

Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Bolyai Intézet
Geometria Tanszék
Matematika-tanár szak



Szakdolgozat

Fraktálok a tőzsdén

Gombos Kitti Kata
Témavezető: Dr. Kurusa Árpád

2010

Tartalomjegyzék

1. Bevezető	2
2. A fraktálfogalom és kialakulása	3
2.1. Fraktálok a természetben	3
2.2. Káosz és fraktál	5
2.3. Fraktálok előállítása	6
2.4. Szabálytalanság és dimenzió	10
2.5. Önhasonlóság	14
3. Fraktálok és dimenzióik	16
3.1. Hausdorff-dimenzió	16
3.2. Dobozszámoló-dimenzió	16
3.3. Konkrét számítások	17
4. Fraktálok a közgazdaságban	21
4.1. Bevezetés	21
4.2. A hozamok függetlensége	21
4.3. R/S analízis és Hurst-exponens	23
5. Fraktálok keresése a valós tőzsdéken	25
5.1. A Dow Jones index vizsgálata	25
5.2. A General Electric részvény vizsgálata	29
5.3. A magyar BUX index hasonlóságai és eltérései a nemzetközi indexektől.	33
6. Fraktálok és furcsaságok	36
6.1. Peano-görbe.	36
6.2. Az ördögi lépcső	37
6.3. Koch-sziget	38
7. Tartalmi összefoglaló	40
8. Irodalomjegyzék	41
9. Felhasznált ábrák listája	42
10. Köszönetnyilvánítás	43
11. Nyilatkozat	44

1. Bevezető

A kérdés, hogy előre megtudjuk-e jósolni, hogyan változik a jövőben az egyes részvények ára, illetve hogy a tőzsdén az értékpapírok árának változása hogyan befolyásolja a világgazdaságot, nemcsak a közgazdászokat és a brókereket érinti, hanem a mindennapi emberekre is hatással van.

Vizsgálódásom kiterjed a hozamok egymástól való függőségére és a jövőbeli megjósolhatóság mértékére. Célom, hogy a közgazdász diákok számára bemutassam a fraktálokat és használhatóságukat a gazdasági elemzésekben. Remélem, eredményeim hozzájárulnak ezen matematikai modellekre épülő gazdasági elemzések megértéséhez.

Igyekeztem valós adatokon alapuló számításokon keresztül bemutatni a fraktálok gyakorlati alkalmazhatóságát. A Dow Jones ipari index, a General Electric részvény és a hazai BUX index felhasznált adatai a CD-mellékletben megtalálhatók.

Bár arra nem sikerült rájönni, hogy mennyit fog érni jövőre egy General Electric részvény, vagy a Dow Jones index kosarából mely részvénybe lesz érdekesebb befektetni, azt sikerült kimutatni, hogy ez általában, vagyis hatékony piacon, lehetetlen, de még kevésbé hatékony piacon sem lehet könnyű.

2. A fraktálfogalom és kialakulása

A legtöbb természeti objektum, mint a sziget partvonala, egy folyó hálózata, a káposzta vagy a brokkoli szerkezete, vagy az erek és az idegek hálózata az emberi retinában bonyolult alakú. Matematikai leírásuk lehetetlennek tűnt, ezért a „matematika szörnyetegeinek” nevezték őket. 1975-ben Mandelbrot talált bennük közöset és ez alapján, ezeknek a szörnyetegeknek a leírására 1975-ben bevezette a fraktál fogalmát¹, amely a számszerű leíráson kívül az ezekben az objektumokban rejlő szabályosság felismerésében is segít bennünket. Több mint húsz évvel a fogalom bevezetése után sincs általánosan elfogadott fraktál-definíció, bár elterjedt megfogalmazás, hogy a fraktálok olyan alakzatok, amelyek valamiképpen hasonló részekből épülnek fel. [1]

2.1. Fraktálok a természetben

A fraktálok nemcsak színes, számítógéppel alkotott ábrák. Felfedezhetjük őket a galaxisok spirálkarjaiban, a hegyekben, felhőkben, a fákban, a patakok vagy folyók kanyarulataiban, a tavak, tengerek partszakaszaiban és az élőlényekben is, mondhatni, a természetben mindenhol. Szabályosság van egyes növények termésénél, a magok állásában, a virágok szirmainak, leveleinek elhelyezkedésében.

A brokkolin vagy a karfiolon jól látható, hogy minden egyes darabja „hasonlít” az egész fejhez. A következő ábrán látható páfránylevélen szintén feltűnő az ön hasonlóság.

¹Több történet olvasható arról, hogy Mandelbrot miként alkotta meg a fraktál nevet, egyes helyeken azt, olvashatjuk, mesészerű leírásban, hogy egy hideg téli estén a gyermeke latin szótárát olvasgatva megakadt a szeme a latin fractus melléknéven, ami a „tör” jelentésű frange igéből származik. Máshol egyszerűen az angol eredetű fracture és fraction (törés, töredék) jelentésű, jó hangzású szavakból származtatják a fractal szót, mely a franciában és az angolban főnév és melléknév is egyszerre. De azzal, hogy ezeket az alakzatokat érdemesnek tartotta közös névvel illetni, önálló létet adott nekik, és egyúttal létre is hozta számunkra őket. Nem kétséges, hogy emiatt még akkor is joggal tekinthetjük a fraktálok felfedezőjének, ha a matematikusok, nem csak ezen alakzatok, hanem a jellemzésükre később felhasznált eszköztár egy részét is már jóval előtte megalkották.



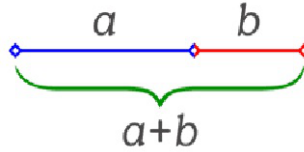
1. ábra. Páfránylevél

Az emberi test is rengeteg fraktált tartalmaz, ilyenek többek között a vérerek, az idegek, és a légutak csőhálózata, de az állatvilágban is felfedezhetők ilyen jellemvonások. A nautilus -egy, a Csendes-óceán nyugati részén élő, a puhatestűek törzsébe, a fejlábúak osztályába tartozó csigaházazas polip- is példa erre, hiszen szabályos héja a logaritmikusspirál szerint nő.



2. ábra. A nautilus csiga héja

A most említett példákban nem csak a fraktálokban megjelenő önhasonlóság mutatkozik meg, hanem ennek egy jellegzetessége, az aranymetszés is. Például a csigavonalnál: bárhogyan is húzunk vonalat a középponton áthaladva, mindegyik metszési arány aranymetszés. Hogyan kaphatjuk meg ezt az arányt?



3. ábra. Arany metszés

Osszunk fel egy szakaszt két részre oly módon, hogy a nagyobb és a kisebb rész aránya egyezzen az egész szakasz és a nagyobb rész arányával. Egyenletben felírva: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$. Másképp felírva $\frac{1+\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b}$. Ha az $x = \frac{a}{b}$ helyettesítést alkalmazzuk, akkor az $\frac{1+x}{x} = x$ -hez jutunk amit x -el szorozva majd 0-ra rendezve olyan, másodfokú egyenlethez jutunk, melynek gyökei: $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ és $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. A feladat jellege miatt a negatív gyököt nem fogadjuk el megoldásként, így a keresett szám, az arany metszés értéke, melyet általában Φ -vel jelölünk: $\Phi \approx 1,618033$. [7]

Eddigi példáinktól eltérő, ugyancsak fraktál-jellegű természeti jelenséget talált Robert Brown skót botanikus 1827-ben. Vízben lebegő, nagyon apró virágpорок szabálytalan mozgását figyelte meg mikroszkóp alatt. Ezek mozgása a hőmérséklettől függ, és rendezetlen, véletlen jellegű. Ez a jelenség a *Brown-mozgás*, amit véletlen bolyongásnak (angolul random walk) is nevezünk. A jelenség elméletét később Einstein dolgozta ki: a Brown-mozgás a folyadékot (vagy gázt) alkotó molekulák hőmozgásával kapcsolatos, a molekuláknak a Brown-részecskékkel való sorozatos és véletlenszerű ütközéseinek következménye. [2]

2.2. Káosz és fraktál

A természetes alakzatok (sziklák, növények, az élő szervezetek belső felépítése, stb.) felépülésének kaotikus voltát Mandelbrot tárta fel. A görög-latin eredetű káosz fogalom igen régi kifejezés. Hétköznapi értelemben, a káosz a teljes zűrzavar, a fejtelenség, a rendetlenség, illetve az összevisszaság megjelölésére utal, amelyben lehetetlen a követhetőség és az ellenőrzés. Matematikai értelemben azonban ez szinte csak a látszat: molekulális és determinisztikus káoszról beszélünk.

A molekulális káosz fogalmát, Boltzmann vezette be a 18.század második felében, a nagy elemszámú rendszerek viselkedésének leírására: „A molekulális káosz fennálásakor a részecskék olyan módon mozognak összevissza, hogy egyetlen kiválasztott részecske mozgásáról meghatározott idő után akkor sem tudunk semmi konkrétat mondani teljes biztonsággal, ha kezdetben pontosan ismertük a rész-ecske állapotát.” [3] A káoszt tehát ebben az esetben a részecskék igen nagy száma okozza.²

²lásd például az imént említett Brown-mozgást

A determinisztikus káosz egyszerű, néhány elemszámú, illetve néhány változóval jellemezhető instabil rendszerben alakul ki, amikor a kezdőfeltételekre való érzékenység miatt a rendszer kis környezeti (kezdeti érték-) változásra is jelentős változással reagál.

Fontos hangsúlyozni, hogy mindkét káosz az időbeli viselkedésre vonatkozik, a mozgás, azaz a dinamika jellegére utal: kaotikus mozgás, viselkedés esetén a közeli pontokból induló jelek, időutak (a két trajektória³⁴) gyorsan, exponenciálisan távolodnak egymástól az idő múlásával, azaz a közeli állapotok gyors szétszóródása következik be.[4]

A káosz és a fraktálok közvetlen kapcsolatát demonstrálja a következő „Káosz-játék”. Tekintsünk a síkon egy A, B, C csúcsú egyenlő oldalú háromszöget. Válasszunk ki ugyanezen a síkon egy tetszőleges P_1 pontot, majd valamilyen véletlen módon (mondjuk úrna alkalmazásával) sorsoljuk ki az A, B, C pontok valamelyikét. Ha elsőre, mondjuk a B pont jött ki, akkor P_1 -ből B irányba lépünk eggyel tovább, mégpedig éppen a P_1B távolság felével. A továbbiakban, az így kapott P_2 ponttal mint kiindulóponttal, ismételjük meg az egész eljárást. Ha a sorsolásnál ezúttal az A pont kerülne sorra, akkor P_2A távolság megfelezésével állítjuk elő a P_3 pontot, majd hasonló módon a sorsolás állandó közbeiktatásával juthatunk el lépésről-lépésre a P_4, P_5, P_6 stb. pontokhoz. Kérdés, milyen pályát fognak leírni a $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$ pontok, ha a fenti eljárást a végtelenségig folytatjuk? Az nyilvánvaló, hogy mivel a lépések mindenkor irányát a sorsolásra bíztuk, véletlenszerű pályát fogunk befutni, de az eljárást végrehajtva, vagy legalábbis a sorozat elég sok pontját ábrázolva általában a Sierpinski-háromszög rajzolódik ki⁵, habár az egymást követő $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ pontok nem felétlenül a Sierpinski-háromszög pontjai.[5]

2.3. Fraktálok előállítása

Georg Cantor nevét, a fraktálgeometria történetében, elsőként szokták megemlíteni. A leg-egyszerűbben megkonstruálható fraktál a *Cantor-halmaz*. Induljunk ki a $[0;1]$ zárt intervallumból. Osszuk három egyenlő részre, majd hagyjuk el a középső részt. Ezután osszuk három egyenlő részre, mindkét megmaradó szakaszt és hagyjuk el a középső részeit; és így tovább. a Cantor-halmaz azoknak a pontoknak a halmaza, amelyek végtelen sok lépés után megmaradnak.⁶[7]

³Trajektória: a mozgás fázistérbeli pályája.

⁴Fázistér: A dinamikus rendszert meghatározó közönséges differenciálegyenletekben szereplő változókat, állapotváltozóknak nevezzük. Ha minden állapotváltozót külön koordinátatengelyre mérünk fel, akkor kapjuk az állapotteret vagy fázisteret. Az állapotváltozók száma megadja a fázistér dimenzióját. Egy egyszerű inga esetében, például, a fázistér kétdimenziós, tengelyeit a mozgó inga pillanatnyi helyzete és mindenkor sebessége szolgáltatják.

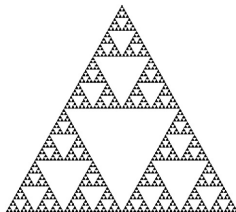
⁵lásd 3.3. fejezetben

⁶ A Cantor-halmaz Hausdorff dimenziója $\frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.6309$.



4. ábra. Cantor-halmaz

A Cantor-halmaz síkbeli megfelelője a *Sierpinski-háromszög*⁷. Konstrukciójához induljunk ki egy egységnyi oldalú szabályos háromszögből, amelyet jelöljünk S_0 -val. Az oldalfelező pontok összekötésével osszuk négy egybevágó részre, majd hagyjuk el a középső rész belső pontjait; tehát a középső kis háromszög oldalait nem hagyjuk el. A megmaradó alakzat legyen S_1 . A második lépésben hagyjuk el az S_2 -et alkotó mindegyik kis háromszög középső részét; a kapott halmazt jelöljük S_2 -vel. Hasonló módon folytatva kapjuk az $S_3, S_4, \dots$ halmazokat. Az S Sierpinski-háromszög azoknak a pontoknak a halmaza, amelyek a végén megmaradnak, tehát amely pontok mindegyik S_n halmazhoz hozzátartoznak.[7]

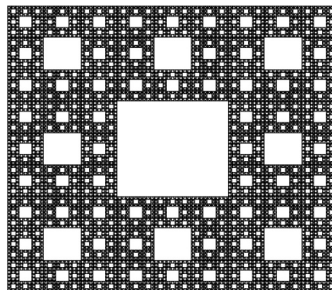


5. ábra. Sierpinski-háromszög

A *Sierpinski-szőnyeg* konstrukciója hasonlít a Sierpinski-háromszög konstrukciójához, csak más ponthalmazból indul ki. Legyen T_0 egy négyzet. Ezt osszuk kilenc egybevágó részre az oldalharmadoló pontok összekötésével és hagyjuk el a középső kis négyzetet. A kapott halmaz legyen T_1 . A második lépésben hagyjuk el a T_1 -et alkotó nyolc kis négyzet mindegyikének középső részét, és így tovább. A Sierpinski-szőnyeg azoknak a pontoknak a halmaza, amelyek a végén megmaradnak⁸.

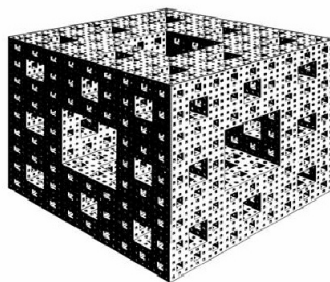
⁷ Nevét Waclaw Franciszek Sierpiński (Varsó, 1882. március 14. – Varsó, 1969. október 21.) lengyel matematikusról kapta, akinek nevét még további két fraktál is viseli.

⁸ A Sierpinski-szőnyeg Hausdorff-dimenziója $\frac{\log 8}{\log 3} \approx 1.8928$



6. ábra. Sierpinski-szőnyeg

A fenti konstrukció térbeli megfelelője eredményezi a *Menger-szivacs*ot. Egy kockából indulunk ki, amelyet huszonhét egybevágó kis kockára bontunk. Tekintsük azt a három egyenest, amely áthalad a kocka középpontján és merőleges a kocka valamelyik lapjára. Ez a három egyenes a 27 kis kocka közül hetet metsz; ezeket a kis kockákat hagyjuk el. A következő lépésben ugyanezt megismételjük a megmaradó 20 kocka mindegyikével. Legyen M_0 ; M_1 ; M_2 ;... a kapott halmazok sorozata.[7] A Menger-szivacs a megmaradó pontok halmaza.⁹



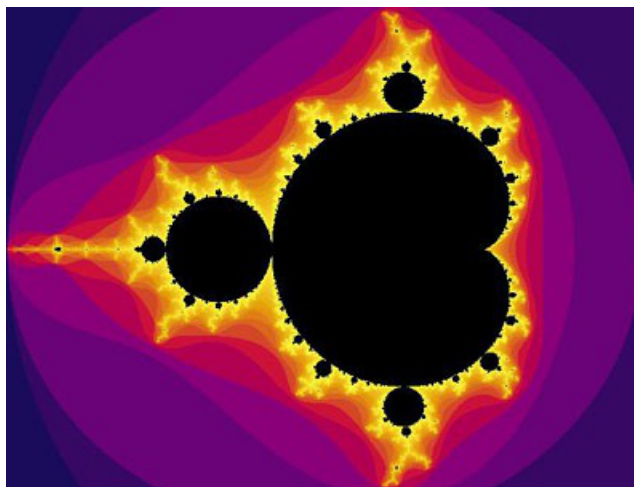
7. ábra. Menger-szivacs

A számítógépet elsőként, a fraktálok atyjának is tartott Benoit Mandelbrot vonta be az alakzatok előállításába, az 1970-es években. A matematikus egyszerűbb és általánosabb formulát talált Juliánál¹⁰ – az ebből előálló fraktálokat tiszteletére, *Mandelbrot-halmazoknak* nevezzük.

⁹A Menger-szivacs Hausdorff-dimenziója: $\frac{\log 20}{\log 3} \approx 2.7268$

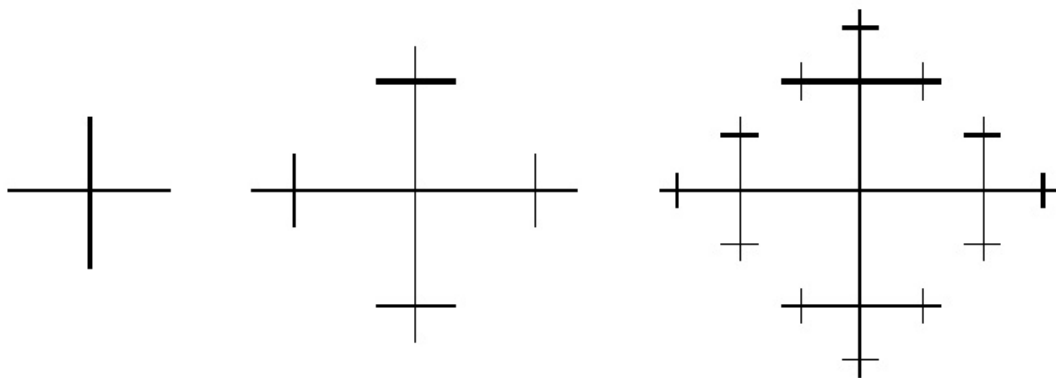
¹⁰ A huszadik század elején élt francia matematikus, Gaston Julia. 1918-ban megjelent könyvében a fentiekhez hasonló, ám jóval bonyolultabb, számítógép híján kézzel készített ábrákat mutat be. Ezek Julia-halmaz néven váltak ismertté. [7]

A Mandelbrot-halmaz azon c komplex számokból áll, melyekre az $x_{n+1} := (x_n)^2 + c$ (komplex szám értékű) rekurzív sorozat $x_1 := c$; nem tart végtelenbe. A Mandelbrot-halmaz grafikus megjelenítése úgy történik, hogy az ilyen tulajdonságú c pontokat a komplex számsíkon ábrázolják.[8]



8. ábra. Mandelbrot-halmaz

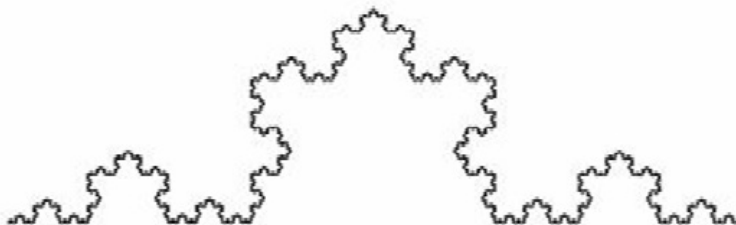
A fraktálkészítésnek a fentiekben alkalmazott és a legegyszerűbb módja, ha egy műveletet újra és újra elvégzünk. Egy szabály ismételt alkalmazását rekurzióknak nevezzük, egy adott állapotból a következő elérése (a szabály egyszeri alkalmazása) az iteráció. Próbáljuk ki a következőt: rajzoljunk egy pluszjelet, majd ennek mind a négy végére feleakkora pluszjeleket, és így tovább.



9. ábra. Hópehely fraktál készítése

Hópehelyre emlékeztető motívumot kapunk, amely közelről ugyanúgy néz ki, mint távolról.

A *Koch-görbét*¹¹ síkbeli töröttvonalak határértékeként definiáljuk. A kiinduló halmaz, egy K_0 egységnyi hosszúságú, zárt intervallum. A K_1 görbét úgy kapjuk, hogy a K_0 szakasz középső harmada fölé emelt szabályos háromszög alapját helyettesítjük másik két oldalával. Így, egy négy szakaszból álló töröttvonalat kapunk, amelyben mindegyik szakasz hossza $1/3$. A K_3 halmazt hasonló módon kapjuk K_1 -ből: a K_1 -et alkotó négy szakasz mindegyikének középső részét helyettesítjük egy szabályos háromszög másik két oldalával. Az így kapott töröttvonal 16 szakaszból áll, amelyek egyenként $1/9$ hosszúságúak. A konstrukciót ugyanígy folytatva töröttvonalak egy $K_0, K_1, K_2, \dots$ sorozatát kapjuk, amelynek „határértéke” a Koch-görbe. Csakúgy, mint az összes eddigi példánk, a Koch-görbe is önhasznó: előáll négy darab, egyharmadára kicsinyített Koch-görbe egyesítéseként.



10. ábra. Koch-görbe

2.4. Szabálytalanság és dimenzió

Egy cikkében Mandelbrot azt a kérdést tette fel, hogy „Milyen hosszú Nagy-Britannia tengerpartja?”. Mandelbrot a partvonal hosszúsági problémára egy angol tudós, Lewis F. Richardson egy ismeretlen, posztumusz tanulmányában akadt rá¹². Akinek Mandelbrot feltette ezt

¹¹ Ezek a fraktálok Helge von Koch svéd matematikustól származnak 1904-ből.

¹² Richardson az 1920-as években a numerikus időjárás-előrejelzésről írt; később egy zsák fehér paszternákot vetett a Cape Cod csatornába, hogy a folyadék turbulenciát tanulmányozza; egy 1926-os cikkében pedig azt a kérdést tette fel, hogy „van-e a szélnek sebessége?”. Richardson a partvonalakon és a tekergőző országhatárokon tűnődve, végigböngészte a spanyol és portugál, a belga és holland lexikonokat, és húsz százalékos eltéréseket fedezett fel a közös határok hosszának becslésében

a partvonalra vonatkozó kérdést, azok vagy kínosan nyilvánvalónak érezték az egészet, vagy teljesen képtelennek. Holott, az ő felfogása szerint, a partvonal hosszúsága attól függ, milyen hosszú a vonalzó, amivel mérünk. Vegyünk egy kézenfekvő mérési módszert. A földmérő vesz egy körzőt, szétterpeszti szárait egy méterre és végigsétál vele a partvonal mentén. Az eredményül kapott méterek száma csak közelítése az igazi hosszúnak, mert a körző átugorja a méteresnél kisebb kanyarokat, fordulókat; a földmérő mindazonáltal feljegyzi az így kapott számot. Ezután összébb húzza a körző szárait, - mondjuk a méter egyharmadára- és újra elvégzi a mérést. Ezúttal valamivel nagyobb hosszúságot kap, mert a körző többet fog át a részletekből, vagyis több mint három lépés kell majd ahhoz, hogy végigmenjen azon a távolságon, amelyen előzőleg, az egyméteres körzővel, egy lépésben is sikerült. Feljegyzi ezt az új számot is, azután megint egyharmadra állítja be a körző szárait, és kezdi előről. Ez a képzeletbeli körzővel végzett gondolat kísérlet számszerűsíti, mi történik, ha egy tárgyat különböző távolságokból és különböző mérettartományokban figyelünk meg. Az a megfigyelő, aki Anglia partvonalát egy mesterséges holdról igyekszik meghatározni, kisebb értékre fog jutni, mint az, aki megpróbálja rendre végigjárni minden kis öblét és kiszögelését, de ő is kisebb értéket kap majd mondjuk egy csigánál, amelynek végig kell vergődnie minden kis kavicsra.



11. ábra. Anglia partvonalának mérése

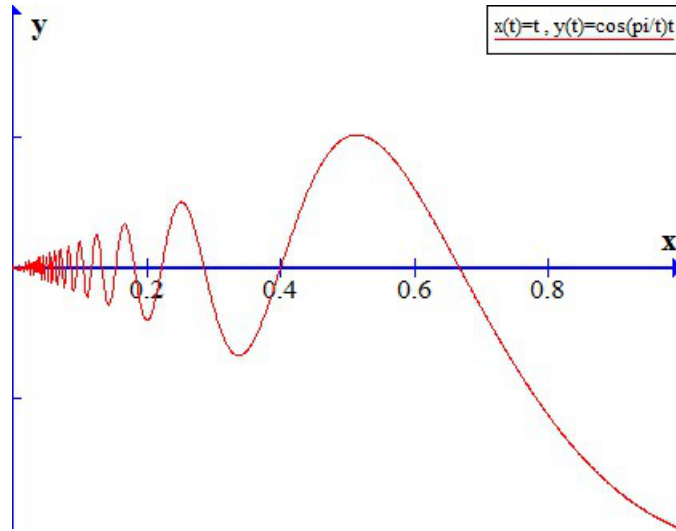
A józan ész azt súgja, hogy, bár ezek a becslések egyre nagyobbak lesznek, mégis közelíteni fognak valamilyen végső értékhez, a partvonal tényleges hosszához. Más szóval, a mérési értékeknek konvergálniuk kell. És való igaz, ha a partvonal valamilyen szokásos alakzat - például egy kör- lenne, akkor az egyre finomabb egyenes vonalú távolságok összegzésén alapuló módszer konvergálna! Az így mérhető görbéket rektifikálhatónak nevezzük: Azt mondjuk, hogy egy görbe rektifikálható, ha az összes beosztásból eredő töröttvonalak hosszai

halmazának létezik felső határa. Mandelbrot azonban úgy találta, hogy ahogyan a mérés léptéke egyre kisebbé válik, a partvonal mért hossza minden határon túlnő: a kis öblökben és félszigetecskékben mind kisebb öblök és félszigetecskék tárnak fel, legalábbis az atomi méretekig, ahol a folyamat azután véget ér. Ha ugyan véget ér.[9] A partvonal tehát nem rektifikálható, de van erre matematikai példa is:

Legyen $G : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$G(x) = \begin{cases} (x, x \cos(\pi/x)), & x \neq 0 \\ (0, 0), & x = 0 \end{cases}$$

Ennek grafikonján, jól látszik, hogy a $(0, 0)$ pontnál „végtelenül hullámos”.



12. ábra. G-görbe

Tekintsük az $[\frac{1}{n+1}, 1]$ intervallum $x_k = \frac{1}{k}$ ($0 < k \leq n$) beosztását. Ekkor

$$\begin{aligned} d(G(x_k), G(x_{k-1})) &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \left(x_k \cos\left(\frac{\pi}{x_k}\right) - x_{k-1} \cos\left(\frac{\pi}{x_{k-1}}\right)\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right)^2 + \left(\frac{(-1)^k}{k} - \frac{(-1)^{k-1}}{k-1}\right)^2}. \end{aligned}$$

A második tagot tekintve

$$\left(\frac{(-1)^k}{k} - \frac{(-1)^{k-1}}{k-1} \right)^2 = \frac{(2k-1)^2}{(k(k-1))^2},$$

amiért

$$d(G(x_k), G(x_{k-1})) = \frac{\sqrt{1 + (2k-1)^2}}{k(k-1)} \geq \frac{2k-1}{k(k-1)} \geq \frac{2}{k}.$$

Eszerint a $G(x_n), G(x_{n-1}), \dots, G(x_1), G(1)$ törött vonal hossza legalább $2\sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$, ami nem korlátos módon növekszik, ha n tart a végtelenbe.¹³, vagyis a G görbe hossza ∞ ! [10]

Minthogy a klasszikus euklideszi méréssel láthatólag nem sikerül megragadni a szabálytalan alakzatokat, Mandelbrot egy másik fogalomhoz, a dimenzióhoz fordult.

Háromdimenziós világban élünk, amely azt jelenti, hogy három számra van szükségünk egy pont megjelöléséhez: ez a három lehet például a földrajzi hosszúság, a földrajzi szélesség és magasság. A három dimenziót úgy képzeljük el, mint egymással derékszöget bezáró irányokat. Egy autóstérkép, minden gyakorlati szempontból, lényegében kétdimenziós valami, egy sík egy darabja. Azonban a valóságban, az autóstérképek is éppúgy háromdimenziósak, mint bármi más, csak a vastagságuk olyan csekély (és annyira lényegtelen is rendeltetésük szempontjából), hogy elfelejthető. Mi a dimenziója egy spárgagombolyagnak? Mandelbrot erre azt mondja, hogy attól függ, honnan nézzük. Messziről a gombolyag nem egyéb, mint egy nulla dimenziós pont. Közelebből a gombolyag egy gömb alakú térrészt látszik kitölteni, amely három dimenziót foglal el. Még közelebből előtűnik a spárga, és a tárgy gyakorlatilag egydimenzióssá válik, bár az az egy dimenzió mindenesetre önmaga köré gubancolódik, mégpedig a háromdimenziós térben. Továbbra is érdemes azonban megkérdezni, hogy most vajon hány szám szükséges egy pont helyzetének meghatározásához. Messziről egyre sincs szükség, csak egyetlen pont az egész gombolyag. Közelebből nézve már három kell. Még közelebből nézve viszont egy is elég: akár fel van gombolyítva a spárga, akár nincs, csak azt kell megmondanunk, hogy mekkora távolságot kell megtenni a spárga végétől a kérdéses pontig. A mikroszkopikus mérettartományban pedig háromdimenziós oszloppá válik a spárga, az oszlop egydimenziós szálakká bomlik, s a szilárd anyag nulladimenziós pontokká oldódik. Mandelbrot a relativitáselméletre hivatkozott: „Hogy egy számszerű eredmény függhet a tárgy és a megfigyelő viszonyától, az tökéletesen összeegyeztethető az e századi fizika szellemével, sőt annak példászerű megnyilatkozása”. A Mandelbrot-féle gondolat kifejezésének, úgy tetszik, gyenge pontja, hogy olyasfajta homályos és bizonytalan fogalmakra épül, mint a „messziről”

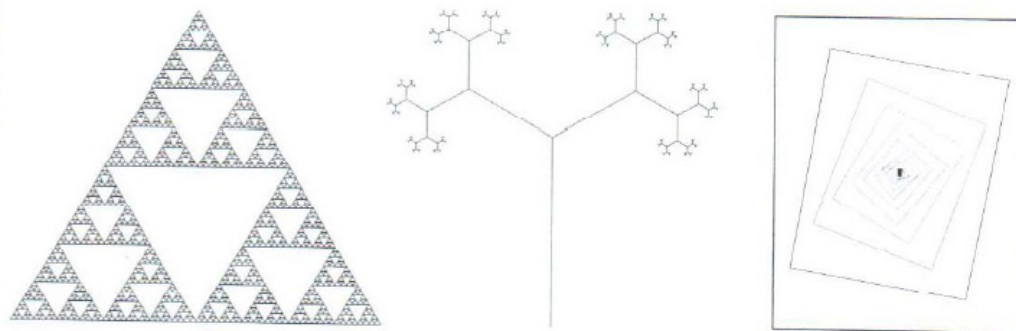
¹³később ennek bemutatjuk geometriai okát

meg a „kicsit közelebből”. Hogy áll a dolog, e két helyzet között? Kétségtelenül nincsen jól meghúzható határ, amelyen átlépve az addig háromdimenziós spárgagombolyagot egyszerre egydimenziósnak látnánk. Egy kanyargós partvonalnak a hossza például nem mérhető, érdekességének viszont létezik jellemző mértéke. Mandelbrot számítási módszerrel is szolgált: megmutatta, hogyan számíthatjuk ki a valóságos objektumok valós dimenzióját, ha tudjuk, hogyan konstruálhatók meg ezek az objektumok vagy ismerjük bizonyos adataikat; ő maga pedig e számítási módszerek segítségével fontos megállapításra jutott: a természetben előforduló és általa tanulmányozott mintázatok szabálytalanságának mértéke ugyanakkora marad a különböző mérettartományokban. Ezt hívják dimenzióknak. A dimenzió révén olyan tulajdonságok válnak mérhetővé, nevezetesen az érdekesség, töredezettség avagy szabálytalanság, amelyeknek egyébként nincs világos definíciójuk.¹⁴[9]

2.5. Önhasonlóság

A legtöbb fraktálban felfedezhető a felépítő elemek hasonlósága. Az egyes részletekre ránagyítva vagy azokat kicsinyítve ugyanazokat a jellegzetességeket találjuk. Az önhasonlóság azt jelenti, hogy a struktúra egy részét kinagyítva, a felnagyított kicsi rész ugyanolyan struktúrát mutat, mint maga az egész, eredeti struktúra. Ez nem azt jelenti, hogy ugyanolyan, hanem azt, hogy ugyanazokkal a tulajdonságokkal rendelkezik. Például a brokkoli vagy a karfiol egyes részei hasonlítanak az egész növényhez.

A matematikában az önhasonlóságnak több fajtáját is megkülönböztetjük. Tekintsük a következő ábrát.



13. ábra. Az önhasonlóság típusai

Beszélhetünk pontbeli önhasonlóságról, erre példa a 13. ábra jobb oldalán található szerkesztés. Ha egyre mélyebbre és mélyebbre nézünk a szerkesztésben, láthatjuk, hogy a téglalapok

¹⁴A fraktáldimenziókról részletesebben a 4. fejezetben olvashatunk.

egyetlen egy pontba zsugorodnak. Ezt a pontot hívjuk az ábra fixpontjának. Ez az a határpont, amelynél a téglalap oldalhosszai 0-hoz tartanak.

A bal oldalon a Sierpinski-háromszög¹⁵ ábrája látható. Az egész, egy kis darabjának precíz másolataiból áll. Ezt a esetet szigorúan önhasonlónak hívjuk.

A középső ábrán egy kétágú fa mesterséges szerkesztése látható. Ez az ábra teljesen más helyzetet állít elő. Az egész fa, az eredeti fa kicsinyített másolataiból áll, kisebb és kisebb példányok állítják elő a fa ágait és leveleit. Ha elhagyjuk a fa ágait és csak a leveleket tekintjük, akkor az így kapott ábra szintén szigorúan önhasonló lesz.

Mind a három struktúra önhasonló, azaz egy kis részük hasonlít az egészhez, habár lényeges eltérés van közöttük. Mi a helyzet a természetben előforduló fraktálokkal? Melyik kategóriába tartoznak?[11]

¹⁵lsd. 5.fejezet

3. Fraktálok és dimenzióik

Bármilyen kis léptékben vizsgáljuk a fraktálokat, mindig ugyanolyan elemekből épülnek fel. Míg a klasszikus Euklideszi geometriában az objektumok dimenzióit mindenki ismeri, egy egyenes egy-, a sík kettő-, míg a tér három-dimenziós, addig a fraktálok dimenziójának meghatározása komoly problémát okoz. Sok speciális definíciót ismerünk dimenzió meghatározására.

3.1. Hausdorff-dimenzió

A Hausdorff-dimenzió egy nemnegatív valós szám, mely általánosítja a valós vektortér dimenziójának fogalmát. Az n -dimenziós vektortér Hausdorff-dimenziója n . Egy pont Hausdorff-dimenziója 0, egy egyenesé 1 egy síké pedig 2, de a Hausdorff-dimenzió értéke nem csak egész szám lehet.

Az n dimenziós euklideszi tér egy A részhalmazának a rendű $H_a(A)$ Hausdorff-mértékét a következőképp definiáljuk. Legyen $B_1, \dots, B_n, \dots$ az A halmazt lefedő, $r_1, \dots, r_n, \dots$ sugarú véges sok gömb. $H_a(A)$ legyen a sugarak összegének összes lehetséges lefedőrendszerre vett alsóhatára (legnagyobb alsó korlátja), midőn az $\{r_1, \dots, r_n, \dots\}$ sugarak maximuma 0-hoz tart. Nem nehéz belátni, hogy a fenti alsóhatár legfeljebb egy a értékre lehet 0-tól különböző véges szám. Ha ugyanis $H_a(A)$ valamely a -ra véges, akkor minden $b > a$ -ra $H_b(A) = 0$ és minden $g < a$ -ra $H_g(A) = \infty$. Az A halmaz Hausdorff-dimenziója az az a szám, amelyre igaz, hogy minden $b > a$ -ra $H_b(A) = 0$ és minden $g < a$ -ra $H_g(A) = \infty$. A megszámlálható halmazok Hausdorff-dimenziója zérus, míg az n dimenziós euklideszi tér minden olyan A halmazának, amely gömböt tartalmaz, n a Hausdorff-dimenziója.¹⁶[12]

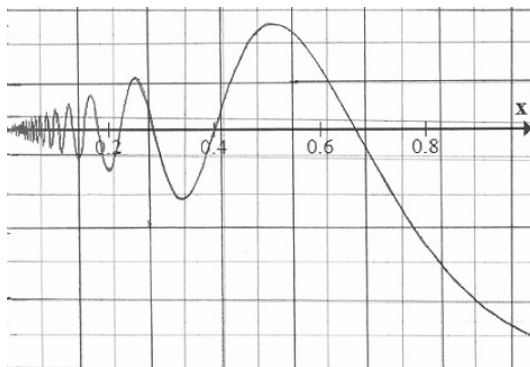
3.2. Dobozszámoló-dimenzió

Most egy olyan dimenziófogalmat definiálunk, amely könnyen becsülhető számítógép segítségével. Az egyszerűség kedvéért csak a síkbeli esetet tekintjük, mivel a későbbiekben is ezt szeretnénk használni. Legyen F , a sík tetszőleges korlátos részhalmaza. Tekintsünk egy négyzethálót a síkban, amely r oldalhosszúságú négyzetekből áll. Vegyük például az $[nr, (n+1)r) \times [kr, (k+1)r)$ alakú négyzetek halmazát, ahol n, k egészes számok. Jelölje $N(r)$ ezek közül azoknak a számát, amelyeknek van közös pontjuk az F halmazzal. Az F halmaz doboz-dimenziójának nevezzük a $\dim_B F = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{-\log r}$, számot, amennyiben a jobboldali határérték létezik. [7]

¹⁶Példák az 5.fejezetben

3.3. Konkrét számítások

Elsőként vegyük a második fejezetben már említett G -görbét (1). Elkészítve az ábrát, láthatjuk, hogy az egyes beosztás szerint vett négyzetekből, hány darabra van szükségünk a lefedéshez.



14. ábra. A G függvény dobozszámláló-dimenziója

$$(\log(\frac{1}{r_0}), \log(N(r_0))) = (\log(1), \log(1)) = (0, 0)$$

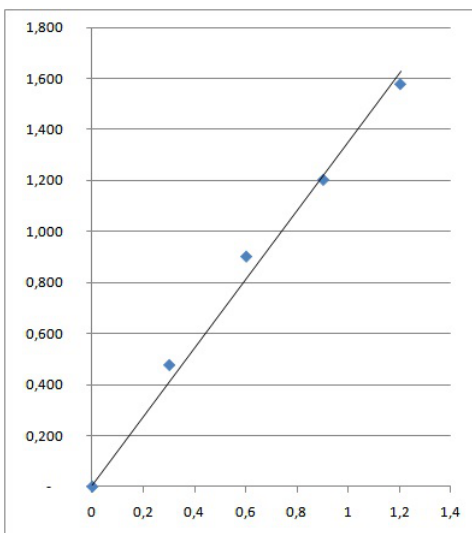
$$(\log(\frac{1}{r_1}), \log(N(r_1))) = (\log(2), \log(3)) = (0.301, 0.477)$$

$$(\log(\frac{1}{r_2}), \log(N(r_2))) = (\log(4), \log(8)) = (0.602, 0.903)$$

$$(\log(\frac{1}{r_3}), \log(N(r_3))) = (\log(8), \log(16)) = (0.903, 1.204)$$

$$(\log(\frac{1}{r_4}), \log(N(r_4))) = (\log(16), \log(38)) = (1.204, 1.580)$$

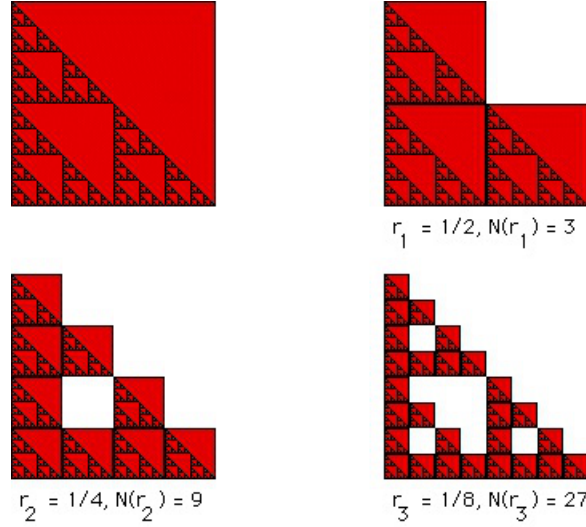
..., ahol $r_n = 2^{-n}$. Ezt ábrázolva a következő diagramot kapjuk.



15. ábra. A G függvény log-log ábrázolása

A log-log ábrázolás után megkapjuk, hogy az egyenes meredeksége 1,352. Tehát a fenti görbe dimenziója kb. 1,352.

Az alábbi ábra által mutatott módon számoljuk ki a Sierpinski-háromszög dobozszámláló-dimenzióját.



16. ábra. A Sierpinski-háromszög doboz-dimenziója

Legyen $r_n = 2^{-n}$

$$(\log(\frac{1}{r_0}), \log(N(r_0))) = (\log(1), \log(1)) = (0, 0)$$

$$(\log(\frac{1}{r_1}), \log(N(r_1))) = (\log(2), \log(3)) = (0.301, 0.477)$$

$$(\log(\frac{1}{r_2}), \log(N(r_2))) = (\log(4), \log(9)) = (0.602, 0.954)$$

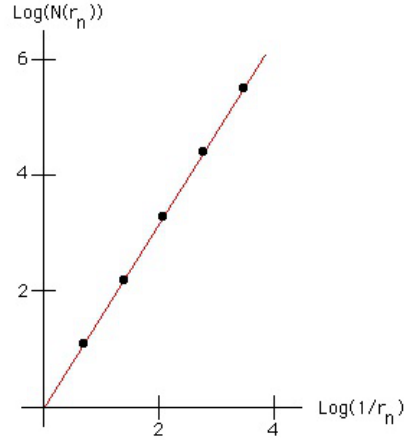
$$(\log(\frac{1}{r_3}), \log(N(r_3))) = (\log(8), \log(27)) = (0.903, 1.432)$$

$$(\log(\frac{1}{r_4}), \log(N(r_4))) = (\log(16), \log(81)) = (1.204, 1.908)$$

...

Ábrázolva a pontokat a log-log grafikonnal¹⁷, következő diagramot kapjuk:

¹⁷Log-log ábrázolás: a természettudományokban a log-log ábrázolás a numerikus adatok egy két dimenziós diagramja, ami logaritmikus beosztást használ a függőleges és vízszintes tengelyen is. A tengelyek nem-lineáris beosztásának az az oka, hogy az $y = ax^b$ szerepe megjelenik a log-log ábrán, mint egy egyenes vonal, amelyben b az egyenes meredeksége és a az y megfelelő értéke az $x = 1$ -hez. Ezek az ábrák hasznosak, amikor numerikus adatokból kell becsülnünk az a és b értékeket, továbbá különösen hasznosak, amikor a természetben előforduló fraktálok dimenzióját kell megbecsülnünk.[13]



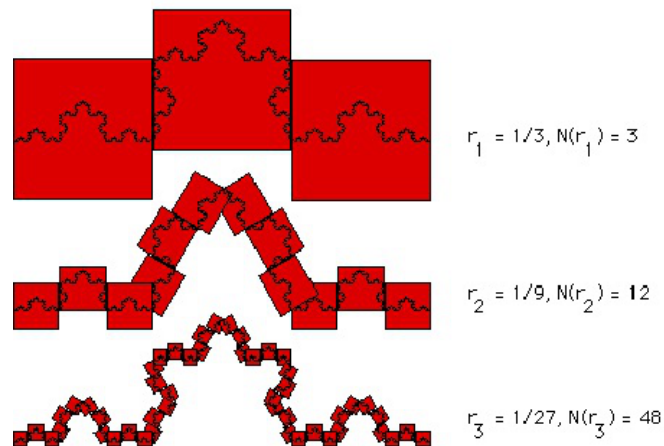
17. ábra. Log-log ábrázolás (Sierpinski-háromszög)

A pontok egy egyenes vonalon fekszenek, aminek a meredeksége 1.59, így a Sierpinski-szőnyeg doboz számláló dimenziója 1.59 körüli értékre becsülhető.

A Sierpinski-háromszög dobozsámláló-dimenzióját pontosan is kiszámíthatjuk, hiszen

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(r_n)}{\log \left(\frac{1}{r_n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(3^n)}{\log(2^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log 3}{n \log 2} = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.58996$$

A Koch-görbe dobozsámláló-dimenziójának kiszámítása:



18. ábra. A Koch-görbe dobozsámláló-dimenziója

Legyen $r_n = 2^{-n}$. Ekkor

$$(\log(\frac{1}{r_0}), \log(N(r_0))) = (\log(1), \log(1)) = (0, 0)$$

$$(\log(\frac{1}{r_1}), \log(N(r_1))) = (\log(3), \log(4)) = (0.477, 0.602)$$

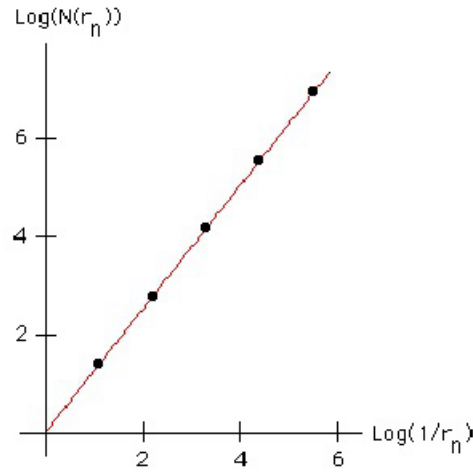
$$(\log(\frac{1}{r_2}), \log(N(r_2))) = (\log(9), \log(12)) = (0.954, 1.079)$$

$$(\log(\frac{1}{r_3}), \log(N(r_3))) = (\log(27), \log(48)) = (1.431, 1.681)$$

$$(\log(\frac{1}{r_4}), \log(N(r_4))) = (\log(81), \log(192)) = (1.908, 2.283)$$

...

Ábrázolva a koordinátákat a következő log-log diagramot kapjuk:



19. ábra. Log-log ábrázolás (Koch-görbe)

Az egyenes meredeksége jelen esetben 1.26-ra becsülhető.

A Koch-görbe dimenziójának egzakt kiszámítása a következő módon történik[10]:

$$\begin{aligned} d &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(r_n)}{\log \frac{1}{r_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{\log \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1) \log 4 + \log 3}{n \log 3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log 4 - \log 4 + \log 3}{n \log 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log 4}{n \log 3} + \frac{-\log 4 + \log 3}{n \log 3} \\ &= \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.26186. \end{aligned}$$

4. Fraktálok a közgazdaságban

4.1. Bevezetés

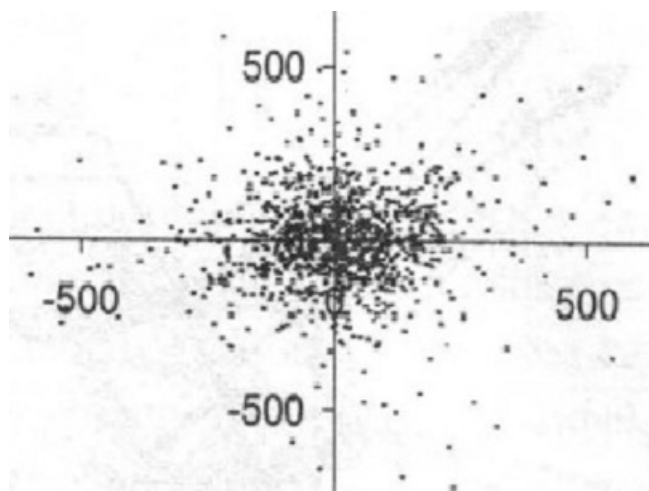
Mandelbrot az 1960-as évek elején az IBM cégnél végzett kutatásokat, ekkor vizsgálta meg a világszerte jól dokumentált gyapotár változások ütemét. A gyapotár-változások magyarázata ugyanis sok gondot okozott a közgazdászoknak, mivel azok nem igazolták az akkoriban elfogadott elméleteket. Mandelbrot minden hozzáférhető adatot beszerzett egészen a napi árváltozások szintjéig és a különböző (napi, havi, éves) időintervallumok grafikus ábrázolása után azt tapasztalta, hogy a napi görbe jellegét és mintázatát tekintve szinte azonos a nagyobb időszakok görbéivel. Tehát a görbe az egyes mérettartományokban nagyon hasonló.[6]

A tőzsdék mozgásának modellezése jövedelmező iparággá vált a legtöbb térségben. A tőzsdei szakértők nagy számban találhatók meg a világ pénzpiacain. A tőzsdei előrejelzések tömegei készülnek, a legtöbb magára valamit adó újság is közöl ilyeneket. Persze ezeknek az elemzéseknek a mélysége meg sem közelíti azokat, amelyek a bankok vagy a bróker cégek szakemberei a potenciális befektetőknek készítene. Milyen elméleti háttér áll az elemzések mögött? Hogyan képzelik el a közgazdászok a pénzügyi piacok mozgástörvényeit? A válasz meglepő lehet: a közgazdászok a legtöbbször úgy írják le a pénzügyi piacokat, mint amelyeken folyamatosan és egyenletesen növekednek az árak, és erre a folyamatra teljesen véletlenszerű, külső sokkok rakódnak. A közgazdászok egy kisebbsége azt gondolja, hogy ez nem teljesen igaz. Véleményük szerint nemlineáris folyamatokkal ennél jobban lehet magyarázni a piac mozgását. Az ilyen jellegű modellek fő érdekessége az, hogy jól mutatják a várakozások jelentőségét a közgazdaságban. Az újklasszikus iskola egyik kulcsfeltevése a racionális várakozások feltételezése. Azt teszik fel, hogy az emberek várakozásaik kialakítása során nem követnek el szisztematikus hibát, vagyis várakozásaik a jövő legjobb becslését jelentik a rendelkezésre álló információk mellett. Ez a feltevés radikálisan új eredményeket hozott, amelyekről máig folynak a viták.

4.2. A hozamok függetlensége

A pénzügyi piacok fontos jellemzője az, hogy az egymást követő hozamok egymástól függetlenül változnak e. Ez azt jelenti, hogy amennyiben ma felmegy X részvény ára (vagyis az X részvény hozama pozitív), akkor ebből semmilyen következtetést sem tudunk levonni arról, hogy holnap milyen lesz X részvény hozama. Ez az állítás a hatékony piacok hipotéziséből következik, mely szerint a pénzügyi piacokon megfigyelhető értékpapír-árfolyamok a valódi értéket és a befektetők rendelkezésére álló összes információt tükrözik. A piaci hatékonyság

három szint- jét különböztetjük meg. Az első szinten az árak tartalmazzák a múltbeli árakban lévő összes információt. Ez a hatékonyság gyenge formája. Ha a piacok gyengén hatékonyak nem lehet tartósan extra profitot elérni a múltbeli hozamok tanulmányozása révén. Az árak véletlen bolyongást fognak követni. A hatékonyság második szintje azt követeli meg, hogy az árfolyamok ne csak az elmúlt időszak árfolyamokat, hanem minden más közzétett információt is tükrözzenek; például azokat, amelyeknek a pénzügyi újságok olvasása révén juthatunk a birtokába. Ez a piaci hatékonyság közepes formájaként ismert. Ha a piacok ebben az értelemben hatékonyak, akkor az árak azonnal reagálni fognak az olyan nyilvánosan közzétett információkra, mint például az utolsó negyedéves nyereséggel kapcsolatos bejelentések, részvények kibocsájtása stb.. A harmadik szint a hatékonyság erős formája, itt az árak már minden olyan információt tükröznek, amelyre a vállalat és az egész gazdaság alapos elemzése során szert tehetünk.[19][20] Gondoljuk meg mi történne akkor, ha tudnánk, hogy, amennyiben X részvény ára felmegy, akkor 75%-os valószínűséggel holnapután is fel fog menni. Mindenki rohanna vásárolni az X részvényből, amelynek még holnap felmenne az ára. Ez a folyamat éppen addig tartana, amíg a részvény ára olyan magas nem lesz, hogy már nem éri meg belőle venni. Ez pedig pont akkor fog bekövetkezni, ha már éppen 50% annak a valószínűsége, hogy a részvény ára holnapután felmegy. Vagyis minden ilyen megfigyelt összefüggés azonnal eltűnik, mert a befektetők rohama megszünteti az ilyen profitlehetőséget. Ez a függetlenség bizonyítható a következő módon. Vegyünk egy olyan ábrát, amelyen a vízszintes tengelyen a mai, a függőlegesen pedig mindig az egy nappal későbbi hozam van. Erre péda a valóságból a következő diagram (1.ábra):



20. ábra. A BUX index napi hozamai 1997.február-2002. február (Ft)

Ezen a BUX index napi hozamait láthatjuk 1997 februárja és 2002 februárja között. Ebben az esetben a hozamot egyszerűen úgy számolhatjuk, hogy kivonjuk egymásból a két

nap BUX indexét. Láthatjuk, hogy mind a négy síknegyedbe esnek pontok, a pontthalmaz az origó körül sűrűbb, és középpontosan szimmetrikus rá. Éppen ilyen alakzat jellemzi a véletlenszerűséget. Amennyiben igaz lenne az, hogy az emelkedést általában emelkedés követi, akkor a pontoknak a jobb felső síknegyedben kellene koncentrálniuk, mert az egymást követő napok hozamai pozitívak. Amennyiben az lenne igaz, hogy a csökkenést vagy emelkedést korrekció követi, akkor pedig a bal felső és a jobb alsó síknegyedben talál-nánk több pontot. Az ábrán azonban a pontok eloszlása egyenletes a különböző síknegyedek között, ami támogatja a hatékony piacok hipotézisét. Ezt a meglátást egzaktabban is alá lehet támasztani azzal, hogy egy egyenest illesztünk a pontfelhőre. Amennyiben az egyenes meredeksége 0, akkor nincsen lineáris kapcsolat az egymást követő árak között. Hangsúlyozni kell azonban, hogy ez az eredmény a napi hozamokra vonatkozik, az ennél rövidebb távú (néhány perces) hozamokra már van összefüggés.[14]

4.3. R/S analízis és Hurst-exponens

Az idősorok statisztikai elemzésének egyik célja, hogy a múltbéli adatokból tudjunk következtetni az adatok jövőbeli alakulására. Így az eljárás a múltbéli adatok elemzéséből, valamilyen mintázat beazonosításából, és e mintázatnak a jövőre történő kiterjesztéséből áll. Tehát, az eljárás háttérében az a feltételezés áll, hogy a múltban felismert trend a jövőben is folytatódni fog. Ezen feltevés bizonyításához a Mandelbrot által továbbfejlesztett és a Hurst-exponensen alapuló úgynevezett R/S analízist használjuk.

Az R/S-analízis különböző időperiódusokra kiszámolja a kumulált adatok átlag körüli ingadozásainak R terjedelmét, majd ezt az adatok S szórásával elosztva standardizálja, ezért is nevezik újraskálázott terjedelem-analízisnek (angolul: Rescaled Range Analysis, röviden R/S-analízis). A folyamat eredményeként megkapjuk a Hurst-exponenst. Jelölje ξ_t a napi hozamot. Vizsgáljunk egy meghatározott, mondjuk T hónapos időszakot. Ekkor

$$\Xi_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \xi_t$$

jelöli az adott időszakban a havi átlagos hozamot. Ebben az esetben az

$$X(t, T) = \sum_{u=1}^t (\xi_u - \Xi_T)$$

idősor, azaz a ξ_t változónak a saját átlagától való kumulált eltérése. Tekintsük az idősor legnagyobb és legkisebb értékének $R_T = \max X(t, T) - \min X(t, T)$ eltérését, az idősor úgynevezett terjedelmét. Nyilvánvaló, hogy az idő függvényében nő a terjedelem. A következő

lépésben számoljuk ki az

$$S_T = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^n (\xi_t - \Xi_T)^2}$$

értékét. Empírikus vizsgálatokból tudjuk hogy, a H értéke megállapítható a következő összefüggés segítségével:

$$\ln R_T/S_T = H \ln T.$$

Átrendezve a képletet és a fent kiszámolt értékeket behelyettesítve, megkapjuk az első időszakhoz tartozó Hurst-exponenst. A továbbiakban ezt az eljárást alkalmazva és az időszakokat, azaz a T értékét egyre növelve kapjuk meg a Hurst-exponenst.[5]

Mit is mutat meg számunkra a Hurst-exponens? Értékével a különböző időskálákon átívelő hosszú távú emlékezet erősségét mérhetjük. Ha a $H < 0.5$ akkor ún. „antiperzisztens” viselkedésről beszélünk, ami jelen esetben számunkra azt jelenti hogy ha egy részvény vagy egy index növekszik, akkor a következő időpontban nagyobb valószínűséggel csökkenni fog, ha pedig csökken akkor pedig a következőben nőni fog. Ha $H > 0.5$ akkor a trendet erősítő folyamattal van dolgunk, azaz ún. „perzisztens” viselkedésről beszélünk, ami azt jelenti, hogy egy emelkedést nagyobb valószínűséggel követ egy emelkedés, esést meg egy esés, tehát a múltbéli események meghatározzák a jövőbeni viselkedéseket, tehát ezen esetekben nem beszélhetünk függetlenségről. Ha a $H = 0.5$ akkor véletlen bolyongásról beszélünk, (a Brown mozgás Hurst-exponense is 0,5).[15]

A Hurst-exponens és a fraktáldimenzió¹⁸ között Mandelbrot által bizonyított összefüggés.

Tétel: Legyen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos Brown-függvény¹⁹, melynek Hurst-exponense legyen H . Ekkor a függvény grafikonjának (dobozszámláló- vagy Hausdorff-) dimenziója 1 valószínűséggel $2-H$.

Bizonyítás: (Skicc)[17] Legyen $H = 2 - d$, ahol d a függvény grafikonjának (dobozszámláló- vagy Hausdorff-) dimenziója. Másrésztől $d = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log N_h}{-\log h}$, ahol h az időszak növekménye, és N_h az f függvény grafikonját lefedő dobozok száma a h érték mellett. Legyen $h = 1/2^n$. Legyen R_h a függvény terjedelme, vagyis az adott intervallumon felvett legnagyobb és legkisebb érték különbsége, minden $[0, h], \dots, [kh, (k+1)h], \dots, [1-h, 1]$ intervallumon. Ekkor a Hurst-exponens értéke $H = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log R_h}{\log h}$.. Mivel az f -függvény folytonos, minden egyes

¹⁸lsd.: 4.fejezet

¹⁹A fő különbség a Brown-függvény és a Brown-mozgás között, hogy még a Brown-mozgás független a növekményektől addig a Brown-függvény függ ezektől. Ez a függés azt jelenti, hogy ha a függvény egy meghatározott szakaszon nő, akkor a következő szakaszon is nőni fog.[16]

$[kh, (k+1)h]$ részintervallumon megközelítőleg R_h/h dobozra van szükségünk a lefedéshez. Ha $1/h$ részintervallumot veszünk, akkor megközelítőleg R_h/h^2 dobozra van szükségünk. Ebből következik, hogy $R_h \cong N_h h^2$, így

$$H = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log R_h}{\log h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log N_h + \log h^2}{\log h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log N_h}{\log h} + 2 = 2 - d = H. \blacksquare$$

5. Fraktálok keresése a valós tőzsdéken

5.1. A Dow Jones index vizsgálata

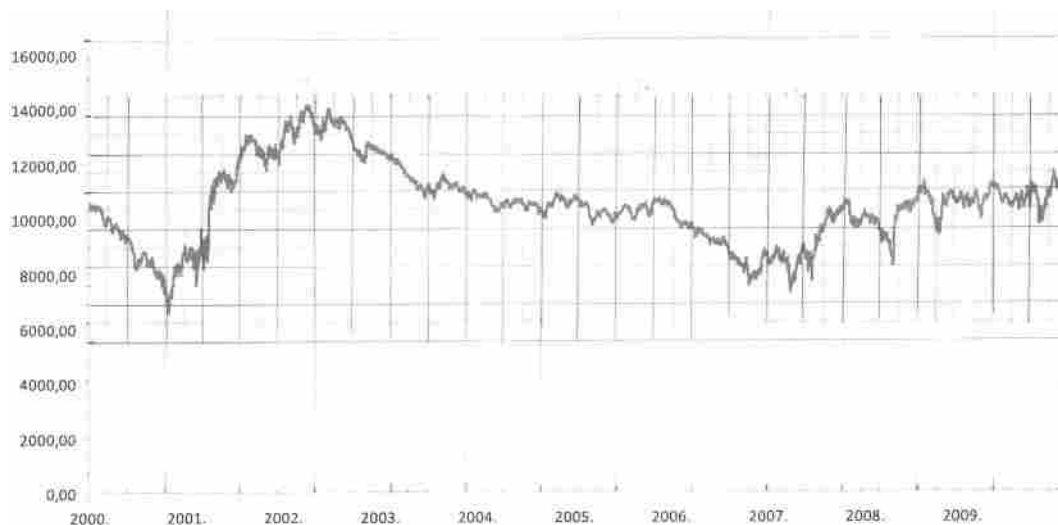
Vizsgálatunkhoz a Dow Jones ipari index 2000 január és 2009 december közötti adatait fogjuk használni. Először is tekintsük meg a napi záróértékekből készített vonaldiagramot, a függőleges tengelyen a záróértékek, míg a vízszintes tengelyen az időpontok láthatóak.



21. ábra. A Dow Jones záróértékei 2000. január és 2009. december között

Tétel. *A Dow Jones ipari index napi záróértékeiből (2000. január és 2009. december között) rajzolt diagram egy fraktál képe.*

Demonstráció: Számoljuk ki az ábra dimenzióját! Ezt megtehetjük a dobozszámláló-dimenzió segítségével.



22. ábra. Doboz-számlálás(1)

Első lépésként $r_0 = 1$ egységnyi oldalú négyzettel fedem le az ábrát. Második lépésben $r_1 = 1/2$ oldalhosszúságú négyzeteket veszek, ezekből két darabra van szükségem, hogy lefedjem az ábrát, az eljárást folytatva $r_2 = 1/4$, $r_3 = 1/8$, ... a következő értékeket kapom, melyekből kitudom számolni a log-log ábrázoláshoz a koordinátákat:

$$(\log(\frac{1}{r_0}), \log(N(r_0))) = (\log(1), \log(1)) = (0, 0)$$

$$(\log(\frac{1}{r_1}), \log(N(r_1))) = (\log(2), \log(2)) = (0.301, 0.301)$$

$$(\log(\frac{1}{r_2}), \log(N(r_2))) = (\log(4), \log(8)) = (0.602, 0.903)$$

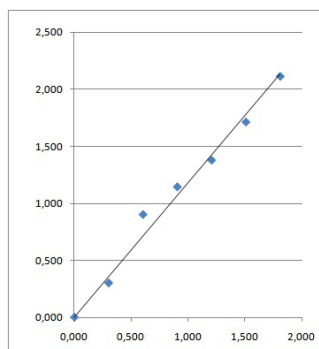
$$(\log(\frac{1}{r_3}), \log(N(r_3))) = (\log(8), \log(14)) = (0.903, 1.146)$$

$$(\log(\frac{1}{r_4}), \log(N(r_4))) = (\log(16), \log(24)) = (1.204, 1.380)$$

$$(\log(\frac{1}{r_5}), \log(N(r_5))) = (\log(32), \log(52)) = (1.505, 1.716)$$

$$(\log(\frac{1}{r_6}), \log(N(r_6))) = (\log(64), \log(131)) = (1.806, 2.117)$$

A koordinátákat ábrázolva, majd a kapott pontokra egyenest illesztve, meghatározhatjuk az egyenes meredekségét.



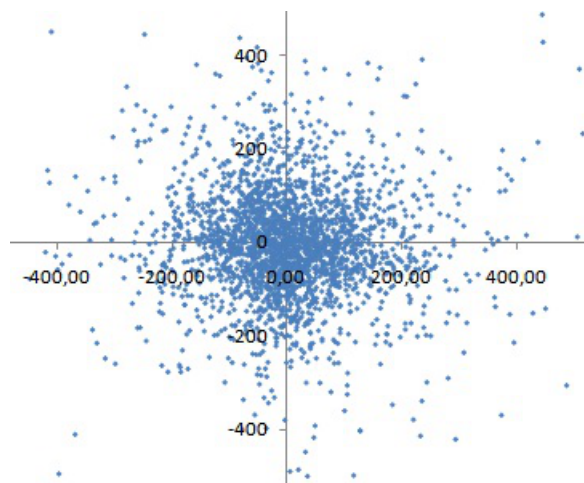
23. ábra. A Dow Jones index log-log ábrázolása

A kapott érték 1,204. Ezzel beláttuk, hogy a Dow Jones ipari index árfolyamaiból alkotott diagram fraktál.

Akár mondhatnánk, hogy már ránézésre is világos, hogy a tőzsdei index véletlen- szerű mozgást végez, de ezt ne hamarkodjuk el túlságosan. Kérdésünk a következő: vajon érvényesül a hatékony piac hipotézisének elve? A továbbiakban vizsgálódásunkat érdemes a napi hozam-okra korlátozni. Kutatásom során a következő tétteleket sikerült bebizonyítanom:

Tétel. *A Dow Jones ipari index hozamai nem függetlenek az 2000. január és 2009. december közötti időszakban, ezáltal nem áll fenn a hatékony piacok hipotézise.*

Demonstráció: A táblázatban megadott adatok alapján, számoljuk ki a napi hozamokat (a záró érték és az előző napi záró érték különbsége). Ábrázoljuk ezeket a koordináta-rendszerben a következő módon: a függőleges tengelyen az adott napok hozamait ábrázoljuk, míg a vízszintesen az egy nappal korábbi hozamokat. A következő pontfelhőt kapjuk:



24. ábra. A Dow Jones index hozamai 2000. január és 2009. december között

Jól látható, hogy mind a négy síknegyedben vannak pontok, továbbá jól látható az is, hogy a pontfelhő az origó körül sűrűbb és középpontosan szimmetrikus rá. Ezek alapján megállapíthatjuk a véletlenszerűséget és mondhatjuk, hogy az adott napi hozamok nem függenek egymástól.

Tétel. *A Dow Jones ipari index 2000. január és 2009. decembere közötti hozamai közepesen hatékonyak.*

Demonstráció: Határozzuk meg a Hurst-exponenst! A fent leírt R/S-analízist alkalmazva a következő értékeket kapjuk:

T	H	T	H	T	H	T	H	T	H	T	H
20	0,506	436	0,554	857	0,566	1278	0,562	1698	0,562	2116	0,535
40	0,485	459	0,560	878	0,567	1297	0,562	1720	0,562	2137	0,535
63	0,436	480	0,554	900	0,567	1319	0,562	1741	0,560	2159	0,533
82	0,425	500	0,547	921	0,561	1340	0,562	1761	0,558	2180	0,533
104	0,418	521	0,535	942	0,564	1361	0,564	1781	0,557	2201	0,535
126	0,476	540	0,540	965	0,565	1383	0,561	1800	0,556	2224	0,531
146	0,526	560	0,531	984	0,566	1403	0,560	1822	0,558	2243	0,529
169	0,476	582	0,545	1006	0,565	1426	0,560	1842	0,553	2265	0,529
189	0,460	605	0,540	1026	0,565	1447	0,559	1864	0,551	2285	0,529
211	0,453	625	0,540	1045	0,567	1468	0,558	1885	0,549	2304	0,528
232	0,521	647	0,542	1068	0,567	1489	0,558	1906	0,545	2326	0,527
252	0,563	669	0,544	1089	0,566	1510	0,558	1929	0,543	2347	0,526
273	0,556	689	0,554	1109	0,565	1530	0,560	1948	0,542	2367	0,527
292	0,543	712	0,559	1130	0,566	1549	0,559	1971	0,540	2389	0,527
314	0,532	732	0,553	1151	0,565	1572	0,560	1992	0,542	2411	0,526
334	0,542	753	0,556	1173	0,565	1591	0,560	2012	0,540	2432	0,526
356	0,546	775	0,558	1194	0,564	1613	0,561	2033	0,540	2453	0,523
377	0,542	794	0,560	1215	0,561	1635	0,560	2053	0,541	2475	0,524
398	0,546	815	0,561	1236	0,562	1655	0,560	2073	0,541	2495	0,521
421	0,549	836	0,565	1258	0,561	1678	0,561	2095	0,537	2516	0,520

25. ábra. A Dow Jones index R/S-analízisének eredményei

A H legkisebb értéke a tíz év adatait vizsgálva $H=0,418$, a legmagasabb érték pedig $H=0,566$. Megállapíthatjuk, hogy csupán nyolc esetben kaptunk $H=0.5$ -nél kisebb értéket, vagyis a Dow Jones index hozamai általában nem antiperzisztens viselkedést követnének. Ha a kapott Hurst-exponensek átlagát kiszámítjuk, 0.542 -t kapunk, így kijelenthetjük, hogy a Dow Jones index napi hozamai nem véletlen bolyongást követnek. Nem kerülheti el a figyelmünket, hogy bár többnyire 0.5 -höz közeli értékeket kaptunk, túlnyomórészt 0.5 -nél valamivel nagyobb Hurst-exponens adódott, tehát a vizsgált esetben közepesen hatékony piacról beszélhetünk. A következő lépésben változtassunk a skálázás léptékén. Határozzuk meg a Hurst-exponensek értékét féléves léptékekben. Ha hasonló értékeket kapunk mint a havi skálázásnál, akkor egy újabb lépéssel közelebb kerülünk célunkhoz. Az analízist elvégezve a következő értékeket kapjuk:

T	H	T	H
126	0,47573	1383	0,561112
252	0,56305	1510	0,5577
377	0,54216	1635	0,560031
500	0,54729	1761	0,55766
625	0,53976	1885	0,548674
753	0,55582	2012	0,540173
878	0,56682	2137	0,534606
1006	0,56544	2265	0,52936
1130	0,56642	2389	0,527193
1258	0,56105	2516	0,519725

26. ábra. A Dow Jones index R/S-analízisének eredményei féléves időintervallumokon

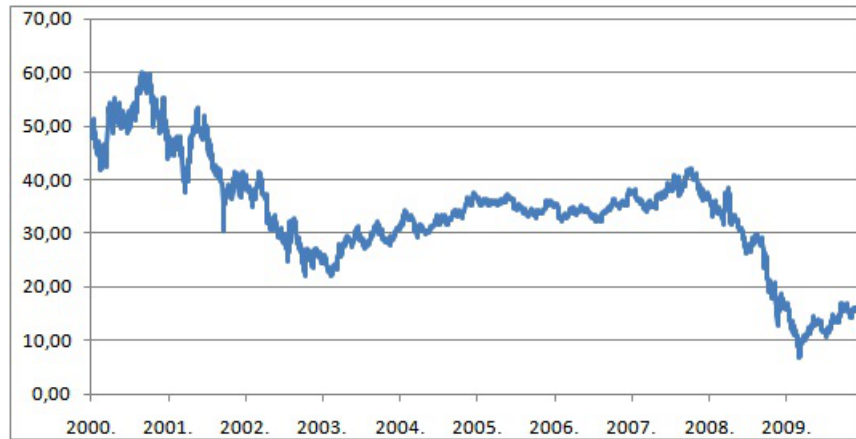
A Hurst-exponens legkisebb felvett értéke ebben az esetben 0,475, ami láthatóan közelebb van a 0,5-höz mint a havi skálázásnál kapott érték. A H maximális értéke három tizedesjegy pontossáig megegyezik és ha kiszámoljuk a kapott értékek átlagát, akkor 0,545-öt kapunk. Persze lényeges eltérést nem is vártunk, mert az ellentmondana a keresett jelenségnek, miszerint a Hurst exponens nem függ a skálázás mértékétől.

Kérdésként merülhet fel még az is, hogy milyen értékeket kapnánk, ha a vizsgálat kezdeti időpontját változtatnánk. A következőkben megvizsgálunk pár diszjunkt időintervallumot. Ha a 2005 január és 2009 december közötti ötéves időintervallumot tekintem havonta növekvő skálázással, akkor a Hurst-exponensek átlagos értéke 0.527 lesz, ami kisebb mint a tízéves időtartam alatt vizsgált Hurst-exponensek átlaga. Ha azonban a szélsőséges H-exponenseket hasonlítjuk össze, akkor jelen esetben a minimális exponens 0,423-at ami csak kismértékben tér el az „eredeti”-től, viszont a maximális itt 0,597, ami több mint két századdal magasabb mint az eredeti érték. Vegyük észre, hogy a vizsgálat során kapott Hurst-exponensek között csupán négy olyan értéket kaptunk, amely kisebb mint 0.5. Miután az adatokra több féle csoportosításban is megvizsgáltam, bárhogyan is változtattam a skálák méretét, és az egyes idősorok hosszát, mindvégig az előbb leírt tendencia maradt jellemző, miszerint a Hurst-exponensek átlagos értéke 0,54-hez nagyon közeli érték, és kevés olyan érték jelenik meg a vizsgált adatok között ami 0,5-nél kevesebb. Ezáltal közepesen hatékony a piac.

5.2. A General Electric részvény vizsgálata

A Dow Jones index vizsgálata során felmerült bennem a kérdés, vajon az index kosarában szereplő részvényekre külön-külön is fennálnak e a fent említett tételek. Így a General Electric részvényt, mely 1,14%-os súllyal vesz részt a kosárba, külön is megvizsgáltam.

A General Electric részvény árfolyamai:

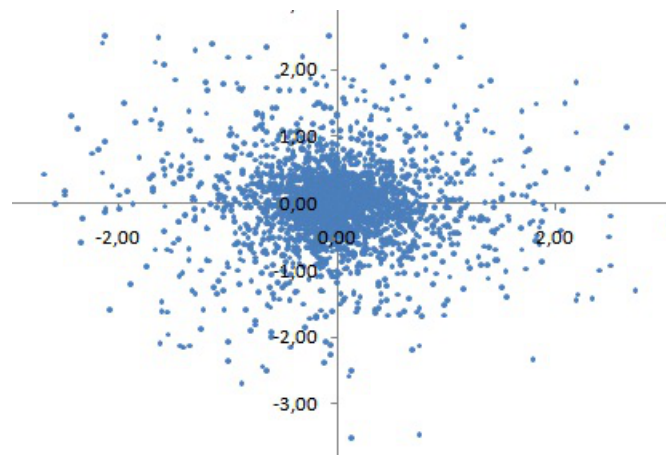


27. ábra. A General Electric részvény árfolyamai 2000. január és 2009. december között

A következő eredményeket kaptam:

Tétel. *A General Electric részvény hozamai az 2000. január és 2009. december közötti időszakban függetlenek, így fennáll a hatékony piacok hipotézise.*

Demonstráció: Tekintsük a részvény 2000. január és 2009. december közötti időszakra vonatkozó záró árfolyamokra vonatkozó adathalmazát. Számoljuk ki a napi hozamokat (napi záró árfolyam-előző napi záró árfolyam). Ábrázoljuk ezen adatokat egy koordináta-rendszerben a következő módon: a függőleges tengelyen az adott napok hozamait ábrázoljuk, míg a vízszintesen az egy nappal korábbi hozamokat. A következő pontfelhőt kapjuk:



28. ábra. A General Electric részvény hozamai 2000. január és 2009. december között

Az ábrát nézve a következő megállapításokat tehetjük: a pontfelhő szimmetrikus az origóra, mind a négy síknegyedbe esnek pontok, továbbá a pontfelhő az origóhoz közeledve

sűrűsödik. Ezen tulajdonságok pontosan azt támasztják alá, hogy a General Electric részvény napi hozamai függetlenek egymástól. Ebből pedig már azzonnal következik, hogy érvényesül a hatékony piacok hipotézise.

Tétel. *A General Electric részvény napi hozamai az 2000 január és 2009 december közötti időszakban véletlen bolyongást követnek.*

Demonstráció: Ahhoz, hogy belássuk a részvény hozamai véletlen bolyongást követnek, meg kell határoznunk a Hurst-exponens értékét. Tekintsük az adatsort²⁰. Alkalmazzuk rá az R/S-analízist. A következő értékeket kapjuk:

T	H	T	H	T	H	T	H	T	H	T	H
20	0,508	436	0,483	857	0,481	1278	0,510	1698	0,513	2116	0,503
40	0,448	459	0,485	878	0,480	1297	0,510	1720	0,511	2137	0,505
63	0,533	480	0,482	900	0,479	1319	0,510	1741	0,512	2159	0,502
82	0,508	500	0,496	921	0,491	1340	0,511	1761	0,515	2180	0,501
104	0,500	521	0,483	942	0,491	1361	0,512	1781	0,513	2201	0,512
126	0,490	540	0,491	965	0,485	1383	0,508	1800	0,511	2224	0,513
146	0,474	560	0,485	984	0,489	1403	0,508	1822	0,512	2243	0,515
169	0,450	582	0,477	1006	0,495	1426	0,508	1842	0,515	2265	0,516
189	0,455	605	0,477	1026	0,500	1447	0,507	1864	0,515	2285	0,525
211	0,478	625	0,478	1045	0,500	1468	0,509	1885	0,516	2304	0,531
232	0,497	647	0,472	1068	0,497	1489	0,511	1906	0,515	2326	0,523
252	0,526	669	0,470	1089	0,495	1489	0,511	1929	0,516	2347	0,519
273	0,498	689	0,474	1109	0,497	1530	0,508	1948	0,518	2367	0,518
292	0,494	712	0,469	1130	0,500	1549	0,508	1971	0,516	2389	0,520
314	0,501	732	0,467	1151	0,502	1572	0,510	1992	0,512	2411	0,515
334	0,493	753	0,468	1173	0,503	1591	0,510	2012	0,511	2432	0,516
356	0,491	775	0,470	1194	0,505	1613	0,510	2033	0,509	2453	0,511
377	0,492	794	0,468	1215	0,506	1635	0,509	2053	0,509	2475	0,513
398	0,478	815	0,471	1236	0,509	1655	0,508	2073	0,512	2495	0,509
421	0,481	836	0,478	1258	0,510	1678	0,510	2095	0,506	2516	0,504

29. ábra. A General Electric részvény R/S-analízisének eredményei

A Hurst-exponensek átlagos értéke eszerint 0,5, ami bizonyítja számunkra, hogy a General Electric részvény hozamai véletlen bolyongást követnek.

Már láttuk hogy, $H = 2 - d$. Most egy konkrét példán, a General Electric részvény árfolyamaiból megalkotott grafikonon, módunkban áll kísérleti szinten ellenőrizni. Ehhez meg kell határoznunk a dobozszámláló-dimenziót.

²⁰lásd CD



30. ábra. Doboz-számlálás(2)

Legyen $r_n = 1/2^n$. Ekkor az ábrán számolva:

$$(\log(\frac{1}{r_0}), \log(N(r_0))) = (\log(1), \log(1)) = (0, 0)$$

$$(\log(\frac{1}{r_1}), \log(N(r_1))) = (\log(2), \log(2)) = (0.301, 0.301)$$

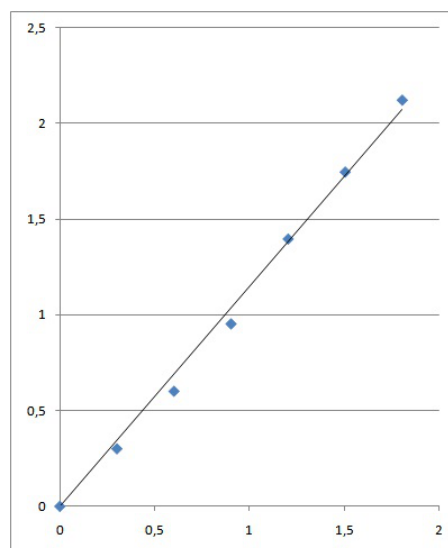
$$(\log(\frac{1}{r_2}), \log(N(r_2))) = (\log(4), \log(4)) = (0.602, 0.602)$$

$$(\log(\frac{1}{r_3}), \log(N(r_3))) = (\log(8), \log(9)) = (0.903, 0.954)$$

$$(\log(\frac{1}{r_4}), \log(N(r_4))) = (\log(16), \log(25)) = (1.204, 1.398)$$

$$(\log(\frac{1}{r_5}), \log(N(r_5))) = (\log(32), \log(56)) = (1.505, 1.748)$$

$$(\log(\frac{1}{r_6}), \log(N(r_6))) = (\log(64), \log(133)) = (1.806, 2.124)$$



31. ábra. General Electric árfolyamának log-log ábrázolása.

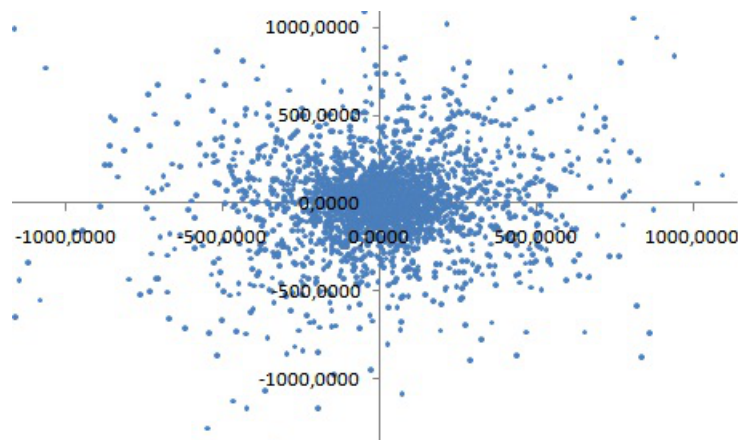
A kapott egyenes meredeksége 1,4. Vagyis az árfolyamokból alkotott görbe dobozszámláló-dimenziója 1, 4. A tételből való 0,1 eltérés magyarázható azzal, hogy az R/S-analízist a napi hozamokból számoltuk, míg a dimenzió meghatározását a napi árfolyamokból készülő görbén végeztük.

5.3. A magyar BUX index hasonlóságai és eltérései a nemzetközi indexektől.

A 2000-es évek elején már vizsgálták a nemlinearitás szempontjából a Budapesti Értéktőzsdét. Konkrét vizsgálat történt a Hurst-exponensre az 1991. január és 2000. május BUX indexei alapján. Abban az időben a Hurst-exponensre megközelítőleg mindig 0,7 körüli értéket kaptak a kutatók. Ezt azzal magyarázták, hogy a BÉT még nagyon fiatal tőzsde. Továbbá a BUX index akkori történetében a stagnálás, a gyors növekedés és a hektikus viselkedés különböző szakaszai jól elkülöníthetőek voltak. Az eredmények érvényességének ellenőrzésére nem csak logaritmikus hozamokkal számoltak, hanem vizsgálták a növekmények viselkedését és a növekedési ütemeket is. Különböző időszaki vizsgálatokat is készítettek, és mindvégig azt találták, hogy a BUX index Hurst-exponense valamennyi korábban elemzett nagy tőzsdétől eltér abban, hogy 0,5-től szignifikánsan eltérő Hurst-exponenst szolgáltat. Ezek alapján a következő következtetések születtek: A BUX index időbeni alakulása véletlenszerű, de nem Brown-mozgás. Befektetői szempontból ez az eredmény azt jelentette, hogy a Budapesti Értéktőzsdén a reakció nem azonnali. A befektető inkább kivár, és mindaddig figyelmen kívül hagyja a beérkező információkat, amíg nem rajzolódik ki egy világos trend. A befektetők tehát kumulatív módon reagálnak az őket ért hatásokra, vagyis a következmény nem áll egyszerű arányosságban a kiváltó okokkal.

Érdekes lehet azonban az elmúlt tíz év tekintetében is megvizsgálni a BUX indexet. Vajon az idő múlásával közeledik a Hurst-exponensek a világ nagy tőzsdein mért közel 0,5-ös értékhez?

Kezdjük az elemzést a hozamok függetlenségének vizsgálatával.



32. ábra. A BUX index hozamai 2000. január és 2009. december között

Ebben az esetben is azt találjuk, hogy a pontthalmaz középpontosan szimmetrikus az origóra, mind a négy síknegyedben lesznek pontok, továbbá észrevehetően az origó közelében sűrűbben helyezkednek el a pontok.

Végre hajtva az R/S-analízist a következőt kapjuk:

T	H	T	H	T	H	T	H	T	H	T	H
20	0,53019	436	0,48035	857	0,54308	1278	0,56952	1698	0,55412	2116	0,56562
40	0,50755	459	0,52999	878	0,54081	1297	0,57146	1720	0,54939	2137	0,56656
63	0,50698	480	0,54269	900	0,54356	1319	0,56707	1741	0,54851	2159	0,56879
82	0,54549	500	0,55137	921	0,55291	1340	0,56527	1761	0,54901	2180	0,57941
104	0,56984	521	0,56357	942	0,5569	1361	0,56631	1781	0,55049	2201	0,59115
126	0,53121	540	0,57399	965	0,55468	1383	0,56883	1800	0,55454	2224	0,59326
146	0,52934	560	0,57232	984	0,54905	1403	0,56966	1822	0,54846	2243	0,58296
169	0,53169	582	0,5832	1006	0,55289	1426	0,57549	1842	0,54512	2265	0,58495
189	0,51877	605	0,5643	1026	0,55282	1447	0,57092	1864	0,54492	2285	0,59179
211	0,5069	625	0,55196	1045	0,55584	1468	0,56278	1885	0,54883	2304	0,58751
232	0,51657	647	0,53901	1068	0,55917	1489	0,56083	1906	0,54378	2326	0,57759
252	0,54153	669	0,54245	1089	0,5548	1489	0,56355	1929	0,54184	2347	0,56436
273	0,55852	689	0,53635	1109	0,55588	1530	0,56271	1948	0,54202	2367	0,56561
292	0,51834	712	0,53793	1130	0,55698	1549	0,5587	1971	0,54425	2389	0,55969
314	0,48086	732	0,54647	1151	0,55694	1572	0,56192	1992	0,54567	2411	0,55836
334	0,51313	753	0,54424	1173	0,55741	1591	0,56435	2012	0,5556	2432	0,55825
356	0,51059	775	0,53724	1194	0,56072	1613	0,56629	2033	0,55274	2453	0,55805
377	0,50215	794	0,53121	1215	0,564	1635	0,55247	2053	0,56194	2475	0,55677
398	0,50392	815	0,54142	1236	0,56519	1655	0,55446	2073	0,5618	2495	0,55591
421	0,49523	836	0,54539	1258	0,56672	1678	0,55507	2095	0,55872	2516	0,55613

33. ábra. A BUX index R/S-analízisének eredményei

Ha a 2000. januártól 2009. decemberéig terjedő adatsorra futtatjuk le az analízist havi skálázást alkalmazva, a Hurst-exponensek átlaga 0,551 lesz, a legkisebb Hurst-exponens 0,49,

és a legnagyobb pedig 0,59. Már itt észrevehető, hogy jóval kisebb értékeket kapunk, mint a 2000-es évek elején történt vizsgálatoknál. Következő lépésként tekintsük ugyan ezen adatsorok sokaságát, csak növeljük az egyes időintervallumok hosszát fél évre. Így lefuttatva az analízist, jelentős értékbeli eltéréseket nem tapasztalunk, a Hurst-exponensek átlagos értéke 0,553, a minimális exponens értéke 0,493, a maximális értéke 0,598. 0,5-nél kisebb értéket csupán három esetben kapunk. Változtatva a skálázás léptékén és az idősor hosszát módosítva, sem kapunk kirívóan eltérő értékeket, ha továbbra is 2000. január és 2009. decembere között maradunk. Összehasonlítva a 2000-es évek elején végzett kutatásnál kapott eredményeket a mostani számításainkkal, látványos eredményt kapunk. A Hurst-exponens 2000 után jóval közelebb került a 0,5-ös értékhez, nagyjából 0,55. A BUX index hozamai véletlen bolyongást követnek. Ez vélhetőleg annak tudható be, hogy a Budapesti Értéktőzsde „öregszik” továbbá annak is, hogy az utóbbi években a magyar piac „másolja” a külföldre jellemző gazdasági tendenciákat. Sajnos egyelőre nem áll rendelkezésünkre elegendő friss információ arra vonatkozólag, hogy a BÉT a jövőben hatékony piaccá válik vagy se.

6. Fraktálok és furcsaságok

Ebben a fejezetben olyan különleges fraktálokat mutatok be, amelyek a középiskolás diákok számára is érdekes ellenpéldaként használhatók.

6.1. Peano-görbe.

Ha ösztönös módon beszélünk a dimenziókról, megértjük a tipikus egy dimenziós vonalakat és a síkokat mint tipikus két dimenziós objektumokat. 1890-ben Giuseppe Peano (1858-1932) majd utána közvetlenül 1891-ben David Hilbert (1862-1943), tárgyalta azon síkbeli görbéket, amelyek bemutatják hogy a mi naív felfogásunk a görbékről nagyon korlátozott. Olyan görbéket mutattak, amelyek kitöltik a síkot, vagy a sík egy adott részét. A Peano görbét előállíthatjuk a Koch-görbe egy másik konstrukciójaként. Egy egyszerű vonal darabbal kezdünk, ez lesz a kiinduló rész, ezután helyettesítjük a generátor göbével ahogy a lenti ábra is mutatja. Nyilvánvalóan a generátor két pontban metszi önmagát. Precízebben, a görbe két pontban érinti önmagát. Megfigyelhető, hogy ez a generátor görbe szépen illik a négyzetre, amelyik a szaggatott vonallal van jelezve. Ez az a négyzet, amit a Peano-görbe pontjai lefednek. A második lépcsőben, a görbe minden egyes egyenes vonal darabjára alkalmazzuk az előző lépcsőben definiált eljárást. A második lépés után, a görbén 32 metszéspont lesz. Most ismételjük a lépéseket továbbra is $\frac{1}{3}$ aránnyal. Így a k -adik lépésben a vonal darabkák hossza $1/3^k$. Tegyük fel, hogy az eredeti görbe hossza 1 volt, ekkor az első lépés utána görbe hossza: $9 \cdot \frac{1}{3} = 3$, a második lépés után $9 \cdot 9 \cdot \frac{1}{3^2} = 9$ stb. . Láthatjuk, hogy minden egyes lépés után a görbe hossza a háromszorosára növekszik. Tehát a k – *adik* lépés után a görbe hossza 3^k .

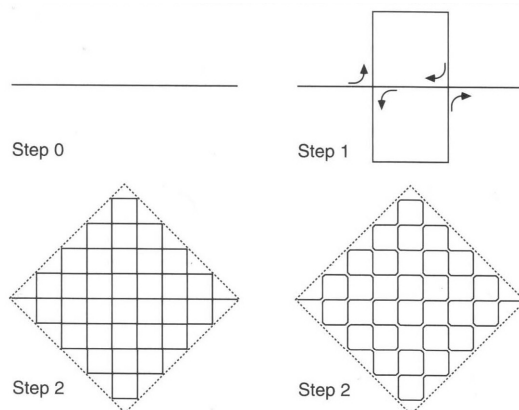


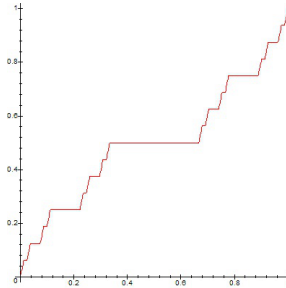
Figure 34: A Peano-görbe előállítása

Minden egyes lépcső egy vonal részt kilenc vonal résszel helyettesít, még pedig úgy hogy az arány mértéke $\frac{1}{3}$. Az érthetőség érdekében, a sarkok ezeken a poligonális vonalakon, ahol a görbe metszi önmagát, kissé lekerekítve vannak. A Peano-görbe különlegesnek számít a fenti fraktálokhoz képest, mivel Hausdorff-dimenziója egész szám, pontosan 2. Bármely beosztásnál minden egyes négyzetbe esik a görbének pontja.[11]

6.2. Az ördögi lépcső

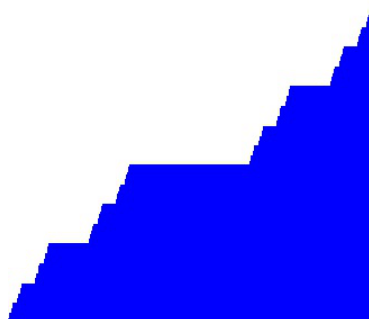
Egy olyan fraktállal folytatjuk, amelynek konstrukciója és tulajdonságai eltérnek az eddig bemutatott fraktáloktól. Először egy függvényt definiálunk. Legyen $f(x) = 1/2$, ha $1/3 \leq x \leq 2/3$. Tehát f -et minden olyan pontban megadtuk, amelyet a Cantor-halmaz konstrukciójának első lépésében elhagytunk a $[0,1]$ intervallumból. Legyen most $f(x) = 1/4$, ha $1/9 \leq x \leq 2/9$ és $f(x) = 3/4$, ha $7/9 \leq x \leq 8/9$. Ezzel f -et definiáltuk a Cantor-halmaz konstrukciójának második lépésben elhagyott pontjaiban. Hasonlóan, a következő négy elhagyott intervallumon f vegye fel rendre a konstans $1/8$, $3/8$, $5/8$ illetve $7/8$ értékeket; és így tovább.

A kapott f függvény értelmezve van a $[0,1]$ intervallum minden pontjában, amely nincs benne a C Cantor-halmazban (sőt, C egyes pontjaiban is- az intervallumvégpontokban). Ha most $t \in [0,1]$ tetszőleges, akkor legyen $f(t) = \sup\{f(x) : 0 \leq x \leq t \text{ és } x \notin C\}$. A $[0,1]$ zárt intervallumra az így kiterjesztett f függvény monoton növekvő és folytonos.



35. ábra. f -függvény

Az ördögi lépcső az a síkhalmaz, amelyet az f függvény grafikonja, az x -tengely és az $y=1$ egyenletű egyenes határol.

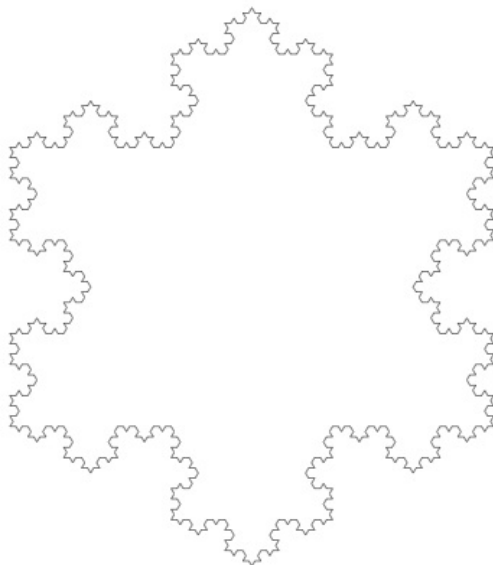


36. ábra. Az ördögi-lépcső

A Cantor-halmaz konstrukciója során elhagyott intervallumok felett vannak a lépcsőfokok, amelyek összhosszúsága: 1. Tehát, a lépcsőn balról jobb felé haladva úgy jutunk fel az 1 magasságba, hogy 0 hosszúságú részen megyünk felfelé, és sehol nem ugrunk. Az ördögi lépcső is mutat bizonyos önhasznóságot. Azok a pontjai például, amelyekre $0 \leq x \leq 1/3$, olyan halmazt alkotnak, amely emlékeztet az ördögi lépcsőre, de a szó szigorú matematikai értelmében nem hasonló hozzá.[7]

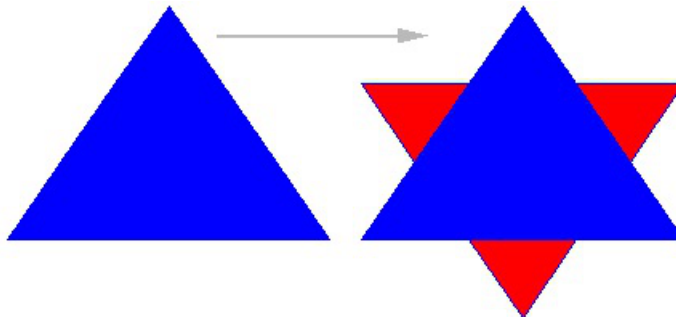
6.3. Koch-sziget

A Koch-féle hópehely vagy sziget az a halmaz, amelyet három darab, végpontjainál egymáshoz illesztett Koch-görbe határol.



37. ábra. Koch-sziget

A Koch-sziget abból a szempontból érdekes, hogy végtelen hosszú kerületét véges terület határolja. Kerülete végtelen, mivel a dimenziója nem egész, továbbá minden egyes iteráció után a kerület a $4/3$ -szorosára nő. Területét számolhatjuk a következőképpen:



38. ábra. Koch-sziget terület mérése

Jelölje s a kiindulási háromszög oldalának hosszát! Ekkor a kiindulási háromszög területe $\frac{s^2\sqrt{3}}{4}$. Minden új iterációban az új kis háromszögek oldalhossza $1/3$ -a az előző iterációban kapott háromszögekének. Mivel a szabályos háromszögek területe négyzetesen függ az oldalhosszuktól, az új háromszögek területe egyenként $1/9$ -része az előző iterációban nyert háromszögek egyikének. A kis háromszögek száma minden iterációban megnégyszereződik. Mivel az első iterációban három háromszög keletkezik, az n -edik iterációban keletkező háromszögek száma $3 \cdot 4^{n-1}$. Összetéve adódik az iterációs formula:

$$A_{n+1} = \frac{3 \cdot 4^{n-1}}{9^n} A_0, n \geq 1$$

ahol A_0 a kiindulási háromszög területe. Behelyettesítve az $A_1 = \frac{4}{3}A_0$ -t, és felbontva a zárójeleket:

$$A_{n+1} = \frac{4}{3}A_0 + \sum_{k=2}^n \frac{3 \cdot 4^{k-1}}{9^k} A_0 = \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{4^k}{9^k} \right) A_0$$

Határértékben, ha n tart a végtelenbe, akkor $4/9$ hatványainak összegeként $4/5$ adódik. Ezzel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} \right) A_0 = \frac{8}{5} A_0.$$

Tehát a hópehelygörbe által körülzárt Koch-sziget területe a kiindulási háromszög területének $8/5$ része, vagy az eredeti háromszög oldalhosszával kifejezve $\frac{2s\sqrt{3}}{5}$. Így a végtelenül hosszú hópehelygörbe egy véges területű síkdarabot ölel körül.

7. Tartalmi összefoglaló

A dolgozat első részében a fraktálfogalom kialakulásáról olvashatunk, a fraktálok megjelenéséről a természetben, továbbá megtudjuk, hogyan állíthatunk elő fraktálokat. Néhány elemi fraktálról részletesebben is olvashatunk, mint például a Cantor-halmazról, a Mandelbrot-halmazról, a Sierpinski-szőnyegről és a Menger-szivacsról. A fejezet végén a fraktálok legfőbb tulajdonságait gyűjtöttük össze.

A következő fejezet a fraktál-dimenziókról szól. Több példán keresztül bemutatjuk, a dobozszámláló-dimenziót és említésre kerül a Hausdorff-dimenzió is. Ebben a fejezetben újabb fraktálokat is megismerhetünk, dimenzió-számukkal együtt.

A negyedik fejezetben közgazdászok számára használható módszerek kerülnek bemutatásra: a hozamok függetlenségének vizsgálata, a Hurst-exponens és az R/S-analízis.

Az ötödik fejezet a dolgozat saját eredményeit tartalmazza, ahol az említett módszerek gyakorlati alkalmazása történik. A Dow Jones ipari indexet, a General Electric részvényt és a BUX indexet elemezzük piaci hatékonyságuk szerint.

A dolgozat utolsó fejezete különleges fraktálokat mutat be, melyek a középiskolás diákok számára is érdekesek lehetnek: az egyik egy görbe, ami képes kitölteni a sík egy részét, a második pedig egy olyan függvénnyel leírható fraktál, mely úgy képes feljutni a 0 pontból az 1 pontba, hogy csak vízszintesen halad, végül megmutatjuk, hogy létezik olyan fraktál, amelynek végtelen hosszú a kerülete, területe azonban véges.

A dolgozat közel negyven ábrája és grafikonja segíti az olvasót a megértésben.

8. Irodalomjegyzék

- [1]M.K. Hassan Department of Physics, Brunel University /Fraktálok története, Virtual Physics 7.szám
- [2]Kovács Ádám Dr. Vámos Attila: Aranyháromszög; Műszaki KK, 2007
- [3]Muraközy Gyula: A káosz elmélete és tanulságai; 1997 In: Rend és káosz Szerk.:Fokasz Nikosz
- [4]Nováky Erzsébet: A káoszelmélet és a jövőkutatás változása; Budapest, 1998
- [5]Fokasz Nikosz: Nemlineáris idősorok, a tőzsde káosza?; In: Nemlineáris idősorok- a tőzsde káosza; Szerk.: Fokasz Nikosz, 2003
- [6]Abacus matematikai lapok 2004-2005
- [7]Szabó László Imre: Ismerkedés a fraktálok matematikájával; Polygon, 2005
- [8]<http://hu.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot-halmaz>
- [9]James Gleick: Káosz egy új tudomány születése; Budapest, 2004
- [10]Kurusa Árpád: Euklidészi geometria; Polygon, 2008
- [11]Peitgen-Jürgens -Saupe: Chaos and Fractals; New York, 1992
- [12]Krámli András: Glosszárrium Természet Világa, 135. évfolyam, 7. szám, 2004. július
- [13]http://en.wikipedia.org/wiki/Log-log_graph
- [14]Muraközy Balázs: Káosz a tőzsdén? In: Nemlineáris idősorok- a tőzsde káosza; Szerk.: Fokasz Nikosz, 2003
- [15]http://www.bearcave.com/misl/misl_tech/wavelets/hurst/
- [16]<http://davis.wpi.edu/~matt/courses/fractals/brownian.html>
- [17]M.A. Sánchez Granero, J.E. Trinidad Segovia, J. Garcia Pérez: Some comments on Hurst exponent and the long memory processes on capital markets (Physica A 387 (2008) 5543-5551)
- [19]Brealy-Myers: Modern vállalati pénzügyek; Panem, 2005
- [20]Eugene Fama: Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work; The Journal of Finance, 1969

9. Felhasznált ábrák listája

- 1.ábra: <http://wick.freeblog.hu/archives/2008/05/19/Skizofrenia/>
- 2.ábra: <http://posters.sonik.us/details/nautilus-shell-356711.html>
- 3.ábra: <http://blog.videovagas.hu/?p=168>
- 4.ábra: http://hu.wikipedia.org/wiki/F%C3%A1jl:Smith-Volterra-Cantor_set.svg
- 5, 6, 7, 10.ábra: <http://www.ki.oszk.hu/kf/kfarchiv/2004/1/giczi.html>
- 8.ábra: <http://teamlabor.inf.elte.hu/logosecsetvonasok/erdekesseg7.html>
- 9.ábra: <http://posters.sonik.us/details/nautilus-shell-356711.html>
- 11.ábra: <http://www.origo.hu/tudomany/20090825-miert-van-az-hogy-az-allamhataroknak-nem-letezik-pontos-hossza.html>
- 13, 34.ábra: Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe: Chaos and fractals : New frontiers of science -New York, Springer, 2004
- 16, 17, 18, 19.ábra: <http://classes.yale.edu/fractals/fracanddim/boxdim/BoxDim.html>
- 20.ábra: Nemlineáris idősorok- a tőzsde káosza; Szerk.: Fokasz Nikosz, 2003
- 35.ábra: <http://www.cs.cmu.edu/~cdm/bilder.html>
- 36.ábra: <http://library.thinkquest.org/26242/full/fm/fm7.html>
- 37.ábra: http://www.israelsson.org/~lethe/logobook/0.5.1/more_recursion.html
- 38.ábra: <http://epa.oszk.hu/00100/00143/00047/giczi.html>
- 12, 14, 15, 21-33.ábra: Saját szerkesztés

10. Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani Dr. Kurusa Árpádnak a szakdolgozatom elkészítésében nyújtott segítségéért, hasznos szakmai tanácsaiért és felmerülő problémáim rendkívül gyors megoldásáért. Szeretném megköszönni családom és barátaim támogatását, továbbá, külön köszönettel tartozom Ávéd Lászlónak és Berei Andreának a dolgozat szerkeztése alatt történő fennakadásaim áthidalásáért.

11. Nyilatkozat

Alulírott Gombos Kitti Kata, matematika tanár szakos hallgató, kijelentem, hogy a diplomadolgozatban foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem azt, hogy diplomamunkámat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában, a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.