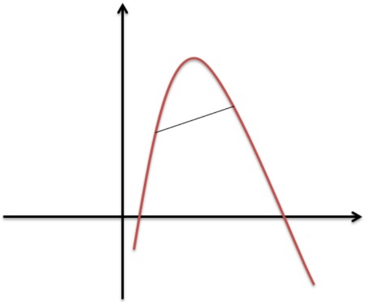
Tetszőleges $a_1, \ldots, a_n$ pozitív számokra és $\alpha < \beta$ valósakra:

$$H_\alpha(a_1, \ldots, a_n) \leq H_\beta(a_1, \ldots, a_n)$$

Konkávitás

Definíció (szemléletes).

Egy f függvényt konkávnak nevezünk az I intervallumon, ha (az adott intervallumon) a görbéjének bármely két pontját összekötő szakasz "felett" (nem "alatta") helyezkedik el a görbe minden pontja.



Konkávitás

Definíció (precíz).

Egy f függvényt konkávnak nevezünk az I intervallumon, ha bármely $a, b \in I$ és $t_1, t_2 > 0$, $t_1 + t_2 = 1$ számokra

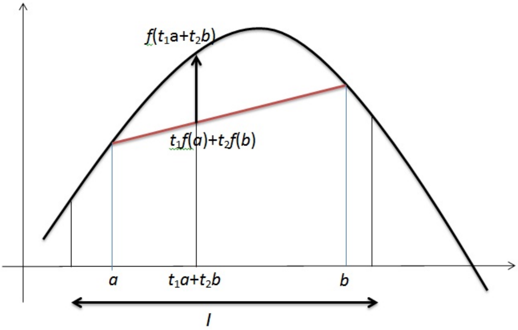
$$f(t_1 a + t_2 b) \geq t_1 f(a) + t_2 f(b).$$

Konkávitás

Definíció (precíz).

Egy f függvényt konkávnak nevezünk az I intervallumon, ha bármely $a, b \in I$ és $t_1, t_2 > 0$, $t_1 + t_2 = 1$ számokra

$$f(t_1 a + t_2 b) \geq t_1 f(a) + t_2 f(b).$$



A Jensen-egyenlőtlenség

Tétel (Jensen-egyenlőtlenség).

Az f függvény akkor és csak akkor konkáv az I intervallumon, ha minden $a_1, \dots, a_n \in I$ és $t_1, \dots, t_n > 0$, $t_1 + \dots + t_n = 1$ esetén

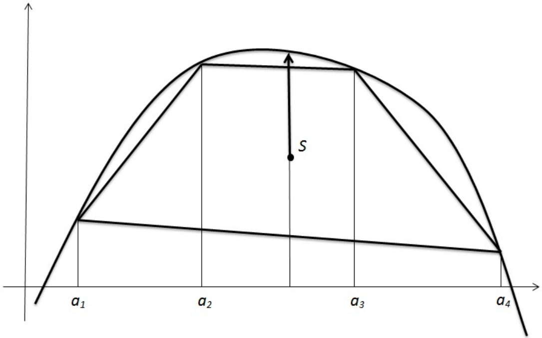
$$f(t_1 a_1 + \dots + t_n a_n) \geq t_1 f(a_1) + \dots + t_n f(a_n). \tag{1}$$

A Jensen-egyenlőtlenség

Tétel (Jensen-egyenlőtlenség).

Az f függvény akkor és csak akkor konkáv az I intervallumon, ha minden $a_1, \ldots, a_n \in I$ és $t_1, \ldots, t_n > 0$, $t_1 + \ldots + t_n = 1$ esetén

$$f(t_1 a_1 + \ldots + t_n a_n) \geq t_1 f(a_1) + \ldots + t_n f(a_n). \qquad (1)$$



A Jensen-egyenlőtlenség

Bizonyítás.

Az "akkor" irány nyilvánvaló, $n = 2$-ből adódik.

A Jensen-egyenlőtlenség

Bizonyítás.

Az "akkor" irány nyilvánvaló, $n = 2$-ből adódik.
A "csak akkor" irányt teljes indukcióval bizonyítjuk. A konkávitás definíciója maga az (1) egyenlőtlenség $n = 2$ esetén.

A Jensen-egyenlőtlenség

Bizonyítás.

Az "akkor" irány nyilvánvaló, $n = 2$-ből adódik.
A "csak akkor" irányt teljes indukcióval bizonyítjuk. A konkávitás definíciója maga az (1) egyenlőtlenség $n = 2$ esetén. Tegyük fel, hogy $2, 3, \ldots, n$-re igaz az állítás. Igazoljuk, a feltevés segítségével, hogy $n + 1$ esetén is igaz.

A Jensen-egyenlőtlenség

Bizonyítás.

Az "akkor" irány nyilvánvaló, $n = 2$-ből adódik.
A "csak akkor" irányt teljes indukcióval bizonyítjuk. A konkávitás definíciója maga az (1) egyenlőtlenség $n = 2$ esetén. Tegyük fel, hogy $2, 3, \ldots, n$-re igaz az állítás. Igazoljuk, a feltevés segítségével, hogy $n + 1$ esetén is igaz.

$$f(\underbrace{t_1 a_1 + \ldots + t_n a_n}_{(1-t_{n+1})\frac{t_1 a_1 + \ldots + t_n a_n}{1-t_{n+1}}} + t_{n+1} a_{n+1}) \geq$$

A Jensen-egyenlőtlenség

Bizonyítás.

Az "akkor" irány nyilvánvaló, $n = 2$-ből adódik.
A "csak akkor" irányt teljes indukcióval bizonyítjuk. A konkávitás definíciója maga az (1) egyenlőtlenség $n = 2$ esetén. Tegyük fel, hogy $2, 3, \ldots, n$-re igaz az állítás. Igazoljuk, a feltevés segítségével, hogy $n + 1$ esetén is igaz.

$$f(\underbrace{t_1 a_1 + \ldots + t_n a_n}_{(1-t_{n+1})\frac{t_1 a_1 + \ldots + t_n a_n}{1-t_{n+1}}} + t_{n+1} a_{n+1}) \geq$$

$$\geq (1 - t_{n+1}) \cdot f\left(\frac{t_1 a_1 + \ldots + t_n a_n}{1 - t_{n+1}}\right) + t_{n+1} f(a_{n+1}) =$$

A Jensen-egyenlőtlenség

Bizonyítás.

Az "akkor" irány nyilvánvaló, $n = 2$-ből adódik.
A "csak akkor" irányt teljes indukcióval bizonyítjuk. A konkávitás definíciója maga az (1) egyenlőtlenség $n = 2$ esetén. Tegyük fel, hogy $2, 3, \ldots, n$-re igaz az állítás. Igazoljuk, a feltevés segítségével, hogy $n + 1$ esetén is igaz.

$$f(\underbrace{t_1 a_1 + \ldots + t_n a_n}_{(1-t_{n+1})\frac{t_1 a_1 + \ldots + t_n a_n}{1-t_{n+1}}} + t_{n+1} a_{n+1}) \geq$$

$$\geq (1 - t_{n+1}) \cdot f\left(\frac{t_1 a_1 + \ldots + t_n a_n}{1 - t_{n+1}}\right) + t_{n+1} f(a_{n+1}) =$$

$$= (1 - t_{n+1}) \cdot f\left(\frac{t_1}{1 - t_{n+1}} a_1 + \ldots + \frac{t_n}{1 - t_{n+1}} a_n\right) + t_{n+1} f(a_{n+1}) \geq$$

A Jensen-egyenlőtlenség

Bizonyítás (folytatás).

$$\geq (1-t_{n+1})\left(\frac{t_1}{1-t_{n+1}}f(a_1)+\ldots+\frac{t_n}{1-t_{n+1}}f(a_n)\right)+t_{n+1}f(a_{n+1}) =$$

A Jensen-egyenlőtlenség

Bizonyítás (folytatás).

$$\geq (1-t_{n+1})\left(\frac{t_1}{1-t_{n+1}}f(a_1)+\ldots+\frac{t_n}{1-t_{n+1}}f(a_n)\right)+t_{n+1}f(a_{n+1})=$$

$$=t_1f(a_1)+\ldots+t_nf(a_n)+t_{n+1}f(a_{n+1}).$$

Készen vagyunk.

A Jensen-egyenlőtlenség

Bizonyítás (folytatás).

$$\geq (1-t_{n+1})\left(\frac{t_1}{1-t_{n+1}}f(a_1)+\ldots+\frac{t_n}{1-t_{n+1}}f(a_n)\right)+t_{n+1}f(a_{n+1})=$$

$$=t_1f(a_1)+\ldots+t_nf(a_n)+t_{n+1}f(a_{n+1}).$$

Készen vagyunk.

Megfigyelés.

A Jensen egyenlőtlenséggel kapcsolatos gondolatok megismételhetőek konvex függvények esetén is, csak minden relációs jel megfordul.

Példák a Jensen-egyenlőtlenség alkalmazására

Példa.

Az $f(x) = \log(x)$ függvény, mint ismert, konkáv.

Példák a Jensen-egyenlőtlenség alkalmazására

Példa.

Az $f(x) = \log(x)$ függvény, mint ismert, konkáv.
Így a Jensen-egyenlőtlenségből pozitív $a_1, \ldots, a_n$-k esetén

$$\log\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right) \geq \frac{\log(a_1) + \ldots + \log(a_n)}{n} = \log\left(\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}\right)$$

Példák a Jensen-egyenlőtlenség alkalmazására

Példa.

Az $f(x) = \log(x)$ függvény, mint ismert, konkáv.
Így a Jensen-egyenlőtlenségből pozitív $a_1, \ldots, a_n$-k esetén

$$\log\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right) \geq \frac{\log(a_1) + \ldots + \log(a_n)}{n} = \log\left(\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}\right)$$

ahonnan:

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Példák a Jensen-egyenlőtlenség alkalmazására

Feladat.

Határozzuk meg a $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$ kifejezés maximumát, ha α, β, γ egy hegysszögű háromszög szögei.

Példák a Jensen-egyenlőtlenség alkalmazására

Feladat.

Határozzuk meg a $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$ kifejezés maximumát, ha α, β, γ egy hegysszögű háromszög szögei.

Megoldás.

A feladat feltételei az $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ alakba írhatók.

Példák a Jensen-egyenlőtlenség alkalmazására

Feladat.

Határozzuk meg a $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$ kifejezés maximumát, ha α, β, γ egy hegysszögű háromszög szögei.

Megoldás.

A feladat feltételei az $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ alakba írhatók. Mint ismert, a cos függvény a $[0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon konkáv, így alkalmazhatjuk a Jensen-egyenlőtlenséget a következőképpen:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 3 \cdot \frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3} \leq$$

Példák a Jensen-egyenlőtlenség alkalmazására

Feladat.

Határozzuk meg a $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$ kifejezés maximumát, ha α, β, γ egy hegysszögű háromszög szögei.

Megoldás.

A feladat feltételei az $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ alakba írhatók. Mint ismert, a cos függvény a $[0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon konkáv, így alkalmazhatjuk a Jensen-egyenlőtlenséget a következőképpen:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 3 \cdot \frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3} \leq$$

$$\leq 3 \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right) = 3 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}.$$

Példák a Jensen-egyenlőtlenség alkalmazására

Feladat.

Határozzuk meg a $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$ kifejezés maximumát, ha α, β, γ egy hegysszögű háromszög szögei.

Megoldás.

A feladat feltételei az $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ alakba írhatók. Mint ismert, a cos függvény a $[0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon konkáv, így alkalmazhatjuk a Jensen-egyenlőtlenséget a következőképpen:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 3 \cdot \frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3} \leq$$

$$\leq 3 \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right) = 3 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}.$$

A becslésünk pontos (egyenlőség szabályos háromszög esetén).

$\alpha < \beta \Rightarrow H_\alpha \leq H_\beta$ bizonyítása

Az $\alpha < 0 < \beta$ eset.

Már korábban láttuk, hogy

$$H_\alpha \leq H_0 \leq H_\beta.$$

$\alpha < \beta \Rightarrow H_\alpha \leq H_\beta$ bizonyítása

Az $\alpha < 0 < \beta$ eset.

Már korábban láttuk, hogy

$$H_\alpha \leq H_0 \leq H_\beta.$$

A $0 < \alpha < \beta$ eset bizonyítása.

Az $f(x) = x^{\frac{\alpha}{\beta}}$ függvény, mint ismert, konkáv ($\frac{\alpha}{\beta} < 1$).

$\alpha < \beta \Rightarrow H_\alpha \leq H_\beta$ bizonyítása

Az $\alpha < 0 < \beta$ eset.

Már korábban láttuk, hogy

$$H_\alpha \leq H_0 \leq H_\beta.$$

A $0 < \alpha < \beta$ eset bizonyítása.

Az $f(x) = x^{\frac{\alpha}{\beta}}$ függvény, mint ismert, konkáv ($\frac{\alpha}{\beta} < 1$).

Alkalmazzuk tehát a Jensen-egyenlőtlenséget az $a_1^\beta, \ldots, a_n^\beta$ számokra az $f(x)$ függvénnyel.

$\alpha < \beta \Rightarrow H_\alpha \leq H_\beta$ bizonyítása

Az $\alpha < 0 < \beta$ eset.

Már korábban láttuk, hogy

$$H_\alpha \leq H_0 \leq H_\beta.$$

A $0 < \alpha < \beta$ eset bizonyítása.

Az $f(x) = x^{\frac{\alpha}{\beta}}$ függvény, mint ismert, konkáv ($\frac{\alpha}{\beta} < 1$).
Alkalmazzuk tehát a Jensen-egyenlőtlenséget az $a_1^\beta, \ldots, a_n^\beta$ számokra az $f(x)$ függvénnyel.

$$H_\beta = \left(\left(\frac{a_1^\beta + \ldots + a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq \left(\frac{(a_1^\beta)^{\frac{\alpha}{\beta}} + \ldots + (a_n^\beta)^{\frac{\alpha}{\beta}}}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = H_\alpha$$

$\alpha < \beta \Rightarrow H_\alpha \leq H_\beta$ bizonyítása

Az $\alpha < 0 < \beta$ eset.

Már korábban láttuk, hogy

$$H_\alpha \leq H_0 \leq H_\beta.$$

A $0 < \alpha < \beta$ eset bizonyítása.

Az $f(x) = x^{\frac{\alpha}{\beta}}$ függvény, mint ismert, konkáv ($\frac{\alpha}{\beta} < 1$).
Alkalmazzuk tehát a Jensen-egyenlőtlenséget az $a_1^\beta, \dots, a_n^\beta$ számokra az $f(x)$ függvénnyel.

$$H_\beta = \left(\left(\frac{a_1^\beta + \dots + a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq \left(\frac{(a_1^\beta)^{\frac{\alpha}{\beta}} + \dots + (a_n^\beta)^{\frac{\alpha}{\beta}}}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = H_\alpha$$

A fennmaradó $\alpha < \beta < 0$ eset $0 < \alpha < \beta$ -hoz teljesen analóg.

A hatványközepek alkalmazása feladatokban

1. feladat

Határozzuk meg a $\sin^{2010}(x) + \cos^{2010}(x)$ trigonometrikus kifejezés maximumát és minimumát, ha $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

A hatványközepek alkalmazása feladatokban

1. feladat

Határozzuk meg a $\sin^{2010}(x) + \cos^{2010}(x)$ trigonometrikus kifejezés maximumát és minimumát, ha $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Megoldás.

A hatványközepek közötti egyenlőtlenséget használva:

$$\sin^{2010}(x)+\cos^{2010}(x) = 2\cdot\left(\left(\frac{\sin^{2010}(x)+\cos^{2010}(x)}{2}\right)^{\frac{1}{2010}}\right)^{2010} \geq$$

A hatványközepek alkalmazása feladatokban

1. feladat

Határozzuk meg a $\sin^{2010}(x) + \cos^{2010}(x)$ trigonometrikus kifejezés maximumát és minimumát, ha $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Megoldás.

A hatványközepek közötti egyenlőtlenséget használva:

$$\sin^{2010}(x)+\cos^{2010}(x) = 2\cdot\left(\left(\frac{\sin^{2010}(x)+\cos^{2010}(x)}{2}\right)^{\frac{1}{2010}}\right)^{2010} \geq$$

$$\geq 2\cdot\left(\left(\frac{\sin^{2}(x)+\cos^{2}(x)}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{2010} = 2^{-1004}.$$

A hatványközepek alkalmazása feladatokban

1. feladat

Határozzuk meg a $\sin^{2010}(x) + \cos^{2010}(x)$ trigonometrikus kifejezés maximumát és minimumát, ha $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Megoldás.

A hatványközepek közötti egyenlőtlenséget használva:

$$\sin^{2010}(x)+\cos^{2010}(x) = 2\cdot\left(\left(\frac{\sin^{2010}(x)+\cos^{2010}(x)}{2}\right)^{\frac{1}{2010}}\right)^{2010} \geq$$

$$\geq 2\cdot\left(\left(\frac{\sin^{2}(x)+\cos^{2}(x)}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{2010} = 2^{-1004}.$$

Egyenlőség $x = \frac{\pi}{4}$ esetben fennáll.

A hatványközepek alkalmazása feladatokban

Megoldás (folytatás).

A másik irányú egyenlőtlenséget a következő - a binomiális tétellel egyszerűen látható - egyenlőtlenséggel igazoljuk. a, b nemnegatív számok esetén
$$a^{1005} + b^{1005} \leq (a+b)^{1005}.$$

A hatványközepek alkalmazása feladatokban

Megoldás (folytatás).

A másik irányú egyenlőtlenséget a következő - a binomiális tétellel egyszerűen látható - egyenlőtlenséggel igazoljuk. a, b nemnegatív számok esetén

$$a^{1005} + b^{1005} \leq (a+b)^{1005}.$$

Helyettesítsünk ebbe az egyenlőtlenségbe $a = \sin^2(x)$, $b = \cos^2(x)$ módon. Így a

$$\sin^{2010}(x) + \cos^{2010}(x) \leq (\sin^2(x) + \cos^2(x))^{1005} = 1$$

felső becslést nyerjük,

A hatványközepek alkalmazása feladatokban

Megoldás (folytatás).

A másik irányú egyenlőtlenséget a következő - a binomiális tétellel egyszerűen látható - egyenlőtlenséggel igazoljuk. a, b nemnegatív számok esetén

$$a^{1005} + b^{1005} \leq (a+b)^{1005}.$$

Helyettesítsünk ebbe az egyenlőtlenségbe $a = \sin^2(x)$, $b = \cos^2(x)$ módon. Így a

$$\sin^{2010}(x) + \cos^{2010}(x) \leq (\sin^2(x) + \cos^2(x))^{1005} = 1$$

felső becslést nyerjük, és mivel $x = 0$ helyen 1-et vesz fel a kifejezés, készen vagyunk.

A hatványközepek alkalmazása feladatokban

2. feladat

n gömb térforgatának összege 1. Milyen határok között mozoghat a gömbök felszínének összege? ("Zérus sugarú" gömböket is megengedünk.)

A hatványközepek alkalmazása feladatokban

2. feladat

n gömb térforgatának összege 1. Milyen határok között mozoghat a gömbök felszínének összege? ("Zérus sugarú" gömböket is megengedünk.)

Megoldás.

Legyen a gömbök sugara $r_1, ..., r_n$. Ekkor a feltétel

$$V = \frac{4}{3}\pi r_1^3 + \dots \frac{4}{3}\pi r_n^3 = 1$$

alakú.

A hatványközepek alkalmazása feladatokban

2. feladat

n gömb térforgatának összege 1. Milyen határok között mozoghat a gömbök felszínének összege? ("Zérus sugarú" gömböket is megengedünk.)

Megoldás.

Legyen a gömbök sugara $r_1, \ldots, r_n$. Ekkor a feltétel

$$V = \frac{4}{3}\pi r_1^3 + \ldots \frac{4}{3}\pi r_n^3 = 1$$

alakú. Becsüljük a felszín összegét felülről a hatványközepek közötti egyenlőtlenséggel.

A hatványközepek alkalmazása feladatokban

Megoldás (folytatás).

$$A = 4\pi r_1^2 + \dots + 4\pi r_n^2 = 4n\pi \left(\left(\frac{r_1^2 + \dots + r_n^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \leq$$

A hatványközepek alkalmazása feladatokban

Megoldás (folytatás).

$$A = 4\pi r_1^2 + \ldots + 4\pi r_n^2 = 4n\pi \left(\left(\frac{r_1^2 + \ldots + r_n^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \leq$$

$$\leq 4n\pi \left(\left(\frac{r_1^3 + \ldots + r_n^3}{n} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^2 = 4n\pi \left(\left(\frac{3}{4n\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^2 = \sqrt[3]{36n\pi}$$

A felső becsléssel készen vagyunk.

A hatványközepek alkalmazása feladatokban

Megoldás (folytatás).

$$A = 4\pi r_1^2 + \dots + 4\pi r_n^2 = 4n\pi \left(\left(\frac{r_1^2 + \dots + r_n^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \leq$$

$$\leq 4n\pi \left(\left(\frac{r_1^3 + \dots + r_n^3}{n} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^2 = 4n\pi \left(\left(\frac{3}{4n\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^2 = \sqrt[3]{36n\pi}$$

A felső becsléssel készen vagyunk. Az alsó becsléshez használjuk fel az 1. feladatban látotthoz hasonló, pozitív $a_1, \dots, a_n$ számokra érvényes

$$a_1^{\frac{3}{2}} + \dots + a_n^{\frac{3}{2}} \leq (a_1 + \dots + a_n)^{\frac{3}{2}}$$

egyenlőtlenséget.

A hatványközepek alkalmazása feladatokban

Megoldás (folytatás).

$$A = 4\pi r_1^2 + \ldots + 4\pi r_n^2 = 4n\pi\left(\left(\frac{r_1^2 + \ldots + r_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \leq$$

$$\leq 4n\pi\left(\left(\frac{r_1^3 + \ldots + r_n^3}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 4n\pi\left(\left(\frac{3}{4n\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \sqrt[3]{36n\pi}$$

A felső becsléssel készen vagyunk. Az alsó becsléshez használjuk fel az 1. feladatban látotthoz hasonló, pozitív $a_1, \ldots, a_n$ számokra érvényes

$$a_1^{\frac{3}{2}} + \ldots + a_n^{\frac{3}{2}} \leq (a_1 + \ldots + a_n)^{\frac{3}{2}}$$

egyenlőtlenséget. Ennek az $a_1 = r_1^2, \ldots, a_n = r_1^2$ helyettesítéssel kapott alakját használjuk az alsó becslésnél.

A hatványközepek alkalmazása feladatokban

Megoldás (folytatás).

$$A = 4\pi r_1^2 + \dots + 4\pi r_n^2 = 4\pi \left((r_1^2 + \dots + r_n^2)^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} \geq$$

A hatványközepek alkalmazása feladatokban

Megoldás (folytatás).

$$A = 4\pi r_1^2 + \ldots + 4\pi r_n^2 = 4\pi \left((r_1^2 + \ldots + r_n^2)^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} \geq$$

$$\geq 4\pi \left((r_1^2)^{\frac{3}{2}} + \ldots + (r_n^2)^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} = 4\pi \left(r_1^3 + \ldots + r_n^3 \right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{36\pi}$$

A hatványközepek alkalmazása feladatokban

Megoldás (folytatás).

$$A = 4\pi r_1^2 + \dots + 4\pi r_n^2 = 4\pi \left(\left(r_1^2 + \dots + r_n^2\right)^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} \geq$$

$$\geq 4\pi \left(\left(r_1^2\right)^{\frac{3}{2}} + \dots + \left(r_n^2\right)^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} = 4\pi \left(r_1^3 + \dots + r_n^3\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{36\pi}$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\sqrt[3]{36\pi} \leq A \leq \sqrt[3]{36n\pi}.$$

A hatványközepek alkalmazása feladatokban

Megoldás (folytatás).

$$A = 4\pi r_1^2 + \ldots + 4\pi r_n^2 = 4\pi \left((r_1^2 + \ldots + r_n^2)^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} \geq$$

$$\geq 4\pi \left((r_1^2)^{\frac{3}{2}} + \ldots + (r_n^2)^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} = 4\pi \left(r_1^3 + \ldots + r_n^3 \right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{36\pi}$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\sqrt[3]{36\pi} \leq A \leq \sqrt[3]{36n\pi}.$$

Ha minden gömb egyenlő sugarú, akkor $A = \sqrt[3]{36n\pi}$, ha $(n-1)$ gömb sugara 0, akkor $A = \sqrt[3]{36\pi}$, becsléseink tehát élesek. Készen vagyunk.

Köszönöm a megtisztelő figyelmet!