Klasszikus algebrák
jegyzetvázlat

Írta: Nagy Gábor, nagyg@math.u-szeged.hu

2001. november

Tartalomjegyzék

1. Alapfogalmak

A következőkben felsoroljuk a számunkra legfontosabb alapfogalmakat, amelyek közül néhánynak a definícióját is megadjuk. Nem célunk azonban az ezekhez tartozó elmélet részletes kifejtése, azt az olvasó bármelyik bevezető lineáris algebra könyvben megtalálja.

1.1. Definíció. *Legyen adott a* K *test és a* V *Abel-csoport, amelyben a műveletet összeadásnak írjuk. A* V*-t* K feletti vektortérnek*, vagy röviden csak* K-vektortérnek *nevezzük, ha minden* $\alpha \in \mathsf{K}$ *és minden* $\boldsymbol{x} \in V$ *elemhez hozzá* *van rendelve V-nek egy jól meghatározott $\alpha\boldsymbol{x}$-el jelölt eleme oly módon, hogy a hozzárendelés teljesíti az következő feltételeket:*

$$\begin{aligned} \alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= \alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y} \qquad & (\alpha+\beta)\boldsymbol{x} &= \alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x} \\ \alpha(\beta\boldsymbol{x}) &= (\alpha\beta)\boldsymbol{x} & 1\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

Ide kapcsolódó fontos fogalmak: altér, vektorterek direkt összege, faktortér, lineáris függőség, bázis, dimenzió.

1.2. Definíció. *Adott U, V K test feletti vektorterek esetén a $\varphi : U \to V$ leképezést* K-lineáris leképezésnek *nevezzük, ha minden $\alpha \in \mathsf{K}$ és $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U$ elem esetén $\varphi(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha\varphi(\boldsymbol{x})$ és $\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{y})$ teljesül.*

Ismert tény, hogy ha U és V véges dimenziósak, dimenziójuk n illetve m, és rögzítünk egy bázis bennük, akkor bármely $U \to V$ lineáris leképezés egy $n \times m$-es mátrixszal adható meg.

1.3. Definíció. *Adott $U_1, \ldots, U_n, V$ K test feletti vektorterek esetén a $\varphi : U_1 \times \ldots \times U_n \to V$ leképezést* multilineáris leképezésnek *nevezzük, ha minden vátozójában lineáris.*

Azt mondjuk, hogy a $\varphi : U \times \ldots \times U \to V$ multilineáris leképezés szimmetrikus illetve alternáló, ha egy $\sigma \in S_n$ permutáció esetén

$$\varphi(\boldsymbol{x}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}_{\sigma(n)}) = \varphi(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$$

illetve

$$\varphi(\boldsymbol{x}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\varphi(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$$

teljesül minden $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in U$ elem esetén.

Az $n = 2$ illetve $n = 3$ speciális esetekben *bilineáris* illetve *trilineáris* leképezésekről szoktunk beszélni. A bilineáris alternáló leképezéseket *antiszimmetrikusnak* nevezzük. A legfontosabb speciális eset a $V \times V \to \mathsf{K}$ alakú bilineáris leképezések, ezeket *V-n értelmezett belső szorzatnak* is hívjuk.

1.4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a K test feletti V vektortéren értelmezett f belső szorzat* nem-elfajuló, *ha minden nullától különböző $\boldsymbol{x} \in V$ vektorhoz létezik $\boldsymbol{y} \in V$ vektor, amelyre $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \neq 0$.*

Ha V n-dimenziós és adott egy V-beli bázis, akkor f megadható egy $n \times n$-es K feletti $(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ mátrixszal. Ismert, hogy f akkor és csak akkor nem-elfajuló, ha $\det(a_{ij}) \neq 0$.

1.5. Definíció. *Adott V K-vektortér esetén a $q : V \to \mathsf{K}$ leképezést* kvadratikus alaknak *hívjuk, ha egyrészt minden $\alpha \in \mathsf{K}$, $\boldsymbol{x} \in V$ esetén $q(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha^2 q(\boldsymbol{x})$ teljesül, másrészt az $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = q(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - q(\boldsymbol{x}) - q(\boldsymbol{y})$ leképezés szimmetrikus belső szorzat V-n.*

A q kvadratikus alak esetén az f belső szorzatot a *q-hoz tartozó belső szorzatnak* nevezzük. Azt mondjuk, hogy q *nem-elfajuló kvadratikus alak*, ha a hozzátartozó belső szorzat nem-elfajuló. Ha $\mathrm{char}(\mathsf{K}) \neq 2$, akkor a belső szorzat a $q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ egyenlőség szerint egyértelműen meghatározza q-t.

2. Algebrák

2.1. Definíció. *A* K *egy test feletti* A *vektorteret* K feletti algebrának *vagy röviden csak* K-algebrának *nevezzük, ha értelmezve van benne egy szorzásnak nevezett bilineáris* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ *művelet, azaz*

$$(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y})(\gamma\boldsymbol{z} + \delta\boldsymbol{w}) = (\alpha\gamma)(\boldsymbol{x}\boldsymbol{z}) + (\alpha\delta)(\boldsymbol{x}\boldsymbol{w}) + (\beta\gamma)(\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}) + (\beta\delta)(\boldsymbol{y}\boldsymbol{w})$$

teljesül tetszőleges $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathsf{K}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} \in A$ *elemekre.*

Figyeljük meg, hogy a szorzásműveletnél nem követeltük meg az asszociativitás teljesülését. Ezzel szemben a bilinearitásból következik a (két oldali) **disztributivitás:**

$$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{y}\boldsymbol{z}, \qquad \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}\boldsymbol{z}.$$

A-t véges dimenziós algebrának hívjuk, ha véges dimenziós vektortér K felett, és egységelemes algebrának hívjuk, ha létezik egy kitüntetett $\mathbf{1} \in A$ elem, amelyre teljesül $\mathbf{1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\mathbf{1} = \boldsymbol{x}$ minden $\boldsymbol{x} \in A$ esetén.

Tekintsük az A véges dimenziós K-algebrának egy $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ bázisát. Ekkor minden $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ indexpárra léteznek $c_{ij}^k \in \mathsf{K}$ elemek ($k \in \{1, \ldots, n\}$), amelyre teljesül

$$\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j = c_{ij}^1 \boldsymbol{u}_1 + \ldots + c_{ij}^n \boldsymbol{u}_n.$$

Ezt az n^3 skalárt az A algebra *struktúra-konstansainak* nevezzük. Könnyen meggondolható, hogy a struktúra-konstansok egyértelműen meghatározzák A-t, hiszen ekkor bármely $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ elem felírható $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{u}_n$, $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + y_n\boldsymbol{u}_n$ alakban, és ekkor a bilinearitás miatt a szorzatra teljesül $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = z_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + z_n\boldsymbol{u}_n$, ahol $z_k = \sum_{i,j=1}^n c_{ij}^k x_i y_j$. Az is világos, hogy a struktúra-konstansok tetszőleges megválasztásával K feletti algebrát hozhatunk létre.

Tegyük most fel, hogy A egységelemes K-algebra. Ekkor a $b : \mathsf{K} \to A$, $b(\alpha) = \alpha\mathbf{1}$ leképezés beágyazása a K testnek A-ba. Ebben az esetben némileg pontatlan szóhasználattal a K-t gyakran az A részhalmazaként tekintjük és azonosítjuk az $\alpha \in \mathsf{K}$ és $\alpha\mathbf{1} \in A$ elemeket. Nyilvánvalóan, ekkor minden $\alpha \in \mathsf{K} \subseteq A$ elem teljesíti az $\alpha\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\alpha$ azonosságot tetszőleges $\boldsymbol{x} \in A$ esetén.

Fordítva, legyen A két kétváltozós, összeadásnak és szorzásnak nevezett művelettekel felszerelt halmaz, amely az összeadásra nézve Abel-csoport és amelyben a két művelet teljesíti a szokásos disztibutivitást. Tegyük továbbá fel, hogy az A egy T részhalmaza erre a két műveletre nézve testet alkot. Ekkor A minden esetben T-vektortér, de kizárólag akkor T-algebra, ha $ta = at$ teljesül minden $t \in T$, $a \in A$ esetén.

Az alábbi példák fontos konstrukciók K-algebrákra.

2.1. példa. Jelölje $M_n(\mathsf{K})$ a K test feletti $n \times n$-es mátrixok halmazát. Ez a halmaz a szokásos mátrixszorzásra nézve egységelemes asszociatív K-algebra.

2.2. példa. Tekintsük az $M_n(\mathsf{K})$ halmazt az $\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{xy} - \boldsymbol{yx}$ szorzásművelettel. Ekkor $(M_n(\mathsf{K}), \circ)$ véges dimenziós K-algebra, amelyben teljesül $\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{x} = 0$, ami kizárja egységelem létezését.

2.3. példa. A K test tetszőleges (kommutatív) L testbővítése kommutatív, asszociatív K-algebra.

2.4. példa. A 3-dimenziós valós vektortér $\mathbb{R}$-algebra a vektoriális szorzatra nézve.

2.2. Definíció. Ferdetestnek *hívjuk az olyan kétváltozós, összeadásnak és szorzásnak nevezett műveletekkel felruházott* $(F, +, \cdot, 0, 1)$ *halmazokat, amelyekben* $(F, +, 0)$ *Abel-csoport,* $(F \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ *csoport, és a két műveletet összekapcsolja a disztributivitás szabálya.*

A következő konstrukció **a kvaterniók ferdetestét** írja le, ez tekinthető a ferdetestek klasszikus példányának. Mint látni fogjuk, ez egyben egy valós test feletti algebra is.

2.5. példa. Tekintsük az $\mathbb{R}$ feletti 4-dimenziós $\mathbb{H} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$ vektorteret. Az $\{1, i, j, k\}$ bázishoz tartozó struktúra-konstansokat értelmezzük az alábbi táblázat alapján:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Azonnal látszik, hogy 1 egységeleme $\mathbb{H}$-nak, és közvetlen számolással lellenőrizhető, hogy a szorzás asszociatív művelet, azaz $\mathbb{H}$ asszociatív $\mathbb{R}$-algebra.

Definiáljuk a $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$,

$$z = x_0 + x_1 j + x_2 j + x_3 k \mapsto \overline{z} = x_0 - x_1 j - x_2 j - x_3 k$$

leképezést, ez nyilván $\mathbb{R}$-lineáris és $\overline{\overline{z}} = z$ teljesül minden $z \in \mathbb{H}$ esetén. Ezt a leképezést – a komplex számtest analógiájára – *konjugálásnak* nevezzük. Könnyen megmutatható az is, hogy tetszőleges $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ elemekre $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ és $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_2} \cdot \overline{z_1}$ áll fenn, azaz a konjugálás a $\mathbb{H}$ algebra *antiautomorfizmusa*.

Végezetül vegyük észre, hogy minden $z = x_0 + x_1 j + x_2 j + x_3 k \in \mathbb{H}$ elem esetén $N(z) = z\overline{z} = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ nem-negatív valós szám, ami csakis a $z = 0$ esetben nulla. Mivel a konjugálás antiautomorfizmus, az $\mathbb{R}$ elemei pedig bármely más elemmel felcserélhetők, ezért tetszőleges $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$-ra

$$N(z_1 z_2) = z_1 z_2 \, \overline{z_1 z_2} = z_1 N(z_2) \overline{z_2} = N(z_1) N(z_2)$$

áll fenn. Az $N : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ leképezést *normának* nevezzük, az utóbbi tulajdoságról pedig azt mondjuk, hogy az N norma *multiplikatív*.

Tekintsünk most egy tetszőleges 0-tól különböző $z \in \mathbb{H}$ elemet. Ekkor $N(z) \neq 0$ valós szám és a $z' = \overline{z}/N(z)$ a $\mathbb{H}$ egy jól meghatározott eleme, amelyre teljesül $zz' = z'z = 1$. A $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ halmaz tehát a szorzásra nézve egy nem-kommutatív csoportot alkot, ami azt jelenti, hogy $\mathbb{H}$ ferdetest.

Ezt a fejezetet két fontos fogalom megadásával zárjuk le.

2.3. Definíció. *Az adott* K *test feletti* A *algebra* $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ *elemeinek* kommutátor- *illetve* asszociátor-zárójele *alatt az*

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}\boldsymbol{x}, \qquad \textit{illetve} \qquad [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}] = (\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}\boldsymbol{z})$$

A-beli elemeket értjük.

A kommutátor- és asszociátor-zárójelek nyilván egy $A \times A \to A$ bilineáris illetve $A \times A \times A \to A$ trilineáris leképezést is meghatároznak. Azonnal adódik továbbá, hogy a kommutátor-zárójel által meghatározott leképezés antiszimmetrikus.

3. Alternáló algebrák

A legfontosabb speciális algebraosztály természetesen az asszociatív algebrák osztálya, ezeknél az asszociátor-zárójel azonosan nulla. Ezt az osztályt általánosítja a következő definíció.

3.1. Definíció. *A* K *test feletti* A *algebrát* alternáló algebrának *nevezzük, ha az*

$$(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}), \qquad (\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}), \qquad (\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}) \tag{1}$$

egyenlőségek azonosan teljesülnek A-n.

A névválasztást az alábbi állítás indokolja.

3.2. Lemma. *Az (1) azonosságok közül bármely kettő garantálja, hogy az algebra asszociátor-zárójele egy alternáló trilineáris leképezést határoz meg.*

Bizonyítás. Tekintsük például (1) első két azonosságát, ezek az asszociátor-zárójel segítségével $[x, x, y] = [x, y, x] = 0$ alakban is megadhatók. Az elsőbe $x = u + v$-t helyettesítve a multilinearitás felhasználásával

$$0 = [u, u, y] + [u, v, y] + [v, u, y] + [v, v, y] = [u, v, y] + [v, u, y]$$

adódik, vagyis $[u, v, y] = -[v, u, y]$. Hasonlóan, $[x, y, x] = 0$-ba $x = u + v$-t helyettesítve megkapjuk $[u, y, v] = -[v, y, u]$-t. Ezeket felváltva alkalmazva kapjuk, hogy

$$[x, y, z] = -[y, x, z] = [z, x, y] = -[x, z, y] = [y, z, x] = -[z, y, x],$$

ami pontosan az asszociátor-zárójel alternálását jelenti. Hasonlóan járhatunk el, ha (1) két másik azonossága van megadva. □

Megjegyzés. A bizonyításban használt eljárást, melyben egy algebraazonosság nem-lineáris változójába két újabb változó összegét helyettesítjük, *polarizálásnak* nevezzük. Ezt a módszert a későbbiekben is gyakran és hatékonyan fogjuk alkalmazni új azonosságok létrehozására.

3.3. Állítás. *Ha egy algebrában az (1) azonosságok közül kettő teljesül, akkor az algebra alternáló. Bármely alternáló algebra asszociátor-zárójele alternál.*

Bizonyítás. Csak az első állítás szorul bizonyításra. Tegyük fel, hogy az A algebrában teljesül (1) két azonossága, például az első kettő. A fenti lemma szerint ekkor az asszociátor-zárójel alternál, és $0 = [y, y, x] = [x, y, y]$, azaz $(xy)y = x(yy)$. □

Egy nem asszociatív szorzásművelet esetén általában nagyon kell vigyáznunk akkor, amikor egy elem hatványairól beszélünk, hiszen előfordulhat, hogy $(xx)x \neq x(xx)$, azaz x^3 nem pontosan értelmezett. Ezt a nehézséget megkerülhetjük úgy, hogy x hatványait rekurzívan definiáljuk: $x^1 = x$ és $x^{n+1} = xx^n$. Ez persze nem oldja meg a problémát, hiszen az $x^n x^m$ szorzat kiszámítása így reménytelenül nehéznek tűnik. Szerencsére alternáló algebrák esetén a megoldás nagyon egyszerű.

3.4. Lemma. *Alternáló algebra tetszőleges x elemére $x^n x^m = x^{n+m}$ áll fenn.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy $x^{n+1} = x^n x$; ez az $n = 1$ esetben nyilvánvaló. Az alternáló algebrák első definiáló tulajdonsága szerint $x^n x = (xx^{n-1})x = x(x^{n-1}x)$, ami indukció szerint x^{n+1}.

Az $x^n x^m = x^{n+m}$ azonosság $n = 1$ esetén tetszőleges m-re definíció szerint fennáll. Tegyük most fel, hogy tetszőleges m-re $x^{n-1}x^m = x^{n+m-1}$ teljesül. Ekkor

$$x^n x^m - x^{n+m} = (xx^{n-1})x^m - x(x^{n-1}x^m) = [x, x^{n-1}, x^m].$$

Ez utóbbi a fentiek illetve az indukciós feltevés szerint nem más, mint

$$[\boldsymbol{x}^{n-1}, \boldsymbol{x}^m, \boldsymbol{x}] = (\boldsymbol{x}^{n-1}\boldsymbol{x}^m)\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{n-1}(\boldsymbol{x}^m\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{m+n-1}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{n-1}\boldsymbol{x}^{m+1} = 0,$$

hiszen $\boldsymbol{x}^{m+n-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{n+m} = \boldsymbol{x}^{n-1}\boldsymbol{x}^{m+1}$. □

3.5. Állítás. *Alternáló* K*-algebrák egy elem által generált részalgebrái kommutatív, asszociatív algebrák. (Monoasszociativitás.)*

Bizonyítás. Legyen $\boldsymbol{x}$ az A alternáló K-algebra tetszőleges eleme és jelöljük B-vel az $\alpha_1\boldsymbol{x} + \alpha_2\boldsymbol{x}^2 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{x}^k$ ($k \in \mathbb{N}$ és $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in$ K tetszőlegesek) alakú elemek halmazát. Nyilván B része az $\boldsymbol{x}$ által generált részalgebrának. Másrészről viszont B K-vektortér és a 3.4 lemma szerint zárt a szorzásra, vagyis B maga is részalgebra. Ez azt jelenti, hogy B a legszűkebb $\boldsymbol{x}$-et tartalmazó részalgebra, azaz az $\boldsymbol{x}$ által generált részalgebra. A 3.4 lemma szerint B valóban kommutatív és asszociatív. □

Megjegyzés. Ennél jóval bonyolultabban lehet belátni a következő állítást: Alternáló algebrák bármely két eleme asszociatív részalgebrát generál. (Diasszociativitás.) A bizonyítással mi nem foglalkozunk.

Tekintsük az A alternáló K algebra tetszőleges $\boldsymbol{x}$ elemét és egy K feletti $f(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_k X^k \in$ K$[X]$ polinomot. Az f $\boldsymbol{x}$ helyen vett helyettesítési értéke alatt az A-beli $f(\boldsymbol{x}) = \alpha_0\mathbf{1} + \alpha_1\boldsymbol{x} + \alpha_k\boldsymbol{x}^k$ elemet értjük, ahol $\mathbf{1}$ az A egységeleme. Ha A-ban nincs egységelem, akkor csak a nulla konstanstagú polinomoknál beszélhetünk helyettesítési értékről.

3.6. Definíció. *Legyen $\boldsymbol{x}$ az A alternáló* K*-algebra eleme. Az $f(X) \in$ K$[X]$ polinomot az $\boldsymbol{x}$* minimálpolinomjának *nevezzük, ha $f(\boldsymbol{x}) = 0$ és minden $g(X) \in$ K$[X]$ esetén, amelyre* $\deg(g) < \deg(f)$*,* $g(\boldsymbol{x}) \neq 0$.

Nem minden A és minden $\boldsymbol{x} \in A$ esetén létezik minimálpolinom. Ha azonban A véges dimenziós, akkor minden elemének van minimálpolinomja, aminek a foka legfeljebb eggyel nagyobb A dimenziójánál. Valóban, ha $n = \dim(A)$, akkor az $\boldsymbol{x}, \ldots, \boldsymbol{x}^{n+1}$ elemek lineárisan függők, azaz léteznek $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in$ K skalárok, úgy, hogy $\boldsymbol{x}$ gyöke lesz az $f(X) = \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{n+1}X^{n+1}$ polinomnak. f nem feltétlenül minimálpolinom, de biztosítja annak létezését. Igaz továbbá, hogy $\boldsymbol{x}$ minimálpolinomja, ha létezik, akkor K-beli konstans szorzó erejéig egyértelműen meghatározott.

3.7. Állítás. *Az A véges dimenziós, egységelemes, alternáló* K*-algebrában minden elem minimálpolinomja irreducibilis* K *felett.*

Bizonyítás. Ha $f(X) \in$ K$[X]$ az $\boldsymbol{x} \in A$ elem minimálpolinomja és $f(X) = g(X)h(X)$, akkor $g(\boldsymbol{x})h(\boldsymbol{x}) = 0$ teljesül A-ban. A $g(\boldsymbol{x}), h(\boldsymbol{x})$ az A jól meghatározott elemei, hiszen A egységelemes. A nullaosztómentessége miatt ekkor $g(\boldsymbol{x}) = 0$ vagy $h(\boldsymbol{x}) = 0$ áll fenn, azaz $\deg(h) = \deg(f)$ vagy $\deg(g) = \deg(f)$ teljesül, vagyis g és h nem valódi osztói f-nek. □

4. Osztásalgebrák

4.1. Definíció. *Az A K-algebrát* osztásalgebrának *hívjuk, ha minden $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in A$, $\boldsymbol{a} \neq 0$ elemekre az $\boldsymbol{ax} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{ya} = \boldsymbol{b}$ egyenletek egyérteműen megoldhatók $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$-ra.*

Nyilvánvaló, hogy az asszociatív osztásalgebrák pontosan a ferdetestek. Az osztásalgebrák jelentőségét többek között az a tény adja, hogy központi szerepet játszik fontos geometriai struktúrák jellemzésében.

A következő könnyű lemma az osztásalgebrák egy ekvivalens megadási módját mutatja be.

4.2. Lemma. *Az A véges dimenziós K-algebra akkor és csak akkor osztásalgebra, ha nullaosztómentes.*

Bizonyítás. Legyen A osztásalgebra és tegyük fel, hogy $\boldsymbol{ab} = 0$ valamely $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq 0$ elempárra. Ekkor az $\boldsymbol{ax} = 0$ egyenletnek legalább két megoldása van $\boldsymbol{x}$-re, nevezetesen 0 és $\boldsymbol{b}$, ami lehetetlenség.

Tegyük most fel, hogy A véges dimenziós és nullaosztómentes és tekintsük az $\boldsymbol{ax} = \boldsymbol{b}$ egyenletet ($\boldsymbol{a} \neq 0$). Jelöljük $L_{\boldsymbol{a}}$-val az A-t önmagára képező, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{ax}$ leképezést. Nyilván $L_{\boldsymbol{a}}$ K-lineáris és A nullaosztómentessége miatt a magja triviális. A véges dimenziója miatt ez azt jelenti, hogy $L_{\boldsymbol{a}}$ bijektív, azaz létezik egy egyértelműen meghatározott $\boldsymbol{u} \in A$ elem, amelyre $L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{b}$. Ez egyenértékű azzal, hogy az $\boldsymbol{ax} = \boldsymbol{b}$ egyenlet egyértelműen megoldható $\boldsymbol{x}$-ben. Hasonlóan belátható, hogy $\boldsymbol{ya} = \boldsymbol{b}$ egyértelműen megoldható $\boldsymbol{y}$-ra. $\square$

4.3. Definíció. *Az A egységelemes K-algebrát* kvadratikus algebrának *nevezzük, ha minden $\boldsymbol{x} \in A$ elemnek van minimálpolinomja és az legfeljebb másodfokú.*

A következő tétel azt mutatja, hogy a kompex számtest és a kvaterniók ferdeteste példák $\mathbb{R}$ feletti kvadratikus algebrára.

4.4. Tétel. *Minden véges dimenziós, $\mathbb{R}$ feletti, egységelemes, alternáló osztásalgebra kvadratikus algebra.*

Bizonyítás. Tekintsük az A $\mathbb{R}$ feletti véges dimenziós, egységelemes osztásalgebra egy tetszőleges $\boldsymbol{x} \in A$ elemét. A 3.7 állítás és az előtte elmondottak szerint $\boldsymbol{x}$-nek létezik minimálpolinomja és az irreducibilis $\mathbb{R}$ felett. Ismert azonban, hogy egy $\mathbb{R}$ felett irreducibilis polinom foka legfeljebb kettő. $\square$

5. Kompozícióalgebrák

5.1. Definíció. *Azokat az A véges dimenziós* K*-algebrákat nevezzük* kompozícióalgebrának, *amelyeken értelmezve van egy $N : A \to \mathsf{K}$ nem-elfajuló, multiplikatív kvadratikus alak, azaz $N(\boldsymbol{xy}) = N(\boldsymbol{x})N(\boldsymbol{y})$ minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ esetén.*

A komplex számtest és a kvaterniók ferdeteste az $N(z) = z\bar{z}$ normával példát szolgáltatnak $\mathbb{R}$ feletti kompozícióalgebrára is. Egy további példa az alábbi.

5.1. példa. Tetszőleges K test fölött tekintsük a 2×2-es mátrixok által alkotott $A = M_2(\mathsf{K})$ algebrát a közönséges mátrixszorzással. Ekkor $X \in M_2(\mathsf{K})$ esetén $\det(X)$ nem-elfajuló, multiplikatív kvadratikus alak, tehát $M_2(\mathsf{K})$ kompozícióalgebra.

A következő tétel szinte az összes eddig tárgyalt algebraosztályt érinti.

5.2. Tétel. *Minden egységelemes kompozícióalgebra alternáló kvadratikus algebra.*

Bizonyítás. Legyen A egységelemes kompozícióalgebra és jelölje N és f az A-n értelmezett normát illetve az ahhoz tartozó nem-elfajuló belső szorzatot. Az $N(\boldsymbol{xy}) = N(\boldsymbol{x})N(\boldsymbol{y})$ egyenlőségbe $\boldsymbol{y}$ helyére $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{w}$-t írva, azaz $\boldsymbol{y}$ szerinti polarizálással, valamint az $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = N(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) - N(\boldsymbol{x}) - N(\boldsymbol{y})$ definíció felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$N(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{xy}, \boldsymbol{xw}). \tag{2}$$

Tovább polarizálva a (2) egyenlőséget $\boldsymbol{x}$ szerint, az

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{xy}, \boldsymbol{zw}) + f(\boldsymbol{zy}, \boldsymbol{xw}) \tag{3}$$

egyenlőség következik. Ebbe $\boldsymbol{z} = 1$-et és $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{xu}$-t helyettesítve kapjuk, hogy

$$f(\boldsymbol{x}, 1)f(\boldsymbol{xu}, \boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{xu}), \boldsymbol{w}) + f(\boldsymbol{xu}, \boldsymbol{xw}). \tag{4}$$

Vezessük be a $t(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}, 1) = f(1, \boldsymbol{x})$ jelölést, valamint használjuk fel a (2) azonosságot és f bilinearitását arra, hogy a (4) egyenletet

$$0 = f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{xu}) - t(\boldsymbol{x})\boldsymbol{xu} + N(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}). \tag{5}$$

alakra hozzuk. Mivel (5) teljesül minden $\boldsymbol{w}$-re és f nem-elfajuló, az

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{xu}) - t(\boldsymbol{x})\boldsymbol{xu} + N(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} = 0 \tag{6}$$

egyenlet teljesül minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}$-ra. $\boldsymbol{u} = 1$ helyettesítés adja, hogy minden $\boldsymbol{x}$ teljesíti az

$$\boldsymbol{x}^2 - t(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} + N(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{7}$$

azonosságot, ami bizonyítja, hogy A kvardatikus algebra.

Végezetül (7)-et jobbról $\boldsymbol{u}$-val szorozva, majd (6)-ből kivonva kapjuk az $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{x}^2\boldsymbol{u} = 0$ egyenlőséget. Hasonlóan, a (3) egyenlőségbe $\boldsymbol{w} = 1$-et és $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{y}$-t helyettesítve

$$(\boldsymbol{v}\boldsymbol{y})\boldsymbol{y} - t(\boldsymbol{y})\boldsymbol{v}\boldsymbol{y} + N(\boldsymbol{y})\boldsymbol{v} = 0 \tag{8}$$

majd $(\boldsymbol{v}\boldsymbol{y})\boldsymbol{y} - \boldsymbol{v}\boldsymbol{y}^2 = 0$ adódik. A 3.3 állítás szerint ekkor A alternáló algebra. □

A $t(\boldsymbol{x}) = f(1, \boldsymbol{x})$ definícióból következik, hogy $t : A \to \mathsf{K}$ lineáris leképezés. Eszerint

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^2 &= t(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - N(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \\ &= t(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} - N(\boldsymbol{x}) + t(\boldsymbol{y})\boldsymbol{y} - N(\boldsymbol{y}) + t(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} + t(\boldsymbol{y})\boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ &= \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + t(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} + t(\boldsymbol{y})\boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\end{aligned}$$

vagyis

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}\boldsymbol{x} = t(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} + t(\boldsymbol{y})\boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}). \tag{9}$$

5.3. Állítás. *Az A komopzícióalgebrában az $\boldsymbol{x} \mapsto \overline{\boldsymbol{x}} = t(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}$ leképezés az A algebra antiautomorpfizmusa. Teljesül továbbá $\overline{\overline{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{x}$.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $N(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha^2 N(\boldsymbol{x})$ és $N(1) = N(1)^2$. Ha $N(1) = 0$ lenne, akkor $N(\boldsymbol{x}) = N(1)N(\boldsymbol{x}) = 0$ lenne minden $\boldsymbol{x} \in A$ esetén, ami kizárt. Így $N(1) = 1$ és $t(1) = f(1,1) = N(2) - 2N(1) = 2$, de ekkor minden $\alpha \in \mathsf{K}$ esetén $t(\alpha) = 2\alpha$. Ezért aztán

$$\overline{\overline{\boldsymbol{x}}} = t(t(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}) - t(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = 2t(\boldsymbol{x}) - 2t(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}.$$

t linearitásából következik, hogy az $\boldsymbol{x} \mapsto \overline{\boldsymbol{x}}$ művelet K-lineáris, így csak azt kell megmutatnunk, hogy $\overline{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}} = \overline{\boldsymbol{y}}\,\overline{\boldsymbol{x}}$. A (9) egyenlőség és t definíciója szerint

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{y}}\,\overline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}} &= t(\boldsymbol{y})t(\boldsymbol{x}) - t(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} - t(\boldsymbol{y})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}\boldsymbol{x} - t(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}) \\ &= t(\boldsymbol{y})t(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}) \\ &= f(1,\boldsymbol{x})f(1,\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - f(1,\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}).\end{aligned}$$

Itt azonban az utolsó rész 0, amit a (3) egyenletből kapunk $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{w} = 1$ helyettesítéssel. □

A fejezetet egy fontos apró észrevétellel zárjuk.

5.4. Lemma. *Az A egységelemes kompozícióalgebra tetszőleges $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ elemiere az $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ és $\overline{\boldsymbol{x}}$ elemekből képzett asszociátor nulla.*

Bizonyítás. Az $\boldsymbol{x}$ elem $\overline{\boldsymbol{x}} = t(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}$ konjugáltjára teljesül

$$[\overline{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = [t(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = t(\boldsymbol{x})[1, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] - [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = 0,$$

mivel $(1\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = 1(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})$ és $\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})$. Az asszociátor-zárójel alternálása miatt ekkor az összes asszociátor értéke nulla. □

6. Kvadratikus algebrák

A kvadratikus algebrák osztályának a jelentősége már kitűnhetett az eddigi fejezetekből is. Most részletesebben is megvizsgáljuk ezt az algebraosztályt.

A fejezet során A mindig egy K test feletti, véges dimenziós, egységelemes kvadratikus algebrát fog jelölni. Az eddig megszokottak szerint a K testet azonosítjuk az A algebra $\mathsf{K}1$ részhalmazával. Megköveteljük továbbá, hogy K karakterisztikája különbözzék kettőtől.

6.1. Lemma. *Definiáljuk A alábbi részhalmazát:*

$$V = \{\boldsymbol{x} \in A \setminus \mathsf{K} \mid \boldsymbol{x}^2 \in \mathsf{K}\} \cup \{0\}.$$

Ekkor V lineáris altér A-ban és $A = \mathsf{K} \oplus V$ vektorterek direkt összege, azaz minden $\boldsymbol{x} \in A$ elemhez egyértelműen léteznek $\alpha \in \mathsf{K}$, $\boldsymbol{u} \in V$ elemek, amelyre $\boldsymbol{x} = \alpha + \boldsymbol{u}$.

Bizonyítás. Tetszőleges $\boldsymbol{x} \in A \setminus \mathsf{K}$ elemhez léteznek $b, c \in \mathsf{K}$ elemek, amelyre $\boldsymbol{x}^2 + b\boldsymbol{x} + c = 0$. Ekkor nyilván $\boldsymbol{x} + b/2 \neq \mathsf{K}$ és $(\boldsymbol{x} + b/2)^2 = -c + b^2/4 \in \mathsf{K}$, azaz $\boldsymbol{x} + b/2 \in V$ és $\boldsymbol{x}$ előáll egy K-beli és egy V-beli elem összegeként. Mivel $\mathsf{K} \cap V = \{0\}$, így A direkt felbontásához elegendő megmutatni, hogy V lineáris altér.

Az világos, hogy $\alpha \in \mathsf{K}$ esetén $\alpha V \subseteq V$, hátra van még $V + V \subseteq V$. Rögzítsünk ehhez tetszőleges $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ V-beli elemeket. Ha ezek lineárisan függők, akkor szükségszerűen egyik skalárszorosa a másiknak, de akkor az összegük is skalárszorosa ugyanannak az elemnek, tehát benne van V-ben. Tegyük ezért fel a továbbiakra, hogy $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{v}$ lineárisan függetlenek.

Tudjuk, hogy A kvadratikus algebra, így léteznek $a, b, c, d \in \mathsf{K}$ skalárok, amelyekre $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})^2 = a(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + b$ és $(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})^2 = c(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) + d$. Ezekből $\boldsymbol{uv} + \boldsymbol{vu}$-t kétféleképpen kifejezve kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{uv} + \boldsymbol{vu} = a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v} + b - \boldsymbol{u}^2 - \boldsymbol{v}^2 = -c\boldsymbol{u} + c\boldsymbol{v} - d + \boldsymbol{u}^2 + \boldsymbol{v}^2,$$

vagyis $a^*\boldsymbol{u} + b^*\boldsymbol{v} + c^* = 0$, ahol $a^* = a + c$, $b^* = a - c$ és $c^* = b + d - 2\boldsymbol{u}^2 - 2\boldsymbol{v}^2$ mind K-beli elemek.

Tegyük most fel, hogy $a^* \neq 0$, ekkor $b^* \neq 0$, mert $\boldsymbol{u} \notin \mathsf{K}$ és $c^* \neq 0$ mert $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{v}$ lineárisan függetlenek. Ezért $a^*\boldsymbol{u} + b^*\boldsymbol{v} + c^* = 0$-t átalakíthatjuk $\boldsymbol{u} = b^{**}\boldsymbol{v} + c^{**}$ alakra, ahol $b^{**}c^{**} \neq 0$. Ebből az következne, hogy

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{u}^2 - \boldsymbol{v}^2 - (c^{**})^2}{2b^{**}c^{**}} \in \mathsf{K},$$

ami viszont a feltételeink szerint nem igaz. Így tehát szükségszerűen $a^* = 0$, amiből következik $b^* = 0$ is.

Ezzel beláttuk $a + c = a - c = 0$-t, ami azt jelenti, hogy $a = c = 0$ és $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})^2 = b \in \mathsf{K}$. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \mathsf{K}$ azt jelentené, hogy $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + c^* = 0$ teljesül valamely $c^* \in \mathsf{K}$ elemre, azt azonban az előző bekezdésben láttunk, hogy nem lehetséges. Így tehát $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$. □

A továbbiakban gyakran fogunk hivatkozni az $\boldsymbol{x} = \alpha + \boldsymbol{u}$ felbontásra, itt α-t és $\boldsymbol{u}$-t az $\boldsymbol{x}$ elem *valós* illetve *képzetes részének* fogjuk nevezni. Bevezetjük továbbá a következő jelöléseket: $t(\boldsymbol{x}) = 2\alpha$, $N(\boldsymbol{x}) = \alpha^2 - \boldsymbol{u}^2$. Ekkor $t(\boldsymbol{x}), N(\boldsymbol{x}) \in \mathsf{K}$ és

$$\boldsymbol{x}^2 - t(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} + N(\boldsymbol{x}) = (\alpha + \boldsymbol{u})^2 - 2\alpha(\alpha + \boldsymbol{u}) + \alpha^2 - \boldsymbol{u}^2 = 0.$$

Ezeken kívül $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ elemekre definiáljuk az alábbi műveleteket:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v} \text{ képzetes része}, \qquad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{u}\boldsymbol{v} \text{ valós része}.$$

Mivel a valós és képzetes rész képzése K-lineáris, ezért $\times$ bilineáris szorzásművelet és $(.,.)$ belső szorzat V-n. A fenti jelöléssel nyilván

$$\boldsymbol{u}\boldsymbol{v} = -(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}.$$

6.2. Lemma. *Ha A alternáló kvadratikus algebra, akkor az imént definiált műveletek rendelkeznek az alábbi tulajdonságokkal.*

(i) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ *antiszimmetrikus.*
(ii) $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ *szimmetrikus.*
(iii) $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = 0$.
(iv) $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$. *(Invariancia.)*
(v) $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{u}$. *(Gyenge kifejtési tétel.)*
(vi) $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})^2$.

Bizonyítás. Az $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})^2 - \boldsymbol{u}^2 - \boldsymbol{v}^2 \in \mathsf{K}$ képzetes része $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} = 0$, ez bizonyítja (i)-t. A alternáló, így $(\boldsymbol{u}\boldsymbol{v})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{u})$. Ezt kifejtve kapjuk, hogy

$$-(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{u} = -(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}).$$

A $\times$ művelet antiszimmetriája miatt $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u})$ és a két képzetes részre kapjuk, hogy $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$, ami mutatja $(.,.)$ szimmetriáját, azaz (ii)-t. A valós részek összehasonlításából

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}) = -(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) \implies \text{(iii)}.$$

(iv)-t megkapjuk (iii) $\boldsymbol{u}$ szerinti polarizálásával.

Használjuk most az $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^2 = (\boldsymbol{u}\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$ azonosságot: egyrészt tudjuk, hogy $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^2 = -\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$, másrészt $(\boldsymbol{u}\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} = -(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{v}$.

$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$ miatt ezek összevetése (v)-t eredményezi. Végezetül az invariancia és a gyenge kifejtési tétel felhasználásával megkapjuk (vi)-t:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) &= ((\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \\
&= -((\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \\
&= (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})^2. \qquad \square
\end{aligned}$$

A fejezet fő eredménye az 5.2 tétel megfordításának is tekinthető.

6.3. Tétel. *Az A véges dimenziós alternáló kvadratikus algebrában N multiplikatív kvadratikus alak. Ha A nullaosztómentes, akkor N nem-elfajuló, azaz A kompozícióalgebra.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy a feltételeknek eleget tevő A algebrában N multiplikatív. Tudjuk, hogy $\boldsymbol{x} = \alpha + \boldsymbol{u}$ esetén $N(\boldsymbol{x}) = \alpha^2 - \boldsymbol{u}^2 = \alpha^2 + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$. Továbbá, ha $\boldsymbol{y} = \beta + \boldsymbol{v}$, akkor

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = \alpha\beta - (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}.$$

Eszerint

$$\begin{aligned}
N(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}) &= \alpha^2\beta^2 - 2\alpha\beta(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})^2 + \alpha^2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) + \beta^2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + \\
&\quad (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) + 2\alpha\beta(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + 2\alpha(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) + 2\beta(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \\
&= \alpha^2\beta^2 + \alpha^2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) + \beta^2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})^2 + (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \\
&= \alpha^2\beta^2 + \alpha^2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) + \beta^2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \\
&= (\alpha^2 + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}))(\beta^2 + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})) \\
&= N(\boldsymbol{x})N(\boldsymbol{y}),
\end{aligned}$$

ahol a második lépésben a 6.2 lemma (iii) pontját, a harmadikban pedig a (vi) pontját használtuk fel.

Az nyilvánvaló, hogy

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = N(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) - N(\boldsymbol{x}) - N(\boldsymbol{y}) = 2\alpha\beta - \boldsymbol{u}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\boldsymbol{u}$$

belső szorzat A-n, azaz N kvardatikus alak.

Tegyük végül fel, hogy A nullaosztómentes és tekintsük az $\boldsymbol{x} = \alpha + \boldsymbol{u} \neq 0$ A-beli elemet. Ekkor $\alpha - \boldsymbol{u} \neq 0$, így

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 2N(\boldsymbol{x}) = (\alpha + \boldsymbol{x})(\alpha - \boldsymbol{x}) \neq 0,$$

azaz f és N nem-elfajulóak. $\square$

Megjegyzés. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy A nullaosztómentessége elegendő, de nem szükséges feltétele annak, hogy N nem-elfajuló, azaz A kompozícióalgebra legyen. Nullaosztót tartalmazó kompozícióalgebrára példa az $M_2(\mathsf{K})$ mátrixalgebra. (Ld. az 5.1 példát.)

7. A Cayley-Dickson eljárás

Ebben a fejezetben K egy kettőtől különböző karakterisztikájú testet, A pedig K feletti véges dimenziós, egységelemes kompozícióalgebrát jelöl N nem-elfajuló multiplikatív normával. Az N-hez tartozó belső szorzat $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = N(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - N(\boldsymbol{x}) - N(\boldsymbol{y})$ és az $\boldsymbol{x} \in A$ elem *nyoma* a $t(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x},1)$ skalár. Ekkor $\boldsymbol{x}$ kielégíti az $\boldsymbol{x}^2 - t(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} + N(\boldsymbol{x}) = 0$ egyenletet és a *konjugálás* $\boldsymbol{x} \mapsto \overline{\boldsymbol{x}} = t(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}$ művelete antiautomorfizmus. Teljesül továbbá $N(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{x}}$. (Ha $A = \mathsf{K}$, akkor nyilván $N(\alpha) = \alpha^2$, $t(\alpha) = 2\alpha$ és a konjugálás az identikus leképezés.)

A Cayley-Dickson eljárás néven ismert módszer segítségével A és egy tetszőleges $\alpha \in \mathsf{K}$ elem felhasználásával egy új K-algebrát konstruálhatunk. Definiáljuk a $B = A \oplus A$ vektortéren az alábbi bilineáris szorzásműveletet:

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 - \alpha\boldsymbol{b}_2\overline{\boldsymbol{a}_2}, \overline{\boldsymbol{a}_1}\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{a}_2).$$

Triviális számolással adódik, hogy $(1,0)$ egységelem B-ben és az $\boldsymbol{a} \mapsto (\boldsymbol{a},0)$ leképezés A beágyazása B-be. Ilyen formán A-t és K-t B részalgebrájának tekinthetjük. Mivel pedig a $\boldsymbol{v} = (0,1)$ elemre $\boldsymbol{v}^2 = -\alpha$, az új algebrát pedig $B = A + \boldsymbol{v}A$ alakba írhatjuk. Ez motiválja a következő felismerést.

7.1. példa. Az $\mathbb{R}$ valós számtestből az $\alpha = 1$ választással a Cayley-Dickson eljárás a $\mathbb{C}$ komplex számtestet hozza létre.

Terjesszük most ki a konjugálás műveletét B-re az $\overline{(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)} = (\overline{\boldsymbol{a}_1}, -\boldsymbol{a}_2)$ definícióval. Ekkor $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2) \in B$ esetén

$$\begin{aligned}
&t_B(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \overline{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{a}_1 + \overline{\boldsymbol{a}_1}, 0) = t(\boldsymbol{a}_1) \in \mathsf{K},\\
&N_B(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a}_1\overline{\boldsymbol{a}_1} + \alpha\boldsymbol{a}_2\overline{\boldsymbol{a}_2}, 0) = N(\boldsymbol{a}_1) + \alpha N(\boldsymbol{a}_2) \in \mathsf{K}
\end{aligned}$$

és $\boldsymbol{x}$ eleget tesz az

$$\boldsymbol{x}^2 - t(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} + N(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2 - (\boldsymbol{x} + \overline{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{x}} = 0$$

K feletti másodfokú egyenletnek, azaz B kvadratikus algebra. Végezetül megmutatjuk, hogy a konjugálás B antiautomorfizmusa:

$$\begin{aligned}
(\overline{\boldsymbol{b}_1}, -\boldsymbol{b}_2)(\overline{\boldsymbol{a}_1}, -\boldsymbol{a}_2) &= (\overline{\boldsymbol{b}_1}\,\overline{\boldsymbol{a}_1} - \alpha\boldsymbol{a}_2\overline{\boldsymbol{b}_2}, -\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{a}_2 - \overline{\boldsymbol{a}_1}\boldsymbol{b}_2)\\
&= (\overline{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 - \alpha\boldsymbol{b}_2\overline{\boldsymbol{a}_2}}, -(\overline{\boldsymbol{a}_1}\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{a}_2))\\
&= \overline{(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)}.
\end{aligned}$$

A Cayley-Dickson eljárás tehát egy kvadratikus algebrát hoz létre. A következő állítás megmutatja, hogy mely esetekben lesz B kompozícióalgebra.

7.1. Állítás. *Tekintsük az A kompozícióalgebrából és az $\alpha \in \mathsf{K}$ elemből a Cayley-Dickson eljárással megkonstruált B algebrát. Ekkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *B kompozícióalgebra.*

(ii) *B alternáló algebra.*

(iii) *A asszociatív algebra.*

Bizonyítás. Elsőként azt látjuk be, hogy N nem-elfajuló kvadratikus alak; ebből az 5.2 és 6.3 tételek szerint következik (i) és (ii) ekvivalenciája. Már láttuk, hogy $N_B(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = N(\boldsymbol{a}_1) + \alpha N(\boldsymbol{a}_2)$, amiből adódik az

$$f_B((\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2), (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)) = f(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1) + \alpha f(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2)$$

belső szorzat. Tegyük fel, hogy $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \in B$ elemre $f_B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ teljesül minden $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) \in B$ esetén, ez csak úgy lehetséges, ha $f(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1) = f(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2) = 0$ áll fenn minden $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \in A$-ra. Mivel azonban N nem-elfajuló A-n, így ez utóbbi feltétel implikálja $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2 = 0$-t és $\boldsymbol{x} = 0$-t. Ez pontosan azt jelenti, hogy N_B nem-elfajuló kvadratikus alak B-n.

Tekintsük most az $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ B-beli elemeket és az 5.4 lemma segítségével számítsuk ki az $\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})$ különbséget.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y} &= (\boldsymbol{a}_1^2 - \alpha \boldsymbol{a}_2\overline{\boldsymbol{a}_2}, \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 + \overline{\boldsymbol{a}_1}\boldsymbol{a}_2)(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) \\
&= (\boldsymbol{a}_1^2\boldsymbol{b}_1 - \alpha(\boldsymbol{a}_2\overline{\boldsymbol{a}_2})\boldsymbol{b}_1 - \alpha \boldsymbol{b}_2\overline{\boldsymbol{a}_2}(\boldsymbol{a}_1 + \overline{\boldsymbol{a}_1}), \\
&\qquad (\overline{\boldsymbol{a}_1})^2\boldsymbol{b}_2 - \alpha(\boldsymbol{a}_2\overline{\boldsymbol{a}_2})\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_1(\boldsymbol{a}_1 + \overline{\boldsymbol{a}_1})\boldsymbol{a}_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}) &= (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 - \alpha \boldsymbol{b}_2\overline{\boldsymbol{a}_2}, \overline{\boldsymbol{a}_1}\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{a}_2) \\
&= (\boldsymbol{a}_1^2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{b}_2\overline{\boldsymbol{a}_2}) - \alpha(\overline{\boldsymbol{a}_1}\boldsymbol{b}_2)\overline{\boldsymbol{a}_2} - \alpha \boldsymbol{b}_1(\boldsymbol{a}_2\overline{\boldsymbol{a}_2}), \\
&\qquad (\overline{\boldsymbol{a}_1})^2\boldsymbol{b}_2 + \overline{\boldsymbol{a}_1}(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{a}_2) + (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{a}_2 - \alpha \boldsymbol{b}_2(\overline{\boldsymbol{a}_2}\boldsymbol{a}_2))
\end{aligned}$$

Mivel $\boldsymbol{a}_1 + \overline{\boldsymbol{a}_1}$ és $\boldsymbol{a}_2\overline{\boldsymbol{a}_2}$ skalárok, ezért $\alpha \boldsymbol{b}_2\overline{\boldsymbol{a}_2}(\boldsymbol{a}_1 + \overline{\boldsymbol{a}_1}) = \alpha((\boldsymbol{a}_1 + \overline{\boldsymbol{a}_1})\boldsymbol{b}_2)\overline{\boldsymbol{a}_2}$ és $(\boldsymbol{a}_2\overline{\boldsymbol{a}_2})\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_1(\boldsymbol{a}_2\overline{\boldsymbol{a}_2})$, és az első komponensek különbségére

$$\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{b}_2\overline{\boldsymbol{a}_2}) - (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2)\overline{\boldsymbol{a}_2} = -[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2, \overline{\boldsymbol{a}_2}]$$

adódik. A második komponensek különbségénél hasonlóan járunk el, az $(\boldsymbol{a}_2\overline{\boldsymbol{a}_2})\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{b}_2(\overline{\boldsymbol{a}_2}\boldsymbol{a}_2)$ és $\boldsymbol{b}_1(\boldsymbol{a}_1 + \overline{\boldsymbol{a}_1})\boldsymbol{a}_2 = ((\boldsymbol{a}_1 + \overline{\boldsymbol{a}_1})\boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{a}_2$ egyenlőségeket használva kapjuk, hogy a különbség

$$(\overline{\boldsymbol{a}_1}\boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{a}_2 - \overline{\boldsymbol{a}_1}(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{a}_2) = [\overline{\boldsymbol{a}_1}, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2].$$

Tehát

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = (-[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2, \overline{\boldsymbol{a}_2}], [\overline{\boldsymbol{a}_1}, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2]),$$

vagyis B akkor és csak akkor elégíti ki az $\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})$ azonosságot, ha A asszociatív. Ez bizonyítja (ii)$\Longrightarrow$(iii)-t.

Mivel a konjugálás antiautomorfizmus, teljesül az

$$\begin{aligned}
\overline{[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}]} &= -[\overline{\boldsymbol{z}}, \overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}] \\
&= -[t(\boldsymbol{z}) - \boldsymbol{z}, t(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{y}, t(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}] \\
&= -[-\boldsymbol{z}, -\boldsymbol{y}, -\boldsymbol{x}] \\
&= [\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}]
\end{aligned}$$

azonosság. Tegyük ezért fel, hogy A asszociatív, így $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}] = 0$. Ekkor $[\boldsymbol{y},\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}] = \overline{[\boldsymbol{x},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]} = \overline{0} = 0$, azaz $(\boldsymbol{y}\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^2$. A 3.3 állítás szerint a két azonosságból következik, hogy B alternáló algebra. □

7.2. Állítás. *Az A kompozícióalgebrából és az $\alpha \in \mathsf{K}$ elemből a Cayley-Dickson eljárással megkonstruált B algebra akkor és csak akkor asszociatív, ha A kommutatív és asszociatív.*

Bizonyítás. A 7.1 állítás szerint ha B asszociatív, akkor A is asszociatív és teljesül

$$0 = (0,1)(\boldsymbol{a},0)\cdot(\boldsymbol{b},0) - (0,1)\cdot(\boldsymbol{a},0)(\boldsymbol{b},0) = (0,\boldsymbol{b}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}),$$

vagyis A kommutatív is egyben. Ha pedig A kommutatív és asszociatív, akkor egyszerű közvetlen számolás kiadja B asszociativitását. □

7.3. Állítás. *Az A kompozícióalgebrából és az $\alpha \in \mathsf{K}$ elemből a Cayley-Dickson eljárással megkonstruált B algebra akkor és csak akkor kommutatív, ha $A = \mathsf{K}$.*

Bizonyítás. Ha $A = \mathsf{K}$, akkor B asszociatív és $\overline{\alpha} = \alpha$ minden $\alpha \in \mathsf{K}$ esetén. Ebben az esetben a szorzásművelet definíciójából azonnal látszik B kommutativitása. Tegyük fel most, hogy B kommutatív és asszociatív, a 7.2 állítás szerint ekkor A kommutatív. Az $(\boldsymbol{a},0)(0,1) - (0,1)(\boldsymbol{a},0) = (0,\overline{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{a}) = 0$ egyenlőség mutatja, hogy a konjugálás identikus leképezés A-n és $t(\boldsymbol{a}) = 2\boldsymbol{a}$. Mivel $\mathrm{char}(\mathsf{K}) \neq 2$, így $\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}t(\boldsymbol{a}) \in \mathsf{K}$, vagyis $A = \mathsf{K}$. □

Megjegyzés. A bizonyításból az derül ki, hogy $A = \mathsf{K}$ akkor és csak akkor teljesül, ha a konjugálás művelete az identikus leképezés A-n.

A fejezet hátralévő részében a Cayley-Dickson eljárás „természetes előfordulásáról" győződhetünk meg. Rögzítsük ehhez a következő fogalmakat: Legyen A a B kompozícióalgebra olyan részalgebrája, amely tartalmazza az 1 egységelemet és amelyen az $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = N(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - N(\boldsymbol{x}) - N(\boldsymbol{y})$ belső szorzat nem-elfajuló. (Azaz minden $\boldsymbol{x} \in A$-ra létezik $\boldsymbol{y} \in A$, hogy $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \neq 0$.) Jelölje $A^\perp$ az A f-re vonakozó

$$A^\perp = \{\boldsymbol{y} \in B \mid f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \text{ minden } \boldsymbol{x} \in A \text{ esetén } \}$$

ortogonális kiegészítő alterét. A belső szorzat bilinearitás miatt $A^\perp$ K-lineáris altér. A bizonyításban felhasználjuk a $B = \mathsf{K} \oplus V$ direkt felbontást, eszerint $\boldsymbol{x} = \alpha + \boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{y} = \beta + \boldsymbol{v}$ B-beli elemekre $\overline{\boldsymbol{y}} = \beta - \boldsymbol{v}$ és

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = \alpha\beta - (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}.$$

Az f és $(.,.)$ belső szorzatok kapcsolata:

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = N(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - N(\boldsymbol{x}) - N(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{y}\overline{\boldsymbol{x}} = t(\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{y}}) = 2\alpha\beta + 2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}).$$

7.4. Lemma. *Minden $\boldsymbol{v} \in A^{\perp}$ elemre $\boldsymbol{v}A \subseteq A^{\perp}$.*

Bizonyítás. Két tetszőleges $\gamma + \boldsymbol{r}, \beta + \boldsymbol{s} \in A$ elemre, $1 \in A$ miatt $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s} \in A^{\perp} \cap V$. Ez utóbbiból következik, hogy $f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) = 2(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) = 0$ és $\boldsymbol{rv} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$. Hasonlóan, $\boldsymbol{sv} = \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{v}$ és

$$\begin{aligned} f(\gamma + \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}(\beta + \boldsymbol{s})) &= f(\gamma + \boldsymbol{r}, \beta\boldsymbol{v}) + \gamma f(1, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{s}) + f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{s}) \\ &= -2(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{v}) \\ &= -2(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s}, \boldsymbol{v}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

hiszen $\beta\boldsymbol{v} \in A^{\perp}$, $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{s} \in V$ és $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s} \in A$. □

7.5. Tétel. *Legyen A a B kompozícióalgebra olyan részalgebrája, amely tartalmazza az 1 egységelemet és amelyen f nem-elfajuló. Ekkor bármely $\boldsymbol{v} \in A^{\perp}$ elem esetén $\boldsymbol{v}^2 \in \mathsf{K}$ és a $B_1 = A + \boldsymbol{v}A$ olyan részalgebrája B-nek, amely izomorf az A-ból és $\alpha = -\boldsymbol{v}^2$-ből Cayley-Dockson eljárással nyert algebrához.*

Bizonyítás. Mivel $1 \in A$ és $\boldsymbol{v} \in A^{\perp}$, így $t(\boldsymbol{v}) = f(1, \boldsymbol{v}) = 0$ és $\boldsymbol{v} \in V$, tehát $\boldsymbol{v}^2 \in \mathsf{K}$. Igaz továbbá, hogy bármely $\boldsymbol{a} \in A$-ra

$$0 = f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{v}\overline{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}\overline{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{a}\boldsymbol{v},$$

vagyis $\boldsymbol{av} = \boldsymbol{v}\overline{\boldsymbol{a}}$. A 7.4 lemma szerint minden $\boldsymbol{b} \in A$ esetén $\boldsymbol{vb} \in A^{\perp}$, ezért az előzőhöz hasonlóan

$$(\boldsymbol{vb})\boldsymbol{a} = \overline{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{vb}).$$

Ebből kiszámíthatjuk a következő különbségeket:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{va})\boldsymbol{b} - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{ba}) &= (\boldsymbol{va})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{vb})\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{vb})\boldsymbol{a} - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{ba}) \\ &= (\overline{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{v})\boldsymbol{b} - \overline{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{vb}) + [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}] \\ &= (\overline{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{v})\boldsymbol{b} - \overline{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{vb}) + [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}] \\ &= (\overline{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{v})\boldsymbol{b} - \overline{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{vb}) + (\boldsymbol{av})\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{vb}) \\ &= ((\boldsymbol{a} + \overline{\boldsymbol{a}})\boldsymbol{v})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} + \overline{\boldsymbol{a}})(\boldsymbol{vb}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{va})(\boldsymbol{vb}) - \boldsymbol{v}^2(\boldsymbol{b}\overline{\boldsymbol{a}}) &= (\boldsymbol{va})(\boldsymbol{vb}) - ((\boldsymbol{va})\boldsymbol{v})\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{v}(\boldsymbol{av}))\boldsymbol{b} - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{b}\overline{\boldsymbol{a}}))) \\ &= -[\boldsymbol{va}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}] + (\boldsymbol{v}(\boldsymbol{av}))\boldsymbol{b} - \boldsymbol{v}((\boldsymbol{v}\overline{\boldsymbol{a}})\boldsymbol{b}) \\ &= [\boldsymbol{v}, \overline{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{av}, \boldsymbol{b}] \\ &= (\boldsymbol{a} + \overline{\boldsymbol{a}})[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}] \\ &= 0, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a korábban bizonyított azonosságokat és azt, hogy B alternáló algebra. Ezekből két B_1-beli elem szorzatára

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{va}_2)(\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{vb}_2) &= \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 + (\boldsymbol{va}_2)\boldsymbol{b}_1 + (\boldsymbol{vb}_2)\overline{\boldsymbol{a}_1} + (\boldsymbol{va}_2)(\boldsymbol{vb}_2) \\ &= \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{v}^2(\boldsymbol{b}_2\overline{\boldsymbol{a}_2}) + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{a}_2) + \boldsymbol{v}(\overline{\boldsymbol{a}_1}\boldsymbol{b}_2) \\ &= \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 + \alpha\, \boldsymbol{b}_2\overline{\boldsymbol{a}_2} + \boldsymbol{v}(\overline{\boldsymbol{a}_1}\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{a}_2). \end{aligned}$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy B_1 olyan részalgebrája B-nek, amely izomorf az A-ból és $\alpha = -v^2$-ből Cayley-Dockson eljárással nyert algebrához. □

8. Klasszikus algebrák

Ebben a fejezetben kompozícióalgebrákat konstruálunk a Cayley-Dickson eljárás segítségével. A konstrukciókat – eleganciájuk és matematikai fontosságuk miatt – klasszikus algebráknak is nevezik.

8.1. példa. Legyen $A = \mathsf{K}$ és $\alpha = -1$ és jelölje B a Cayley-Dickson eljárással nyert algebrát; B szorzásművelete $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1b_1 + a_2b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$.

Legyen C a $\mathsf{K} \times \mathsf{K}$ algebra, C-n a szorzás $(a_1, a_2) \circ (b_1, b_2) = (a_1b_1, a_2b_2)$. Tekintsük a $\varphi : B \to C$, $\varphi(a_1, a_2) = (a_1 + a_2, a_1 - a_2)$ leképezést. φ nyilván K-lineáris, invertálható és

$$\begin{aligned}\varphi(a_1, a_2) \circ \varphi(b_1, b_2) &= (a_1 + a_2, a_1 - a_2) \circ (b_1 + b_2, b_1 - b_2) \\ &= (a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2, \\ &\qquad a_1b_1 - a_1b_2 - a_2b_1 + a_2b_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi((a_1, a_2)(b_1, b_2)) &= \varphi(a_1b_1 + a_2b_2, a_1b_2 + a_2b_1) \\ &= (a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2, \\ &\qquad a_1b_1 - a_1b_2 - a_2b_1 + a_2b_2),\end{aligned}$$

azaz φ izomorpfizmus B és C között. A két algebra normája $N_B(a_1, a_2) = a_1^2 - a_2^2$ illetve $N_C(a_1, a_2) = a_1a_2$ a konjugálás művelete pedig $\overline{(a_1, a_2)} = (a_1, -a_2)$ illetve $\overline{(a_1, a_2)} = (a_2, a_1)$.

8.2. példa. Legyen most $A = \mathsf{K} \times \mathsf{K}$ és ismét $\alpha = -1$. Ekkor B általános eleme (a_1, a_2, a_3, a_4) alakú, a szorzásművelet pedig

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, a_3, a_4)(b_1, b_2, b_3, b_4) &= ((a_1, a_2)(b_1, b_2) + (b_3, b_4)(a_4, a_3), \\ &\qquad (a_2, a_1)(b_3, b_4) + (b_1, b_2)(a_3, a_4)) \\ &= (a_1b_1 + a_4b_3, a_2b_2 + a_3b_4, \\ &\qquad a_2b_3 + a_3b_1, a_1b_4 + a_4b_2).\end{aligned}$$

Azonnal adódik, hogy az

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \mapsto \begin{pmatrix} a_1 & a_4 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}$$

leképezés izomorfizmus B és az $M_2(\mathsf{K})$ mátrixalgebra között.

8.3. példa. Legyen $\mathsf{K} = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{C}$ és $\alpha = 1$, a B elemei $(a_1 + a_2i, a_3 + a_4i)$ alakúak $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ számokkal. Jelöljük j-vel illetve k-val a $(0, i)$

illetve $(0,1)$ B-beli elemeket, ekkor $1=(1,0)$, $i=(i,0)$, j és k a B-nek $\mathbb{R}$ feletti bázisát alkotják. A definícióból könnyen leellenőrizhető, hogy

$$i^2=j^2=k^2=-1, \qquad ij=-ji=k, jk=-kj=i, ki=-ik=j$$

teljesül, azaz B nem más, mint a 2.5 példában leírt kvaterniók ferdeteste.

Az eddigi példák mindegyikében kommutatív A-ból indultunk ki, ami associatív B-t eredményezett. A következő példában nem-kommutatív A felhasználásával konstruálunk egy nem-asszociatív alternáló algebrát.

8.4. példa. Az oktávok osztásalgebrája. Legyen $A=\mathbb{H}$ és a korábbitól eltérően a szokásos $\mathbb{R}$-bázist jelölje $\{1,e_1,e_2,e_3\}$, azaz $\mathbb{H}=\mathbb{R}+\mathbb{R}e_1+\mathbb{R}e_2+\mathbb{R}e_3$, valamint legyen $\alpha=1$. A Cayley-Dickson eljárás által eredményezett algebrát jelölje $\mathbb{O}$; ennek egy $\mathbb{R}$-bázisát alkotják az

$$\begin{aligned} &1=(1,0), \quad e_1=(e_1,0), \quad e_2=(e_2,0), \quad e_3=(e_3,0),\\ &e_4=(0,1), \quad e_5=(0,e_1), \quad e_6=(0,e_2), \quad e_7=(0,e_3) \end{aligned}$$

elemek. Ezekre mindre teljesül $\overline{e_i}=-e_i$.

Mivel $(a,0)^2=a^2$ és $(0,a)^2=-\alpha a\overline{a}$, így $e_i^2=-1$ $(i=1,\dots,7)$. A szorzat definíciója szerint $\mathbb{O}$-ban $(a,0)(b,0)=(ab,0)$, $(a,0)(0,b)=(0,\overline{a}b)$, $(0,a)(b,0)=(0,ba)$ és $(0,a)(0,b)=(-b\overline{a},0)$, amiből a kvaterniók tulajdonságai miatt következik, hogy minden $i,j\in\{1,\dots,7\}$ esetén $e_ie_j=\pm e_k$ valamely $k\in\{1,\dots,7\}$-ra. A konjugálás tulajdonsága szerint

$$e_ie_j=\pm e_k \implies e_je_i=(-e_j)(-e_i)=\overline{e_j}\,\overline{e_i}=\overline{e_ie_j}=\overline{\pm e_k}=\mp e_k.$$

Az alternáló tulajdonság miatt

$$e_ie_j=\pm e_k \implies e_je_k=\pm e_j(e_ie_j)=\mp e_j(e_je_i)=\pm e_i.$$

Mindzek figyelembevételével már bármely e_ie_j szorzatot ki tudjuk számítani az alábbi felsorolásból:

$$e_1e_2=e_3,\ e_5e_1=e_4,\ e_4e_3=e_7,\ e_7e_6=e_1,\ e_5e_6=e_3,\ e_2e_6=e_4,\ e_2e_5=e_7.$$

A fenti egyenlőségek a definícióból közvetlenül leellenőrizhetők. Már láttuk, hogy $e_i^2=-1$, $e_ie_j+e_je_i=0$ és $\overline{e_i}=-e_i$, amiből következik, hogy az $\boldsymbol{x}=x_0+x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4+x_5e_5+x_6e_6+x_7e_7$ elem konjugáltja

$$\overline{\boldsymbol{x}}=x_0-x_1e_1-x_2e_2-x_3e_3-x_4e_4-x_5e_5-x_6e_6-x_7e_7$$

és a normája

$$N(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{x}}=x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2.$$

Ha most $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ nullától különböző $\mathbb{O}$-beli elemek, akkor $N(\boldsymbol{a})$ és $N(\boldsymbol{b})$ szigoróan pozitív valós számok, s így $N(\boldsymbol{ab}) = N(\boldsymbol{a})N(\boldsymbol{b})$ és $\boldsymbol{ab}$ sem lehet nulla. Ez azt jelenti, hogy $\mathbb{O}$ nullaosztómentes, és mivel $\mathbb{R}$ felett 8-dimenziós, a 4.2 lemma szerint osztásalgebra.

Az utolsó példánkban először direkt módon leírjuk egy oktávokhoz hasonló nem-asszociatív kompozícióalgebra konstrukcióját, majd a 7.5 tétel segítségével megmutatjuk, hogy ez az algebra hogyan származtatható más klasszikus algebrából.

8.5. példa. A felhasadó oktávalgebra. Legyen K egy tetszőleges test B pedig egy 8-dimenziós K-vektortér. B elemeit olyan 2×2-es mátrixokkal fogjuk megjeleníteni, melyek főátlójában skalárok, a másik két pozícióban pedig számhármasok állnak:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} & \beta \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathsf{K},\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathsf{K}^3.$$

Két B-beli elem szorzata

$$\begin{pmatrix} \alpha & \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} & \beta \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \gamma & \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{y} & \alpha\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{y} \\ \gamma\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{y} - \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{x} & \beta\delta + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x} \end{pmatrix},$$

ahol „$\cdot$" a közönséges euklideszi belső szorzatot, „$\times$" pedig a szokásos vektoriális szorzatot jelöli. A konjugálás műveletét itt *adjungálásnak* hívjuk, az általános elem adjungáltja

$$\begin{pmatrix} \alpha & \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} & \beta \end{pmatrix}^a = \begin{pmatrix} \beta & -\boldsymbol{u} \\ -\boldsymbol{v} & \alpha \end{pmatrix}.$$

A B-beli egységelem nyilván $\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$, és teljesül

$$t\begin{pmatrix} \alpha & \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} & \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} & \beta \end{pmatrix}^a = \alpha + \beta \in \mathsf{K}$$

és

$$N\begin{pmatrix} \alpha & \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} & \beta \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \alpha & \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} & \beta \end{pmatrix}^a = \alpha\beta - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \in \mathsf{K}.$$

A norma eszerint nem-elfajuló kvadratikus alak; a multiplicitás megmutatásában felhasználjuk, hogy $\boldsymbol{u} \perp (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$, a vektoriális szorzatra érvényes

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u}\boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}\boldsymbol{w})\boldsymbol{u}$$

kifejtési tételt és a vegyes szorzat $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$ tulajdonságát.

$$\begin{aligned}
&(\alpha\gamma + \boldsymbol{u}\boldsymbol{y})(\beta\delta + \boldsymbol{v}\boldsymbol{x}) - (\alpha\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{y})(\gamma\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{y} - \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{x}) = \\
&\alpha\beta\gamma\delta + (\boldsymbol{u}\boldsymbol{y})(\boldsymbol{v}\boldsymbol{x}) - \alpha\beta(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}) - \gamma\delta(\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{y})(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{x}) = \\
&(\alpha\beta - \boldsymbol{u}\boldsymbol{v})(\gamma\delta - \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{u}\boldsymbol{v})(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{u}\boldsymbol{y})(\boldsymbol{v}\boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{y})(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

A fenti azonosságok szerint azonban

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{y})(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{x}) &= ((\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{u})\boldsymbol{x}\\ &= ((\boldsymbol{v}\boldsymbol{u})\boldsymbol{y}-(\boldsymbol{y}\boldsymbol{u})\boldsymbol{v})\boldsymbol{x}\\ &= (\boldsymbol{u}\boldsymbol{v})(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})-(\boldsymbol{u}\boldsymbol{y})(\boldsymbol{v}\boldsymbol{x}),\end{aligned}$$

ami bizonyítja, hogy N multiplikatív norma és B kompozícióalgebra. Az algebra nevében a *felhasadó* jelző arra utal, hogy B tartamaz nullaosztókat. Valóban, az alternáló tulajdonságot használva könnyen meggondolható, hogy egy B-beli elem pontosan akkor nullaosztó, ha a normája nulla.

Most megmutatjuk, hogy B hogyan nyerhető a Cayley-Dickson eljárás segítségével. Az világos, hogy

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} a & (b,0,0)\\ (c,0,0) & d\end{pmatrix}$$

az $M_2(\mathsf{K})$ mátrixalgebra beágyazása B-be, más szóval a fenti típusú elemek B-nek egy $M_2(\mathsf{K})$-val izomorf A részalgebráját alkotják. A normához tartozó belső szorzatra teljesül

$$\begin{aligned}&f\left(\begin{pmatrix} a & (b,0,0)\\ (c,0,0) & d\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & (0,-1,0)\\ (0,1,0) & 0\end{pmatrix}\right)=\\ &t\left(\begin{pmatrix} a & (b,0,0)\\ (c,0,0) & d\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} 0 & (0,-1,0)\\ (0,1,0) & 0\end{pmatrix}^{a}\right)=\\ &t\begin{pmatrix} 0 & \dots\\ \dots & 0\end{pmatrix}=0,\end{aligned}$$

vagyis

$$\begin{pmatrix} 0 & (0,-1,0)\\ (0,1,0) & 0\end{pmatrix}\in A^{\perp}.$$

Mivel

$$-\begin{pmatrix} 0 & (0,-1,0)\\ (0,1,0) & 0\end{pmatrix}^{2}=1,$$

a 7.5 tételből adódik, hogy B-t előállíthatjuk az $M_2(\mathsf{K})$ mátrixalgebra és az $\alpha=1$ skalár felhasználásával a Cayley-Dickson eljárás segítségével.

A fenti példa jól láthatóan tetszőleges K test esetén működik. A fejezet végén megmutatjuk, hogy a $\mathsf{K}=\mathbb{R}$ esetben a B felhasadó oktávalgebra az $A=\mathbb{H}$, $\alpha=-1$ választással is megkonstuálható. Ehhez elsőként mutatnunk kell egy $\mathbb{H}$-hoz izomorf részalgebrát B-ben. Valóban, könnyen látható, hogy az

$$x_0+x_1i+x_2j+x_3k\mapsto\begin{pmatrix} x_0 & (x_1,x_2,x_3)\\ -(x_1,x_2,x_3) & x_0\end{pmatrix}$$

leképezés $\mathbb{H}$ beágyazása B-be. A fenti számoláshoz hasonlóan,

$$f\left(\begin{pmatrix} x_0 & (x_1,x_2,x_3) \\ -(x_1,x_2,x_3) & x_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & (1,0,0) \\ (1,0,0) & 0 \end{pmatrix}\right) =$$
$$t\left(\begin{pmatrix} x_0 & (x_1,x_2,x_3) \\ -(x_1,x_2,x_3) & x_0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & (-1,0,0) \\ (-1,0,0) & 0 \end{pmatrix}\right) =$$
$$t\begin{pmatrix} -x_1 & \dots \\ \dots & x_1 \end{pmatrix} = 0$$

azaz

$$\begin{pmatrix} 0 & (1,0,0) \\ (1,0,0) & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^\perp,$$

valamint

$$\alpha = -\begin{pmatrix} 0 & (1,0,0) \\ (1,0,0) & 0 \end{pmatrix}^2 = -1.$$

Az előzőhöz hasonlóan a 7.5 tétel mutatja, hogy B valóban megkonstruálható $\mathbb{H}$-ból és $\alpha = -1$-ből a Cayley-Dickson eljárással.

Az olvasóra hagyjuk annak a meggondolását, hogy az $A = \mathbb{C}$, $\alpha = -1$ választással a Cayley-Dickson eljárás egy $M_2(\mathbb{R})$-rel izomorf algebrát eredményez.

9. A valós klasszikus algebrák jellemzése

Ebben a fejezetben az $\mathbb{R}$ valós test feletti osztásalgebrák algebrai jellemzését tárgyaljuk. Két klasszikus eredményt bizonyítunk be: Az egyik Frobenius tétele az $\mathbb{R}$ feletti ferdetestekről, a másik pedig Hurwitz tétele az $\mathbb{R}$ feletti nullaosztómentes kompozícióalgebrákról.

9.1. Tétel. *Az $\mathbb{R}$ feletti véges dimenziós B algebrára a következők ekvivalensek.*

(i) *B alternáló osztásalgebra.*

(ii) *B nullaosztómentes kompozícióalgebra.*

(iii) *B izomorf az alábbi $\mathbb{R}$-algebrák valamelyikéhez: $\mathbb{R}$ valós test, $\mathbb{C}$ komplex számtest, $\mathbb{H}$ kvaterniók ferdeteste, $\mathbb{O}$ oktávok osztásalgebrája.*

Bizonyítás. Az (iii) pontban felsorolt algebrák konstrukciójából világosan kiderül, hogy mindegyikük alternáló osztásalgebra, azaz (iii)$\Rightarrow$(i). A 6.3 tétel szerint (i)$\Rightarrow$(ii). Azt kell tehát megmutatnunk, hogy (ii)$\Rightarrow$(iii), rögzítsük ezért a B nullaosztómentes kompozícióalgebrát. Legyen f a B normájához tartozó belső szorzat és jelölje $X^\perp$ az $X \subseteq B$ halmaz f-re vonatkozó ortogonális kiegészítő alterét. Könnyen látható, hogy bármely $0 \neq v \in \mathbb{R}^\perp$ elemre $v^2 \in \mathbb{R}$ és $v^2 < 0$. Ha ugyanis $v^2 = c > 0$ állna fenn, akkor

$(v-\sqrt{c})(v+\sqrt{c})=0$, azaz B nullaosztómentessége miatt $v=\pm\sqrt{c}\in\mathbb{R}$ teljesülne, ami nem lehetséges.

Ha $\dim(B)=1$, akkor nyilván $B=\mathbb{R}1=\mathbb{R}$ és (iii) teljesül. Ha $\dim(B)>1$, akkor $A_1=\mathbb{R}$ valódi részalgebra és $A_1^{\perp}\neq 0$. Ekkor választhatunk egy $v_1\in A_1^{\perp}$ elemet, amelyre $v_1^2=-1$, és amelyre a 7.5 tétel szerint az $A_2=A_1+v_1A_1$ olyan részalgebrája B-nek, amely izomorf az $\mathbb{R}$-ből és $\alpha=1$-ből Cayley-Dickson eljárással nyert algebrához, vagyis $A_2\cong\mathbb{C}$.

Ha $\dim(B)=2$, akkor $B=A_2\cong\mathbb{C}$ és (iii) teljesül. Ha $\dim(B)>2$, akkor válasszunk egy $v_2\in A_2^{\perp}$ úgy, hogy $v_2^2=-1$ és tekintsük az $A_3=A_2+v_2A_2$ alteret. A 7.5 tétel szerint ez olyan részalgebra B-ben, amely izomorf a $\mathbb{C}$-ből $\alpha=1$ választással konstruált algebrához, azaz $\mathbb{H}$-hoz.

Ha $\dim(B)=4$, akkor $B=A_3\cong\mathbb{H}$ és (iii) teljesül. Ha $\dim(B)>4$, akkor a fentiekhez hasonlóan választunk egy $v_3\in A_3^{\perp}$ elemet, amelyre $v_3^2=-1$, és kapjuk az $\mathbb{O}$-val izomorf $A_4=A_3+v_3A_3$ részalgebrát. Ha $\dim(B)=8$, akkor $B\cong\mathbb{O}$ és (iii) adódik. Megmutatjuk, hogy $\dim(B)>8$ nem lehetséges.

A $\dim(B)>8$ esetben ugyanis az előbbi eljárást folytatva tudnánk egy $v_4\in A_4^{\perp}$ elemet választani, amelyre $v_4^2=-1$ és a 7.5 tétel szerint az $A_5=A_4+v_4A_4$ részalgebra izomorf lenne az $\mathbb{O}$-ból és $\alpha=1$-ből a Cayley-Dickson eljárással megalkotott 16-dimenziós algebrához. Mivel viszont a feltevés szerint B alternáló, az A_5 részalgebra is alternáló, és a 7.1 állításból adódóan $\mathbb{O}$ asszociatív, ami nyilvánvaló ellentmondás. Tehát $\dim(B)\leq 8$ és minden esetben B izomorf a (iii) pontban felsorolt $\mathbb{R}$-algebrák valamelyikéhez. □

A fejezet elején említett két klasszikus tétel az előző következménye.

9.2. Következmény (Frobenius tétele). *A valós számtest feletti véges dimenziós ferdetestek a következők egyikével izomorfak:* $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *vagy* $\mathbb{H}$.

9.3. Következmény (Hurwitz tétele). *A valós számtest feletti véges dimenziós, nullaosztómentes kompozícióalgebrák a következők egyikével izomorfak:* $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ *vagy* $\mathbb{O}$.