Koordinátageometria jegyzetvázlat

Készítette: Dr. Nagy Gábor adjunktus

2002. június

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A geometriának hagyományosan két különböző megközelítésmódja ismeretes: a *szintetikus* és az *analitikus megközelítés.* A **szintetikus felépítésben** *alapfogalmak* és *axiómák* egy rendszeréből indulunk ki és ezekből építjük fel a bonyolultabb fogalmakat és állításokat. Ebben a megközelítésben a *koordinátarendszer* bevezetését általában hosszadalmas technikai megfontolások előzik meg, mivel sok esetben az egyszerűen megfogalmazott geometriai tulajdonság nagyon összetett algebrai rendszert rejt magába. Az ilyen kérdésekkel kapcsolatos matematikai kutatások a *geometria alapjai* címet viselik.

Ezzel szemben az **analitikus tárgyalásban** a koordinátarendszert *eleve adottnak* tételezzük fel, és ennek segítségével definiáljuk a különböző fogalmakat. Ez az út látszólag könnyebb az előzőnél, azonban itt is akad egy legyőzendő akadály. Ugyanis a koordinátarendszer segítségével definiált fogalmak esetén mindig szem előtt kell tartanunk azt, hogy az igazán geometriai fogalmak nem függhetnek a koordinátarendszer speciális megválasztásától (*invariánsok*). Ekkor persze azt is pontosan jelezni kell, hogy milyen koordinátarendszert használunk, hiszen különböző koordinátarendszerek esetén az invariáns fogalmak osztálya is merőben különböző lehet.

Ennek a jegyzetnek a célja olyan geometriai ismeretek összefoglalása, amelyek egyaránt használhatók a geometria felsőbb tárgyalásában és az alkalmazott geometria, elsősorban a számítógépes geometriai ábrázolás területén is. Ezért megközelítésünk alapvetően analitikus lesz.

1. fejezet

Az euklidészi sík transzformációi

1.1. Lineáris algebrai alapismeretek

Ebben a fejezetben a *vektorok* témakörének minimális alapismereteit gyűjtöttük össze, amelyek a sík- és térgeometriai megfontolásokhoz nehezen nélkülözhetők.

Az $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ valós szám n-esek halmaza **vektorteret** alkot a komponensenkénti

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

összeadás és a valós számokkal (skalárokkal) való

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

szorzás műveleteire nézve. Ezen halmaz elemeit **n-dimenziós vektoroknak** nevezzük. Ha $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in \mathbb{R}^n$ és $c_1, \ldots, c_m \in R$, akkor

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + c_m\boldsymbol{v}_m \in \mathbb{R}^n$$

szintén vektor, ezt a $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ vektorok **lineáris kombinációjának** hívjuk. A lineáris kombináció **triviális,** ha $c_1 = \ldots = c_m = 0$. A $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in \mathbb{R}^n$ vektorok **lineárisan függők,** ha a $\boldsymbol{O} = (0, \ldots, 0)$ **nullvektor** előáll, mint a $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ vektorok nem-triviális lineáris kombinációja. Könnyű meggondolni, hogy ez ekvivalens azzal, hogy a szóbanforgó m vektor egyike előáll a többi lineáris kombinációjaként. Ebből adódik, hogy két vektor akkor és csak akkor lineárisan függő, ha az egyik a másik skalárszorosa.

Igaz továbbá, hogy ha az $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ vektorok mindegyike a $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ vektorok lineáris kombinációja, akkor az $\boldsymbol{u}_i$-k lineáris kombinációja előáll, mint az eredeti $\boldsymbol{v}_j$-k lineáris kombinációja.

Hagyományosan az $\mathbb{R}^n$ halmaz elemeit *sorvektorokként* jelenítjük meg, természetesen megállapodás szerint ezek helyett használhatunk *oszlopvektorokat* is. A fent definiált fogalmak változtatás nélkül alkalmazhatók oszlopvektorok esetén is.

Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezés **lineáris,** ha $f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$ és $f(\lambda \boldsymbol{v}) = \lambda f(\boldsymbol{v})$ teljesül minden $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorra és $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárra. Ismert, hogy minden lineáris $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezés

$$f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x'_1, \dots, x'_n)$$

alakú, ahol

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n, \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n, \\ \vdots \\ x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots a_{nn}x_n. \end{cases} \tag{1.1}$$

Az

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$n \times n$-es mátrixot az f **leképezés mátrixának** nevezzük. Ha $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés mátrixa

$$B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

akkor az $f \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{v} \mapsto f(g(\boldsymbol{v}))$ leképezés szintén lineáris, és a

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ & & \ddots & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

mátrixára teljesül $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj}$. Az így meghatározott C mátrixot az A és B **mátrixszorzatának** nevezzük és $C = AB$-vel jelüljük. A leképezések szorzatának asszociatív tulajdonságából következik a mátrixszorzás asszociativitása. Az identikus leképezés mátrixa az

$$\mathbf{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

egységmátrix. Minden $n \times n$-es A mátrixra teljesül $\mathbf{1}_n A = A\mathbf{1}_n = A$.

A mátrixszorzat definíciójából még egy fontos észrevételt tudunk leszűrni: Az A és B mátrixok AB szorzatának sorvektorai a B mátrix sorainak lineáris kombinációi. Hasonlóan, a szorzat oszlopvektorai az A oszlopainak lineáris kombinációi.

Az A mátrix **determinánsa** a

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \in \mathbb{R}$$

valós szám, ahol S_n az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz permutációinak halmaza, az $\operatorname{sgn}(\sigma)$ pedig 1 vagy -1 attól függően, hogy a σ páros vagy páratlan permutáció. Az $n = 2$ és $n = 3$ esetekben

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

illetve

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

A **determinánsok szorzástétele** szerint az $n \times n$-es A, B mátrixok esetén $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Az A mátrix **adjungáltjának** nevezzük, és A^{adj}-al jelöljük azt az $n \times n$-es, nem csupa nullából álló mátrixot, amelyre teljesül

$$AA^{\mathrm{adj}} = A^{\mathrm{adj}}A = \det(A)\,\mathbf{1}_n.$$

Ismert, hogy az adjungált mátrix mindig létezik, és abban az esetben, ha a mátrix determinánsa nem nulla, egyetlen ilyen mátrix van. Az $n = 2$ és $n = 3$ esetekben

$$A^{\mathrm{adj}} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

illetve

$$A^{\mathrm{adj}} = \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & -a_{12}a_{33} + a_{13}a_{32} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ -a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & -a_{11}a_{23} + a_{13}a_{21} \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & -a_{11}a_{32} + a_{12}a_{31} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Ha $\det(A) \neq 0$, akkor az $A^{-1} = \det(A)^{-1} A^{\mathrm{adj}}$ mátrixra teljesül $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{1}_n$. Az A^{-1} mátrixot az A **inverz mátrixának** nevezzük. Ha $\det(A) = 0$, akkor nem létezik inverze, hiszen $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 0$ minden B-re, amíg $\det(\mathbf{1}_n) = 1$.

Tekintsük az A mátrix elemeiből képzett n **egyenletből álló,** n **ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszert:**

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots a_{1n}X_n = 0, \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots a_{2n}X_n = 0, \\ \vdots \\ a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \ldots a_{nn}X_n = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Ennek mindig van megoldása, nevezetesen $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$, ezt nevezzük a **triviális megoldásnak.** Nem-triviális megoldás létezése definíció szerint pontosan azt jelenti, hogy az egyenletrendszert meghatározó A mátrix oszlopvektorai lineárisan függők.

A nem-triviális megoldások megkeresése az ismert **Gauss-féle eliminációs eljárással** történik, amikor is az egyenletek lineáris kombinációit képezve alakítjuk azt át. Az (1.4) egyenletrendszernek pontosan akkor van nem-triviális megoldása, ha az átalakítással csökkenteni tudjuk az egyenletek számát, azaz az (1.4) egyik egyenlete kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Ez nyilván ekvivalens azzal, hogy az A mátrix sorai lineárisan függők.

Ezeket összefoglalva kimondjuk az alábbi tételt.

1.1. Tétel (Cramer-szabály). *Legyen A $n \times n$-es mátrix és tekintsük a hozzá tartozó n egyenletből álló, n ismeretlenes* (1.4) *homogén lineáris egyenletrendszert. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

(i) *Az egyenletrendszernek létezik nem-triviális megoldása.*

(ii) *Az A mátrix sorai lineárisan függők.*

(iii) *Az A mátrix oszlopai lineárisan függők.*

(iv) $\det(A) = 0$.

Bizonyítás. Az (i), (ii) és (iii) pontok ekvivalenciáját a tétel kimondása előtt meggondoltuk. Tegyük fel, hogy $\det(A) = 0$ és tekintsük az A mátrix A^{adj} adjungáltját, erre fennáll $A^{\mathrm{adj}}A = 0$. Mivel A^{adj} nem nullmátrix, és tudjuk, hogy a mátrixszorzat sorai A sorainak lineáris kombinációi, ezért azt látjuk, hogy A sorainak egy lineáris kombinációja kiadja a nullvektort, vagyis A sorvektorai lineárisan függők. Eszerint $(iv) \Longrightarrow (ii)$.

Tegyük végül fel, hogy $\det(A) \neq 0$, azaz A invertálható. Ez egyenértékű azzal, hogy az A által meghatározott $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés invertálható. (Az f inverze az a lineáris leképezés, amelyet A^{-1} határoz meg.) Mivel tehát f bijektív és $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, ezért $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ esetén $f(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0}$. Az f definíciójának és az (1.4) az összehasonlítása alapján ez azt jelenti, hogy az egyenletrendszernek nincs nem-triviális megoldása. Ezzel beláttuk, hogy $(i) \Longrightarrow (iv)$. □

1.2. Az euklidészi sík

Általános értelemben *síknak* nevezünk minden olyan $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, I)$ halmazhármast, ahol I egy $\mathcal{P} \cup \mathcal{E}$-n értelmezett szimmetrikus reláció. $\mathcal{P}$ elemeit *pontoknak*, $\mathcal{E}$ elemeit *egyeneseknek* hívjuk, $P \in \mathcal{P}$, $e \in \mathcal{E}$ elemre PIe esetén azt mondjuk, hogy a P pont *illeszkedik* az e egyenesre. Bevett szokás, hogy az egyeneseket azonosítjuk a rájuk illeszkedő pontok halmazával. Ekkor PIe esetén azt is mondjuk, hogy *e tartalmazza* P-t, valamint beszélünk két egyenes *metszetéről*, stb.

1.2. Definíció. *Az* euklidészi sík $\mathcal{P}$ *ponthalmaza a valós számpárok* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *halmaza. Az egyeneseket mint az* $aX + bY + c = 0$ *alakú egyenletek megoldáshalmazait tekintjük:*

$$\ell : aX + bY + c = 0, \qquad \ell = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}.$$

Az I illeszkedési relációt természetes módon, azaz a tartalmazás feltételével értelmezzük. A $P_1(x_1, y_1)$ *és* $P_2(x_2, y_2)$ *pontok* távolsága *alatt a*

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

valós számot értjük.

Megjegyzés. A távolságfüggvény fenti definíciója azt jelenti, hogy az euklidészi síkon adottnak tekintett koordinátarendszer *Descartes-féle derékszögű koordinátarendszer.*

Amikor az $aX + bY + c = 0$ alakú egyenletekről beszélünk, akkor feltételezzük, hogy az adott egyenlet *nem-triviális,* azaz az a és b számok nem lehetnek egyszerre nullák. Ellenkező esetben ugyanis az egyenlet megoldáshalmaza vagy az üres halmaz (ha $c \neq 0$), vagy a teljes $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (ha $c = 0$). Ezen ponthalmazokat természetesen nem tekintjük egyeneseknek. Továbbá az $aX + bY + c = 0$ és $a'X + b'Y + c' = 0$ egyenleteket nem tekintjük különbözőknek, ha létezik egy $\lambda \neq 0$ valós szám, amelyre $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$ és $c' = \lambda c$ teljesül.

1.3. Definíció. *Az* (a, b) *vektort az* $\ell : aX + bY + c = 0$ *egyenes* normálvektorának *nevezzük. Ha* $b \neq 0$*, akkor* $m = -a/b$*,* $t = -c/b$ *választással* ℓ *egyenlete* $Y = mX + t$ *alakra hozható; ekkor* m*-et az* ℓ meredekségének*,* t*-t az* ℓ tengelymetszetének *nevezzük.*

Az egyenesek egyenletének $Y = mX + t$ alakú megadásának előnye, hogy az m és t számok szemléletes információt tartalmaznak az egyenes koordinátarendszerben felvett helyzetéről. Másik előny, hogy az egyenlet megadása egyértelmű. Hátrányosnak mondhatjuk azonban, hogy az y-tengellyel párhuzamos egyenesek nem adhatók meg ilyen alakban; ezeknél a $X = k$ formát szoktuk használni.

A továbbiakban mindkétféle megadást használjuk, attól függően, hogy az adott esetben melyik egyszerűbb számunkra.

Definíció szerint a sík minden pontja meghatároz egy kétdimenziós vektort, ezt a pont *helyvektorának* is mondjuk. Adott $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$

pontok esetén az $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ vektort a P_1*-ből* P_2*-be mutató vektornak* nevezzük és $\overrightarrow{P_1P_2}$-vel jelöljük.

A következő lemma bizonyítása triviális.

1.4. Lemma. *Legyenek a és b valós számok és tegyük fel, hogy nem mindkettő nulla. Ekkor az $aX + bY = 0$ egyenlet minden megoldása $(-\lambda b, \lambda a)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ alakú.* □

Egy Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben a $P(x, y)$ pont origó körüli $+90$ fokos elforgatottja $P'(-y, x)$. Tehát az (x, y), (x', y') vektorok pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha $(x', y') = \lambda(-y, x)$ teljesül valamely λ valós számra. Az 1.4 lemma szerint ez pontosan megfelel az $xx' + yy' = 0$ egyenlőség teljesülésének.

Két egyenes *párhuzamos,* ha megegyeznek vagy diszjunktak. Ismert, hogy ez azzal ekvivalens, hogy a meredekségeik megegyeznek, illetve, hogy a normálvektoraik egymás skalárszorosai. Ez utóbbit meggondoljuk adott $\ell_1 : a_1X + b_1Y + c_1 = 0$ és $\ell_2 : a_2X + b_2Y + c_2 = 0$ egyenesek esetén. A két egyenes metszete nyilván az

$$\begin{aligned} a_1X + b_1Y + c_1 &= 0 \\ a_2X + b_2Y + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldáshalmaza, amely átalakítható az

$$\begin{aligned} (a_1b_2 - a_2b_1)X + c_1b_2 - c_2b_1 &= 0 \\ (a_1b_2 - a_2b_1)Y + c_2a_1 - c_1a_2 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszerré. Ha $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, akkor ez utóbbi megoldása egyértelmű, azaz a két egyenesnek egyetlen közös pontja van. Tegyük most fel, hogy $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, az 1.4 lemma szerint ekkor $(a_2, b_2) = \lambda(a_1, b_1)$ áll fenn valamely λ valós számra, ahol ráadásul $\lambda \neq 0$. Ez pontosan azt jelenti, hogy a két egyenes normálvektora egymás skalárszorosa. Ebben az esetben vagy teljesül $\lambda c_1 = c_2$, és ekkor $\ell_1 = \ell_2$, vagy nem, amikor pedig $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$.

A normálvektor fontos tulajdonsága, hogy merőleges az egyenes *irányvektoraira;* így nevezzük az egyenes két különböző P_1, P_2 pontja által meghatározott $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektorokat. Ha az egyenes egyenlete $\ell : aX + bY + c = 0$, a pontok koordinátái pedig (x_1, y_1) és (x_1, y_2), akkor $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ teljesül $a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$. Ez azt jelenti, hogy $(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = \lambda(-b, a)$, azaz az egyenes irányvektorai mind egymás skalárszorosai.

1.3. Egyenesek megadása

Jól ismert tény, hogy két különböző pont meghatároz egy egyenest. Valóban, ha adott két különböző $P_1(x_1, y_1)$ és $P_2(x_2, y_2)$ pont, akkor $(y_1 - y_2)X - (x_1 - x_2)Y + x_1y_2 - x_2y_1 = 0$ egy mindkettőt tartalmazó egyenes egyenlete. Ez az egyenes egyértelműen meghatározott, hiszen mint láttuk, két különböző egyenesnek nem lehet egynél több közös pontja. A most felírt egyenlet lehetőséget nyújt arra is, hogy képletet adjunk annak eldöntésére, hogy a $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ pontok egy egyenesre illeszkednek-e. Azt kell ugyanis leellenőrizni, hogy P_3 rajta van-e a P_1P_2 egyenesen, azaz teljesül-e az

$$(y_1 - y_2)x_3 - (x_1 - x_2)y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 = 0$$

egyenlőség. Ez

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = 0 \tag{1.5}$$

alakra hozható. Az egy egyenesre illeszkedő pontokat *kollineárisnak* is mondjuk.

1.5. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a nem kollineáris $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ és $P_3(x_3, y_3)$ ponthármas* pozitív, *illetve* negatív irányítású, *ha az $(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$ szám értéke pozitív, illetve negatív.*

1.6. Definíció. *Legyen $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ és $P_3(x_3, y_3)$ három különböző kollineáris pontot. A három pont $(P_1P_2P_3)$* osztóviszonyának *nevezzük azt a λ valós számot, amelyre teljesül $\overrightarrow{P_1P_3} = \lambda\overrightarrow{P_3P_2}$.*

A definícióból adódik, hogy $\lambda = (P_1P_2P_3) \neq 0, -1$, és a pontok helyvektoraira

$$(x_3, y_3) = \frac{1}{1+\lambda}(x_1, y_1) + \frac{\lambda}{1+\lambda}(x_2, y_2) \tag{1.6}$$

teljesül. Azt mondjuk, hogy P_1 és P_2 *közrefogják* P_3*-t*, ha $\lambda > 0$. Ekkor $\mu = \dfrac{\lambda}{1+\lambda}$ választással $0 < \mu < 1$ és $(x_3, y_3) = (1 - \mu)(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2)$ áll fenn. Fordítva, az utóbbi egyenletből az osztóviszonyra $(P_1P_2P_3) = \dfrac{\mu}{1-\mu}$ adódik.

Ha $P_2 = P_3$, akkor az osztóviszony definíciója nem értelmes. Ha $P_1 = P_2$ illetve $P_1 = P_3$, akkor az osztóviszonyt tekinthetjük -1-nek illetve 0-nak. Az (1.6) egyenlet szerint két pont és az osztóviszony értéke egyértelműen meghatározza a harmadik pontot.

Három pont kollinearitását illetve az osztóviszony fogalmát a távolságfüggvény segítségével is leírhatjuk. A távolságfüggvény jól ismert tulajdonsága ugyanis a *háromszög-egyenlőtlenség:* bármely három P_1, P_2, P_3 pont esetén fennáll

$$d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) \geq d(P_1, P_3),$$

ahol az egyenlőség csak akkor teljesül, ha P_1, P_2 és P_3 *elfajuló háromszöget* alkotnak, azaz kollineárisak. Pontosabban az egyenlőség szükséges és elegendő feltétele az, hogy a P_1 és P_3 pontok közrefogják P_2-t. Elmondhatjuk tehát, hogy három pont akkor és csak akkor kollineáris, ha őket megfelelő sorrendben a háromszög-egyenlőtlenségbe helyettesítve egyenlőséget kapunk. A sorrend meghatározza a pontok közrefogását.

A $\lambda = (P_1P_2P_3)$ osztóviszonyra az $\overrightarrow{P_1P_3} = \lambda\overrightarrow{P_3P_2}$ definíció szerint

$$|\lambda| = \frac{d(P_1, P_3)}{d(P_3, P_2)}$$

teljesül, λ előjelét pedig az alapján határozhatjuk meg, hogy P_1 és P_2 közrefogják-e P_3-t vagy sem.

Megjegyzés. Egyes geometria könyvekben találkozhatunk a közrefogás és az osztóviszony fogalmának a távolságfüggvényre alapuló bevezetésével. Vegyük észre, hogy a mi megközelítésünkben mind az egyenesek illeszkedési tulajdonságai, mind pedig az osztóviszony tisztán *lineáris algebrai* módszerekkel került bevezetésre, azaz olyanokkal, ahol a meggondolások csak elsőfokú egyenletekre és azok megoldásaira támaszkodnak.

Szemléletünk szerint nyilvánvaló tény, hogy minden egyenes ponthalmaza bijektív módon megfeleltethető a valós számok $\mathbb{R}$ halmazának. Egy $\boldsymbol{r} : \mathbb{R} \to \ell$ bijekciót általában mint egy $\boldsymbol{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ injektív leképezéseket adunk meg, amelyre $\boldsymbol{r}(\mathbb{R}) = \ell$. Az $\boldsymbol{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ leképezés pedig két *koordinátafüggvény* segítségével, $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$ alakban állítható elő, ahol $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egyváltozós valós függvények.

1.7. Definíció. *Az ℓ egyenes* paraméterezése *alatt egy $\mathbb{R}$ és ℓ között fennálló bijekciót értünk. A paraméterezést* lineárisnak *nevezzük, ha a koordinátafüggvényei elsőfokúak.*

Legyen $P_1(x_1, y_1)$ és $P_2(x_2, y_2)$ az ℓ egyenes két különböző pontja. Az (1.6) egyenlőségből adódik, hogy

$$\boldsymbol{r}(t) = ((x_2 - x_1)t + x_1, (y_2 - y_1)t + y_1)$$

az ℓ egy lineáris paraméterezése. Valóban, $\boldsymbol{r}(0) = P_1$, $\boldsymbol{r}(1) = P_2$ és $t \neq 0, 1$ esetén $\boldsymbol{r}(t)$ az ℓ-nek azon P_3 pontja, melyre teljesül $(P_1P_2P_3) = \dfrac{t}{1-t}$.

Vegyük észre, hogy a koordinátafüggvények t-ben lineárisak; a lineáris tagok együttható a $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektort, a konstans tagok a P_1 pont helyvektorát adják vissza. Fordítva, legyen $\boldsymbol{r}(t) = (u_1t + u_2, v_1t + v_2)$ az ℓ egy lineáris paraméterezése. Ekkor az ℓ $P_1 = \boldsymbol{r}(0)$ és $P_2 = \boldsymbol{r}(1)$ két pontjából a fenti módon származtatott paraméterezés pontosan $\boldsymbol{r}$.

Tekintsünk most egy $\boldsymbol{r}(t) = (u_1t + u_2, v_1t + v_2)$ lineáris koordinátafüggvényekkel adott $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ leképezést. Ha u_1 és v_1 egyszerre nullák, akkor $\boldsymbol{r}$ konstans és a képhalmaza egyetlen pont. Ha u_1 és v_1 nem egyszerre nullák, akkor $\boldsymbol{r}$ pontosan a $\ell : v_1X - u_1Y + u_1v_2 - u_2v_1 = 0$ egyenes paraméterezése.

Ezeket a tulajdonságokat az alábbi állításban foglaljuk össze.

1.8. Állítás. *Minden egyenes végtelen sokféleképpen paraméterezhető. Pontosabban, egy adott egyenes lineáris paraméterezései bijekcióba állíthatók az egyenes különböző pontjaiból álló rendezett párok halmazával. Minden nem-konstans lineáris $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ leképezés egy egyértelműen meghatározott egyenes lineáris paraméterezése.*

Egy egyenesnek léteznek természetesen *nem-lineáris* paraméterezései is, pl. $\boldsymbol{r}(t) = (t^3, 0)$ az x-tengely egy paraméterezése. Ezek azonban számunkra jelentéktelenek, a továbbiakban kizárólag lineáris paraméterezéssel fogunk foglalkozni, ezért a lineáris jelzőt ezentúl nem is használjuk.

1.4. Affin transzformációk

A továbbiakban az euklidészi sík önmagára vett leképezéseinek bizonyos típusait fogjuk vizsgálni. Egy ilyen leképezést

$$P(x, y) \mapsto P'(x', y')$$

alakban tudunk megadni, ahol x' és y' az x-nek és y-nak mindenütt értelmezett $x' = f(x, y)$, $y' = g(x, y)$ függvényei. A sík egy *transzformációjáról* beszélünk abban az esetben, ha az $(x, y) \to (x', y')$ leképezés bijektív. Tudjuk, hogy ez ekvivalens a leképezés invertálhatóságával, azaz olyan $h(x', y')$, $k(x', y')$ függvények létezésével, amelyek minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén teljesítik az

$$x = h(x', y') = h(f(x, y), g(x, y)), \qquad y = k(x', y') = k(f(x, y), g(x, y))$$

egyenlőséget. A sík leképezései közül számunkra csak azok érdekesek, amelyek megőrzik a sík legfontosabb geometriai jellegét, azaz amelyek egyenestartóak.

1.9. Definíció. *A sík önmagára vett leképezését* egyenestartónak *nevezzük, ha kollineáris pontok képei is kollineárisak. Ha egy leképezés egyenestartó és bijektív, akkor* kollineációról *beszélünk.*

Megjegyzés. A fenti értelemben a konstans $P(x,y) \mapsto P_0(x_0,y_0)$ leképezés is egyenestartó. Általánosan igaz, hogy egy egyenestartó leképezés esetén egy egyenes képe egyenes vagy pont.

1.10. Definíció. *A sík*

$$P(x,y) \mapsto P'(x',y'), \qquad \left\{ \begin{array}{l} x' = a_{11}x + a_{12}y + b_1, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{array} \right.$$

alakú leképezéseit affin leképezéseknek *nevezzük.*

1.11. Állítás. *Affin leképezések szorzata és (amennyiben létezik) inverze is affin leképezés. A*

$$\varphi : P(x,y) \mapsto P'(x',y'), \qquad \left\{ \begin{array}{l} x' = a_{11}x + a_{12}y + b_1, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{array} \right.$$

affin leképezés akkor és csak akkor invertálható, ha $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, és pontosan akkor konstans, ha minden $a_{ij} = 0$. Ha $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$, de nem minden $a_{ij} = 0$, akkor φ képhalmaza egy egyenes.

Bizonyítás. Az affin leképezések szorzatára vonatkozó állítás könnyen leellenőrizhető. Tekintsük most a φ affin leképezést; ez nyilván pontosan akkor konstans, ha $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$. Ha $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, akkor minden rögzített $x', y' \in \mathbb{R}$ esetén az

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + b_1, \qquad y' = a_{21}x + a_{22}y + b_2$$

egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van x-re és y-ra, ami ráadásul

$$x = a_{11}^* x' + a_{12}^* y' + b_1^*, \qquad y = a_{21}^* x' + a_{22}^* y' + b_2^*$$

alakú, azaz φ invertálható és az inverz szintén affin leképezés. Tegyük végül fel, hogy $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$, de nem minden $a_{ij} = 0$. Az 1.4 lemma szerint ekkor az (a_{11}, a_{12}) és (a_{21}, a_{22}) vektorok közül az egyik előáll, mint a másik skalárszorosa. Ez azt jelenti, hogy léteznek $u, v \in \mathbb{R}$ számok úgy, hogy nem mindkettő nulla és

$$u(a_{11}, a_{12}) + v(a_{21}, a_{22}) = (ua_{11} + va_{21}, ua_{12} + va_{22}) = (0,0).$$

Ekkor viszont minden (x,y) esetén

$$ux' + vy' = (ua_{11} + va_{21})x + (ua_{12} + va_{22})y + ub_1 + vb_2 = ub_1 + vb_2,$$

azaz a $w = -ub_1 - vb_2$ választással minden képpont illeszkedik az $\ell : uX + vY + w = 0$ egyenesre. Végül a következő tétel bizonyításából kiderül, hogy φ képhalmaza maga az ℓ egyenes. $\square$

1.12. Tétel. *Az affin leképezések egyenestartók, a bijektív affin leképezések pedig az osztóviszonyt is megtartják.*

Bizonyítás. Legyen $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ három különböző kollineáris pont; az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy P_1 és P_2 közrefogják P_3-t. Ekkor az (1.6) egyenlőség szerint valamely $0 < \mu < 1$ számra

$$(x_3, y_3) = (1-\mu)(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2) \text{ és } (P_1P_2P_3) = \frac{\mu}{1-\mu}$$

teljesül. Jelölje $P_1'(x_1', y_1')$, $P_2'(x_2', y_2')$, $P_3'(x_3', y_3')$ a fenti pontok képeit az

$$(x, y) \mapsto (x', y') = (a_{11}x + a_{12}y + b_1, a_{21}x + a_{22}y + b_2)$$

affin leképezés mellett. Ezekre adódik, hogy

$$\begin{aligned}
(x_3', y_3') &= (a_{11}x_3 + a_{12}y_3 + b_1, a_{21}x_3 + a_{22}y_3 + b_2) \\
&= (a_{11}((1-\mu)x_1 + \mu x_2) + a_{12}((1-\mu)y_1 + \mu y_2) + b_1, \\
&\qquad a_{21}((1-\mu)x_1 + \mu x_2) + a_{22}((1-\mu)y_1 + \mu y_2) + b_2) \\
&= (1-\mu)(a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + b_1, a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + b_2) + \\
&\qquad \mu(a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + b_1, a_{21}x_2 + a_{22}y_2 + b_2) \\
&= (1-\mu)(x_1', y_1') + \mu(x_2', y_2'),
\end{aligned}$$

ami bizonyítja, hogy P_1', P_2', P_3' kollineáris pontok. Továbbá, amennyiben $P_1' \neq P_2'$, úgy P_1', P_2' és P_3' különböző pontok, melyek $(P_1'P_2'P_3')$ osztóviszonya megegyezik az eredeti pontok $(P_1P_2P_3)$ osztóviszonyával. □

Az alfejezet hátralévő részében ez utóbbi tétel megfordítását bizonyítjuk, azaz megmutatjuk, hogy az euklidészi síkon minden egyenestartó transzformáció affin transzformáció.

1.13. Lemma. *Legyenek $P_1(x_1, y_1)$, , $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ az euklidészi sík tetszőleges (nem feltétlenül különböző) pontjai és definiáljuk az $O(0,0)$, $E_1(1,0)$, $E_2(0,1)$ pontokat. Ekkor létezik φ affin leképezés, amelyre $\varphi(O) = P_1$, $\varphi(E_1) = P_2$ és $\varphi(E_2) = P_3$ teljesül. A φ leképezés akkor és csak akkor invertálható, ha a P_1, P_2, P_3 pontok nem kollineárisak.*

Bizonyítás. Az általános $(x', y') = (a_{11}x + a_{12}y + b_1, a_{21}x + a_{22}y + b_2)$ affin transzformáció esetén $O \mapsto (b_1, b_2)$, $E_1 \mapsto (a_{11} + b_1, a_{21} + b_2)$ és $E_2 \mapsto (a_{12} + b_1, a_{22} + b_2)$, azaz

$$a_{11} = x_2 - x_1, a_{12} = x_3 - x_1, a_{21} = y_2 - y_1, a_{22} = y_3 - y_1, b_1 = x_1, b_2 = y_1$$

választással egy, a tételben megfogalmazott feltételeknek eleget tevő φ affin leképezést kapunk. Az 1.11 állítás szerint φ akkor és csak akkor invertálható, ha

$$(x_1 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \neq 0,$$

ami az (1.5) egyenlőség szerint azzal ekvivalens, hogy a P_1, P_2, P_3 pontok nem kollineárisak. □

Megjegyzés. Az $O(0,0)$, $E_1(1,0)$, $E_2(0,1)$ pontokat a koordinátarendszer *alappontjainak* nevezzük. Egy ponthalmazról azt mondjuk, hogy *általános helyzetben* vannak, ha nincs három kollineáris pontja.

1.14. Lemma. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan leképezés, amely minden $x, y \in R$ esetén teljesíti a $f(x+y) = f(x) + f(y)$ és $f(xy) = f(x)f(y)$ egyenlőségeket. Ekkor f vagy az azonosan 0 leképezés vagy az identitás $\mathbb{R}$-en.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ leképezés eleget tesz a tételbeli feltételeknek. Erre fennáll $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ és $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)^2$, amiből következik, hogy $f(0) = 0$ és $f(1) = 0$ vagy $f(1) = 1$. Ha $f(1) = 0$, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) = f(1x) = 0f(x) = 0$, azaz f az azonosan nulla leképezés. Tegyük fel a továbbiakra, hogy $f(1) \neq 0$, azaz $f(1) = 1$.

Mivel $0 = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$, így $f(-x) = -f(x)$. Ha n pozitív egész, akkor

$$f(n) = f(1 + \ldots + 1) = f(1) + \ldots + f(1) = n$$

teljesül. Ha $n < 0$ negatív egész, akkor $f(n) = -f(-n) = -(-n) = n$. Ha $r = n/m \in \mathbb{Q}$, ahol $n, m \in \mathbb{Z}$ egészek, akkor

$$n = f(n) = f(rm) = f(r)f(m) = f(r)m,$$

amiből $f(r) = n/m = r$ adódik.

Megmutatjuk, hogy $x < y$ esetén $f(x) < f(y)$ teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}$ valós szám esetén. Ekkor ugyanis létezik egy $a > 0$ valós szám, amelyre $y - x = a^2$ áll fenn, amiből azt kapjuk, hogy

$$f(y) - f(x) = f(x - y) = f(a^2) = f(a)^2 > 0.$$

Tegyük végül fel, hogy létezik $x \in \mathbb{R}$ valós szám, amelyre $f(x) \neq x$. Mivel $f(x)$ is valós, így ekkor létezik egy $r \in \mathbb{Q}$ racionális szám, amely x és $f(x)$ közé esik, ha például $x < f(x)$, akkor $x < r < f(x)$. f monotonitása miatt viszont $x < r$-ből $f(x) < f(r) = r$ kellene következzen, tehát ellentmondáshoz jutottunk. Nyilván ugyanígy ellentmondást kapunk, ha $x > f(x)$-et tételezzük fel. Vagyis egyetlen $x \in \mathbb{R}$ esetén sem állhat fent $x \neq f(x)$, azaz $f = \mathrm{id}$. □

1.15. Lemma. *Legyen φ az euklidészi sík olyan egyenestartó transzformációja, amely fixen hagyja a koordinátarendszer három alappontját. Ekkor φ a sík identikus leképezése.*

Bizonyítás. Mivel φ bijektív, két egyenesnek képének pontosan akkor van közös pontja, ha az eredeti egyeneseknek volt, vagyis φ megtartja a párhuzamosságot. Világos továbbá, hogy egy egyenes képét egyértelműen meghatározza két pontjának a képe. Mivel φ-nek van két fixpontja az x- illetve az y-tengelyen, ezért ezek fixegyenesek. A legelső megjegyzés szerint pedig függőleges, illetve vízszintes egyenesnek a képe is függőleges, illetve vízszintes. Ez pontosan azt jelenti, hogy a $P(x,y)$ pont képének első koordinátája csak x-től, a második pedig csak y-tól függ. A φ leképezés tehát $(x,y)\mapsto(f(x),g(y))$ alakban adható meg.

Az alappontok fixen hagyása miatt $f(0)=g(0)=0$ és $f(1)=g(1)=1$, s így $(1,1)\mapsto(f(1),g(1))=(1,1)$ szintén fixpont. Az ezt a pontot O-val összekötő $Y=X$ egyenes tehát fixegyenes, amire az (x,x) alakú pontjainak $(f(x),g(x)$ képei is illeszkednek, azaz $f(x)=g(x)$ minden $x\in\mathbb{R}$ esetén.

Az $\ell: X+Y-c=0$ egyenes átmegy a $(c,0)$ és $(0,c)$ pontokon, ennek ℓ' képe pedig átmegy az $(f(c),0)$ és $(0,f(c))$ pontokon, azaz $\ell': X+Y-f(c)=0$. A $P(x,y)$ ponton átmenő $\ell: X+Y-x-y=0$ egyenes képe tehát az $\ell': X+Y-f(x+y)=0$, ami tartalmazza a P pont $P'(f(x),f(y))$ képét. Vagyis $f(x)+f(y)-f(x+y)=0$ teljesül minden $x,y\in\mathbb{R}$ esetén.

Hasonlóan belátjuk, hogy $f(xy)=f(x)f(y)$; a triviális részektől eltekintve feltehetjük, hogy $x,y\neq 0$. Az $O(0,0)$ és $P(1,m)$ pontokat összekötő $Y=mX$ egyenes képe az O-t $P'(1,f(m))$-el összekötő $Y=f(m)X$ egyenes. Az $0P$ ($P=P(x,y)$) egyenes képe tehát $Y=f(x^{-1}y)X$ egyenletű, és tartalmazza a $P'(f(x),f(y))$ pontot, azaz $f(y)=f(x^{-1}y)f(x)$ teljesül minden $0\neq x,y\in\mathbb{R}$ esetén. Abból $z=x^{-1}y$ helyettesítéssel $y=xz$ és $f(xz)=f(x)f(z)$ adódik.

Kapjuk tehát, hogy f eleget tesz az 1.14 lemma feltételeinek, és mivel $f(1)=1$, így $f(x)=x$ minden $x\in\mathbb{R}$ elemre. Ez pontosan azt jelenti, hogy φ az identikus leképezés a síkon. □

A fenti lemmákat követően fejezetünk fő tétele már könnyen bebizonyítható.

1.16. Tétel. *Az euklidészi sík egyenestartó transzformációi pontosan az invertálható affin leképezések.*

Bizonyítás. Tekintsük a sík egy tetszőleges φ egyenestartó transzformációját és legyen $P_1=\varphi(O)$, $P_2=\varphi(E_1)$, $P_3=\varphi(E_2)$. Az 1.13 lemma szerint létezik egy α affin leképezés, amelyre $\alpha(O)=P_1$, $\alpha(E_1)=P_2$ és $\alpha(E_2)=P_3$. A sík $\beta=\varphi^{-1}\circ\alpha$ leképezésre fennáll

$$\begin{aligned}
\beta(O)&=\varphi^{-1}(\alpha(O))=\varphi^{-1}(P_1)=O,\\
\beta(E_1)&=\varphi^{-1}(\alpha(E_1))=\varphi^{-1}(P_2)=E_1,\\
\beta(E_2)&=\varphi^{-1}(\alpha(E_2))=\varphi^{-1}(P_3)=E_2,
\end{aligned}$$

azaz β fixen hagyja a koordinátarendszer három alappontját. Az 1.15 lemma szerint ekkor $\beta = \varphi^{-1} \circ \alpha = \mathrm{id}$, amiből következik, hogy $\varphi = \alpha$ affin transzformáció. □

1.17. Következmény. *Az euklidészi sík önmagára vett φ bijekciójára az alábbiak ekvivalensek.*

(i) *φ affin transzformáció.*

(ii) *φ egyenes- és osztóviszonytartó transzformáció.*

(iii) *φ egyenestartó transzformáció.*

Bizonyítás. Az 1.12 tétel szerint $(i) \Longrightarrow (ii)$, $(ii) \Longrightarrow (iii)$ triviális, $(iii) \Longrightarrow (i)$ pedig pontosan az 1.16 tétel. □

1.5. Affin transzformáció hatása a vektorokon

Ebben a fejezetben φ az euklidészi sík egy

$$(x, y) \mapsto (x', y') = (a_{11}x + a_{12}y + b_1, a_{21}x + a_{22}y + b_2)$$

affin transzformációját jelöli. Tudjuk, hogy a sík $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ pontjai meghatározzák az $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ vektort. Könnyen meggondolható, hogy a $P_3(x_3, y_3)$, $P_4(x_4, y_4)$ pontok akkor és csak akkor határozzák meg ugyanezt a vektort, ha teljesül $x_4 - x_3 = x_2 - x_1$ és $y_4 - y_3 = y_2 - y_1$.

Minden $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ esetén jelölje P_i' a P_i pont φ melletti képét. Mivel teljesül

$$\overrightarrow{P_1'P_2'} = (a_{11}(x_2 - x_1) + a_{12}(y_2 - y_1), a_{21}(x_2 - x_1) + a_{22}(y_2 - y_1)),$$

ezért nyilván $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_3P_4}$ esetén igaz lesz $\overrightarrow{P_1'P_2'} = \overrightarrow{P_3'P_4'}$. Ez lehetővé teszi számunkra, hogy azt mondjuk, hogy a $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektor *képe* a $\overrightarrow{P_1'P_2'}$ vektor, hiszen az utóbbi *nem függ a vektort meghatározó konkrét pontpár speciális választásától.*

1.18. Definíció. *A* $\varphi : (x, y) \mapsto (a_{11}x + a_{12}y + b_1, a_{21}x + a_{22}y + b_2)$ *affin transzformáció* vektorokon értelmezett hatása *alatt a*

$$\vec{\varphi} : (u, v) \mapsto (a_{11}u + a_{12}v, a_{21}u + a_{22}v)$$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *lineáris leképezést értjük.*

A fentiek szerint minden P_1, P_2 pontra fennáll

$$\vec{\varphi}(\overrightarrow{P_1P_2}) = \overrightarrow{\varphi(P_1)\varphi(P_2)}.$$

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy a φ transzformáció hogyan változtathatja meg ponthármasok irányítását. A P_1, P_2, P_3 ponthármas irányítása definíció szerint a $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$ vektorokból képzett 2×2-es mátrix determinánsának előjele, ezért elegendő a φ vektorokon értelmezett hatását vizsgálni.

Legyen $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2) = \overrightarrow{P_1P_2}$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2) = \overrightarrow{P_1P_2}$, $\boldsymbol{u}' = \vec{\varphi}(\boldsymbol{u})$ és $\boldsymbol{v}' = \vec{\varphi}(\boldsymbol{v})$. A három pont, illetve azok képeinek irányítását a $u_1v_2 - u_2v_1$, illetve

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} u_1' & u_2' \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 & a_{21}u_2 + a_{22}u_2 \\ a_{11}v_1 + a_{12}v_2 & a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{pmatrix} \\
&= \det\left(\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\right) \\
&= \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}(u_1v_2 - u_2v_1)
\end{aligned}$$

számok előjelei határozzák meg. Ezek tehát egyező, illetve ellentétes előjelűek attól függően, hogy $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ pozitív vagy negatív szám. Ezzel bebizonyítottuk az alábbi állítást.

1.19. Állítás. *A φ affin transzformáció vagy megtartja, vagy pedig megfordítja a sík összes ponthármasának irányítását, attól függően, hogy $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$ vagy $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < 0$.* □

Eszerint az alábbi definíció értelmes.

1.20. Definíció. *A φ affin transzformációt* irányítástartónak *nevezzük, ha teljesül $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$.*

1.6. Hasonlósági transzformációk

1.21. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az euklidészi síkot önmagára képező φ leképezés* hasonlósági transzformáció, *ha létezik egy $\lambda > 0$ szám úgy, hogy minden P, Q pontpárra $d(\varphi(P), \varphi(Q)) = \lambda d(P, Q)$ teljesül. A λ számot a* hasonlóság arányának *nevezzük.*

Korábbi definícióink szerint *transzformáció* alatt invertálható leképezést értünk, ezért ebben az esetben ezt a tulajdonságot külön meg kell mutatnunk.

1.22. Állítás. *A sík hasonlósági transzformációi egyenestartó bijekciók.*

Bizonyítás. Legyen φ hasonlósági transzformáció $\lambda > 0$ aránnyal. Legyenek P_1, P_2, P_3 kollineáris pontok és tegyük fel, hogy P_1 és P_2 közrefogják P_3-t. Ez pontosan akkor teljesül, ha fennáll a $d(P_1, P_3) + d(P_3, P_2) = d(P_1, P_2)$ egyenlőség. Ekkor azonban

$$\begin{aligned} d(\varphi(P_1), \varphi(P_2)) &= \lambda d(P_1, P_2) \\ &= \lambda d(P_1, P_3) + \lambda d(P_3, P_2) \\ &= d(\varphi(P_1), \varphi(P_3)) + d(\varphi(P_3), \varphi(P_2)), \end{aligned}$$

azaz a $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)$ és $\varphi(P_3)$ pontok kollineárisak úgy, hogy $\varphi(P_1)$ és $\varphi(P_2)$ közrefogják $\varphi(P_3)$-t. Ez egyrészt azt mutatja, hogy φ egyenestartó, másrészt azt, hogy nem kollineáris pontok képe sem lehet kollineáris, vagyis φ injektív. Harmadrészt azt láthatjuk, hogy a $\overline{P_1P_2}$ zárt szakasz képe a $\overline{\varphi(P_1)\varphi(P_2)}$ zárt szakasz. Ebből az is következik, hogy a P_1P_2 egyenes képe a teljes $\varphi(P_1)\varphi(P_2)$ egyenes, hiszen egy egyenes előáll mint adott középpontú, növekvő hosszúságú zárt szakaszok egyesítése.

A szürjektivitás bizonyításához tekintsünk egy tetszőleges P pontot, rögzítsük az e, f metsző egyeneseket és jelöljük e'-vel és f'-vel ezek képeit. Fektessük a g egyenest P-n keresztül úgy, hogy az messe e'-t és f'-t a különböző A', illetve B' pontokban. Mivel e' minden pontja valamely e-beli pont képe, így létezik $A \in e$, melyre $A' = \varphi(A)$. Hasonlóan, létezik $B \in f$, melyre $B' = \varphi(B)$. Ekkor az AB egyenes képe g, azaz létezik $Q \in AB$, amelyre $\varphi(Q) = P$. Ez bizonyítja φ szürjektivitását. □

Azt mondjuk, hogy az e és f egyenesek *merőlegesek,* ha irányvektoraik merőlegesek, vagy ami ezzel egyenértékű, a normálvektoraik merőlegesek.

1.23. Állítás. *A* $\varphi : (x, y) \mapsto (a_{11}x + a_{12}y + b_1, a_{21}x + a_{22}y + b_2)$ *affin transzformációra az alábbiak ekvivalensek.*

(i) *Merőleges egyenesek φ melletti képei is merőlegesek.*

(ii) $a_{11}^2 + a_{21}^2 - a_{12}^2 - a_{22}^2 = 0$ *és* $a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$.

(iii) $a_{11} = \varepsilon a_{22}$ *és* $a_{12} = -\varepsilon a_{21}$, *ahol* $\varepsilon = \pm 1$.

(iv) *φ hasonlósági transzformáció* $\lambda = \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}$ *aránnyal.*

Bizonyítás. Tegyük fel (i)-t. Az x- és y-tengely irányvektorai $(1, 0)$ és $(0, 1)$, ezek képeinek irányvektorai pedig (a_{11}, a_{21}) és (a_{12}, a_{22}). A tengelyek merőlegessége adja az $a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$ feltételt. Hasonlóan vizsgálva a merőleges $X + Y = 0$ és $X - Y = 0$ egyeneseket kapjuk, hogy az $(1, -1)$ és $(1, 1)$ vektorok $(a_{11} - a_{12}, a_{21} - a_{22})$ és $(a_{11} + a_{12}, a_{21} + a_{22})$ képei szintén merőlegesek, ezzel megkapjuk (ii) első azonosságát is.

Mivel φ feltevés szerint bijektív, így az a_{11} és a_{21} számok nem lehetnek egyszerre nullák (ld. az 1.11 állítást). Az 1.4 lemma szerint ekkor (ii) második egyenlőségéből $(a_{12}, a_{22}) = \varepsilon(-a_{21}, a_{11})$ következik, az első feltétel szerint pedig $\varepsilon = \pm 1$. Ez mutatja a $(ii) \Longrightarrow (iii)$ következtetést.

Tegyük fel (iii)-t és tekintsük a $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ pontokat, illetve ezek $P_1'(x_1', y_1')$, $P_2'(x_2', y_2')$ képeit. Ekkor fennáll

$$
\begin{aligned}
d(P_1', P_2') &= \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2} \\
&= \sqrt{[a_{11}(x_2 - x_1) + a_{12}(y_2 - y_1)]^2 + [a_{21}(x_2 - x_1) + a_{22}(y_2 - y_1)]^2} \\
&= \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}\,\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
&= \lambda d(P_1, P_2),
\end{aligned}
$$

ahol $\lambda = \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2} > 0$, vagyis φ hasonlósági transzformáció.

Végezetül gondoljuk meg, hogy a φ hasonlósági transzformáció esetén egy háromszög három oldala pontosan akkor teljesíti a Pitagorasz-féle $a^2 + b^2 = c^2$ azonosságot, ha a kép háromszög oldalai is teljesítik azt. A $(iv) \Longrightarrow (i)$ következtetés így adódik az alábbi állításból: Egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha oldalai valamilyen sorrendben teljesítik a Pitagorasz-azonosságot. (Ennek az állításnak az elemi bizonyítása iskolai anyag, koordinátarendszer felhasználásával pedig valódi trivialitás.) □

A *szög* fogalmának precíz bevezetése a síkgeometriának egy meglepően bonyolult kérdése. Ezért a pontos definícióval nem foglalkozunk, s így a következő tétel bizonyítása sem tekinthető matematikailag teljesnek. Mindazonáltal ezen a ponton a szemléletes megközelítés számunkra elegendő.

1.24. Tétel. *A hasonlósági transzformációk pontosan az euklidészi sík egyenes- és szögtartó transzformációi.*

Bizonyítás. Annak meggondolását, hogy a hasonlósági transzformációk szögtartók, az olvasó szemléletére bízzuk. (Utalhatunk itt a hasonló háromszögekre, vagy a szög koszinusz-tételből való meghatározására.) A tétel megfordítása nyilván következik az 1.23 állításból, hiszen egy egyenes- és szögtartó transzformáció merőleges egyeneseket merőlegesbe képez. □

Megjegyzés. A tételben szükségszerűen követeltük meg a szögtartás mellett az egyenestartást is. Aki jártas az *inverziók* témakörében, az tudja, hogy azok példát szolgáltatnak szögtartó, de nem egyenestartó transzformációkra.

1.7. Egybevágósági transzformációk

1.25. Definíció. *Az euklidészi sík önmagára vett távolságtartó leképezéseit* egybevágósági transzformációknak *nevezzük.*

Az egybevágósági transzformációk nyilván a hasonlósági transzformációk speciális esetei $\lambda = 1$ aránnyal. Ez magyarázza azt is, hogy nem követeljük meg a definícióban a leképezés invertálhatóságát (ld. az 1.22 állítást).

1.26. Tétel. *Az euklidészi sík egybevágósági transzformációira alábbi két lehetőség egyike teljesül.*

(i) *Irányítástartó transzformáció alakja*

$$(x, y) \mapsto (x \cos \alpha + y \sin \alpha + b_1, -x \sin \alpha + y \cos \alpha + b_2);$$

(ii) *Az irányítást megfordító transzformációk alakja*

$$(x, y) \mapsto (x \cos \alpha + y \sin \alpha + b_1, x \sin \alpha - y \cos \alpha + b_2).$$

Bizonyítás. Legyen φ az euklidészi sík egybevágósági transzformációja. Mivel minden egybevágósági transzformáció hasonlósági transzformáció is egyben, ezért alkalmazhatjuk az 1.23 állítást, amiből adódik, hogy φ alakja

$$(x, y) \mapsto (a_1 x + a_2 y + b_1, -\varepsilon a_2 x + \varepsilon a_1 x + b_2), \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

Korábban láttuk azt is, hogy φ hasonlósági aránya $\lambda = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, azaz egybevágósági transzformáció esetén $a_1^2 + a_2^2 = 1$. Ekkor létezik $0 \leq \alpha < 2\pi$ szám, amelyre $a_1 = \cos \alpha$ és $a_2 = \sin \alpha$ áll fenn, vagyis φ csakugyan a fenti két típus egyike. Az irányítástartásra vonatkozó kijelentés az 1.19 állításból következik. □

1.27. Definíció. *Az euklidészi sík egybevágósági transzformációit az alábbi osztályokba soroljuk.*

(i) *Ha φ irányítástartó és $\alpha = 0$, akkor* eltolásról,

(ii) *ha φ irányítástartó és $\alpha \neq 0$, akkor* α szögű forgatásról,

(iii) *ha φ irányításváltó és $b_1 \cos \frac{\alpha}{2} + b_2 \sin \frac{\alpha}{2} \neq 0$, akkor* egyenesre vett tükrözésről,

(iv) *ha φ irányításváltó és $b_1 \cos \frac{\alpha}{2} + b_2 \sin \frac{\alpha}{2} = 0$, akkor* csúsztatva tükrözésről *beszélünk.*

Az egyes típusok fixpontjainak vizsgálatával az olvasó meggyőződhet arról, hogy a fenti osztályozás megfelel a transzformációk szemléletes leírásának.

Az euklidészi sík irányítástartó egybevágósági transzformációit *mozgásoknak* is nevezzük. Számos számítógépes geometriai programban az euklidészi sík mozgásait egy origó középpontú forgatás és egy eltolás szorzataként kell megadni. Ezért fontos a fenti tétel alábbi következménye.

1.28. Következmény. *Ez euklidészi sík minden mozgása egyértelműen előállítható egy origó körüli forgatás és egy eltolás szorzataként.* □

1.8. Feladatok

1.1. feladat. Legyenek $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ az $A = (a_{ij})$ és $B = (b_{ij})$ $n \times n$-es mátrixok által az (1.1) egyenlőség szerint meghatározott lineáris leképezések. Mutassa meg, hogy az $f \circ g$ leképezés lineáris és az őt megadó $C = (c_{ij})$ mátrixra teljesül $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$.

1.2. feladat. Mutassa meg, hogy az (1.2) és az (1.3) egyenlőségekben megadott adjungált mátrixokra csakugyan teljesül $A^{\mathrm{adj}}A = \det(A)\,\mathbf{1}_n$.

1.3. feladat. Végezzen számolási feladatokat három kollineáris pont osztóviszonyának meghatározására az euklidészi síkon.

1.4. feladat. Bizonyítsa be a háromszög-egyenlőtlenséget az euklidészi síkon.

1.5. feladat. Mutassa meg, hogy az euklidészi sík P_1, P_2, P_3 pontjaira akkor és csakis akkor teljesül $d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = d(P_1, P_3)$, ha kollineárisak és P_1 és P_3 közrefogják P_2-t.

1.6. feladat. Legyen φ az euklidészi sík affin transzformációja. Mutassa meg, hogy az ℓ egyenes irányvektorának $\vec{\varphi}$ melletti képe a $\varphi(\ell)$ egyenes irányvektora. Igaz-e hasonló állítás az ℓ normálvektorára?

1.7. feladat. Mutassa meg, hogy egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha az oldalhosszúságok valamilyen sorrendben teljesítik az $a^2 + b^2 = c^2$ Pitagorasz-azonosságot.

1.8. feladat. Tekintsük az euklidészi sík $\varphi : (x, y) \mapsto (x\cos\alpha + y\sin\alpha + b_1, -x\sin\alpha + y\cos\alpha + b_2)$ egybevágósági transzformációját. Mutassa meg, hogy ha $\alpha \neq 0$, akkor φ-nek pontosan egy fixpontja van.

1.9. feladat. Legyen φ az euklidészi sík $\varphi : (x, y) \mapsto (x\cos\alpha + y\sin\alpha + b_1, x\sin\alpha - y\cos\alpha + b_2)$ irányításváltó egybevágósági transzformációja.

(i) Ha $b_1 \cos\frac{\alpha}{2} + b_2 \sin\frac{\alpha}{2} \neq 0$, akkor φ-nek nincs fixpontja.

(ii) Ha $b_1 \cos\frac{\alpha}{2} + b_2 \sin\frac{\alpha}{2} = 0$, akkor φ fixpontjainak halmaza az ℓ : $X \sin\alpha + Y \cos\alpha + b_2 = 0$ egyenes.

(iii) Ha $b_1 \cos\frac{\alpha}{2} + b_2 \sin\frac{\alpha}{2} = 0$, akkor $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ a sík identikus leképezése.

2. fejezet

A valós projektív sík

Az euklidészi síkon sok kényelmetlenség forrása az a tény, hogy két egyenes metsző vagy párhuzamos is lehet. A térbe kilépve további kellemetlenségek adódnak a párhuzamos egyenesekkel, például perspektivikus ábrázolásnál párhuzamos egyeneseket összefutóként kell feltüntetni. Ezek a megfigyelések vetik fel a közönséges sík fogalmának a módosításának az igényét, amellyel feloldhatjuk a a párhuzamos és metsző egyenesek közti különbségtétel által okozott problémákat.

2.1. Az euklidészi sík végtelen távoli elemei

Legyen $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, I)$ az euklidészi sík halmazhármasa és *bővítsük* a pont- és egyeneshalmazokat a $\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \cup \mathcal{P}^\infty$ és $\mathcal{E}^* = \mathcal{E} \cup \mathcal{E}^\infty$ halmazokká a következő módon: $\mathcal{P}^\infty$ elemeit *végtelen távoli pontoknak*, az egyetlen elemből álló $\mathcal{E}^\infty = \{\ell^\infty\}$ halmaz ℓ^∞ elemét pedig *végtelen távoli egyenesnek* nevezzük. Az eredeti $\mathcal{P}$ és $\mathcal{E}$ elemeit *közönséges pontoknak* és *egyeneseknek* hívjuk. A $\mathcal{P}^*, \mathcal{E}^*$ halmazokon az alábbi I^* illeszkedést definiáljuk.

(I1) Közönséges pontok és egyenesek között az illeszkedést a hagyományos módon értelmezzük.

(I2) Minden közönséges egyenesre pontosan egy végtelen távoli pont illeszkedik.

(I3) Minden végtelen távoli pont illeszkedik legalább egy közönséges egyenesre.

(I4) Két közönséges egyenes akkor és csak akkor illeszkedik ugyanarra a végtelen távoli pontra, ha nincs közönséges metszéspontjuk. (Azaz ha az euklidészi síkon párhuzamosak.)

(I5) A végtelen távoli egyenesre pontosan a végtelen távoli pontok illeszkednek, azaz ℓ^∞ mint ponthalmaz megegyezik $\mathcal{P}^\infty$-vel.

2.1. Definíció. *A fenti módon definiált* $(\mathcal{P}^*, \mathcal{E}^*, I^*)$ *halmazhármast a* végtelen távoli elemekkel bővített euklidészi síknak *nevezzük.*

2.2. Állítás. *A végtelen távoli elemekkel bővített euklidészi síkon teljesülnek az alábbiak.*

(i) *Bijektív viszony áll fenn a végtelen távoli pontok halmaza és az euklidészi sík egyeneseinek párhuzamossági osztályainak halmaza között.*

(ii) *Bármely két különböző ponthoz létezik pontosan egy mindkettőt tartalmazó egyenes.*

(iii) *Bármely két különböző egyeneshez létezik pontosan egy mindkettőre illeszkedő pont.*

Bizonyítás. (I2) szerint értelmezhetünk egy $\mathcal{E} \to \mathcal{P}^\infty$ leképezést, ami (I3) szerint szürjektív. (I4) pedig azt biztosítja, hogy két egyenes képe akkor és csak akkor egyezik meg, ha azonos párhuzamossági osztályba tartoznak, ami azt jelenti, hogy a leképezés egy bijekciót indukál a párhuzamossági osztályok halmaza és $\mathcal{P}^\infty$ között.

Két közönséges pontot egy közönséges egyenes, két végtelen távoli pontot pedig a végtelen távoli egyenes köti össze. Ha P közönséges, Q pedig egy végtelen távoli pont, akkor őket az a közönséges egyenes köti össze, amely átmegy P-n és abba a párhuzamossági osztályba tartozik, amely az (i)-ben említett módon Q-nak megfelel.

Két metsző közönséges egyenes közönséges pontban metszi egymást. Két párhuzamos közönséges egyenes ugyanazt a végtelen távoli pontot tartalmazza, tehát ezek egy végtelen távoli pontban metszik egymást. Végül e közönséges egyenes és ℓ^∞ közös pontja az (I2) szerint e-re illeszkedő végtelen távoli pont. □

A továbbiakban a végtelen távoli elemekkel bővített euklidészi síkkal fogunk dolgozni. Pont, illetve egyenes alatt egyaránt értünk közönséges, illetve végtelen távoli pontokat és egyeneseket is.

2.3. Következmény. *Tekintsük az* e, f *egyeneseket és a* P *pontot úgy, hogy* P *ne illeszkedjék sem* e*-re, sem* f*-re. Definiáljuk az* $\pi_{e,f,P} : e \to f$ vetítést: *a* $Q \in e$ *pontra legyen* $\pi_{e,f,P}(Q) = f \cap PQ$. *Ekkor* $\pi_{e,f,P}$ *egy bijekciót határoz meg* e *és* f *ponthalmazai között.* □

2.2. Homogén koordinátázás

Az előző fejezetben bevezetett kibővített euklidészi sík számos geometriai jelenséget leegyszerűsít. A rajta végzett számolások azonban igen nehézkesek lennének, ha nem vezetnénk be egy megfelelő koordinátarendszert;

azonban ez az első pillanatban jelentősen különbözni fog az eddig megszokott koordinátarendszerektől.

2.4. Definíció. Homogén számhármasnak *nevezzük az* $(x_0 : x_1 : x_2)$, *(*x_0*,* x_1*,* $x_2 \in \mathbb{R}$*) hármasokat, ahol nem mindhárom* x_i *egyenlő nullával és amelyek skalárszorzó erejéig vannak egyértelműen meghatározva. Azaz az* $(x_0 : x_1 : x_2)$ *és* $(y_0 : y_1 : y_2)$ *homogén hármasokat pontosan akkor tekintjük egyenlőknek, ha létezik* $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ *szám, amelyre* $y_0 = \lambda x_0$*,* $y_1 = \lambda x_1$ *és* $y_2 = \lambda x_2$*.*

Hangsúlyozzuk, hogy a homogén számhármasok nem vektorok, viszont minden nullvektortól különböző 3-dimenziós vektor meghatároz egy homogén számhármast.

Tekintsük az $a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 = 0$ alakú 3-változós homogén lineáris egyenletet. Ha ennek az (x_0, x_1, x_2) számhármas megoldása, akkor minden $0 \neq \lambda$ szám esetén $(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2)$ is megoldása, azaz értelmes azt mondani, hogy az $(x_0 : x_1 : x_2)$ homogén számhármas *megoldása* a fenti homogén lineáris egyenletnek.

2.5. Definíció. *Jelölje* $\mathcal{P}_{\text{proj}}$ *a valós homogén számhármasok halmazát és jelölje* $\mathcal{E}_{\text{proj}}$ *a 3-változós homogén lineáris egyenletek halmazát. Definiáljuk az* I_{proj} *relációt oly módon, hogy egy homogén számhármas pontosan akkor áll relációban egy homogén lineáris egyenlettel, ha megoldása neki. Ekkor a* $(\mathcal{P}_{\text{proj}}, \mathcal{E}_{\text{proj}}, I_{\text{proj}})$ *halmazhármas által alkotott síkot* valós projektív síknak *nevezzük. A* $\mathcal{P}_{\text{proj}}$ *illetve* $\mathcal{E}_{\text{proj}}$ *halmazok elemeit* projektív pontoknak, *illetve* projektív egyeneseknek *nevezzük.*

Vegyük észre, hogy a 3-változós homogén lineáris egyenletek és a homogén számhármasok között kölcsönösen egyértelmű kapcsolat áll fenn, hiszen egyrészt egy ilyen egyenlet három együtthatója nem lehet egyszerre nulla, másrészt pedig az együtthatók skalárszorzó erejéig vannak meghatározva. Ennek értelmében az $a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 = 0$ egyenlet által meghatározott egyenes jelölésére az $[a_0 : a_1 : a_2]$ alakot is használjuk, illetve azt mondjuk, hogy az említett egyenest a nullvektortól különböző (a_0, a_1, a_2) vektor határozza meg. Ebben a jelölésben egy projektív pont pontosan akkor illeszkedik egy projektív egyenesre, ha az őket meghatározó vektorok belső szorzata nulla.

A fentiek értelmében tehát egy projektív pontot végtelen sok számhármassal írhatunk le; bizonyos esetben hasznos lehet egy megállapodás rögzítése arra vonatkozólag, hogy a lehetséges számhármasok közül melyiket használjuk. Ezen megállapodás szerint az $(x_0 : x_1 : x_2)$ homogén számhármas *normálalakja* $\left(\dfrac{x_0}{x_2} : \dfrac{x_1}{x_2} : 1\right)$, ha $x_2 \neq 0$, $\left(\dfrac{x_0}{x_1} : 1 : 0\right)$, ha $x_2 = 0$ és $x_1 \neq 0$, és $(1 : 0 : 0)$, ha $x_1 = x_2 = 0$.

A projektív sík geometriai struktúráját az alábbi tétel írja le.

2.6. Tétel. *Legyenek $(\mathcal{P}^*, \mathcal{E}^*, I^*)$ és $(\mathcal{P}_{\text{proj}}, \mathcal{E}_{\text{proj}}, I_{\text{proj}})$ a végtelen távoli elemekkel bővített euklidészi síkot, illetve a projektív síkot meghatározó halmazhármasok. Definiáljuk a $\varphi : \mathcal{P}^* \cup \mathcal{E}^* \to \mathcal{P}_{\text{proj}} \cup \mathcal{E}_{\text{proj}}$ leképezést:*

$$\varphi(P) = \begin{cases} P'(x : y : 1), & \text{ha } P = P(x, y) \text{ közönséges pont,} \\ P'(-b : a : 0), & \text{ha } P \text{ az } \ell : aX + bY + c = 0 \text{ közönséges egyenes} \\ & \text{végtelen távoli pontja;} \end{cases}$$

valamint

$$\varphi(\ell) = \begin{cases} \ell' : aX_0 + bX_1 + cX_2 = 0, & \text{ha } \ell : aX + bY + c = 0 \text{ közönséges} \\ & \text{egyenes,} \\ \ell' : X_2 = 0, & \text{ha } \ell = \ell^\infty \text{ a végtelen távoli egyenes.} \end{cases}$$

Ekkor φ egy jól értelmezett illeszkedéstartó bijekció a két sík pont- egyeneshalmazai között.

Bizonyítás. Az, hogy φ jól értelmezett bijekció, az egyenesek esetén következik abból, hogy közönséges egyenes normálvektora nem lehet nullvektor. A ponthalmazoknál ugyanez a tulajdonság csak végtelen távoli pontok esetén szorul meggondolásra, de ez is adódik abból a tényből, hogy két közönséges egyenes akkor és csakis akkor párhuzamos, ha normálvektoraik egymás skalárszorosai. Ezért a 2.2 állítás (i) pontja alapján φ bijekciót határoz meg a kibővített sík végtelen távoli pontjai és a projektív sík $X_2 = 0$ egyenesének pontjai között.

A φ illeszkedéstartása azt jelenti, hogy minden $P \in \mathcal{P}^*$, $\ell \in \mathcal{E}^*$, $PI^*\ell$ esetén $\varphi(P)I_{\text{proj}}\varphi(\ell)$ teljesül. Abban az esetben, ha $P = P(x, y)$ közönséges pont, az ℓ szükségszerűen $\ell : aX + bY + c = 0$ alakú közönséges egyenes. Ekkor az állítás φ definíciója szerint teljesül, hiszen mindkét illeszkedést az $ax + by + c = 0$ egyenlet határozza meg. Szintén igaz, hogy végtelen távoli pont képe illeszkedik a végtelen távoli egyenes képére. Végül tegyük fel, hogy P az $\ell : aX + bY + c = 0$ egyenes végtelen távoli pontja, ekkor nyilván $P'(-b : a : 0)$ illeszkedik az ℓ egyenes $\ell' : aX_0 + bX_1 + cX_2 = 0$ képére. □

Ezzel megmutattuk, hogy a kibővített euklidészi sík és a projektív sík izomorfak. A továbbiakban nem is fogunk különbséget tenni a két sík között. Azaz egyrészt a homogén számhármasokat a végtelen távoli elemekkel bővített euklidészi sík koordinátarendszereként használjuk. Másrészt pedig az euklidészi síkot mint a projektív sík azon részhalmazát tekintjük, amelyet az $X_2 = 0$ projektív egyenes ponthalmazának elhagyásával nyerünk.

Az alfejezet végén meggondoljuk, hogy koordinátákkal kifejezve mit jelent három projektív pont kollinearitása. Tegyük fel, hogy a $P(x_0 : x_1 :$

$x_2)$, $Q(y_0 : y_1 : y_2)$, $R(z_0 : z_1 : z_2)$ pontok mind illeszkednek az $\ell : u_0X_0 + u_1X_1 + u_2X_2 = 0$ egyenesre. Ez pontosan azt jelenti, hogy az

$$\begin{cases} x_0U_0 + x_1U_1 + x_2U_2 = 0 \\ y_0U_0 + y_1U_1 + y_2U_2 = 0 \\ z_0U_0 + z_1U_1 + z_2U_2 = 0 \end{cases}$$

homogén lineáris egyenletrendszernek van nem-triviális megoldása, nevezetesen (u_0, u_1, u_2). A Cramer-szabály szerint ez azzal ekvivalens, hogy az együtthatókból, azaz a három pont homogén koordinátáiból alkotott mátrix determinánsa nulla:

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{pmatrix} = 0.$$

2.7. Állítás. *Három projektív pont akkor és csakis akkor kollineáris, ha a homogén koordinátáikból alkotott* 3×3*-as mátrix determinánsa nulla.* □

A determináns definíciójából adódik, hogy soraiban és oszlopaiban lineáris. Speciálisan, ha a mátrix egyik sorát megszorozzuk egy λ számmal, akkor a determináns értéke is λ-szorosára változik. Ebből is látszik, hogy bármely pontnál tetszőlegesen választhatjuk meg az őt előállító vektort.

A Cramer-szabály ismételt felhasználásából adódik, hogy ha P, Q és R kollineáris, akkor az őket meghatározó (x_0, x_1, x_2), (y_0, y_1, y_2), (z_0, z_1, z_2) vektorok lineárisan függők, azaz léteznek $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ számok úgy, hogy nem mind nulla és

$$c_1\,(x_0, x_1, x_2) + c_2\,(y_0, y_1, y_2) + c_3\,(z_0, z_1, z_2) = (0, 0, 0).$$

Ha $c_3 = 0$, akkor már (x_0, x_1, x_2) és (y_0, y_1, y_2) is lineárisan függők, ami csak úgy lehetséges, ha egymás skalárszorosai, vagyis $P = Q$. Ha tehát $P \neq Q$, akkor $c_3 \neq 0$, és a fenti egyenlet

$$(z_0, z_1, z_2) = \lambda\,(x_0, x_1, x_2) + \mu\,(y_0, y_1, y_2)$$

alakra hozható, ahol $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ nem lehetnek egyszerre nullák.

2.8. Állítás. *Ha* $P(x_0 : x_1 : x_2)$ *és* $Q(y_0 : y_1 : y_2)$ *különböző projektív pontok, akkor a* PQ *egyenes ponthalmaza*

$$\{R(z_0 : z_1 : z_2) \mid (z_0, z_1, z_2) = \lambda\,(x_0, x_1, x_2) + \mu\,(y_0, y_1, y_2),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}. \quad \square$$

2.3. Projektív transzformációk

Ebben az alfejezetben a projektív sík egyenestartó transzformációit vizsgáljuk. Mint majd látjuk, ezek szoros kapcsolatban állnak az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ invertálható lineáris leképezésekkel.

A továbbiakra rögzítsünk egy olyan $A = (a_{ij})$ $(i, j \in \{0, 1, 2\})$ 3×3-as mátrixot, amelynek a determinánsa nem nulla, és jelölje $A^{\text{adj}} = (a^*_{ij})$ az A adjungáltját. Tudjuk, hogy $A^{\text{adj}} A = \det(A)\,\mathbf{1}_n$ miatt

$$a^*_{i0}a_{0j} + a^*_{i1}a_{1j} + a^*_{i2}a_{2j} = \begin{cases} \det(A), & \text{ha } i = j; \\ 0, & \text{ha } i \neq j. \end{cases} \tag{2.1}$$

2.9. Definíció. *Jelölje φ_A a projektív sík $P \mapsto P'$, $\ell \mapsto \ell'$ leképezését, ahol $P = P(x_0 : x_1 : x_2)$, $P' = P'(x'_0 : x'_1 : x'_2)$, $\ell : u_0X_0 + u_1X_1 + u_2X_2 = 0$, $\ell' : u'_0X_0 + u'_1X_1 + u'_2X_2 = 0$ és*

$$\begin{cases} x'_0 = a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2, \\ x'_1 = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x'_2 = a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} u'_0 = a^*_{00}u_0 + a^*_{10}u_1 + a^*_{20}u_2, \\ u'_1 = a^*_{01}u_0 + a^*_{11}u_1 + a^*_{21}u_2, \\ u'_2 = a^*_{02}u_0 + a^*_{12}u_1 + a^*_{22}u_2. \end{cases}$$

φ_A-t az A mátrix által meghatározott projektív lineáris leképezésnek *nevezzük.*

Figyeljük meg, hogy az u_i-k együtthatóinak az indexei felcserélődtek, azaz ott az együtthatókból alkotott mátrix A^{adj} *transzponáltja.*

Egy másik fontos észrevétel, hogy előfordulhat, hogy különböző mátrixok ugyanazt a projektív leképezést határozzák meg. Szerencsére ezt az esetet könnyen ellenőrizhetjük: A homogén számhármasok definíciója alapján egyszerűen meggondolható, hogy $\varphi_A = \varphi_B$ pontosan akkor teljesül, ha $B = \lambda A$ valamilyen $\lambda \neq 0$ valós számra.

2.10. Tétel. *A projektív lineáris leképezések a projektív sík invertálható egyenestartó transzformációi. Egy projektív lineáris leképezés inverze, illetve kettő ilyen szorzata szintén projektív lineáris leképezés. Speciálisan, $\varphi_A^{-1} = \varphi_{A^{-1}}$ és $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy a $P = P(x_0 : x_1 : x_2)$ pont akkor és csak akkor illeszkedik az $\ell : u_0X_0 + u_1X_1 + u_2X_2 = 0$ egyenesre, ha P'

illeszkedik ℓ'-re. Valóban, (2.1) alapján

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{2} u'_i x'_i &= \sum_{i=0}^{2}\Big(\sum_{j=0}^{2} a^*_{ji}u_j\Big)\Big(\sum_{k=0}^{2} a_{ik}x_k\Big)\\ &= \sum_{i,j,k=0}^{2} a^*_{ji}a_{ik}u_j x_k\\ &= \sum_{j,k=0}^{2} (a^*_{j0}a_{0k}+a^*_{j1}a_{1k}+a^*_{j2}a_{2k})\, u_j x_k\\ &= \det(A)\,(u_0x_0+u_1x_1+u_2x_2),\end{aligned}$$

ami bizonyítja az állítást. A lineáris leképezésekről korábban elmondottak szerint $\varphi_A \circ \varphi_B$-nek a ponthalmazon vett hatása megegyezik φ_{AB} hatásával. Az illeszkedéstartás miatt a pontokon vett hatás meghatározza az egyeneseken vett hatást, így teljesül $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$. Ebből azonnal következik $\varphi_A^{-1} = \varphi_{A^{-1}}$, ami az invertálhatóságot is bizonyítja. □

Vegyük észre, hogy az $m : a_{21}X_0 + a_{21}X_1 + a_{22}X_2 = 0$ egyenes φ_A melletti képe pontosan az $\ell^\infty : X_2 = 0$ végtelen távoli egyenes. Csakugyan, egy pont koordinátái akkor és csakis akkor elégítik ki m egyenletét, ha a pont képének utolsó koordinátája nulla, azaz ha a pont képe illeszkedik ℓ^∞-re. Ez egyrészt azt jelenti, hogy bármely projektív egyeneshez létezik olyan projektív lineáris transzformáció, amely őt a végtelen távoli egyenesbe viszi. Másrészt azt látjuk, hogy φ_A akkor és csak akkor hagyja fixen a végtelen távoli egyenest, ha $a_{20} = a_{21} = 0$. Ekkor $a_{22} \neq 0$, hiszen $\det(A) \neq 0$, és A megfelelő skalárszorosára áttérve elérhetjük, hogy $a_{22} = 1$ legyen.

Ha φ_A fixen hagyja ℓ^∞-t, akkor a közönséges pontokat közönséges pontokba viszi:

$$\varphi_A :\ (x : y : 1) \mapsto (a_{00}x + a_{01}y + a_{02} : a_{10}x + a_{11}y + a_{12} : 1).$$

Láthatóan ez pontosan az

$$(x, y) \mapsto (a_{00}x + a_{01}y + a_{02}, a_{10}x + a_{11}y + a_{12})$$

affin transzformáció hatása az euklidészi síkon. Mivel minden affin leképezés előáll ilyen alakban, beláttuk a következő állítást.

2.11. Állítás. *Kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés áll fenn az euklidészi sík affin transzformációi és projektív sík azon projektív lineáris transzformációi között, amelyek fixen hagyják a végtelen távoli egyenest.* □

Eszerint tehát az $(x, y) \mapsto (a_{11}x + a_{12}y + b_1, a_{21}x + a_{22}y + b_2)$ affin transzformáció által meghatározott projektív lineáris leképezés mátrixa

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Számos számítógépes geometriai programban találkozhatunk az euklidészi sík transzformációjának a fenti mátrixszal történő megadási módjával.

2.12. Tétel (A projektív leképezések alaptétele). *A valós projektív sík egyenestartó transzformációi pontosan a projektív lineáris leképezések.*

Bizonyítás. Legyen α a projektív sík önmagára vett egyenestartó, invertálható leképezése és jelölje m azt a projektív egyenest, amelynek α melletti képe a végtelen távoli ℓ^∞ egyenes. Tudjuk, hogy ekkor létezik φ_A projektív lineáris leképezés, amelyre $\varphi_A(m) = \ell^\infty$. Mivel φ_A egyenestartó és invertálható, ezért $\beta = \alpha \circ \varphi_A^{-1}$ szintén a projektív sík egy egyenestartó invertálható leképezése. Ráadásul $\beta(\ell^\infty) = \alpha(\varphi_A^{-1}(\ell^\infty)) = \alpha(m) = \ell^\infty$, azaz β fixen hagyja a végtelen távoli egyenest.

Mivel β közönséges pontokat és közönséges egyeneseket ugyanilyenbe képez, és ezek között az illeszkedést is megtartja, ezért elmondhatjuk, hogy β meghatározza az euklidészi sík egy egyenestartó, invertálható β_0 leképezését. Az 1.16 tétel szerint β_0 egy $(x, y) \mapsto (a_{11}x + a_{12}y + b_1, a_{21}x + a_{22}y + b_2)$ alakú affin leképezés. Legyen

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ekkor a 2.11 állítás szerint φ_B projektív lineáris leképezés hatása a közönséges pontokon és egyeneseken megegyezik β_0-al. Ez azt jelenti, hogy bármely e közönséges egyenesre $\beta(e) = \beta_0(e) = \varphi_B(e)$, vagyis $\gamma = \beta \circ \varphi_B^{-1}$ olyan egyenestartó projektív transzformáció, amely fixen hagyja az összes projektív egyenest. Ekkor viszont γ csak a projektív sík identikus leképezése lehet, azaz $\beta = \varphi_B = \alpha \circ \varphi_A^{-1}$. Tehát $\alpha = \varphi_B \circ \varphi_A = \varphi_{BA}$ projektív lineáris leképezés. □

Ezek után a projektív sík egyenestartó transzformációit röviden csak *projektív leképezéseknek* fogjuk hívni.

Már említettük, hogy egy síkbeli ponthalmazt általános helyzetűnek nevezünk, ha a nincs három kollineáris eleme. Ez a definíció a projektív síkon is használatos. A homogén koordinátarendszer *alappontjai* az $E_0(1 : 1 : 1)$, $E_1(1 : 0 : 0)$, $E_2(0 : 1 : 0)$ és $E_3(0 : 0 : 1)$ pontok.

2.13. Állítás. *Legyen P_0, P_1, P_2, P_3, illetve Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 a projektív sík két általános helyzetű pontnégyese. Ekkor a síknak pontosan egy olyan φ egyenestartó transzformációja létezik, amelyre $\varphi(P_i) = Q_i$ ($i \in \{0,1,2,3\}$).*

Bizonyítás. Elegendő megmutatni, hogy tetszőlegesen adott pontnégyeshez létezik egy egyértelműen meghatározott projektív leképezés, amely a homogén koordinátarendszer alappontjait ezekbe a pontokba viszi. Csakugyan ha $\alpha(E_i) = P_i$ és $\beta(E_i) = Q_i$ teljesül az α, β projektív leképezésekre, akkor $\varphi = \beta \circ \alpha^{-1}$ eleget tesz $\varphi(P_i) = Q_i$-nek minden $i = 0,1,2,3$ esetén. Ha pedig φ-re több lehetőségünk van, akkor $\beta = \varphi \circ \alpha$-ra is több lehetőség adódik, tehát α és β egyértelműsége bizonyítja φ egyértelműségét.

Rögzítsük tehát tetszőlegeses a $P_0(x_{00} : x_{01} : x_{02})$, $P_1(x_{10} : x_{11} : x_{12})$, $P_2(x_{20} : x_{21} : x_{22})$, $P_3(x_{30} : x_{31} : x_{32})$ általános helyzetű pontnégyest. Tekintsük a pontok koordinátáiból álló

$$\begin{cases} x_{00}C_0 + x_{10}C_1 + x_{20}C_2 + x_{30}C_3 = 0 \\ x_{01}C_0 + x_{11}C_1 + x_{21}C_2 + x_{31}C_3 = 0 \\ x_{02}C_0 + x_{12}C_1 + x_{22}C_2 + x_{32}C_3 = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszert. Mivel az ismeretlenek száma nagyobb az egyenletek számánál, létezik nem-triviális (c_0, c_1, c_2, c_3) megoldás. Bevezetve az $\boldsymbol{x}_i = (x_{i0}, x_{i1}, x_{i2})$ jelölést, az egyenletet

$$c_0\boldsymbol{x}_0 + c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3 = \mathbf{0}$$

alakban írhatjuk fel. Ha a c_i-k közül bármelyik nulla lenne, akkor az azt jelentené, hogy a többi három vektor lineárisan függő, ami azzal ekvivalens, hogy az általuk meghatározott projektív pontok kollineárisak. Mivel itt általános helyzetű pontnégyesről van szó, egyik c_i sem lehet nulla. Bevezetve a $d_i = -c_i/c_0$ jelölést ($i = 1,2,3$), azt kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{x}_0 = d_1\boldsymbol{x}_1 + d_2\boldsymbol{x}_2 + d_3\boldsymbol{x}_3.$$

Ezután könnyű meggondolni, hogy az

$$A = \begin{pmatrix} d_1x_{10} & d_2x_{20} & d_3x_{30} \\ d_1x_{11} & d_2x_{21} & d_3x_{31} \\ d_1x_{12} & d_2x_{22} & d_3x_{32} \end{pmatrix}$$

mátrix által megadott φ_A projektív lineáris leképezés teljesíti a $\varphi(E_i) = P_i$ feltételt. Ez a leképezés értelmes, hiszen

$$\det(A) = d_1\,d_2\,d_3\,\det\begin{pmatrix} x_{10} & x_{20} & x_{30} \\ x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \end{pmatrix} \neq 0. \qquad \square$$

2.14. Következmény. *Ha a valós projektív sík egyenestartó transzformációjának van négy általános helyzetű fixpontja, akkor az csak az identitás lehet.*

Bizonyítás. Az identitás nyilván ilyen, és mivel a 2.13 állítás szerint négy általános helyzetű pont képe egyértelműen meghatározza a projektív leképezést, a szóbanforgó transzformáció csak az identitás lehet. □

2.15. Következmény. *Legyen* $A_1, A_2, A_3 \in e$ *és* $B_1, B_2, B_3 \in f$ *két kollineáris ponthármas, amelyre* $A_i \neq A_j$, $B_i \neq B_j$ *ha* $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$. *Ekkor létezik* φ *projektív leképezés, amelyre* $\varphi(A_i) = B_i$, $i = 1, 2, 3$.

Bizonyítás. Vegyünk e-re illetve f-re nem illeszkedő különböző P_1, P_2, Q_1 és Q_2 pontokat úgy, hogy a P_1, P_2, A_3 illetve a Q_1, Q_2, B_3 ponthármasak kollineárisak. Ekkor az A_1, A_2, P_1, P_2 illetve a B_1, B_2, Q_1, Q_2 pontnégyesek általános helyzetűek, azaz létezik φ projektív leképezés úgy, hogy $\varphi(A_1) = B_1$, $\varphi(A_2) = B_2$, $\varphi(P_1) = Q_1$ és $\varphi(P_2) = Q_2$. A φ egyenestartása miatt

$$\varphi(A_3) = \varphi(A_1A_2 \cap P_1P_2) = B_1B_2 \cap Q_1Q_2 = B_3,$$

amivel bebizonyítottuk az állítást. □

2.16. Állítás. *Ha a valós projektív sík egyenestartó transzformációjának van három egy egyenesen fekvő fixpontja, akkor az egyenes minden pontja fixpont.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy az $\ell^\infty : X_2 = 0$ egyenes $P_0(1 : 1 : 0)$, $P_1(1 : 0 : 0)$ és $P_2(0 : 1 : 0)$ pontjai fixpontjai a $\varphi = \varphi_A$ projektív transzformációnak. Ekkor $P_1 = P_1'(a_{00} : a_{10} : a_{20})$ és $P_2 = P_2'(a_{01} : a_{11} : a_{21})$, tehát $a_{10} = a_{20} = a_{01} = a_{21} = 0$. Továbbá $P_0 = P_0'(a_{00} : a_{11} : 0)$, amiből adódik, hogy $a_{00} = a_{11} = a$ valamely $a \neq 0$ valós számra. Ekkor viszont az $X_2 = 0$ egyenes tetszőleges $P(x_0 : x_1 : 0)$ pontjának a képe $P'(ax_0 : ax_1 : 0) = P$, azaz ℓ^∞ minden pontja fixpontja φ-nek.

Tegyük most fel, hogy φ Q_0, Q_1, Q_2 fixpontjai egy tetszőleges helyzetű e egyenesen fekszenek. Ekkor a 2.15 következmény szerint létezik egy α projektív leképezés, amelyre $\alpha(Q_i) = P_i$, $i = 0, 1, 2$. Definiáljuk a $\beta = \alpha \circ \varphi \circ \alpha^{-1}$ projektív transzformációt, ez teljesíti a $\varphi = \alpha^{-1} \circ \beta \circ \alpha$ egyenlőséget. Igaz továbbá, hogy

$$\beta(P_i) = \alpha(\varphi(\alpha^{-1}(P_i))) = \alpha(\varphi(Q_i)) = \alpha(Q_i) = P_i,$$

azaz P_0, P_1, P_2 β fixpontjai. Már beláttuk, hogy ekkor $\beta(P) = P$ áll fenn minden $P \in \ell^\infty$ pontra, ami azt jelenti, hogy minden $Q \in e$-re $\beta(\alpha(Q)) = \alpha(Q)$ és $\varphi(Q) = \alpha^{-1}(\alpha(Q)) = Q$ teljesül, azaz Q fixpontja φ-nek. □

2.4. Centrális-axiális kollineációk

Ebben az alfejezetben is a projektív sík egyenestartó transzformációival foglalkozunk, ezekre a továbbiakban a *kollineáció* megnevezést is használjuk.

2.17. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a t egyenes a φ kollineáció* tengelye, *ha t minden pontja a φ fixpontja. A P pont a φ* centruma, *ha minden P-re illeszkedő egyenes a φ fixegyenese.*

A definícióból azonnal adódik, hogy egy identitástól különböző kollineációnak legfeljebb egy centruma, illetve tengelye lehet. P_1, P_2 centrumok esetén ugyanis minden olyan Q pontra illeszkedne két fixegyenes, amely nem a P_1P_2 egyenesen fekszik: P_1Q és P_2Q. Két fixegyenes metszéspontja fixpont, azaz a P_1P_2 egyenesen kívül minden pont fixpont. Mivel ekkor minden egyenesen van legalább két fixpont, minden egyenes fixegyenes, és a kollineáció az identitás.

Az előbbi gondolatmenetben a pontok és egyenesek szerepének felcserélésével megmutatható, hogy két tengellyel rendelkező kollineáció csak az identitás lehet.

2.18. Állítás. *Egy kollineációnak akkor és csak akkor van tengelye, ha van centruma.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy t a φ kollineáció tengelye. Ha φ-nek van t-re nem illeszkedő P fixpontja, akkor P centrum. Csakugyan, ha az e egyenes átmegy P-n, akkor e-re legalább két fixpont illeszkedik: egyrészt P, másrészt $Q = e \cap t \neq P$. Két fixpontot összekötő egyenes maga is fix.

Tegyük ezért fel, hogy φ-nek nincs t-n kívüli fixpontja. Tetszőleges $Q \notin t$ pont esetén így $Q \neq Q' = \varphi(Q)$ és $e = QQ'$ egy jól definiált egyenes. Jelölje P az $e \cap t$ pontot, erre teljesül $P = \varphi(P) \neq Q, Q'$ és $e = PQ = PQ'$. Az e egyenes képe $\varphi(e) = \varphi(P)\varphi(Q) = PQ' = e$, vagyis e fixegyenes.

Megmutatjuk, hogy P centruma φ-nek. Tekintsünk ugyanis egy tetszőleges P-re illeszkedő $f \neq t$ egyenest és vegyünk ezen egy $R \notin t$ pontot, $R' = \varphi(R)$. Az előbb látottak szerint $g = RR'$ fixegyenes. Mivel az e és g fixegyenesek metszéspontja fixpont, az csak t-nek egy pontja lehet: $e \cap g = g \cap t = e \cap t = P$. Ez azt jelenti, hogy mind f, mind pedig g tartalmazza a P és R pontokat, azaz $f = g = PR$ fixegyenes.

Az állítás megfordítása, nevezetesen, hogy a centrum létezése garantálja a tengely meglétét, az előző bizonyítás felhasználásával mutatható meg az egyenesek és a pontok szerepének felcserélésével. □

Megjegyzés. Mivel a projektív síkon az egyenesek és a pontok szerepe szimmetrikus, minden fogalmat és állítást átfogalmazhatunk úgy, hogy felcseréljük a pontok és az egyenesek szerepét. Ezt az elvet **dualitásnak**

hívjuk, az így nyert fogalmakat és állításokat pedig *duális fogalmaknak* és *állításoknak* nevezzük.

2.19. Definíció. *Azokat a projektív transzformációkat, amelyeknek van tengelye és centruma,* centrális-axiális kollineációknak *nevezzük.*

2.20. Állítás. *Legyen φ centrális-axiális kollineáció t tengellyel és P centrummal és tegyük fel, hogy ismerjük a $Q \neq P$, $Q \notin t$ pont $Q' = \varphi(Q)$ képét. Ekkor bármely R pontra $R' = \varphi(R)$ vonalzóval megszerkeszthető.*

Bizonyítás. Nézzük először azt az esetet, amikor R nem illeszkedik a PQ egyenesre. Ekkor a PR egyenes fix, mivel átmegy a centrumon, ezért tartalmazza R'-t. A $T = QR \cap t$ pont és a Q, R pontok három különböző kollineáris pont, azaz R'-t tartalmazza a QT egyenes $Q'T$ képe. Ebből adódik $R' = PR \cap Q'T$.

Ha $R \in PQ$, akkor veszünk egy tetszőleges $S \notin PQ$ pontot. Ennek S' képét a fentiek szerint meg tudjuk szerkeszteni. Az R képe ekkor $R' = PQ \cap S'U$, ahol $U = SR \cap t$. □

Ezen állítás dualizálásával nyerjük, hogy egy centrális-axiális kollineációt egyetlen egyenesnek és képének az ismerete egyértelműen meghatároz.

2.21. Definíció. *Az euklidészi sík azon egyenestartó transzformációit, amelyek re igaz, hogy minden egyenes párhuzamos a képével,* homotéciáknak *nevezzük.*

A definíciókból azonnal következik az alábbi állítás.

2.22. Állítás. *A homotéciák pontosan azok az affin transzformációk, amelyek a kibővített euklidészi síknak olyan centrális-axiális kollineációját határozzák meg, melynek tengelye az ℓ^∞ végtelen távoli egyenes.* □

A 2.11 állítás és a projektív lineáris leképezések definíciója szerint a $\varphi : (x, y) \mapsto (a_{11}x + a_{12}y + b_1, a_{21}x + a_{22}y + b_2)$ affin transzformáció az $(x_0 : x_1 : 0)$ végtelen távoli pontot az $(a_{11}x_0 + a_{12}x_1 : a_{21}x_0 + a_{22}x_1 : 0)$ pontba viszi. Tehát φ akkor és csakis akkor homotécia, ha $a_{11} = a_{22} = a \neq 0$ és $a_{12} = a_{21} = 0$. Tehát a homotéciák koordinátás alakja

$$\varphi : (x, y) \mapsto (ax + b_1, ay + b_2), \qquad a, b_1, b_2 \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Ha $a = 1$, akkor φ eltolás és a centruma a $(b_1 : b_2 : 0)$ végtelen távoli pont. Ha $a \neq 1$, akkor φ középpontos nyújtás a aránnyal és $\left(\frac{b_1}{1-a}, \frac{b_2}{1-a}\right)$ centrummal.

A homotéciák felhasználásával meggondolhatjuk, hogy a projektív síknak „kellően sok” centrális-axiális kollineációja van.

2.23. Állítás. *Legyen t a projektív sík tetszőleges egyenese és P, Q és Q' három tetszőleges projektív pont úgy, hogy $Q, Q' \notin t$, P, Q, Q' kollineárisok és $Q, Q' \neq P$. Ekkor pontosan egy olyan φ centrális-axiális kollineáció létezik, amelynek t tengelye, P centruma és Q képe Q'.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $t = \ell^\infty$ a végtelen távoli egyenes. Ha $P \in t$, akkor φ csak az az eltolás lehet, amely Q-t Q'-be viszi. Valóban, ennek centruma a QQ' végtelen távoli pontja, azaz P. Ha P közönséges pont, akkor egy egyértelműen meghatározott P nyújtás viszi Q-t Q'-be, hiszen P, Q és Q' kollineárisak.

Tekintsük most az általános esetet, és vegyünk egy olyan α transzformációt, amely t-t ℓ^∞-be viszi. Legyen $R = \alpha(P)$, $S = \alpha(Q)$ és $S' = \alpha(S)$. Mivel ekkor R, S, S' kollineárisak, az előzőek alapján létezik egy ψ centrális-axiális kollineáció, melynek tengelye ℓ^∞, centruma R és $S' = \psi(S)$. Könnyen leellenőrizhető, hogy ekkor a $\varphi = \alpha^{-1} \circ \psi \circ \alpha$ projektív leképezés teljesíti az állításban támasztott feltételeket. □

2.5. A teljes négyoldal projektív tulajdonságai

Mindenkinek van egy szemléletes képe arról, hogy mit jelent azt, hogy egy egyenesen egy pontpár *elválaszt* két pontot. Azt precízen az alábbi módon definiálhatjuk.

2.24. Definíció. *Legyenek A_1, A_2, B_1, B_2 egy közönséges egyenesre eső különböző pontok. Azt mondjuk, hogy az A_1, A_2 pontpár* elválasztja *a B_1, B_2 pontpárt, ha A_1, A_2 közönséges pontok és az $\overline{A_1A_2}$ zárt szakasz a B_1, B_2 pontok közül pontosan az egyiket tartalmazza, illetve ha A_1, A_2 valamelyike végtelen távoli és a másik a $\overline{B_1B_2}$ zárt szakasz belső pontja.*

Mivel közönséges pontok közrefogása affin invariáns, azaz affin transzformáció nem változtat rajta, az elválasztás fogalma is affin invariáns. Könnyen meggondolható, hogy a vetítés szintén megőrzi a elválasztást. (Ellentétben a közrefogással.)

2.25. Definíció. *Legyen adott négy általános helyzetű egyenes a projektív síkon: e_1, e_2, e_3, e_4. A $P_{ij} = e_i \cap e_j$ ($i, j \in \{1,2,3,4\}$, $i \neq j$) pontokat* csúcspontoknak, *az $a_1 = P_{12}P_{34}$, $a_2 = P_{13}P_{24}$, $a_3 = P_{14}P_{23}$ egyeneseket* átlóknak, *az $A_1 = a_2 \cap a_3$, $A_2 = a_1 \cap a_3$, $A_3 = a_1 \cap a_2$ pontokat* átlós pontoknak *nevezzük. Az egyenesek, az átlók, csúcspontok és átlós pontok összességét* teljes négyoldalnak *nevezzük.*

2.26. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $\{A_1, A_2\}$ pontpár* harmonikusan elválasztja *a $\{C_1, C_2\}$ pontpárt, ha mind a négy pont egy egyenesre esik és létezik egy olyan teljes négyoldal, melynek A_1, A_2 átlós pontjai, C_1, C_2 pedig csúcspontjai.*

A definícióból és a projektív transzformációk egyenestartásából azonnal adódik a következő állítás.

2.27. Állítás. *A harmonikus elválasztás* projektív invariáns, *azaz ha* A_1, A_2 *harmonikusan választja el* C_1, C_2*-t akkor minden* φ *projektív transzformáció esetén* $\varphi(A_1), \varphi(A_2)$ *is harmonikusan választja el* $\varphi(C_1), \varphi(C_2)$*-t.* □

2.28. Állítás. *Ha* A_1, A_2, C_1 *az* e *egyenes három különböző pontja, akkor pontosan egy* $C_2 \in e$ *pont létezik úgy, hogy* A_1, A_2 *harmonikusan válasszák el* C_1, C_2*-t.*

Bizonyítás. A projektív invariancia miatt feltehetjük, hogy $e = \ell^\infty$ a végtelen távoli egyenes. (A bizonyítás ezen módszere lényegében megegyezik a 2.16 és 2.23 állítások bizonyításában használt módszerrel.) Jelölje e_1, e_2, e_3, e_4 a teljes négyoldal oldalegyeneseit, ekkor megfelelő indexeléssel $e_1 \parallel e_2$ és $e_3 \parallel e_4$ adódik, vagyis a négyoldalt egy paralelogramma határozza meg. A tény, hogy A_1, A_2 és C_1 adott, azt jelenti, hogy ismerjük a paralelogramma oldalainak és egyik átlójának párhuzamossági osztályait. Elemi úton is meggondolható, hogy ekkor a paralelogramma egy homotécia erejéig egyértelműen meg van határozva, más szóval két megfelelő paralelogrammához létezik egy olyan homotécia, amely az egyiket a másikba viszi. Ez azt jelenti, hogy a három adott párhuzamossági osztály egyértelműen meghatározza a másik átló párhuzamossági osztályát, ami egyértelműen meghatározza a C_2 végtelen távoli átlós pontot. □

2.29. Állítás. *A harmonikus elválasztás invariáns a vetítésre.*

Bizonyítás. Legyen $A_1, A_2, C_1, C_2 \in e$ és $B_1, B_2, D_1, D_2 \in f$, $e \neq f$ és tegyük fel, hogy valamely $P \notin e, f$ pontra a $\pi_{e,f,P}$ vetítés az A_1, A_2, C_1, C_2 pontokat rendre a B_1, B_2, D_1, D_2 pontokba viszi. Rögzítsünk egy tetszőleges, e-től és f-től különböző t egyenest, amely átmegy a $T = e \cap f$ metszésponton. Ekkor a 2.23 állítás szerint létezik egy t tengelyű, P centrumú centrális-axiális kollineáció, amely A_1-t B_1-be viszi, jelöljük ezt φ-vel. $T \in t$ miatt T fixpont, ezért $e = TA_1$ képe $f = TB_1$. A P-re illeszkedő egyenesek mind fixek, azaz az A_2, C_1, C_2 pontok φ melletti képei rendre B_2, D_1, D_2. Mivel φ projektív transzformáció, ezért elmondhatjuk, hogy A_1, A_2 akkor és csak akkor választják el harmonikusan C_1, C_2-t, ha a B_1, B_2 ugyanígy tesz D_1, D_2-vel. □

Természetes elvárás, hogy a harmonikus elválasztás megfeleljen az alfejezet elején definiált szemléletes elválasztás fogalmának is.

2.30. Állítás. *Ha egy közönséges egyenes* A_1, A_2 *pontjai harmonikusan elválasztják* B_1, B_2*-t, akkor elválasztják őket a 2.24 definíció értelmében is.*

Bizonyítás. Egy négyzet átlójára két szemközti C_1, C_2 csúcspontja, egy közönséges A_1 átlóspontja és egy végtelen távoli A_2 átlóspontja illeszkedik, mivel a négyzet által meghatározott teljes négyoldal harmadik átlója a végtelen távoli egyenes. Ebben az esetben tehát a két átlós pont harmonikusan és szemléletes is elválasztja a két csúcspontot. Ha most egy tetszőleges e egyenesen az B_1, B_2 pontok harmonikusan választják el D_1, D_2-t, akkor mozgassuk el e-t úgy, hogy B_1 A_1-be kerüljön és jelöljük P-vel az $A_2B_2 \cap C_1D_1$ pontot. A 2.28 és 2.29 állítások szerint ekkor C_2 vetülete D_2, és így kapjuk, hogy B_1, B_2 is elválasztja D_1, D_2-t a szemléletes értelemben is. □

Végezetül meggondoljuk, hogy a harmonikus elválasztás szimmetrikus. A projektív invariancia miatt ezt elegendő arra az esetre megmutatni, amikor $A_1(1:0:0)$, $A_2(0:1:0)$ és $C_1(1:1:0)$. Ekkor a teljes négyoldalt tudjuk úgy választani, hogy azt az euklidészi sík $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ négyzete határozza meg. Ekkor a C_2 csúcspont homogén koordinátái $C_2(-1:1:0)$. A C_1, C_2 illetve A_1, A_2 pontok viszont a $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ egységnégyzet átlós pontjai illetve csúcspontjai, ami bizonyítja az állítást.

Ennek fényében a továbbiakban a „két pontpár harmonikusan választja el *egymást*" megfogalmazást fogjuk használni.

2.6. Az euklidészi sík projektív transzformációi

Korábban láttuk, hogy az euklidészi sík $(x,y) \mapsto (a_{11}x + a_{12}y + b_1, a_{21}x + a_{22}y + b_2)$ affin transzformációja a végtelen távoli elemekkel kibővített síkon az

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixszal megadott projektív lineáris leképezésnek felel meg. Tekintsünk most egy általános

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \det(A) \neq 0$$

mátrix által meghatározott φ_A projektív leképezést. Mint már említettük, pontosan az $m : a_{20}X_0 + a_{21}X_1 + a_{22}X_2 = 0$ projektív egyenes pontjai azok, amelyek φ_A melletti képei végtelen távoli pontok. Ha φ_A nem affin transzformáció, azaz $m \neq \ell^\infty$, akkor m az $a_{20}X + a_{21}Y + a_{22} = 0$ egyenletű közönséges egyenes. A $P(x,y) \notin m$ közönséges pont $P' = \varphi_A(P)$ képe a

$$P'(a_{00}x + a_{01}y + a_{02} : a_{10}x + a_{11}y + a_{12} : a_{20}x + a_{21}y + a_{22})$$

projektív pont. Mivel feltevés szerint a P' utolsó homogén koordinátája nem nulla, P' megadható a

$$P'\Big(\frac{a_{00}x + a_{01}y + a_{02}}{a_{20}x + a_{21}y + a_{22}} : \frac{a_{10}x + a_{11}y + a_{12}}{a_{20}x + a_{21}y + a_{22}} : 1\Big)$$

homogén számhármassal is. Ez azt jelenti, hogy a $\varphi_A : P \mapsto P'$ alakja euklidészi koordinátákkal az m egyenesen kívül

$$\psi_A : P(x, y) \mapsto P'\Big(\frac{a_{00}x + a_{01}y + a_{02}}{a_{20}x + a_{21}y + a_{22}}, \frac{a_{10}x + a_{11}y + a_{12}}{a_{20}x + a_{21}y + a_{22}}\Big). \qquad (2.2)$$

2.31. Definíció. *Legyen $A = (a_{ij})$ $3\times$-as mátrix nullától különböző determinánssal. Ekkor a (2.2) alakú ψ_A leképezéseket az euklidészi sík A által meghatározott* törtlineáris leképezésének *nevezzük. Az $m : a_{20}X + a_{21}Y + a_{22} = 0$ egyenest, amennyiben közönséges egyenes, a ψ_A* szinguláris egyenesének *hívjuk.*

2.32. Állítás. *A törtlineáris leképezések a szinguláris egyenesen kívül jól definiált egyenestartó leképezések. Adott törtlineáris leképezés esetén két egyenes képe akkor és csak akkor párhuzamos, ha az egyenesek metszéspontja a szinguláris egyenesen fekszik.*

Bizonyítás. Mindkét állítás következik a definícióból, valamint a kibővített euklidészi sík projektív leképezéseinek tulajdonságaiból. □

Egy törtlineáris leképezés nyilván pontosan akkor affin transzformáció, ha nincs szinguláris egyenese. Ezt fogalmazza meg egy kicsit bővebben a következő tétel.

2.33. Tétel. *Tekintsük az euklidészi sík ψ törtlineáris leképezését. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

- *(i)* *ψ affin transzformáció.*
- *(ii)* *ψ-nek nincs szinguláris egyenese.*
- *(iii)* *ψ az egész síkon értelmezett.*
- *(iv)* *Párhuzamos egyenesek ψ melletti képei szintén párhuzamosak, azaz minden e, f esetén $e \parallel f \iff \psi(e) \parallel \psi(f)$.*
- *(v)* *ψ osztóviszonytartó.*

Bizonyítás. Az (i), (ii), (iii) pontok ekvivalenciája triviális és az 1.12 tétel szerint $(i) \Longrightarrow (v)$. Ha feltesszük (v)-t, akkor bármely P ponthoz választunk olyan tőle különböző, de vele kollineáris P_1, P_2 pontokat, amelyekben ψ értelmes. Ekkor P képe a $\psi(P_1)\psi(P_2)$ egyenes azon egyértelműen meghatározott P' pontja, amelyre teljesül $(P_1P_2P) = (\psi(P_1)\psi(P_2)P')$. Tehát ψ

mindenütt értelmezett és $(v) \implies (iii)$. Végül (ii) és (iv) ekvivalenciája következik abból az észrevételből, hogy két egyenes ψ melletti képe akkor és csak akkor párhuzamos, ha az egyenesek ψ szinguláris egyenesén metszik egymást. □

A fentiek értelmében minden projektív leképezés meghatároz az euklidészi sík egy nem feltétlenül mindenütt értelmezett egyenestartó transzformációját. Ezen belül beszélhetünk az euklidészi sík centrális-axiális kollineációiról is, persze ekkor a centrum és a tengely fogalmát kiterjesztjük a végtelen távoli elemekre is.

2.34. Definíció. *Legyen φ olyan affin transzformáció, amelynek létezik egy ℓ pontonként fix egyenese és amelyre a $P\varphi(P)$ alakú egyenesek ($P \notin \ell$) egyetlen párhuzamossági osztályt alkotnak. Ekkor azt mondjuk φ ℓ tengelyű* nyírás, *illetve* párhuzamos nyújtás, *attól függően, hogy ℓ beletartozik-e a szóbanforgó párhuzamossági osztályba vagy sem.*

Az nyilvánvaló, hogy a nyírások és párhuzamos nyújtások pontosan azok a centrális-axiális kollineációk, amelyeknek tengelye közönséges egyenes, centruma pedig végtelen távoli pont. A nyírások esetében a centrum illeszkedik a tengelyre, a párhuzamos nyújtások esetében nem.

2.35. Állítás. *Legyen ψ az euklidészi sík identitástól különböző centrális-axiális törtlineáris leképezése t tengellyel és C centrummal. Ekkor ψ-re az alábbi táblázatban leírt esetek egyike áll fenn.*

t tengely	*C centrum*	*illeszkedés*	*ψ jellemzése*
végtelen távoli	*végtelen távoli*	$C \mid t$	*eltolás*
végtelen távoli	*közönséges*	$C \nmid t$	*középpontos nyújtás*
közönséges	*végtelen távoli*	$C \mid t$	*nyírás*
közönséges	*végtelen távoli*	$C \nmid t$	*párhuzamos nyújtás*
közönséges	*közönséges*	–	*nem affin transzformáció (tengelyes perspektivitás)*

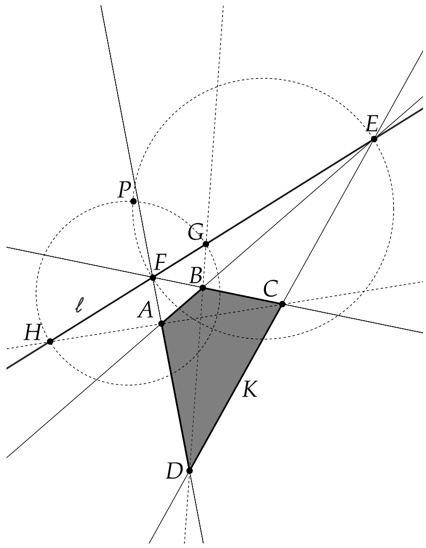
Bizonyítás. Az első két esetet tárgyaltuk a homotéciáknál, ld. a 2.22 állítást. A második két eset pont az imént definiált nyírás és párhuzamos nyújtás esete. A harmadik esetben csak azt kell meggondolnunk, hogy ψ pontosan abban az esetben nem affin, ha mind a tengely, mind pedig a centrum közönséges elem. Valóban, ekkor a végtelen távoli egyenes nem tengely és nem is illeszkedik a centrumra, valamint $\psi \neq \mathrm{id}$, így a végtelen távoli egyenes nem lehet fixegyenes és ψ a 2.33 tétel szerint nem lehet affin transzformáció. □

2.36. Definíció. *A közönséges centrummal és tengellyel rendelkező centrális-axiális kollineációkat* tengelyes perspektivitásoknak *is nevezzük. Azokat a párhuzamos nyújtásokat, ahol a centrum által meghatározott párhuzamossági osztály (a nyújtás „iránya") merőleges a tengelyre,* merőleges nyújtásoknak *nevezzük.*

Az alfejezet végén egy olyan centrális-axiális kollineációkra vonatkozó tételeket bizonyítunk, amelyek fontos szerepet játszanak a perspektivikus ábrázolások elméletében.

2.37. Tétel. *Legyenek A, B, C, D a K négyszög csúcsai az euklidészi síkon és tegyük fel, hogy a szemközti AB, CD illetve BC, DA oldalpárok közül legalább az egyik nem párhuzamos. Ekkor létezik olyan φ tengelyes perspektivitás, amely az A, B, C, D pontokat egy egységnégyzet négy egymást követő csúcsaiba viszi.*

Bizonyítás. Jelölje ℓ az $E = AB \cap CD$ és $F = BC \cap DA$ metszéspontokat összekötő egyenest. A feltétel szerint legalább az egyik metszéspont közönséges, azaz ℓ közönséges egyenes. Az E, F illetve $H = \ell \cap AC$ és $G = \ell \cap BD$ pontok a K négyszög által meghatározott teljes négyoldal csúcspontjai illetve átlós pontjai, mint a 2.30 állításban láttuk, ezek elválasztják egymást a szemléletes értelemben. Ebben az esetben az E, F illetve H, G szakaszok fölé rajzolt Thálész-köröknek létezik metszéspontjuk (ld. a 2.2 feladatot), jelöljünk egy ilyet P-vel. (Lásd a 2.1 ábrát.) Amennyiben az E, F valamelyike végtelen távoli, akkor Thálész-kör helyett a másikba állított ℓ-re merőleges egyenest veszünk, és hasonlóan járunk el, ha H, G valamelyike végtelen távoli.



2.1. ábra: Tengelyes perspektivitás

Vegyünk most egy tetszőleges, ℓ-el párhuzamos t egyenest a $t \neq \ell$ és $P \notin t$ feltételekkel, és legyen φ_1 egy olyan t tengelyű és P centrumú centrális-axiális kollineáció, amely ℓ-et az ℓ^∞ végtelen távoli egyenesbe viszi. A 2.23 állítás szerint ilyen létezik, a 2.33 tétel szerint φ_1 tengelyes perspektivitás ℓ szinguláris egyenessel. Legyen $A' = \varphi_1(A)$, $B' = \varphi_1(B)$, $C' = \varphi_1(C)$, $D' = \varphi_1(D)$.

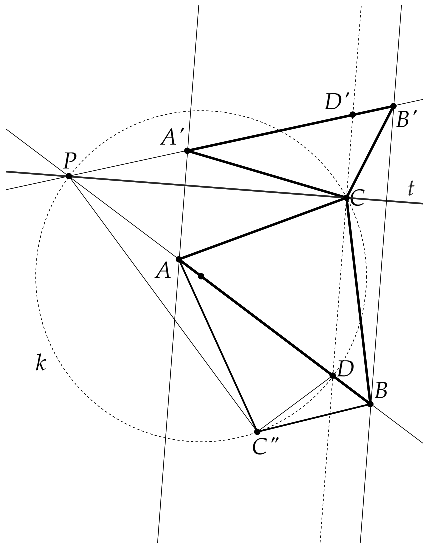
Mivel az AB és CD egyenesek E metszéspontja ℓ-en fekszik, $A'B' \parallel C'D'$, lásd a 2.32 állítást. Hasonlóan, $B'C' \parallel D'A'$, tehát a $K' = A'B'C'D'$ négyszög paralelogramma. Az AB és PE egyenesek metszéspontja szintén ℓ-beli, ezért $A'B'$ párhuzamos PE képével, ami viszont saját maga, mert P centrum. Tehát $A'B' \parallel PE$ és hasonló okból $A'D' \parallel PF$. Mivel P illeszkedik az EF szakasz Thálész-körére, ezért $PE \perp PF$, és így $A'B' \perp A'D'$, vagyis K' téglalap.

Hasonló trükkel mutatjuk meg, hogy K' átlói merőlegesek egymásra: $AC \cap PH \in \ell$, így $A'C' \parallel PH$; hasonlóan $B'D' \parallel PG$, és mivel a $PHG\triangle$ derékszögű, $A'C' \perp B'D'$. Ez azt jelenti, hogy a K' téglalap átlói merőlegesek egymásra, azaz K' négyzet.

Végezetül jelölje φ_2 a P centrumú, $1/a$ arányú homotéciát, ahol a a K' négyzet oldalhossza és legyen $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$. Ekkor nyilván φ egy P centrumú centrális-axiális kollineáció, amely az $ABCD$ négyszöget egységnégyzetbe viszi. φ_2 tengelye a végtelen távoli egyenes, így φ tengelyének közönségesnek kell lennie, mert különben $\varphi_1 = \varphi_2^{-1} \circ \varphi$ tengelye is ℓ^∞ lenne. Tehát φ a keresett tengelyes perspektivitás. □

2.38. Tétel. *Adott $ABC\triangle$ és $A_0B_0C_0\triangle$ háromszögekhez létezik ψ merőleges nyújtás, amelynek tengelye átmegy C-n és amely az $ABC\triangle$-t egy $A_0B_0C_0\triangle$-höz hasonló háromszögbe viszi.*

Bizonyítás. Legyen α olyan hasonlósági transzformáció, amelyre $\alpha(A_0) = A$ és $\alpha(B_0) = B$, ennek létezéséhez ld. a 2.3 feladatot. Definiáljuk a $C'' = \alpha(C_0)$ pontot és jelölje k azt a kört, amelynek a középpontja az AB egyenesen van és tartalmazza C-t és C''-t. Jelölje D, P a k kör AB-n fekvő átmérőjének két végpontját. Legyen β olyan hasonlósági transzformáció, amely P-t fixen hagyja és C''-t a C pontba viszi és tekintsük az $A' = \beta(A)$, $B' = \beta(B)$, $D' = \beta(D)$ pontokat. (Lásd a 2.2 ábrát.) Ekkor nyilván az $A'B'C\triangle$ hasonló az eredetileg adott $A_0B_0C_0\triangle$-höz. Mivel β osztóviszonytartó, így $(PAB) = (PA'B')$ és $(PAD) = (PA'D')$, és a párhuzamos szelők tétele szerint $AA' \parallel BB' \parallel DD'$. (A párhuzamos szelők tételével kapcsolatosan lásd a 2.4 feladatot.) A Thálész-kör miatt a $PDC''\triangle$ C''-nél levő szöge derékszög, ezért a β melletti képe is az: $PCD'\sphericalangle = 90°$. Másrészről a k Thálész-köre a $PCD\triangle$-nek is, azaz $PCD\sphericalangle = 90°$, tehát $C \in DD'$ és $DD' \perp t$. Ez viszont azt jelenti, hogy az AA', BB' egyenesek szintén merőlegesek t-re.



2.2. ábra: Merőleges nyújtás

Legyen ψ az a centrális-axiális kollineáció, melynek tengelye t, centruma a t-re merőleges egyenesek végtelen távoli pontja és amely A-t A'-be viszi. Ekkor ψ merőleges nyújtás, amely létezése a 2.23 állításból következik. Ekkor a t-re merőleges egyenesek ψ fixegyenesei és $\psi(PA) = PA'$, azaz $\psi(B) = B'$ és az $ABC\triangle$ ψ melletti képe az $A'B'C\triangle$, amely hasonló az $A_0B_0C_0\triangle$-höz. □

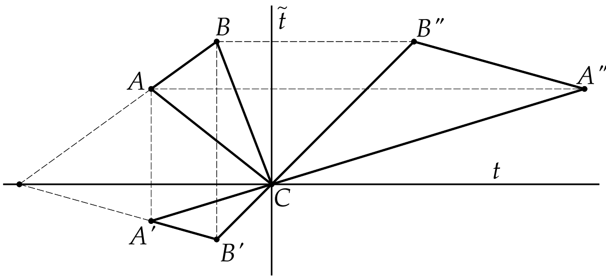
2.39. Következmény. *Legyenek A, B, C, D a K négyszög csúcsai az euklidészi síkon. Ekkor létezik olyan φ centrális-axiális kollineáció, amely az A, B, C, D pontokat egy négyzet négy egymást követő csúcsaiba viszi. A φ akkor és csak akkor affin transzformáció, ha $AB \parallel CD$ és $BC \parallel DA$.*

Bizonyítás. Csak az az eset szorul bizonyításra, amikor $ABCD$ paralelogramma. Ekkor a 2.38 tétel szerint létezik ψ párhuzamos nyújtás, amely az $ABC\triangle$-t egy egyenlőszárú, derékszögű háromszögbe viszi. Mivel φ affin transzformáció, ezért párhuzamos egyenesek képei is párhuzamosak (ld. a 2.33 tételt), ezért φ az $ABCD$ paralelogrammát négyzetbe képezi. □

A későbbi alkalmazhatóság szempontjából a 2.38 tétel további pontosításra szorul.

2.40. Lemma. *Legyen ψ olyan t tengelyű, λ arányú merőleges nyújtás, amely az $ABC\triangle$-et az $A'B'C\triangle$-be viszi. Legyen $\tilde{t}$ a t-re C-ben állított merőleges, $\tilde{\lambda} = 1/\lambda$ és legyen $\tilde{\psi}$ a $\tilde{t}$ tengelyű, $\tilde{\lambda}$ arányú merőleges nyújtás. Ekkor az $A'B'C\triangle$ és $A''B''C\triangle = \tilde{\psi}(ABC\triangle)$ háromszögek hasonlók.*

Bizonyítás. Az $\alpha = \tilde{\psi} \circ \psi^{-1}$ kollineáció nyilván fixen hagyja a C pontot és a $t, \tilde{t}$ egyeneseket, és teljesül $\alpha(A'B'C\triangle) = A''B''C\triangle$. Elegendő tehát megmutatni, hogy α hasonlósági transzformáció. A ψ^{-1} merőleges nyújtás a t egyenesen az identitás, a $\tilde{t}$-n pedig $1/\lambda$ arányú nyújtás. Hasonlóan, a $\tilde{\psi}$ a $\tilde{t}$-n identitás, t-n pedig $\tilde{\lambda} = 1/\lambda$ arányú nyújtás. Ezek α szorzata tehát mind t-n, mind pedig $\tilde{t}$-n $1/\lambda$ arányú nyújtást határoz meg. Mivel α affin transzformáció, így a párhuzamosság megtartása miatt nem lehet más, mint a C középpontú, $1/\lambda$ arányú centrális nyújtás. □



2.3. ábra:

2.41. Állítás. *Adott $ABC\triangle$ és $A_0B_0C_0\triangle$ háromszögekhez létezik ψ merőleges nyújtás, melynek aránya abszolút értékben nagyobb 1-nél és amely az $ABC\triangle$-t egy $A_0B_0C_0\triangle$-höz hasonló háromszögbe viszi.*

Bizonyítás. Legyen ψ a 2.38 tétel szerint létező merőleges nyújtás. Ha $\lambda < 1$, akkor a 2.40 lemma szerint $\tilde{\psi}$ egy minden szempontból megfelelő merőleges nyújtás. □

2.7. Feladatok

2.1. feladat. Bizonyítsuk be az eddig használt koordinátageometriai eszközökkel a Thálész-tételt.

2.2. feladat. Legyenek A, B, C, D az e egyenes közönséges pontjai és tegyük fel, hogy A, B elválasztja C, D-t a 2.24 definíció értelmében. Mutassa meg, hogy ekkor az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ szakaszok fölé írt Thálész-körök két pontban metszik egymást. Mit mondhatunk arról az esetről, ha a négy pont valamelyike végtelen távoli?

2.3. feladat. Mutassa meg, hogy az euklidészi sík adott P_1, P_2, Q_1, Q_2 pontjaihoz ($P_1 \neq P_2$, $Q_1 \neq Q_2$) pontosan két hasonlósági transzformáció létezik, amely P_1-et Q_1-be, P_2-t pedig Q_2-be viszi.

2.4. feladat. (Párhuzamos szelők tétele.) Legyenek e_1, e_2 a P pontra illeszkedő különböző egyenesek az euklidészi síkban. Az $A_1, B_1 \in e_1$, $A_2, B_2 \in e_2$ pontokra akkor és csakis akkor teljesül $(PA_1B_1) = (PA_2B_2)$, ha az A_1A_2 és B_1B_2 egyenesek párhuzamosak.

2.5. feladat. Legyenek e_1, e_2 a P pontra illeszkedő különböző egyenesek az euklidészi síkban. Az $A_1, B_1, C_1 \in e_1$, $A_2, B_2, C_2 \in e_2$ pontokra akkor és csakis akkor teljesül $(A_1B_1C_1) = (A_2B_2C_2)$, ha az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 egyenesek mind párhuzamosak.

2.6. feladat. Adott $ABC\triangle$ és $A_0B_0C_0\triangle$ háromszögekhez keressük meg az *összes* olyan merőleges nyújtást, amely az $ABC\triangle$-t egy $A_0B_0C_0\triangle$-höz hasonló háromszögbe viszi.

3. fejezet

A vetítések geometriája

3.1. Az euklidészi tér alapfogalmai

A **háromdimenziós euklidészi tér** ponthalmaza $\mathbb{R}^3$, a $P_1(x_1, y_1, z_1)$ illetve $P_2(x_2, y_2, z_2)$ pontok **távolsága**

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

A **skalárszorzat** fogalmának felhasználásával ezt $d(P_1, P_2) = \sqrt{(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)^2}$ alakban is írhatjuk.

A **síkok** az $aX + bY + cZ + d = 0$ alakú egyenletek megoldáshalmazai, ahol a, b, c nem mindegyike nulla. Az $\boldsymbol{a} = (a, b, c)$ vektor **a sík normálvektora,** ez egy nem nulla konstans szorzó erejéig van meghatározva. A $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektorokat, ahol P_1, P_2 a Σ sík pontjai, **Σ-beli vektoroknak** nevezzük. Ezek pontosan a Σ normálvektorára merőleges vektorok, ezek halmazát V_Σ-val jelöljük.

Fel szeretnénk hívni a figyelmet a Σ és V_Σ halmazok közötti különbségtételre. Egyrészről Σ elemei *pontok*, míg V_Σ elemei „csak" vektorok, másrészről a Σ pontjainak helyvektorai általában nem Σ-beli vektorok. $\Sigma = V_\Sigma$ pontosan abban az esetben teljesül, ha $d = 0$.

Tekintsünk három $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ Σ-beli vektort, ezek mindegyike merőleges a Σ sík $\boldsymbol{a}$ normálvektorára. A Cramer-szabály szerint ekkor a három vektor lineárisan függő, azaz $c_1\boldsymbol{u} + c_2\boldsymbol{v} + c_3\boldsymbol{w} = 0$ teljesül valamilyen nem csupa nulla $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ számra. Ha $c_3 \neq 0$, akkor még az is igaz, hogy $\boldsymbol{w}$ előáll $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{v}$ lineáris kombinációjaként. Speciálisan, ha $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ lineárisan függetlenek, akkor c_3 nem lehet nulla, és ekkor minden Σ-beli $\boldsymbol{w}$ vektor előáll $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ lineáris kombinációjaként. Fordítva, az $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{v}$ lineáris kombinációjaként előálló vektorok mind merőlegesek $\boldsymbol{a}$-ra, tehát

$$V_\Sigma = \{\lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{v} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Legyen P_1, P_2, P_3 a tér három pontja és tegyük fel, hogy ezek nem illeszkednek egy egyenesre, ekkor a $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$ vektorok nem egymás skalárszorosai, vagyis lineárisan függetlenek. A térbeli Q pont akkor és csak akkor illeszkedik Σ-ra, ha $\overrightarrow{P_1Q}$ Σ-beli vektor, ami ekvivalens olyan $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ számok létezésével, amelyre

$$\overrightarrow{P_1Q} = \lambda\,\overrightarrow{P_1P_2} + \mu\,\overrightarrow{P_1P_3}.$$

Koordinátákkal kifejezve azt kapjuk, hogy ha az $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1$ vektorok nem egymás skalárszorosai, akkor a $P_1(\boldsymbol{x}_1)$, $P_2(\boldsymbol{x}_2)$, $P_3(\boldsymbol{x}_3)$ pontok egyértelműen meghatároznak egy Σ síkot, melynek minden pontja $Q(\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{y} = x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v} + \boldsymbol{x}_1$ alakú. Ez azt jelenti, hogy az

$$\boldsymbol{r} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad \boldsymbol{r}(x, y) = x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v} + \boldsymbol{x}_1 \tag{3.1}$$

leképezés bijekció az euklidészi sík és Σ között; ezt a Σ sík **(lineáris) paraméterezésének** mondjuk. Könnyen meggondolható, hogy minden olyan (3.1) alakú leképezés, ahol $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ lineárisan függetlenek, egy sík paraméterezése.

Legyenek $Q_1 = \boldsymbol{r}(x_1, y_1)$ és $Q_2 = \boldsymbol{r}(x_2, y_2)$ tetszőleges pontok a P_1, P_2, P_3 pontok által meghatározott Σ síkon. Ekkor

$$\begin{aligned} d(Q_1, Q_2) &= \sqrt{(\boldsymbol{r}(x_1, y_1) - \boldsymbol{r}(x_2, y_2))^2} \\ &= \sqrt{((x_1 - x_2)\boldsymbol{u} + (y_1 - y_2)\boldsymbol{v})^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2\boldsymbol{u}^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\boldsymbol{u}\boldsymbol{v} + (y_1 - y_2)^2\boldsymbol{v}^2}. \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy a P_1, P_2, P_3 pontokat úgy választottuk, hogy egységnyi szárú derékszögű háromszöget alkossanak, azaz $d(P_1, P_2) = d(P_1, P_3) = 1$ és $P_2P_1P_3\sphericalangle = 90°$. Ez azt jelenti, hogy $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ merőleges egységvektorok, tehát $\boldsymbol{u}^2 = \boldsymbol{v}^2 = 1$, $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v} = 0$. Ekkor $d(Q_1, Q_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, vagyis az $\boldsymbol{r} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ leképezés távolságtartó.

A $\Sigma_1 : a_1X + b_1Y + c_1Z + d_1 = 0$ és $\Sigma_2 : a_2X + b_2Y + c_2Z + d_2 = 0$ síkok **párhuzamosak,** ha az $\boldsymbol{a}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ normálvektorok egymás skalárszorosai. Ekkor nyilván $\Sigma_1 = \Sigma_2$ vagy $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$. Tegyük most fel, hogy $\Sigma_1 \not\parallel \Sigma_2$, ekkor az

$$\begin{cases} a_1X + b_1Y + c_1Z + d_1 = 0 \\ a_2X + b_2Y + c_2Z + d_2 = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszernek végtelen sok megoldása létezik, amely mind

$$\boldsymbol{y} = t\,\boldsymbol{u} + \boldsymbol{x}$$

alakú, ahol $\boldsymbol{x}$ egy tetszőlegesen rögzített megoldás és $\boldsymbol{u}$ az $\boldsymbol{a}_1$ és $\boldsymbol{a}_2$ vektorok **vektoriális szorzata:** $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a}_1 \times a_2$. Az ilyen ponthalmazokat **térbeli egyeneseknek** nevezzük. Az

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad t \mapsto t\,\boldsymbol{u} + \boldsymbol{x}$$

leképezést az egyenes **(lineáris) paraméterezésének** hívjuk. A síkbeli számolásokhoz hasonlóan megmutatható, hogy két pont egyértelműen meghatároz egy egyenest a paraméterezésével együtt. Az $\boldsymbol{u}$ vektor a fenti egyenes **irányvektora.**

3.1. Definíció. *Két térbeli* **sík párhuzamos,** *ha megegyeznek vagy nincs közös pontjuk. Két térbeli* **egyenes párhuzamos,** *ha megegyeznek, vagy ha egy síkban vannak és nincs közös pontjuk. Egy egyenes és egy sík* **párhuzamosak,** *ha az egyenes a síkban van, vagy pedig ha nincs közös pontjuk. Két egyenes* **kitérő,** *ha nincs közös síkjuk.*

A következő állítás bizonyítása szemléletes megközelítésben triviális, de a definíciókból is könnyen levezethető.

3.2. Állítás. *Az euklidészi tér pontjai, egyenesei és síkjai között az alábbi illeszkedési relációk állnak fenn.*

(1) *Két pont egyértelműen meghatároz egy egyenest.*

(2) *Három nem kollineáris pont egyértelműen meghatároz egy síkot.*

(3) *Egy pont és egy rá nem illeszkedő egyenes egyértelműen meghatároz egy síkot.*

(4) *Két metsző egyenes egyértelműen meghatároz egy síkot.*

(5) *Egy sík és egy egyenes vagy párhuzamosak, vagy pedig egyetlen közös pontjuk van.*

(6) *Két különböző sík vagy párhuzamos, vagy pedig egy egyenesben metszik egymást.*

(7) *Adott P ponthoz és e egyeneshez pontosan egy f egyenes létezik, mely tartalmazza P-t és párhuzamos e-vel.*

(8) *Adott P ponthoz és Σ síkhoz pontosan egy Δ sík létezik, mely tartalmazza P-t és párhuzamos Σ-val.*

(9) *Adott Σ síkhoz és a vele párhuzamos e egyeneshez pontosan egy Δ sík létezik, mely tartalmazza e-t és párhuzamos Σ-val.* □

3.2. Térbeli végtelen távoli elemek

Az euklidészi sík projektív lezárása kézenfekvő módon általánosítható az euklidészi térre is: A végtelen távoli pontokat az egyenesek párhuzamossági osztályaihoz, a végtelen távoli egyeneseket pedig a síkok párhuzamossági osztályaihoz rendeljük hozzá. A végtelen távoli pontok és egyenesek alkotják a végtelen távoli síkot. Ez utóbbi nem illeszkedik egyetlen közönséges elemre sem, mint ahogy végtelen távoli egyenesek sem illeszkednek közönséges pontokra. Közönséges pont illetve egyenes végtelen távoli egyenesre illetve síkra történő illeszkedését a közönséges elem és a megfelelő párhuzamossági osztály viszonya határozza meg. Pl. egy közönséges egyenes akkor illeszkedik egy végtelen távoli síkra, ha a sík által meghatározott párhuzamossági osztály tartalmazza az egyenest.

3.3. Állítás. *A végtelen távoli elemekkel bővített tér illeszkedési tulajdonságai:*

(1) *Két pont egyértelműen meghatároz egy egyenest.*

(2) *Egy egyenes és egy rá nem illeszkedő pont egyértelműen meghatároz egy síkot.*

(3) *Két különböző sík metszete egyenes.*

(4) *Egy egyenes és egy rá nem illeszkedő sík metszet egyetlen pont.* □

A síkhoz hasonlóan a végtelen távoli elemekkel bővített térben is bevezethetünk homogén koordinátarendszert, ekkor pl. a pontokat $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ alakú homogén számnégyesekkel adjuk meg. Ezt a részt nem kívánjuk itt bővebben kifejteni, de megjegyezzük, hogy a síkbeli eset figyelmes áttanulmányozása után az érdeklődő olvasó önállóan is megpróbálkozhat a részletek kidolgozásával.

A továbbiakban a megfontolásainkat a végtelen távoli elemekkel kibővített euklidészi térben végezzük oly módon, hogy a megértést megkönnyítendő igyekszünk mindig különbséget tenni közönséges és végtelen távoli geometriai objektumok között.

3.3. Párhuzamos és középpontos vetítés

Az ábrázológeometria szempontjából leglényegesebb leképezések a térbeli síkok között történő párhuzamos és középpontos vetítések. Legyenek Σ_1, Σ_2 különböző síkok, $Z \notin \Sigma_1, \Sigma_2$ pont, és $\boldsymbol{v} \notin V_{\Sigma_1}, V_{\Sigma_2}$ vektor. Tekintsünk egy tetszőleges $P \in \Sigma_1$ pontot, és jelölje e illetve f a $e = PZ$ illetve a P-n áthaladó, $\boldsymbol{v}$ irányvektorú egyeneseket. Azt mondjuk, hogy a P Z centrumból vett középpontos, illetve $\boldsymbol{v}$ irányú párhuzamos vetülete a $P' = e \cap \Sigma_2$, illetve $P'' = f \cap \Sigma_2$ közönséges vagy végtelen távoli pont. Jelöléssel: $P' = \pi_{\Sigma_1,\Sigma_2,Z}(P)$ és $P'' = \rho_{\Sigma_1,\Sigma_2,\boldsymbol{v}}(P)$

Nyilvánvaló, hogy projektív szempontból ez a két típus nem különbözik, hiszen a $\rho_{\Sigma_1,\Sigma_2,\boldsymbol{v}}$ párhuzamos vetítés a $\boldsymbol{v}$ irányú egyenesek oszálya által meghatározott végtelen távoli középpontból vett vetítésnek felel meg. A végtelen távoli elemekkel bővített tér illeszkedési tulajdonságainak felhasználásával bizonyítható az alábbi állítás.

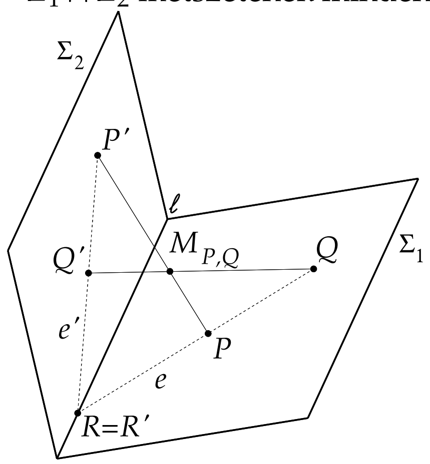
3.4. Állítás. *$\rho_{\Sigma_1,\Sigma_2,\boldsymbol{v}}$ bijekciót határoz meg Σ_1 és Σ_2 közönséges elemei között. $\pi_{\Sigma_1,\Sigma_2,Z}$ akkor és csak akkor határoz meg bijekciót Σ_1 és Σ_2 közönséges elemei között, ha $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$.*

Bizonyítás. Nyilván elegendő azt vizsgálni, amikor $\rho_{\Sigma_1,\Sigma_2,\boldsymbol{v}}$ illetve $\pi_{\Sigma_1,\Sigma_2,Z}$ végtelen távoli elemet ugyanilyenbe képez. Párhuzamos vetítés esetén mindig ez a helyzet, hiszen a két sík végtelen távoli egyenese egy síkba esik a vetítés végtelen távoli centrumával. Középpontos vetítés esetén ugyanez csak akkor teljesülhet, ha Σ_1 és Σ_2 végtelen távoli egyenesei egybeesnek, azaz ha $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$. □

A vetítések nagyon egyszerű módon jellemezhetők a síkok között értelmezett egyenestartó leképezések osztályán belül.

3.5. Tétel. *Legyen $\tau : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ különböző síkok közötti egyenestartó leképezés, amely a végtelen távoli elemekkel bővített térben bijektív. A τ akkor és csak akkor vetítés, ha minden $P \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ pont esetén $\tau(P) = P$ teljesül.*

Bizonyítás. A „csak akkor" irány nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy a $\tau : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ leképezés fixen hagyja a két sík $\ell = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ metszetének minden pontját. Legyen $P, Q \in \Sigma \setminus \ell$ két tetszőleges pont és jelölje R az ℓ és a PQ egyenesek metszéspontját. Mivel a τ egyenestartó, így a P, Q, R és a $P' = \tau(P), Q' = \tau(Q), R' = \tau(R)$ pontok közös $e \subset \Sigma_1$, $e' \subset \Sigma_2$ egyenesre esnek. Ezen két e, e' egyenesnek $R = R'$ közös pontja, ezért az általuk meghatározott Δ sík tartalmazza a P, Q, P', Q' pontokat. Ekkor viszont a PP', QQ' egyenesek metszik egymást, jelölje a metszéspontot $M_{P,Q}$.



3.1. ábra: Térbeli vetítés

A Σ_1-beli $T \notin PQ$ pont esetén a PP', QQ', TT' egyenesek nem esnek közös síkba, viszont páronként metszik egymást az $M_{P,Q}$, $M_{P,T}$, $M_{Q,T}$ pontokban, ami csak úgy lehetséges, ha $M_{P,Q} = M_{P,T} = M_{Q,T}$. Végezetül, hasonló okból az $S \in PQ$ pont esetén $M_{P,S} = M_{S,T} = M_{P,T} = M_{P,Q}$. Azt látjuk tehát, hogy $M_{P,Q}$ független Q-tól, és ekkor $M_{P,Q} = M_{Q,P}$ miatt P-től is. Ez azt jelenti, hogy a $Z = M_{P,Q}$ pontra minden $P \in \Sigma_1$ esetén teljesül $\tau(P) = MP \cap \Sigma_2$, vagyis τ a közönséges vagy végtelen távoli Z-ből vett vetítés. □

3.4. Ábrázológeometriai alaptételek

Már említettük a vetítéseknak az ábrázológeometriában betöltött fontos szerepét. Ebben a fejezetben ezt a szerepet vizsgáljuk precízen megfogalmazott tételek formájában. A tételek megértését és megtanulását nagyban segíti egy-egy jó ábra elészítése. Ezt a feladatot az olvasóra bízzuk.

3.6. Tétel (A perspektív ábrázolás alaptétele). *Adott a K konvex négyszög, melynek legalább az egyik szemközti oldalpárja nem párhuzamos, adottak a Γ, Π metsző síkok és adott az $a > 0$ szám. Ekkor létezik egy a oldalú N négyzet a Γ síkban és egy $Z \notin \Gamma, \Pi$ pont, hogy az N $\pi_{\Gamma,\Pi,Z}$ középpontos vetülete egybevágó K-val.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a tételt bebizonyítottuk az $a = 1$ esetben. Ekkor tetszőleges $a > 0$ esetén létezik N' egységnégyzet Γ-ban és Z' középpont, hogy $\pi_{\Gamma,\Pi,Z'}(N')$ egybevágó K'-vel, ami a K-hoz $1/a$ arányban hasonló konvex négyzet. Az egész alakzatot egy $\Gamma \cap \Pi$-beli pontból a-szorosára nagyítva olyan a oldalú N négyzetet kapunk, melynek középpontos vetülete egybevágó K-val. Ezért elegendő a tételt az $a = 1$ esetre bizonyítani.

Helyezzük el az N egységnégyzetet Γ-ban. A 2.37 tétel szerint létezik α tengelyes perspektivitása Γ-nak, amelyre $\alpha(N)$ egybevágó K-val. Mozgassuk el N-et Γ-n úgy, hogy α tengelye egybeessék a Γ és Π síkok ℓ metszetével. Jelölje β a Γ sík ℓ körüli beforgatását Π-be és definiáljuk a $\varphi = \beta \circ \alpha$ leképezést. Egyrészt φ olyan egyenestartó leképezés Γ és Π között, amely a végtelen távoli elemekkel bővített síkok közt bijekciót határoz meg. Másrész φ fixen hagyja ℓ minden pontját, hiszen ugyanezt teszi α és β is. A 3.5 tétel szerint ekkor φ vetítés. Mivel egy négyzet párhuzamos vetülete paralelogramma, ezért φ csak középpontos vetítés lehet. A középpontot Z-vel jelölve a tételt bebizonyítottuk. □

3.7. Következmény. *Bármely konvex négyszög, amelynek legalább az egyik szemközti oldalpárja nem párhuzamos, előáll egy négyzet alapú gúla síkmetszeteként.*

Bizonyítás. Legyen K egy megfelelő konvex négyszög a Γ síkban. A perspektivitások 3.6 alaptétele szerint valamely Π síkra és Z pontra K $\pi_{\Gamma,\Pi,Z}$ melletti vetülete négyzet. Ez pontosan azt jelenti, hogy a Z csúcsú, K alapú G gúlát a Π sík négyzetben metszi, azaz G négyzet alapú gúla. □

3.8. Tétel. *Minden háromszög alapú hasábnak van olyan síkmetszete, amely hasonló egy előre megadott háromszöghöz.*

Bizonyítás. Tekintsük a Σ síkbeli $ABC\triangle$ és $A_0B_0C_0\triangle$ háromszögeket és legyen H az $ABC\triangle$ alapú egyenes hasáb. A 2.41 állítás szerint létezik olyan Σ-beli ψ merőleges nyújtás, melyre $\psi(ABC\triangle)$ és $A_0B_0C_0\triangle$ hasonlók, és amelynek t tengelye átmegy C-n, λ aránya pedig abszolút értékben nagyobb 1-nél. Ez azt jelenti, hogy a H A-t tartalmazó élén van olyan A_1 pont, melyre $d(A_1, T_A) = d(\psi(A), T_A)$, ahol T_A az A merőleges vetülete t-n.

Legyen Γ a t egyenes és az A_1 pont által meghatározott sík. Jelölje $\alpha_1 : \Sigma \to \Gamma$ a H éleivel párhuzamos vetítést, és $\alpha_2 : \Gamma \to \Sigma$ a t körüli beforgatást. Ekkor $\alpha_2 \circ \alpha_1$ a Σ sík olyan affin transzformációja, melynek t tengelye, és amely A-t a $\alpha_2(\alpha_1(A)) = \alpha_2(A_1) = \psi(A)$ pontba viszi. Ez azt jelenti, hogy $\alpha_2 \circ \alpha_1 = \psi$, azaz $\alpha_2(ABC\triangle)$ hasonló $A_0B_0C_0\triangle$-höz. Azonban definíció szerint $\alpha_2(ABC\triangle)$ pontosan a H hasáb és a Γ sík metszete. $\square$

3.9. Tétel (Pohlke-tétel, az axonometria alaptétele). *Egy síkon tetszőlegesen adott általános helyzetű O', A', B', C' pontokhoz létezik a térben olyan kocka, melynek az O csúcsából induló OA, OB, OC éleinek párhuzamos vetülete éppen $O'A', O'B', O'C'$.*

Bizonyítás. Válasszunk egy tetszőleges egység oldalú kockát a térben, legyen ennek OA, OB, OC az O csúcsából induló három éle. Nyilván elegendő megmutatni, hogy ezen csúcsok valamely Σ síkra vett párhuzamos vetülete egy $O'A'B'C'$-höz hasonló alakzat.

Jelölje Γ illetve Γ' az O, A, B, illetve O', A', B' pontok által meghatározott síkot. Legyen $C^* \in \Gamma$ a $C' \in \Gamma'$ pont azon $\alpha : \Gamma' \to \Gamma$ egyértelműen meghatározott affin transzformáció melletti képe, melyre teljesül $\alpha(O') = O$, $\alpha(A') = A$ és $\alpha(B') = B$. Legyen H az az $OAB\triangle$ alapú hasáb, amelynek az élei párhuzamosak a CC^* egyenessel. A 3.8 tétel szerint valamely Σ sík H-ból $O'A'B'\triangle$-höz hasonló $O_1A_1B_1\triangle$-t metsz ki.

Jelölje β a teret Σ-ra képező, CC^*-al párhuzamos vetítést, ekkor $\beta(O) = O_1$, $\beta(A) = A_1$, $\beta(B) = B_1$ és $\beta(C) = \beta(C^*)$. Ez utóbb pontot jelölje C_1.

A $\gamma = \beta \circ \alpha : \Gamma' \to \Sigma$ leképezés affin transzformáció. Teljesül továbbá $\gamma(O'A'B'\triangle) = O_1A_1B_1\triangle \cong O'A'B'\triangle$. Mivel egy affin transzformációt három pontja egyértelműen meghatározza, azért γ nem lehet más, mint egy hasonlósági transzformáció. Ez azt jelenti, hogy az $O_1A_1B_1C_1$ alakzat hasonló $O'A'B'C'$-höz. Mivel $O_1A_1B_1C_1$ az eredeti kocka négy csúcsának párhuzamos vetülete, a bizonyítást befejeztük. $\square$