

Egyenessereg burkológörbájének meghatározása

Szakdolgozat

Vígh-Mácsai Zsanett

Témavezető: dr. Kurusa Árpád

SZTE TTIK, Bolyai Intézet, Geometria Tanszék

2010

Szeged

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani Dr. Kurusa Árpádnak, témavezetőmnek, aki figyelmemet erre a témára irányította, és mind az elméleti problémák, mind a gyakorlati kivitelezésben felmerülő kérdések megoldásában segített.

Szeged, 2010. május 14.

Tartalmi összefoglaló

A dolgozatban egyparaméteres egyenessereg burológörbéivel foglalkozunk. A vizsgált alapprobléma a következő: adott egy síkgörbe érintőinek egyparaméteres serege. Határozzuk meg a síkgörbe nyomát!

A dolgozat bevezető fejezete után a másodikban összefoglaljuk a szükséges elméleti alapokat, valamint megvizsgáljuk az affinitások viszonyát az eredeti problémához.

A harmadik fejezetben bevezetjük a burkológörbe fogalmát, majd analitikus szükséges és elegendő feltételt adunk arra, hogy egy görbe mikor burkológörbéje egy egyparaméteres egyenesseregnek. Ezzel a problémát egy egyenletrendszer megoldására lehet visszavezetni, ami általában meglehetősen bonyolult is lehet. Egy más szempontból is érdekes példát adunk burkológörbére, ami mutatja egy meglehetősen egyszerű egyenessereg burokolója is lehet például önátmetsző, és hogy a burkológörbe nem feltétlen differenciálható.

A negyedik fejezet tartalmazza a dolgozat fő eredményét. Megmutatjuk, hogy erős differenciálhatósági feltételek mellett a burkológörbe direkt módon (egyenletrendszer megoldása nélkül) is kiszámítható. Az alkalmazott eljárás Steven Butlertől származik 2002-ből. Az eljárást, helyességének elméleti igazolásán túl, részletesen kidolgozott példákon keresztül is bemutatjuk. Megvizsgáljuk továbbá, hogy a transzformáció milyen módosítások mellett használható az eredeti probléma megoldására.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Felhasznált fogalmak	3
2.1. Differenciálható síkgörbék	3
2.2. Affinitások	4
2.3. Síkbeli egyenesek egyparaméteres seregei	5
3. Burkológörbék	11
3.1. Konstans területet levágó egyenesek seregének burkolója	13
4. Általános egyenessereg burkolója	18
4.1. Butler-transzformáció	18
4.1.1. Néhány görbe Butler-transzformáltja	20
4.2. A μ -transzformáció	24
4.2.1. Néhány görbe μ -transzformációja	26
4.3. A β - és μ -transzformációk kombinációi	31

Ábrák jegyzéke

2.1. Az $\epsilon : (1 - \epsilon)$ arányban osztó egyenesek	6
2.2. Két metsző egyenes	8
2.3. Kritikus egyenes	8
3.1. Hiperbola aszimptotái minden érintővel ugyanakkora területű három- szöget alkotnak	14
3.2. Konstans területet levágó egyenesek burkolója	16
4.1. $t^4 - 2t^2 + 1$ görbe β -transzformáltja	20
4.2. Parabola β -transzformáltja	21
4.3. Ellipszis β -transzformáltja	22
4.4. Hiperbola β -transzformáltja	23
4.5. $t^4 - 2t^2 + 1$ görbe μ -transzformáltja	27
4.6. Parabola μ -transzformáltja	28
4.7. Ellipszis μ -transzformáltja	29
4.8. Hiperbola μ -transzformáltja	30

1. fejezet

Bevezetés

A dolgozat központi problémája a következő: adott egy síkgörbe érintőinek egyparaméteres serege a síkban. Határozzuk meg a síkgörbe nyomát!

A dolgozat első, bevezető része után a második fejezetben a használt fogalmakat definiáljuk. Bevezetjük az egyparaméteres egyenessereg fogalmát, későbbi vizsgálódásaink mind egyparaméteres egyenesserekkel kapcsolatosak. A definícióban kulcsfontosságú, hogy a paraméterezés differenciálható.

A harmadik fejezetben tehát feltételezzük, hogy adott egyenesek egy egyparaméteres serege. Olyan síkgörbét keresünk, amelynek éppen ez az egyenessereg az érintőserege. Így tulajdonképpen eljutunk a burkológörbe fogalmához abban a speciális esetben, amikor a görbesereget egyenesek alkotják. Megfelelően erős differenciálhatósági feltételek mellett megadjuk az általános megoldást; differenciálás segítségével a problémát egy egyenletrendszer megoldására vezetjük vissza. A fejezet végén egy elméleti és történeti szempontból is érdekes példát számítunk ki.

A negyedik fejezet tartalmazza a dolgozat fő eredményeit. Ebben a részben megoldjuk kétszer folytonosan differenciálható görbék esetén az eredeti rekonstrukciós problémát. Feltesszük, hogy adott a görbe érintőinek egyparaméteres serege, és megadjuk egy S. Butlertől származó eljárást, amivel ebből rekonstruálható az eredeti görbe. Az eljárás technikailag egyszerűbben kivitelezhető, mint a burkológörbe kiszámítása (nem kell egyenleteket megoldanunk). További elméleti előnye, hogy végrehajtáshoz valójában *nincs szükség semmiféle további struktúrára az érintők halmazán*, amilyen például a paraméterezés volt burkológörbék esetén, így lehetőséget teremt a probléma jóval általánosabb megoldására. Ez a kutatási irány azonban ezen dolgozat keretein túlmutat, így az eljárást csak egyparaméteres egyenesserekre dolgozzuk ki.

A vizsgált problémák elhelyezése az elméletben

Egyparaméteres egyenessereg burkológörbájének meghatározása a geometria egyik régi feladata, a modern rekonstrukciós problémák egyik első változata. A harmadik fejezetben bizonyított tételek az elméletben igazolt első, mára már klasszikussá vált eredményeknek számítanak, kapcsolatuk az analízissel nyilvánvaló. Bizonyos értelemben meglepő, hogy az érintőseregből a görbét differenciálással kapjuk vissza, a természetes analitikus intuíció inkább integrálást sug.

Az 1950-es években H. Steinhaus [9] tűzte ki híres problémáját, amelyet röviden úgy fogalmazhatunk meg, hogy rekonstruáljuk a görbét a Crofton-transzformáltjából. Egy síkgörbe Crofton-transzformáltja egy a sík egyensein értelmezett függvény, amely minden egyeneshez hozzárendeli, hogy az egyenes az adott görbét hány pontban metszi (bővebben lásd pl. [7]). Ez az eredeti problémánkhoz szorosan kapcsolódik, ugyanis differenciálható görbék esetén a Crofton-transzformáltból az érintők meghatározhatók. A Steinhaus-problémát H. Fast 1993-as [2] cikkében igen általános feltételek mellett megoldotta.

Egy másik természetes vizsgálódási irány, amelyet már a bevezetőben is említettünk, amikor az érintők halmaza adott, de paraméterezés ("sorrend") nélkül. Célunk ismét a görbe meghatározása. (Jegyezzük meg, hogy az előző bekezdésben leírtak szerint megfelelően sima görbék esetén ez a feladat "nehezebb" a Steinhaus-problémánál, hiszen megoldásából automatikusan következik a Steinhaus-probléma megoldása is.) Az első eredményt 1989-ben A. Horwitz publikálta [3]. Ebben a problémát megoldotta viszonylag erős analitikus feltételek mellett. Bizonyítása meglehetősen technikai, fő ötlete, hogy az érintési pontot megkereshetjük egy rögzített érintőn, ha érintők egy hozzá konvergáló sorozatával messük, és tekintjük a metszéspontok limeszét. S. Butler 2002-ben [1] cikkében Horwitz eredményeire egy frappáns, meglepő bizonyítást adott. Részletesebb történeti áttekintést találhatunk pl. [6] cikkben. Dolgozatunk fő célja Butler módszerének ismertetése, illetve annak továbbgondolása.

2. fejezet

Felhasznált fogalmak

Ebben a fejezetben összefoglaljuk a későbbi eredmények megértéséhez szükséges alapfogalmakat.

2.1. Differenciálható síkgörbék

Ebben a szakaszban síkgörbékre vonatkozó alapvető fogalmakat és tételeket mutatunk be azok bizonyítása nélkül. A tételek bizonyítását az olvasó megtalálhatja például Kurusa Árpád [4] könyvében.

Az $r: (a, b) (\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható függvényt képhalmazával együtt **egyszerű görbeívnek** nevezzük, ha r injektív, inverze folytonos, és deriváltja seholsem tűnik el, vagyis minden $t \in (a, b)$ esetén $\dot{r}(t) \neq 0$. Az r függvény a hozzá tartozó egyszerű görbeív egy paraméterezésének hívjuk, a képhalmazra a görbe nyomaként hivatkozunk. Egyszerű görbeív t_1 és t_2 paraméterű pontjai közti **ívhosszán** az $\int_{t_1}^{t_2} |\dot{r}(t)| dt$ értéket értjük, ahol r a paraméterező függvény. Általában egy görbe nyomának több különböző paraméterezése létezik. A következő tétel azt mutatja, hogy az ívhossz valóban csak a görbe nyomától függ, attól nem, hogy melyik paraméterezésével adjuk meg.

Tétel. *Az ívhossz független a paraméterezéstől.*

Sok számolást egyszerűsít, illetve a definíciók kimondásánál is hasznos, ha egy görbét az ún. természetes vagy ívhossz szerinti paraméterezésével tekintjük. Legyen a görbe teljes ívhossza ℓ . Ekkor az $r: (0, \ell) \rightarrow \mathbb{R}^2$ paraméterezés ívhossz szerinti, ha minden $s \in (0, \ell)$ esetén

$$s = \int_0^s |\dot{r}(t)| dt.$$

A fenti összefüggést s szerint deriválva adódik a következő tétel.

Tétel. Ha az egyszerű görbeív r paraméterezése ívhossz szerinti, akkor $|\dot{r}(s)| = 1$, ahol s ívhossz szerinti paraméter.

Általában megegyezünk abban, hogy s az ívhossz szerinti paramétert jelöl, ha a szövegkörnyezet másképp nem rendelkezik.

Egy (térbeli) összefüggő ponthalmazt **differenciálható görbének** nevezzük, ha minden pontjának létezik olyan környezete, melyben a halmaz egyszerű görbeív. Az r természetes paraméterezésű egyszerű görbeív s paraméterű pontjában $\dot{r}(s) = t(s)$ a **görbe egységnyi érintője**. A görbe ívhossz szerinti r paraméterezésének $\ddot{r}(s)$ második deriváltja a görbe **görbületi vektora**, melynek hossza $\kappa(s) = |\ddot{r}(s)|$ a **görbe görbülete**. Amennyiben $\ddot{r}(s)$ vektor nem a nullvektor, akkor definiáljuk az $n(s) = \ddot{r}(s)/\kappa(s)$ egységnyi görbületi vektort, amit a **görbe normális vektorának** is szokás nevezni.

A következő tétel mutatja, hogy a görbe tetszőleges pontjában az egységnyi érintő és a görbe normális vektora ortonormált rendszert alkot.

Tétel. A görbületi vektor merőleges az érintőre, vagyis $n(s) \perp t(s)$.

A Frenet-formulák az érintő és normális vektorok deriváltjait fejezik ki az érintő és normális vektorok által megadott koordinátarendszerben.

Frenet-formulák síkgörbékre. A fenti jelölésekkel teljesül, hogy

$$\dot{t} = +\kappa n \quad \text{és} \quad \dot{n} = -\kappa t.$$

2.2. Affinitások

Ebben a szakaszban összefoglaljuk az affinitásokról szükséges tudnivalókat. Affinitásokról részletesebben a [5] könyvben olvashatunk.

Az Euklideszi sík egy önmagára vett φ leképezését (nem elfajuló) affin transzformációnak, vagy röviden affinitásnak hívjuk, ha valamely koordinátázásban

$$\varphi : (x, y) \mapsto (x, y)A + (u, v) \tag{2.1}$$

alakú, ahol $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\det A \neq 0$ és $u, v \in \mathbb{R}$. (Néha nem kötik ki, hogy $\det A \neq 0$, ilyenkor elfajuló és nem elfajuló affin transzformációkat különböztetnek meg.) Bár elvi különbség van közöttük, hogy egy transzformációt az Euklideszi síkon tekintünk, vagy $\mathbb{R}^2$ -n, a gyakorlatban nem zavaró, ha mindkettőre ugyanazzal a szimbólummal hivatkozunk, és általában nem teszünk köztük különbséget. Az A mátrixot az affinitás mátrixának nevezzük, habár ez függ a koordinátázástól.

A következő tételben kimondjuk az affinitások legfontosabb tulajdonságait.

- 1. Tétel.** (1) Egy affin transzformáció minden koordinátázásban (2.1) alakban írható.
- (2) Az affinitások egyenestartó bijekciók. Affinitás inverze affinitás.
- (3) Az affinitások tartják az osztóviszonyt.
- (4) Minden affinitás egyértelműen megadható 3 nem kollineáris pont nem kollineáris képével.
- (5) Egy affinitás mátrixának determinánsa nem függ attól, hogy a mátrixot milyen koordinátázásban írtuk fel. Így beszélhetünk affinitás determinánsáról, amit $\det \varphi$ -vel jelölünk.
- (6) Az affinitások tartják a területarányt, pontosabban egy t területű alakzat φ affinitás melletti képének területe $t \cdot |\det \varphi|$.

2.3. Síkbeli egyenesek egyparaméteres seregei

Egy egyparaméteres egyenessereg analitikusan a következőképpen adható meg. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum, az

$$F: \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}; (x, y, c) \mapsto F(x, y, c)$$

pedig olyan függvény, amely harmadik változója szerint folytonosan differenciálható, valamint minden rögzített c_0 esetén $F(x, y, c_0) = 0$ egy egyenes egyenlete. Ekkor az F -hez tartozó egyparaméteres egyenessereg nyomát

$$\mathcal{E}_F := \{e \mid e \text{ egy egyenes, amelynek egyenlete } F(x, y, c) = 0, \text{ valamilyen } c \in I\text{-re}\}$$

módon adhatjuk meg. Könnyű belátni, hogy F pontosan akkor definiál egyparaméteres egyenessereget, ha léteznek f_1 , f_2 és f_3 folytonosan differenciálható $I \rightarrow \mathbb{R}$ függvények, amelyekre $F(x, y, c) = f_1(c)x + f_2(c)y + f_3(c)$, és $f_1^2(c) + f_2^2(c) > 0$ minden $c \in I$ esetén teljesül.

1. Lemma (Egyparaméteres egyenessereg affin képe). *Egy egyparaméteres egyenessereg affin képe is egyparaméteres egyenessereg.*

Bizonyítás. Legyen $\varphi: (x, y) \mapsto (x, y)A + (v_1, v_2) = (x', y')$ tetszőleges affinitás, inverzét az egyszerűség kedvéért jelölje $\psi: (x', y') \mapsto (x', y')B + (w_1, w_2) = (x, y)$. Legyen adva $F(x, y, c) = 0$ egyparaméteres egyenessereg. Rögzítsük c értékét, és tekintsük az $f_1(c)x + f_2(c)y + f_3(c) = 0$ egyenes képét φ mellett. Behelyettesítve a fenti $x = b_{11}x' + b_{21}y' + w_1$ és $y = b_{12}x' + b_{22}y' + w_2$ összefüggéseket nyerjük, hogy a kép egyenlete

$$(f_1(c)b_{11} + f_2(c)b_{12})x' + (f_1(c)b_{21} + f_2(c)b_{22})y' + f_1(c)w_1 + f_2(c)w_2 + f_3(c) = 0.$$

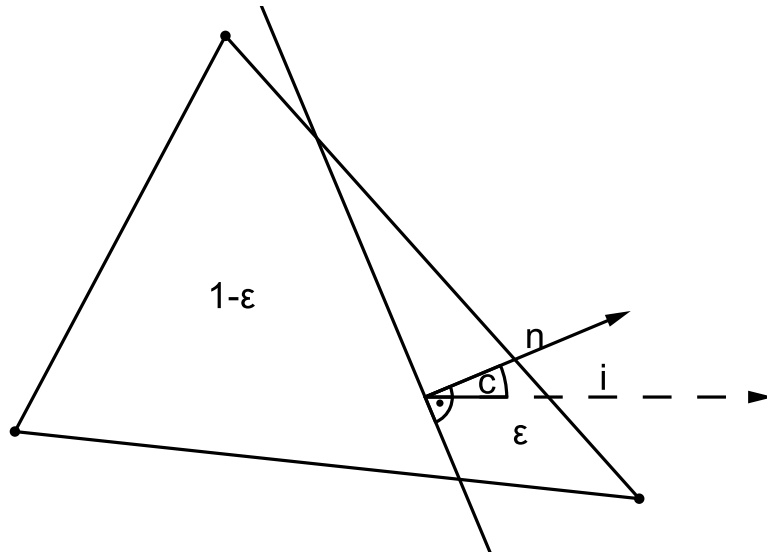
Ez világos módon egy c -vel paraméterezett egyparaméteres egyenessereg lesz, a differenciálhatóság triviálisan teljesül, az egyetlen dolog, ami még megfontolásra szorul, hogy

$$(f_1(c)b_{11} + f_2(c)b_{12})^2 + (f_1(c)b_{21} + f_2(c)b_{22})^2 > 0$$

minden c esetén fennáll. Mivel $(f_1(c), f_2(c)) \neq (0, 0)$ minden c -re teljesül a definíció szerint, és mivel $\det A \neq 0$ és így $\det B \neq 0$, ezért $(f_1(c), f_2(c))B \neq (0, 0)$ is minden c -re igaz. Ebből az állítás azonnal adódik, és a bizonyítás teljes. $\square$

Példa egyparaméteres egyenesseregre. Legyen H hegyesszögű, egységnyi területű háromszög. Tekintsük azon egyenesek $E(\varepsilon)$ halmazát, amelyek H -t két olyan darabra bontják, amelyek területeinek aránya $\varepsilon : (1 - \varepsilon)$ ($\varepsilon < \frac{1}{2}$). (Lásd 2.1. ábrát.)

2. Tétel. Az $E(\varepsilon)$ egy egyparaméteres egyenessereg, amelyet az egyeneseknek az ε területű részbe „mutató” normálvektorának irányyszöge paraméterez.



2.1. ábra. Az $\varepsilon : (1 - \varepsilon)$ arányban osztó egyenesek

Bizonyítás. Be kell látnunk, hogy létezik a feltételeknek megfelelő F függvény, amely $E(\varepsilon)$ -t definiálja. Az állítást részletesen csak abban az esetben látjuk be, ha H egy speciális derékszögű háromszög. Az affinitásról igazolt tulajdonságokat kihasználva világos, hogy a speciális esetből minden H háromszögre következik az állítás, hiszen a speciális háromszögünknek minden nem elfajuló háromszög affin képe valamilyen alkalmas affinitás mellett, és az affinitás megtartja a területek arányát, vagyis az " $E(\varepsilon)$ -típusú" halmazokat egymásba viszi, és így hivatkozhatunk az 1. lemmára.

Legyen tehát H_0 az a háromszög, amelynek csúcsai $A(1,0)$, $B(0,1)$ és $C(0,0)$. A fentiek szerint elég ebben az esetben igazolni az állítást. Legyen $e(\phi)$ az az egyenes, amelynek normálvektora $n_\phi = (\cos \phi, \sin \phi)$, valamint a H_0 háromszögnek az $e(\phi)$ egyenes n_ϕ szerinti pozitív S_ϕ^+ félsíkjaiba éppen ε területű darab esik. (S_ϕ^+ az a félsík, "amelybe n_ϕ mutat".) Ekkor $e(\phi)$ egyenlete

$$\cos \phi \cdot x + \sin \phi \cdot y - m(\phi) = 0,$$

valamely $m(\phi)$ értékre. Világos, hogy a konstrukció szerint $F(x, y, \phi) = \cos \phi \cdot x + \sin \phi \cdot y - m(\phi)$ éppen egy olyan egyenessereget definiál, amit úgy kapunk, hogy tekintjük azokat az egyeneseket, amelyek H_0 -ból ε -nyi darabot vágnak le. Az egyetlen dolog, amit még bizonyítanunk kell, hogy m folytonosan differenciálható.

Először egy olyan egyeneshez tartozó pontban vizsgáljuk a differenciálhatóságot, ami a háromszög AC és BC oldalait metszi. Tegyük fel, hogy ezek a metszéspontok P és Q , a PQ egyenes egyenlete pedig

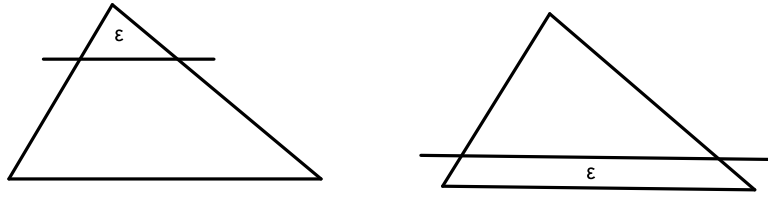
$$\cos \phi x + \sin \phi y = m_1(\phi) \tag{2.2}$$

alakban írható. Az előzetes megjegyzés szerint $m_1(\phi)$ differenciálhatóságát kell igazolnunk. P és Q koordinátáira $P = (m_1(\phi)/\cos \phi, 0)$ és $Q = (0, m_1(\phi)/\sin \phi)$ azonnal következik. Mivel $CPQ\Delta$ területe ε , így $\overline{CP} \cdot \overline{CQ} = 2\varepsilon$, vagyis

$$m_1(\phi) = \sqrt{2\varepsilon \cos \phi \sin \phi}, \tag{2.3}$$

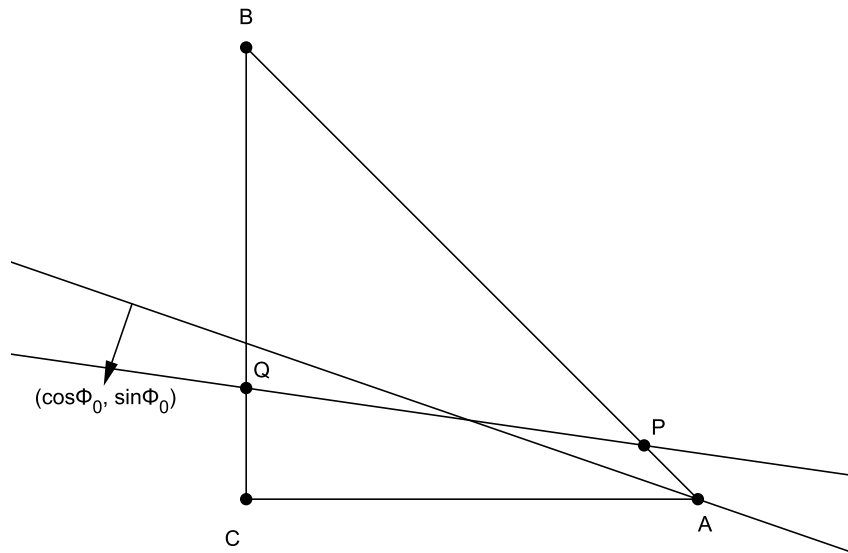
adódik, amiből $m_1(\alpha)$ differenciálhatósága azonnal következik.

Most gondoljuk meg, hogy valójában összesen 6-féle egyenes van. Két nagy típust különböztethetünk meg aszerint, hogy az ε területű rész a H háromszög egy vagy két csúcsát tartalmazza (lásd a 2.2. ábrát.), és, mivel a háromszögnek 3 csúcsa van, így adódik a 6-féle egyenes.



2.2. ábra. Két metsző egyenes

Eszerint világos, hogy az m függvény viselkedését 6 intervallumon kell vizsgálni. Kihasználva, hogy szabadon alkalmazhatunk affinitást, a differenciálhatóság a 6 intervallumon már következik a fenti számolásból. (Vegyük észre, hogy a két csúcsot levágó egyeneseket tekinthetjük úgy, mint más paraméterhez tartozó egy csúcsot levágó egyeneseket.) A bizonyítás befejezéséhez még igazolnunk kell azonban a differenciálhatóságot az intervallumok végpontjaiban. Ezek a végpontok éppen azokhoz az egyenesekhez tartoznak, amelyek illeszkednek valamely csúcsra. Ehhez elég kiszámolnunk az $m(\phi)$ függvény két féloldali deriváltját, rögzített koordinátarendszerben, valamely olyan ϕ_0 helyen, amihez tartozó egyenes átmegy a háromszög egy csúcsán. Válasszuk azt az egyenest, ami átmegy az A csúcson, és C -nél ε területet vág le.



2.3. ábra. Kritikus egyenes

Erre egyrészt $m(\phi_0) = \cos \phi_0$ adódik, mivel A illeszkedik az egyenesre. Másrészt, mivel a levágott terület ε , így $m(\phi_0) = 2\varepsilon \sin \phi_0$. Ezeket összevetve $\tan \phi_0 = 1/(2\varepsilon)$

következik. Most a

$$\sin x = \frac{\pm \tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \quad \text{és} \quad \cos x = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$$

összefüggésekből, az előjelet alkalmasan választva adódik, hogy

$$\sin \phi_0 = \frac{-1}{\sqrt{1 + 4\varepsilon^2}} \quad \text{és} \quad \cos \phi_0 = \frac{-2\varepsilon}{\sqrt{1 + 4\varepsilon^2}}. \quad (2.4)$$

ϕ_0 egy megfelelő bal oldali környezetében m megegyezik m_1 -gyel, ezért m ϕ_0 -beli balderiváltjának kiszámításához differenciáljuk (2.3)-t. Ebből

$$m'_1(\phi) = \frac{\sqrt{\varepsilon} \cdot \cos 2\phi}{\sqrt{\sin 2\phi}},$$

amibe behelyettesítve a ϕ_0 -ra előbb kapott (2.4) összefüggéseket nyerjük, hogy

$$m'_1(\phi_0) = \sqrt{\varepsilon} \frac{\frac{4\varepsilon^2 - 1}{4\varepsilon^2 + 1}}{\sqrt{\frac{4\varepsilon}{4\varepsilon^2 + 1}}} = \frac{(4\varepsilon^2 - 1)\sqrt{4\varepsilon^2 + 1}}{2(4\varepsilon^2 + 1)}.$$

Ez tehát az m függvény ϕ_0 -beli balderiváltja.

Meg kell még határoznunk az m függvény viselkedését ϕ_0 egy kicsi jobb oldali környezetében, ezt a függvényt m_2 -vel fogjuk jelölni. Ehhez további megfontolásokra lesz szükségünk. Tekintsuk a 2.3. ábrán a P és Q pontokat. A korábbihoz hasonló számolással adódik, hogy

$$P = \left(\frac{m_2(\phi) - \sin \phi}{\cos \phi - \sin \phi}, \frac{\cos \phi - m_2(\phi)}{\cos \phi - \sin \phi} \right) \quad \text{és} \quad Q = \left(0, \frac{m_2(\phi)}{\sin \phi} \right).$$

Itt jegyezzük meg, hogy az adatok választása miatt a vizsgált intervallumon $\sin \phi < 0$, és így a Q második koordinátájára teljesülő $0 < m_2(\phi)/\sin \phi < 1$ miatt $\sin \phi < m_2(\phi) < 0$ következik.

Világos, hogy $\overline{BQ} = 1 - m_2(\phi)/\sin \phi$, valamint

$$\overline{BP} = \sqrt{2 \left(\frac{m_2(\phi) - \sin \phi}{\cos \phi - \sin \phi} \right)^2} = \sqrt{2} \frac{m_2(\phi) - \sin \phi}{\cos \phi - \sin \phi}.$$

A számolásnál valóban a pozitív gyököket vettük, hiszen P pont koordinátái pozitívak.

Most kihasználjuk, hogy BPQ háromszög területe éppen $1/2 - \varepsilon$, így

$$\frac{\left(1 - \frac{m_2(\phi)}{\sin \phi} \right) \sqrt{2} \left(\frac{m_2(\phi) - \sin \phi}{\cos \phi - \sin \phi} \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{1}{2} - \varepsilon.$$

Innen rendezés után kapjuk, hogy

$$m_2(\phi) = \sqrt{(1 - 2\varepsilon)(\sin \phi - \cos \phi) \sin \phi} + \sin \phi.$$

Ezt ϕ szerint deriválva, majd a lehetséges egyszerűsítéseket elvégezve adódik, hogy

$$m'_2(\phi) = \frac{\sqrt{1 - 2\varepsilon}}{2} \cdot \frac{\sin^2 \phi + 2 \sin \phi \cos \phi - \cos^2 \phi}{\sqrt{(\sin \phi - \cos \phi) \sin \phi}} + \cos \phi.$$

$m'_2(\phi_0)$ meghatározásához ismét használhatjuk a (2.4) formulákat. Ezeket helyettesítve

$$\begin{aligned} m'_2(\phi_0) &= \frac{\sqrt{1 - 2\varepsilon}}{2} \cdot \frac{\frac{1}{4\varepsilon^2+1} + \frac{4\varepsilon}{4\varepsilon^2+1} - \frac{4\varepsilon^2}{4\varepsilon^2+1}}{\sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2+1} - \frac{2\varepsilon}{4\varepsilon^2+1}}} - \frac{2\varepsilon}{\sqrt{4\varepsilon^2+1}} \\ &= \frac{(1 + 4\varepsilon - 4\varepsilon^2)\sqrt{4\varepsilon^2+1}}{2(4\varepsilon^2+1)} - \frac{4\varepsilon\sqrt{4\varepsilon^2+1}}{2(4\varepsilon^2+1)} = \frac{(4\varepsilon^2-1)\sqrt{4\varepsilon^2+1}}{2(4\varepsilon^2+1)}. \end{aligned}$$

Ezzel meghatároztuk az m függvény jobbderiváltját is a ϕ_0 pontban. Láthatjuk, hogy a féoldali deriváltak tényleg egyeznek, amiből a differenciálhatóság a 6 "kritikus" pontban is következik. Ezzel a bizonyítás teljes. $\square$

3. fejezet

Burkológörbék

Egy síkbeli egyparaméteres görbesereg burkolója olyan görbe, amely a következő két tulajdonsággal jellemezhető:

1. **feltétel** minden pontja rajta van a görbesereg egy (a ponttól függő) görbájén és
2. **feltétel** minden pontjában érinti a görbesereg egy (megfelelő) görbáját.

A fejezetben mi csak egyenesseregek burkológörbéivel foglalkozunk. Ezek bizonyos szempontból kiemelt jelentőségűek, amit a következő két tétel is mutat.

Az első tétel szükséges és elegendő analitikus feltételt ad arra, hogy egy síkgörbe mikor burkológörbéje egy egyenesseregnek.

3. Tétel. Az $r(c) = (x(c), y(c))$ paraméterezés által adott görbe akkor és csak akkor burkolója az $F(x, y, c) = f_1(c) \cdot x + f_2(c) \cdot y + f_3(c)$ egyenesseregnek, ha

$$F(x(c), y(c), c) = f_1(c) \cdot x(c) + f_2(c) \cdot y(c) + f_3(c) \equiv 0 \quad (3.1)$$

és

$$\partial_3 F(x(c), y(c), c) = f'_1(c) \cdot x(c) + f'_2(c) \cdot y(c) + f'_3(c) \equiv 0. \quad (3.2)$$

Bizonyítás. Szükségesség. Tegyük fel, hogy a görbe az $F(x, y, c)$ egyenessereg burkolója.

Az $F(x(c), y(c), c) = f_1(c) \cdot x(c) + f_2(c) \cdot y(c) + f_3(c) \equiv 0$ azonosság az 1. feltétellel ekvivalens. Ezt az összefüggést c szerint deriválva:

$$f_1(c) \cdot x'(c) + f_2(c) \cdot y'(c) + f'_1(c) \cdot x(c) + f'_2(c) \cdot y(c) + f'_3(c) \equiv 0 \quad (3.3)$$

adódik. Az egyenessereg bármely rögzített c -hez tartozó egyenesének egy normálvektora $(f_1(c), f_2(c))$. A 2. kikötés szerint ez a normálvektor merőleges a burkológörbe $\dot{r}(c) = (x'(c), y'(c))$ érintőjére, vagyis

$$x'(c)f_1(c) + y'(c)f_2(c) = 0.$$

Emiatt (3.3) adja, hogy

$$f_1'(c) \cdot x(c) + f_2'(c) \cdot y(c) + f_3'(c) \equiv 0.$$

Ezzel a szükségességet igazoltuk.

Elégségesség. Meg kell mutatni, hogy az r görbe 1. és 2. tulajdonságú, ha teljesíti a (3.1) és (3.2) feltételeket. Az 1. tulajdonság ekvivalens a (3.1) feltétellel. Ezt c szerint differenciálva adódik, hogy

$$f_1(c) \cdot x'(c) + f_2(c) \cdot y'(c) + f_1'(c) \cdot x(c) + f_2'(c) \cdot y(c) + f_3'(c) \equiv 0,$$

amiből (3.2) felhasználásával kapjuk, hogy

$$f_1(c) \cdot x'(c) + f_2(c) \cdot y'(c) \equiv 0.$$

Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy az $\dot{r}(c) = (x'(c), y'(c))$ érintővektor merőleges a c paraméterhez tartozó egyenes normálvektorára. Ebből az elégségesség azonnal következik és így a bizonyítás teljes. $\square$

4. Tétel. Minden kétszer folytonosan differenciálható görbe a saját érintőseregének egyetlen burkológörbéje.

Bizonyítás. Ha a görbe egy szakasz, akkor az állítás nyilvánvaló, ezért feltesszük, hogy a görbe görbülete -szeparált pontoktól eltekintve- sehol sem nulla.

Tekintsük tehát az $r(s) = (x_r(s), y_r(s))$ görbét. Ennek érintőserege

$$F(x, y, s) = \dot{y}_r(s) \cdot x - \dot{x}_r(s) \cdot y - (\dot{y}_r(s)x_r(s) - \dot{x}_r(s)y_r(s)).$$

Megmutatjuk, hogy a 3. tétel feltételei teljesülnek. A (3.1) egyenlet triviálisan fennáll. A (3.2) ellenőrzéséhez számítsuk ki az F függvény s -szerinti deriváltját:

$$\partial_3 F(x, y, s) = \ddot{y}_r(s) \cdot x - \ddot{x}_r(s) \cdot y - \ddot{y}_r(s)x_r(s) - \dot{y}_r(s)\dot{x}_r(s) + \ddot{x}_r(s)y_r(s) + \dot{x}_r(s)\dot{y}_r(s).$$

Ebből a

$$\partial_3 F(x_r(s), y_r(s), s) \equiv 0$$

azonosság azonnal következik. Ezzel az állítás első részét beláttuk, már csak az unicitás igazolása van hátra.

Tegyük fel, hogy $p(t) = (x_p(t), y_p(t))$ szintén burkolója az érintőseregnek. A 3. tételt alkalmazva kapjuk, hogy $F(x_p(s), y_p(s), s) \equiv 0$ és $\partial_3 F(x_p(s), y_p(s), s) \equiv 0$, vagyis

$$\dot{y}_r(s)x_p(s) - \dot{x}_r(s)y_p(s) - \dot{y}_r(s)x_r(s) + \dot{x}_r(s)y_r(s) \equiv 0, \quad (3.4)$$

$$\ddot{y}_r(s)x_p(s) - \ddot{x}_r(s)y_p(s) - \ddot{y}_r(s)x_r(s) + \ddot{x}_r(s)y_r(s) \equiv 0. \quad (3.5)$$

Most először vonjuk ki a (3.4) egyenlet $\ddot{x}_r(s)$ -szereséből a (3.5) egyenlet $\dot{x}_r(s)$ -szeresét. Rendezés után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x_p(s) \cdot (\dot{y}_r(s)\ddot{x}_r(s) - \ddot{y}_r(s)\dot{x}_r(s)) &\equiv \\ &\equiv \ddot{x}_r(s)(\dot{y}_r(s)x_r(s) - \dot{x}_r(s)y_r(s)) - \dot{x}_r(s)(\ddot{y}_r(s)x_r(s) - \ddot{x}_r(s)y_r(s)) \equiv \\ &\equiv x_r(s) \cdot (\dot{y}_r(s)\ddot{x}_r(s) - \ddot{y}_r(s)\dot{x}_r(s)). \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy

$$|\dot{y}_r(s)\ddot{x}_r(s) - \ddot{y}_r(s)\dot{x}_r(s)| = |\kappa(s)\langle n, t^\perp \rangle| = |\kappa(s)|,$$

így, mivel $\kappa = 0$ csak szeparált pontokban állhat fenn, a folytonosság miatt $x_p(s) \equiv x_r(s)$ következik. Az y koordinátára a számolás analóg módon történik. Ezzel az unicitást is beláttuk, és a tétel bizonyításával készen vagyunk.

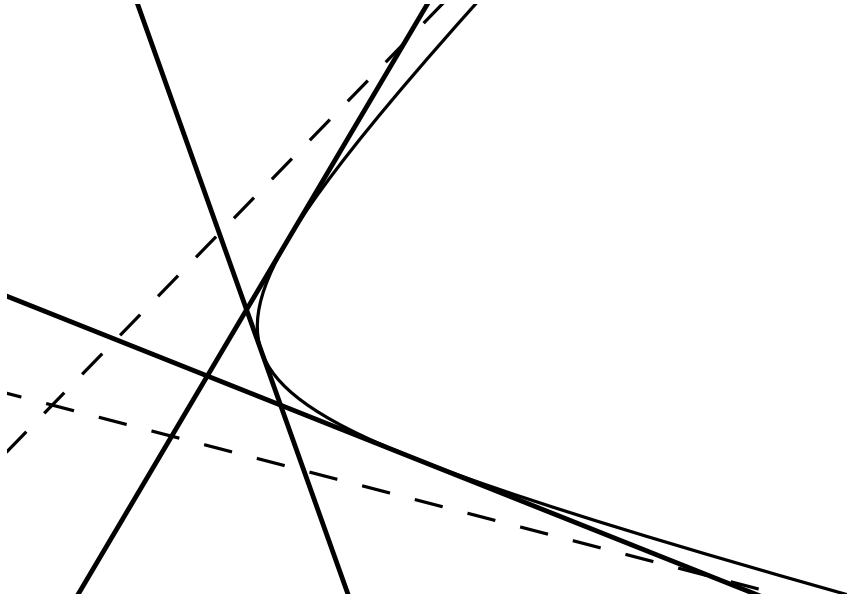
□

3.1. Konstans területet levágó egyenesek seregének burkolója

Ebben a szakaszban kiszámítjuk a 2. tételben látott nevezetes $E(\varepsilon)$ egyenessereg burkológörbét.

A megoldás során igyekszünk elkerülni a bonyolult számításokat, helyettük geometriai megfontolásokat alkalmazunk.

Első lépésként igazoljuk a következő lemmát, amely a hiperbola azon nevezetes tulajdonságát igazolja, hogy az aszimptotákkal minden érintő ugyanakkora területű háromszöget határol, ahogy azt a 3.1. ábra is szemlélteti.



3.1. ábra. Hiperbola aszimptotái minden érintővel ugyanakkora területű háromszöget alkotnak

2. Lemma. *a, Az $xy = 1/2$ hiperbola I. síknegyedbe eső ága érintőinek serege az $F(x, y, \alpha) = \cos \alpha \cdot x + \sin \alpha \cdot y - \sqrt{\sin 2\alpha} = 0$ egyenlettel adott egyenessereg, ahol $0 < \alpha < \pi/2$.*

b, Ezen egyenessereg minden eleme az x és y tengelyekkel együtt egységnyi területű háromszöget határol.

c, Az egyenesseregünk burkolója az $xy = 1/2$ egyenletű hiperbola I. síknegyedbe eső ága.

Bizonyítás. a, Két dolgot kell megmutatnunk. Egyrészt, hogy minden nevezett érintő benne van az egyenesseregben. Másrészt, hogy minden egyenes az adott seregből érinti a hiperbolaágot.

Az $y = 1/(2x)$ függvény deriváltja $y' = -1/(2x^2)$. Ebből következik, hogy egy egyenes akkor és csak akkor érintője az $xy = 1/2$ hiperbola I. síknegyedbe eső ágának, ha egyenlete

$$y - \frac{1}{2t} = \frac{-1}{2t^2}(x - t)$$

alakban írható valamilyen alkalmas $t > 0$ számmal. Ezt rendezve, és elosztva $\sqrt{1 + 1/(4t^4)}$ -nel kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2t^2\sqrt{1 + 1/(4t^4)}}x + \frac{1}{\sqrt{1 + 1/(4t^4)}}y - \frac{1}{t\sqrt{1 + 1/(4t^4)}} = 0.$$

Mivel a $\sqrt{1 + 1/(4t^4)}$ függvény a $(0, \infty)$ intervallumon szigorúan monoton nő, folyto-

nos, és határértéke 0-ban 1, ezért egyértelműen létezik egy $0 < \alpha < \pi/2$ szög, hogy

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/(4t^4)}}.$$

A $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ összefüggésből azonnal adódik, hogy

$$\cos \alpha = \frac{1}{2t^2 \sqrt{1 + 1/(4t^4)}}.$$

($0 < \alpha < \pi/2$ miatt a pozitív gyököt vettük), ekkor pedig

$$\sqrt{\sin 2\alpha} = \sqrt{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot \sqrt{1 + 1/(4t^4)} \cdot 2t^2 \sqrt{1 + 1/(4t^4)}}} = \frac{1}{t \sqrt{1 + 1/(4t^4)}},$$

amiből látszik, hogy valóban minden érintő benne van az egyenesseregben.

A másik irány hasonlóan látható be, felhasználva azt, hogy minden $0 < \alpha < \pi/2$ szöghöz egyértelműen létezik egy $t > 0$ szám úgy, hogy

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/(4t^4)}}.$$

b, Rögzítsünk egy tetszőleges $0 < \alpha < \pi/2$ -t. Az egyenletet tengelymetszetes alakban írhatjuk

$$\frac{x}{\frac{\sqrt{\sin 2\alpha}}{\cos \alpha}} + \frac{y}{\frac{\sqrt{\sin 2\alpha}}{\sin \alpha}} = 1.$$

Ebből a levágott derékszögű háromszög területére

$$T = \frac{\frac{\sqrt{\sin 2\alpha}}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sqrt{\sin 2\alpha}}{\sin \alpha}}{2} = 1$$

adódik.

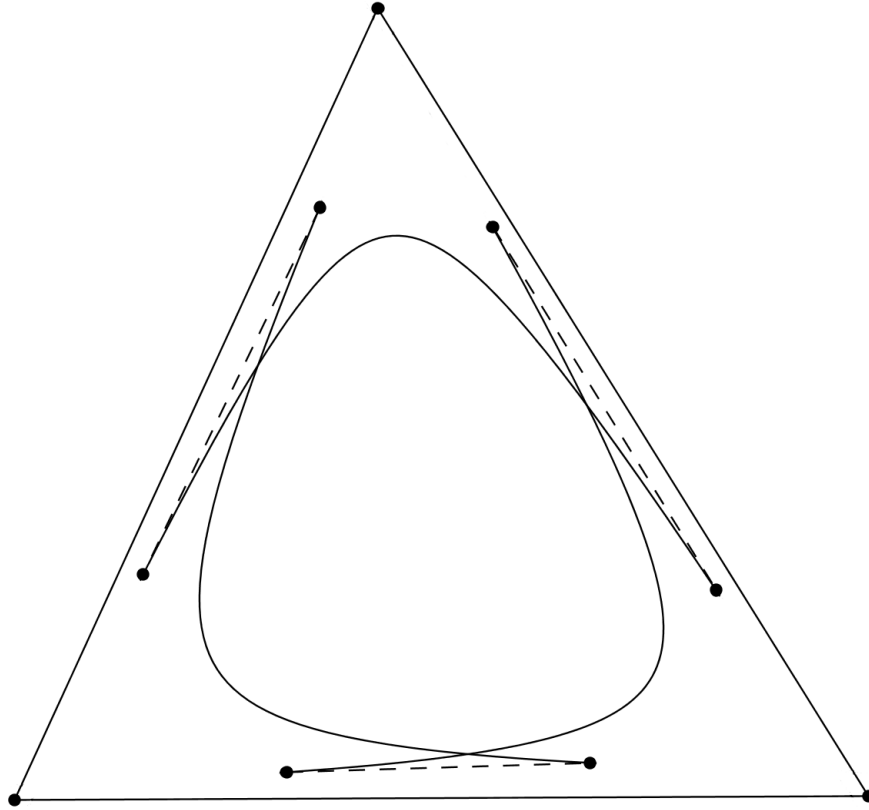
c, Az állítás az a, pont és a 4. tétel azonnali következménye. □

Megjegyzés. Mivel nem elfajuló affin transzformáció tartja a területek arányát és hiperbola affin képe hiperbola, így a fenti számolás azt is igazolja, hogy ha két tetszőleges egyenest rögzítünk, és tekintjük azon egyenesek seregét, amelyek egységnyi területű háromszöget határoznak meg a két rögzített egyenessel, akkor ezen egyenessereg burkológörbéje is egy hiperbola lesz, amelynek aszimptotái a rögzített egyenesek. Ehhez elég arra gondolni, hogy megfelelő affinítással a két rögzített egyenes átvihető a koordinátatengelyekbe. (Röviden azt írhattuk volna, hogy a probléma affin invariáns.)

Az előbbiek alapján láthatjuk, hogy egy háromszöget adott arányban kettévágó egyenesek burkológörbéjének hiperbola ívekből kell állnia. Hat típusú egyenest különböztetünk meg aszerint, hogy melyik csúcsot választja el a másik kettőtől és, hogy a

"csúcsnál" vagy az "oldalnál" van ε -nyi terület, ahogy azt már a 2. tétel bizonyításában is láttuk.

Ez alapján láthatjuk, hogy a burkológörbe hat hiperbola ívből áll össze az ábra szerint:



3.2. ábra. Konstans területet levágó egyenesek burkolója

A hiperbolaágak aszimptotái mindig a háromszög oldalegyenesei, a kritikus pontokban folytonosan, de nem differenciálható módon csatlakoznak ("cusp"), a csatlakozási pontokban éppen azok az egyenesek lesznek az érintők, amelyek a háromszög csúcsaira illeszkednek. Szemléletesen a következő történik. Kezdjük el képzeletben forgatni egy egyenest pozitív irányban, ügyelve arra, hogy a "jobb" oldalára a háromszögnek ε -nyi területe essen. Tegyük fel, hogy a kezdőállapotban ebben az ε -nyi területű részben egy csúcs van, és az egyenesre nem esik a háromszög egyik csúcsa sem. A fenti számolás igazolja, hogy egészen addig, míg a egyenes bele nem ütközik egy csúcsba, az egyenesek egy hiperbola érintőseregén "mozognak". A csúcs után egy másik csúcshoz és levágott területhez tartozó hiperbolaágra "kerülünk". Az is világos, hogy a két hiperbolaág simán csatlakozik, hiszen a "kritikus" egyenes (ami átmegy a csúcson) nyilván mindkettőnek érintője. A 3.2. ábrán a folytonos vonallal húzott hiperbolaágak tartoz-

nak azokhoz az esetekhez, amikor a csúcsnál vágnak le az egyenesek ε területet, míg a szaggatottal jelölt hiperbola ága azokhoz az esetekhez, amikor az oldal felett vágnak le ε -t (és a csúcsnál $(1 - \varepsilon)$ -t).

Meglepő, de a burkológörbe többszörösen önátmetsző, ráadásul bár a 6 ív folytonosan csatlakozik, de nem differenciálható módon. Ez a meglepő jelenség egy konvex lemezből konstans területet levágó egyenesek burkolójával nagyon általános feltételek mellett nem fordulhat elő, a háromszög az egyik kivétel.

Megjegyzés. A példa érdekességét és fontosságát mutatja az alábbi tény is. Az $E(\varepsilon)$ halmaz tetszőleges konvex lemezre definiálható analóg módon. Képzeljük el, hogy elhagyjuk az összes ε területű kis darabot a lemezből, amit az $E(\varepsilon)$ halmazbeli egyenesek lemetszenek. Az így kapott "maradék lemez" világos módon konvex. A szakirodalom általában úszó testnek nevezi, a konvexitás elméletében nagyon hasznos és fontos fogalomnak bizonyult. A fenti példa azt is mutatja, hogy az úszó test határa általában nem kezelhető burkológörbéként, hiszen a burkológörbénk önátmetsző, nem lehet egy konvex lemez határa. Az úszó testről bővebben olvashatunk például [8] munkában.

4. fejezet

Általános egyenessereg burkolója

4.1. Butler-transzformáció

Már az elsőéves egyetemi hallgatók is megtanulják kalkulusból, hogy ha adott egy görbe, akkor hogyan határozzuk meg annak érintőit. Most fordítsuk meg ezt a problémát. Meghatározhatjuk-e az eredeti görbét, ha ismerjük érintőinek egyparaméteres seregét?

Steven K. Butler fogalkozik ezzel a problémával egyik munkájában, és egy szép és meglepő eredményt produkál. A Butler féle transzformációval visszakaphatjuk az eredeti görbe y -tengelyre való tükörképét. A következőkben ismertetjük S. Butler eredményét.

Adott az $(x(t), y(t))$ görbe megfelelő pontjában az e érintő egyenlete:

$$e: x'(t) \cdot [y - y(t)] - y'(t) \cdot [x - x(t)] = 0,$$

melyet y -ra rendezve, ha $x(t) \neq 0$:

$$y = \frac{y'(t)}{x'(t)} \cdot x + y(t) - \frac{y'(t)}{x'(t)} \cdot x(t)$$

Jelölje $m_e(t)$ az e egyenes meredekségét, valamint $c_e(t)$ az egyenes y tengellyel vett metszetét.

A Butler-transzformáció a görbét görbébe vivő

$$\beta: [t \mapsto (x(t), y(t))] \mapsto [t \mapsto (m_e(t), c_e(t))]$$

leképezés, ahol

$$m_e(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

az érintő meredekségét,

$$c_e(t) = y(t) - \frac{y'(t)}{x'(t)} \cdot x(t)$$

az y tengellyel vett metszetét jelöli.

Egy $r(t) = (x(t), y(t))$ görbe $\beta(r)$ Butler-transzformáltja legyen $(x^\beta(t), y^\beta(t))$, és definiáljuk a

$$\bar{\beta} : (x(t), y(t)) \mapsto (x^\beta(t), y^\beta(t)) = \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}, y(t) - \frac{y'(t)}{x'(t)} \cdot x(t) \right) \quad (4.1)$$

pont-transzformációt. A β többszöri alkalmazását a β előtt megadott számmal jelezzük, vagyis $x^{2\beta} = x^{\beta^2} = (x^\beta)^\beta$ például.

Tétel. *Adott egy $r(t) = (x(t), y(t))$ által paraméterezett görbe, ahol t eleme egy nyílt intervallumnak, $x, y \in \mathcal{C}^2$, $x'(t) \neq 0$ valamint $\kappa(t)|\dot{r}(t)|^3 = x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t) \neq 0$. Ekkor*

$$(x^{2\beta}(t), y^{2\beta}(t)) = (-x(t), y(t)),$$

vagyis $\beta(\beta(r))$ az r görbe y -tengelyre vett tükörképe.

Bizonyítás. A tétel feltétele szerint nyílt intervallumon $x'(t) \neq 0$ és $x, y \in \mathcal{C}^2$, akkor bármely t -re, amely eleme ennek az intervallumnak x^β és y^β léteznek. Másrészt, mivel x^β és y^β differenciálható függvényekből állnak, ezért maguk is differenciálhatóak. Végül a tétel második feltétele miatt igaz, hogy

$$x^\beta(t) = \left(\frac{y'(t)}{x'(t)} \right)' = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^2} \neq 0.$$

Így $x^{2\beta}$ és $y^{2\beta}$ is létezik az intervallum minden pontjára, ezért alkalmazhatjuk a transzformációt kétszer.

Használjuk fel a (4.1) formulát.

$$\begin{aligned} x^{2\beta}(t) &= \left(y(t) - \frac{y'(t)}{x'(t)} \cdot x(t) \right)' : \left(\frac{y'(t)}{x'(t)} \right)' \\ &= \left(y'(t) - \frac{y''(t) \cdot x'(t) - y'(t) \cdot x''(t)}{(x'(t))^2} \cdot x(t) - \frac{y'(t)}{x'(t)} \cdot x'(t) \right) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{(x'(t))^2}{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)} \\ &= -\frac{y''(t) \cdot x'(t) - y'(t) \cdot x''(t)}{(x'(t))^2} \cdot x(t) \cdot \frac{(x'(t))^2}{y''(t) \cdot x'(t) - y'(t) \cdot x''(t)} = -x(t), \end{aligned}$$

valamint

$$y^{2\beta}(t) = y(t) - x(t) \cdot \frac{y'(t)}{x'(t)} - (-x(t)) \cdot \frac{y'(t)}{x'(t)} = y(t).$$

Ebből kapjuk, hogy

$$\bar{\beta}^2: ((x(t), y(t)) \rightarrow (-x(t), y(t))), \quad (4.2)$$

ahogy a tétel állítja. $\square$

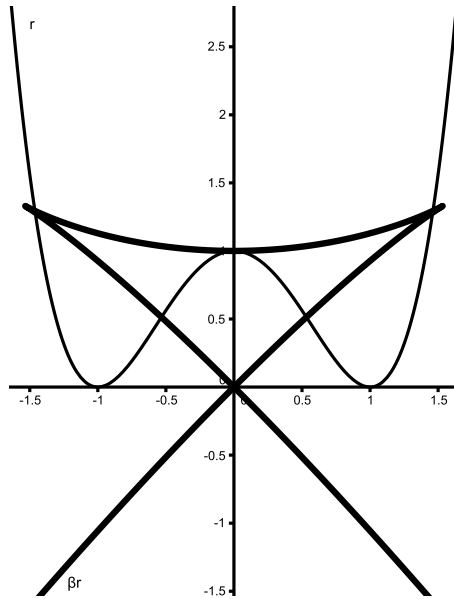
Ha tehát adott egy egyparaméteres egyenessereg, akkor a Butler-transzformáció megadja a burkolóját anélkül, hogy az 1. tételben megadott egyenletrendszert kellene megoldanunk, vagy deriválnunk kellene: elég a meredekségből és a tengelymetszetből összeállítanunk a görbét!

4.1.1. Néhány görbe Butler-transzformáltja

1. Példa. Tekintsük az $r = (x(t), y(t)) = (t, t^4 - 2t^2 + 1)$ negyedfokú görbét, ahol $t \in (-\infty, \infty)$. Hajtsuk végre egyszer Butler (4.1) transzformációját:

$$\begin{aligned} \beta r(t) &= (x^\beta(t), y^\beta(t)) = \left(\frac{(t^4 - 2t^2 + 1)'}{t'}, t^4 - 2t^2 + 1 - t \left(\frac{(t^4 - 2t^2 + 1)'}{t'} \right) \right) \\ &= (4t^3 - 4t, t^4 - 2t^2 + 1 - t(4t^3 - 4t)) = (4t^3 - 4t, -3t^4 + 2t^2 + 1). \end{aligned}$$

Láthatjuk, hogy a transzformált polinomiális görbe, általában már nem is differenciálható. A 4.1 ábra mutatja a transzformáció eredményét, amin jól látszik, hogy két pontban a transzformáltnak „csúcsa” (cusp) lesz. A példa általánosításából világos, hogy polinomfüggvény képe általában is polinomiális görbe.



4.1. ábra. $t^4 - 2t^2 + 1$ görbe β -transzformáltja

2. Példa. Tekintsük az $r = (x(t), y(t)) = (t, 2t^2 - 3t + 2)$ parabolát, ahol $t \in (-\infty, \infty)$. Hajtsuk végre egyszer Butler (4.1) transzformációját:

$$\begin{aligned}\beta r(t) &= (x^\beta(t), y^\beta(t)) = \left(\frac{(2t^2 - 3t + 2)'}{t'}, 2t^2 - 3t + 2 - t \left(\frac{(2t^2 - 3t + 2)'}{t'} \right) \right) \\ &= (4t - 3, 2t^2 - 3t + 2 - t(4t - 3)) = (4t - 3, -2t^2 + 2).\end{aligned}$$

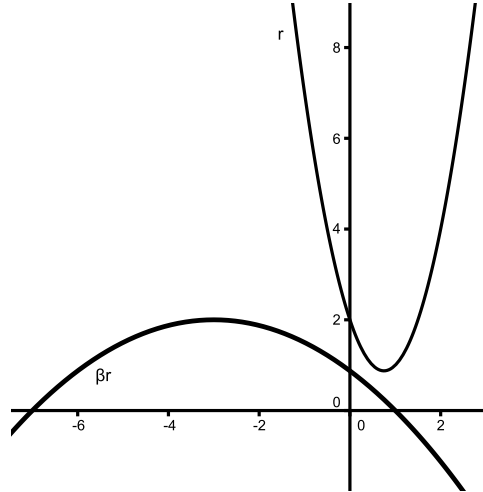
Állítás. Az r parabola βr képe egy parabola.

Bizonyítás. Legyen $z = 4t - 3$, azaz $t = \frac{z+3}{4}$ az új paraméterünk. Helyettesítsük ezt a $(x^\beta(t), y^\beta(t))$ kifejezésbe.

$$\begin{aligned}(x^\beta(t), y^\beta(t)) &= \left(z, -2 \left(\frac{z+3}{4} \right)^2 + 2 \right) = \left(z, -2 \left(\frac{z^2 + 6z + 9}{16} \right) + 2 \right) \\ &= \left(z, \frac{-z^2 - 6z - 9 + 16}{8} \right) = \left(z, -\frac{1}{8}z^2 - \frac{6}{8}z + \frac{7}{8} \right)\end{aligned}$$

Ezzel az állításunkat igazoltuk. □

A 4.2 ábra mutatja a transzformáció eredményét.



4.2. ábra. Parabola β -transzformáltja

3. Példa. Tekintsük az $r = (x(t), y(t)) = (t, \pm\sqrt{1 - \frac{1}{5}t^2})$ ellipszist, ahol $t \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$. Hajtsuk végre egyszer Butler (4.1) transzformációját:

$$\begin{aligned}
\beta r(t) = (x^\beta(t), y^\beta(t)) &= \left(\frac{\left(\pm \sqrt{1 - \frac{1}{5}t^2} \right)'}{t'}, \pm \sqrt{1 - \frac{1}{5}t^2} - t \cdot \left(\frac{\left(\sqrt{1 - \frac{1}{5}t^2} \right)'}{t'} \right) \right) \\
&= \left(\mp \frac{t}{5\sqrt{1 - \frac{1}{5}t^2}}, \pm \sqrt{1 - \frac{1}{5}t^2} - t \cdot \left(\mp \frac{t}{5\sqrt{1 - \frac{1}{5}t^2}} \right) \right) \\
&= \left(\mp \frac{t}{5\sqrt{1 - \frac{1}{5}t^2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{5}t^2}} \right).
\end{aligned}$$

Állítás. Az r ellipszis βr transzformáltja egy hiperbola.

Bizonyítás. Legyenek

$$x = \mp \frac{t}{5\sqrt{1 - \frac{1}{5}t^2}}, \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{5}t^2}}.$$

Ekkor

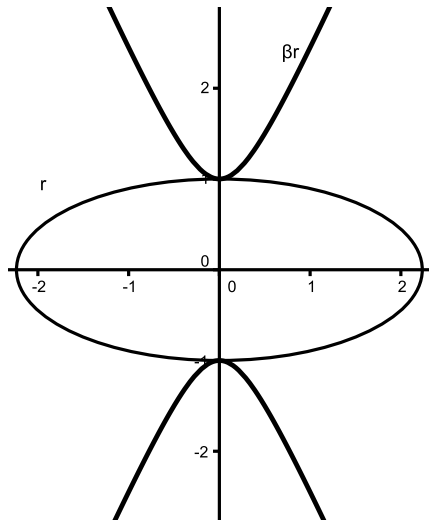
$$x^2 = \frac{t^2}{25 - 5t^2}, \quad y^2 = \frac{5}{5 - t^2},$$

amiből

$$y^2 - 5x^2 = \frac{5}{5 - t^2} - \frac{t^2}{5 - t^2} = \frac{5 - t^2}{5 - t^2} = 1.$$

Ez egy hiperbola egyenlete, ami igazolja állításunkat. □

A 4.3 ábra mutatja a transzformáció eredményét.



4.3. ábra. Ellipszis β -transzformáltja

4. Példa. Tekintsük az $r = (x(t), y(t)) = (t, \pm\sqrt{t^2 - \frac{1}{2}})$ hiperbolát, ahol $t \in (-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$. Hajtsuk végre egyszer Butler (4.1) transzformációját:

$$\begin{aligned}\beta r(t) = (x^\beta(t), y^\beta(t)) &= \left(\frac{\left(\pm\sqrt{t^2 - \frac{1}{2}}\right)'}{t'}, \pm\sqrt{t^2 - \frac{1}{2}} - t \cdot \left(\frac{\left(\pm\sqrt{t^2 - \frac{1}{2}}\right)'}{t'}\right) \right) \\ &= \left(\pm\frac{t}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{2}}}, \pm\sqrt{t^2 - \frac{1}{2}} - t \cdot \left(\frac{\pm t}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{2}}}\right) \right) = \left(\pm\frac{t}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{2}}}, \mp\frac{1}{2\sqrt{t^2 - \frac{1}{2}}} \right).\end{aligned}$$

Állítás. Az r hiperbola βr képe egy hiperbola.

Bizonyítás. Legyenek

$$x = \pm\frac{t}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{2}}}, \quad y = \mp\frac{1}{2\sqrt{t^2 - \frac{1}{2}}}.$$

Ekkor

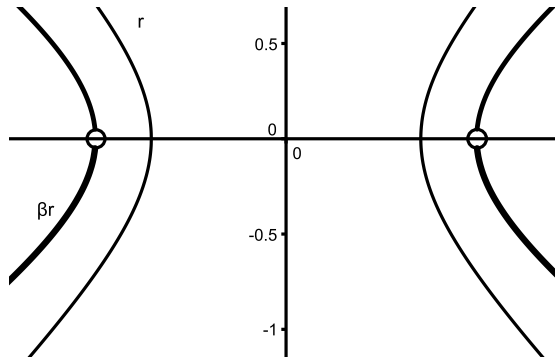
$$x^2 = \frac{t^2}{t^2 - \frac{1}{2}}, \quad y^2 = \frac{1}{4t^2 - 2},$$

amiből

$$x^2 - 2y^2 = \frac{t^2}{t^2 - \frac{1}{2}} - \frac{2}{4t^2 - 2} = \frac{2t^2 - 1}{2t^2 - 1} = 1.$$

Ez egy hiperbola egyenlete, ami igazolja állításunkat. □

A 4.4 ábra mutatja a transzformáció eredményét. Jegyezzük meg, hogy az eredeti hiperbolának vannak függőleges érintői, ezeket a transzformáció nem kezeli, ezért a képgörbének két megszüntethető szakadása van. Általában ha csak véges sok pontban fordul elő függőleges érintő, akkor a rekonstrukció elvégezhető, a szakadások megszüntetése helyes eredményt ad.



4.4. ábra. Hiperbola β -transzformáltja

4.2. A μ –transzformáció

Ebben a fejezetben megismerünk egy a szerző által talált, az előzőekben megismert Butler-transzformációhoz hasonló leképezést. Fontos említeni, hogy míg Butler transzformációjának négyszeri alkalmazása adja vissza az eredeti görbét, addig a μ transzformáció hatodik hatványával kapjuk vissza az eredeti görbét.

Egy egyenest ezúttal a meredekségének reciprokával és az x tengelymetszetével adunk meg.

Adott az $r(t) = (x(t), y(t))$ görbe megfelelő pontjában az e érintő egyenlete:

$$e: x'(t) \cdot [y - y(t)] - y'(t) \cdot [x - x(t)] = 0.$$

Rendezzük ezt az egyenletet x -re, ha $x'(t) \neq 0$:

$$x = \frac{x'(t)}{y'(t)} \cdot y + x(t) - \frac{x'(t)}{y'(t)} \cdot y(t)$$

Jelölje $m^e(t)$ az e egyenes meredekségének reciprokát, valamint $c^e(t)$ az egyenes x tengellyel vett metszetét. Defináljuk a görbét görbébe képező μ transzformációt a következőképpen:

$$\mu: [t \mapsto (x(t), y(t))] \mapsto [t \mapsto (m^e(t), c^e(t))],$$

ahol

$$m^e(t) = \frac{x'(t)}{y'(t)} \quad \text{és} \quad c^e(t) = x(t) - \frac{x'(t)}{y'(t)} \cdot y(t).$$

A μ által kapott görbe paraméterezését $(x^\mu(t), y^\mu(t))$ jelöléssel megadva a

$$\bar{\mu}: (x(t), y(t)) \mapsto (x^\mu(t), y^\mu(t)) = \left(\frac{x'(t)}{y'(t)}, x(t) - \frac{x'(t)}{y'(t)} \cdot y(t) \right) \quad (4.3)$$

pont-pont transzformációhoz jutunk.

Tétel. Adott egy $r(t) = (x(t), y(t))$ görbe, ahol t eleme egy nyílt intervallumnak, és $x, y \in \mathcal{C}^2$, $y'(t) \neq 0$ és $x''(t)y'(t) - y''(t)x'(t) \neq 0$. Ekkor

$$(x^{6\mu}(t), y^{6\mu}(t)) = (x(t), y(t)),$$

ahol 6μ a μ transzformáció hatszori alkalmazását jelöli.

Bizonyítás. A tétel feltétele szerint nyílt intervallumon $y'(t) \neq 0$ és $x, y \in \mathcal{C}^2$, ezért bármely t -re, amely eleme ennek az intervallumnak, x^μ és y^μ léteznek. Másrészt, mivel

x^μ és y^μ differenciálható függvényekből állnak, ezért maguk is differenciálhatóak. Végül a tétel második feltétele miatt igaz, hogy

$$x^\mu(t) = \left(\frac{x'(t)}{y'(t)} \right)' = \frac{x''(t)y'(t) - y''(t)x'(t)}{(y'(t))^2} \neq 0.$$

Így $x^{2\mu}$ és $y^{2\mu}$ is léteznek az intervallum minden pontjára, tehát alkalmazhatjuk a transzformációt kétszer:

$$\begin{aligned} x^{2\mu}(t) &= \left(\frac{x'(t)}{y'(t)} \right)' : \left(x(t) - \frac{x'(t)}{y'(t)} \cdot y(t) \right)' = \frac{x''(t) \cdot y'(t) - x'(t) \cdot y''(t)}{(y'(t))^2} : \\ &\quad : \left(x'(t) - \frac{x''(t) \cdot y'(t) - x'(t) \cdot y''(t)}{(y'(t))^2} \cdot y(t) - \frac{x'(t)}{y'(t)} \cdot y'(t) \right) \\ &= \frac{x''(t) \cdot y'(t) - x'(t) \cdot y''(t)}{(y'(t))^2} \cdot -\frac{(y'(t))^2}{(x''(t) \cdot y'(t) - x'(t) \cdot y''(t)) \cdot y(t)} \\ &= -\frac{1}{y(t)}, \end{aligned}$$

valamint

$$\begin{aligned} y^{2\mu}(t) &= \frac{x'(t)}{y'(t)} - \left(-\frac{1}{y(t)} \cdot \left[x(t) - \frac{x'(t)}{y'(t)} \cdot y(t) \right] \right) \\ &= \frac{x'(t)}{y'(t)} - \left(-\frac{x(t)}{y(t)} + \frac{x'(t)}{y'(t)} \right) = \frac{x(t)}{y(t)}. \end{aligned}$$

Az eredeti görbe második transzformáltja a következő:

$$\bar{\mu}^2: (x(t), y(t)) \rightarrow \left(-\frac{1}{y(t)}, \frac{x(t)}{y(t)} \right). \quad (4.4)$$

Legyen $\xi = \bar{\mu}^2$. Számítsuk ki ennek a harmadik hatványát, vagyis alkalmazzuk a ξ transzformációt egymás után háromszor. Így megkapjuk a $\bar{\mu}^6$ hatványt.

$$\begin{aligned} \bar{\mu}^6(x(t), y(t)) &= \xi^3(x(t), y(t)) = \xi(\xi(\xi(x(t), y(t)))) = \xi \left(\xi \left(-\frac{1}{y(t)}, \frac{x(t)}{y(t)} \right) \right) \\ &= \xi \left(-\frac{1}{\frac{x(t)}{y(t)}}, \frac{-\frac{1}{y(t)}}{\frac{x(t)}{y(t)}} \right) = \xi \left(-\frac{y(t)}{x(t)}, -\frac{1}{x(t)} \right) \\ &= \left(-\frac{1}{-\frac{1}{x(t)}}, \frac{-\frac{y(t)}{x(t)}}{-\frac{1}{x(t)}} \right) = (x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Tehát a $\bar{\mu}^2 = \xi$ transzformáció háromszori alkalmazásával, vagyis a μ transzformáció hatodik hatványaként visszakaphatjuk az eredeti görbénket.

$$\xi^3 = \mu^6: (x(t), y(t)) \rightarrow (x(t), y(t)). \quad (4.5)$$

□

4.2.1. Néhány görbe μ -transzformációja

1. Példa. A Butler transzformációnál látott negyedfokú görbére alkalmazzuk most a μ transzformációt. Tekintsük tehát a $r(t) = (x(t), y(t)) = (t, t^4 - 2t^2 + 1)$ negyedfokú görbét, ahol $t \in (-\infty, \infty)$. Alkalmazzuk egyszer a (4.1) által adott μ transzformációt a görbére.

$$\begin{aligned} (x(t), y(t)) &= (t, t^4 - 2t^2 + 1) \\ (x^\mu(t), y^\mu(t)) &= \left(\frac{t'}{(t^4 - 2t^2 + 1)'}, t - (t^4 - 2t^2 + 1) \frac{t'}{(t^4 - 2t^2 + 1)'} \right) \\ &= \left(\frac{1}{4t^3 - 4t}, t - (t^4 - 2t^2 + 1) \frac{1}{4t^3 - 4t} \right) \\ &= \left(\frac{1}{4t^3 - 4t}, \frac{3t^4 - 2t^2 - 1}{4t^3 - 4t} \right) = \left(\frac{1}{4t(t^2 - 1)}, \frac{3t^2 + 1}{4t} \right). \end{aligned}$$

Állítás. Az r görbe μr képének egyenlete $4y^2(y^2 - 4xy + 3x^2) = 4y^2 + 9x^2 - 6xy$.

Bizonyítás. Legyenek

$$x = \frac{1}{4t(t^2 - 1)} \quad \text{és} \quad y = \frac{3t^2 + 1}{4t}.$$

Ekkor

$$\frac{y}{x} = \frac{3t^2 + 1}{t^2 - 1} = \frac{3t^2 - 3 + 2}{t^2 - 1} = 3 + \frac{2}{t^2 - 1},$$

ebből

$$\frac{\frac{2}{\frac{y}{x} - 3} + 1}{\frac{y}{x} - 3} = t^2$$

és

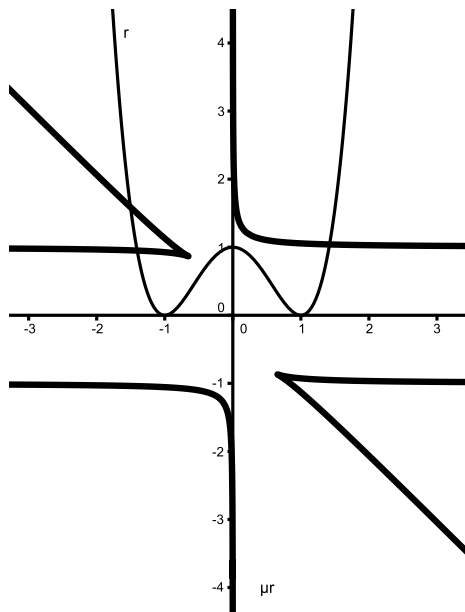
$$y^2 = \frac{\left(3 \left(\frac{\frac{2}{\frac{y}{x} - 3} + 1}{\frac{y}{x} - 3}\right) + 1\right)^2}{16 \left(\frac{\frac{2}{\frac{y}{x} - 3} + 1}{\frac{y}{x} - 3}\right)} = \frac{\left(4 + \frac{6x}{y - 3x}\right)^2}{16 \frac{y - x}{y - 3x}} = \frac{\left(\frac{2y - 6x + 3x}{y - 3x}\right)^2}{4 \frac{y - x}{y - 3x}} = \frac{(2y - 3x)^2}{4(y - x)(y - 3x)},$$

amiből

$$4y^2(y^2 - 4xy + 3x^2) = 4y^2 + 9x^2 - 6xy.$$

□

A 4.5 ábra mutatja a transzformáció eredményét.



4.5. ábra. $t^4 - 2t^2 + 1$ görbe μ -transzformáltja

2. Példa. Tekintsük az $r = (x(t), y(t)) = (t, 2t^2 - 3t + 2)$ parabolát, ahol $t \in (-\infty, \infty)$. Hajtsuk végre egyszer a μ transzformációt:

$$\begin{aligned}\mu r(t) = (x^\mu(t), y^\mu(t)) &= \left(\frac{t'}{(2t^2 - 3t + 2)'}, t - (2t^2 - 3t + 2) \left(\frac{t'}{(2t^2 - 3t + 2)'} \right) \right) \\ &= \left(\frac{1}{4t - 3}, t - (2t^2 - 3t + 2) \frac{1}{4t - 3} \right) = \left(\frac{1}{4t - 3}, \frac{2t^2 - 2}{4t - 3} \right).\end{aligned}$$

Állítás. Az r parabola μr képe egy hiperbola.

Bizonyítás. Legyenek

$$x = \frac{1}{4t - 3}, \quad y = \frac{2t^2 - 2}{4t - 3}.$$

Ekkor

$$\frac{y}{x} = 2(t^2 - 1),$$

amelyből

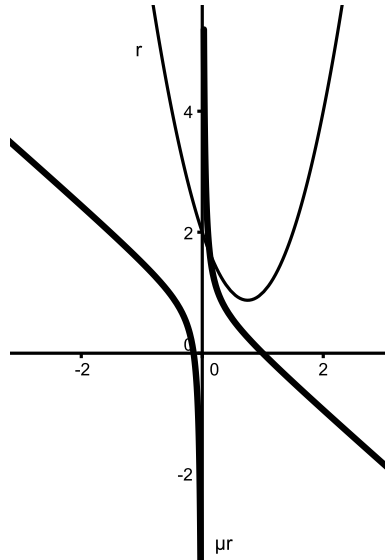
$$\pm \sqrt{\frac{y}{2x} + 1} = t,$$

ebből pedig

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= 4t - 3 = \pm 4\sqrt{\frac{y}{2x} + 1} - 3 \\ \left(\frac{1+3x}{4x}\right)^2 &= \frac{y}{2x} + 1 \\ 1 + 9x^2 + 6x &= 8xy + 16x^2 \\ 7x^2 + 8xy - 6x - 1 &= 0 \\ y &= \frac{1+6x-7x^2}{8x} = \frac{1-x^2+6(x-x^2)}{8x} \\ &= \frac{(1-x)(1+7x)}{8x} \sim \frac{6}{8} - \frac{7}{8}x.\end{aligned}$$

Ennek aszimptotái az $x = 0$ és a $8y + 7x = 6$ egyenesek. Mivel a görbe egyenlete másodfokú, nem elfajuló és két aszimptotája is van, ebből következik, hogy hiperbola. Így az állításunkat igazoltuk. $\square$

A 4.6 ábra mutatja a transzformáció eredményét.



4.6. ábra. Parabola μ -transzformáltja

3. Példa. Tekintsük az $r = (x(t), y(t)) = (t, \pm\sqrt{1 - \frac{1}{5}t^2})$ ellipszist, ahol

$t \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$. Hajtsuk végre egyszer a μ transzformációt:

$$\begin{aligned}\mu r(t) = (x^\mu(t), y^\mu(t)) &= \left(\frac{t'}{\left(\pm\sqrt{1-\frac{1}{5}t^2}\right)'}, t - \left(\pm\sqrt{1-\frac{1}{5}t^2}\right) \cdot \left(\frac{t'}{\left(\pm\sqrt{1-\frac{1}{5}t^2}\right)'}\right) \right) \\ &= \left(\mp \frac{5\sqrt{1-\frac{1}{5}t^2}}{t}, t - \left(\pm\sqrt{1-\frac{1}{5}t^2}\right) \cdot \frac{\mp 5\sqrt{1-\frac{1}{5}t^2}}{t} \right) = \left(\mp \frac{5\sqrt{1-\frac{1}{5}t^2}}{t}, \frac{5}{t} \right).\end{aligned}$$

Állítás. Az r ellipszisnek a μr transzformáltja egy hiperbola.

Bizonyítás. Legyenek

$$x = \mp \frac{5\sqrt{1-\frac{1}{5}t^2}}{t}, \quad y = \frac{5}{t}.$$

Azaz

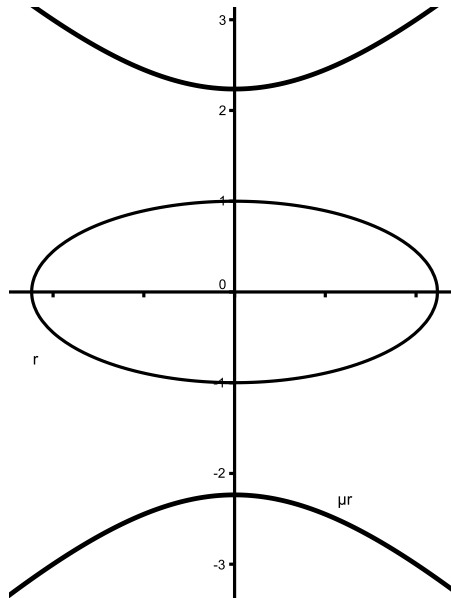
$$x^2 = \frac{25-5t^2}{t^2}, \quad y^2 = \frac{25}{t^2}.$$

Ebből

$$\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{5} = \frac{5}{t^2} - \frac{5-t^2}{t^2} = 1$$

hiperbola egyenletet kaptuk. Ezzel igazoltuk állításunkat. □

A 4.7 ábra mutatja a transzformáció eredményét.



4.7. ábra. Ellipszis μ -transzformáltja

4. Példa. Tekintsük az $r(t) = (x(t), y(t)) = (t, \pm\sqrt{t^2 - \frac{1}{2}})$ hiperbolát, ahol $t \in (-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$. Hajtsuk végre egyszer a μ transzformációt:

$$\begin{aligned}\mu r(t) &= (x^\mu(t), y^\mu(t)) \\ &= \left(\frac{t'}{\left(\pm\sqrt{t^2 - \frac{1}{2}}\right)'}, t - \left(\pm\sqrt{t^2 - \frac{1}{2}}\right) \cdot \left(\frac{t'}{\left(\pm\sqrt{t^2 - \frac{1}{2}}\right)'}\right) \right) \\ &= \left(\pm\frac{\sqrt{t^2 - \frac{1}{2}}}{t}, t - \left(\pm\sqrt{t^2 - \frac{1}{2}}\right) \cdot \frac{\pm\sqrt{t^2 - \frac{1}{2}}}{t} \right) = \left(\pm\frac{\sqrt{t^2 - \frac{1}{2}}}{t}, \frac{1}{2t} \right).\end{aligned}$$

Állítás. Az r hiperbola μr transzformáltja egy ellipszis.

Bizonyítás. Legyenek

$$x = \pm\frac{\sqrt{t^2 - \frac{1}{2}}}{t}, \quad y = \frac{1}{2t}$$

Ebből

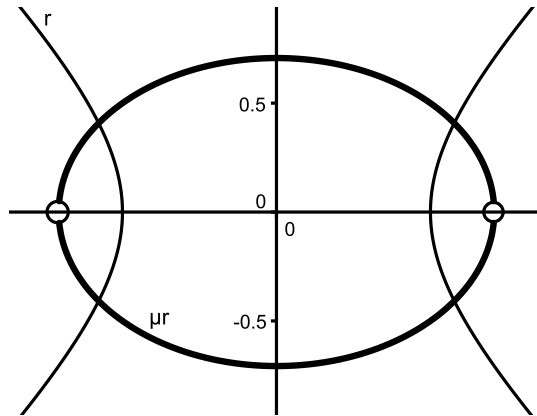
$$x^2 = 1 - \frac{1}{2t^2}, \quad y^2 = \frac{1}{4t^2},$$

amiért

$$2y^2 + x^2 = \frac{1}{2t^2} + 1 - \frac{1}{2t^2} = 1.$$

Ez egy ellipszis egyenlete, amellyel az állításunkat igazoltuk. □

A 4.8 ábra mutatja a transzformáció eredményét. A függőleges érintők, hasonlóan a korábbiakhoz, itt is megszüntethető szakadást okoznak.



4.8. ábra. Hiperbola μ -transzformáltja

4.3. A β - és μ -transzformációk kombinációi

Az előző fejezetekben két érdekes transzformációval találkoztunk. Felvetődik a kérdés, hogy vajon mit eredményez, ha ezen transzformációkat egymás után alkalmazzuk, és különböző sorrendben alkalmazzuk. Van-e esetleg kommutativitás?

Vizsgáljuk először a korábban már említett két transzformáció szorzatát!

Tétel. *A $\beta \circ \mu$ szorzat az eredeti görbét óra járásával szemben 90° -kal elforgatva adja vissza.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mu: [t \mapsto (x(t), y(t))] &\mapsto [t \mapsto (m^e(t), c^e(t))] \\ \bar{\mu}: (x(t), y(t)) &\mapsto \left(\frac{x'(t)}{y'(t)}, x(t) - \frac{x'(t)}{y'(t)} \cdot y(t) \right),\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\beta: [t \mapsto (x(t), y(t))] &\mapsto [t \mapsto (m_e(t), c_e(t))] \\ \bar{\beta}: (x(t), y(t)) &\mapsto \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}, y(t) - \frac{y'(t)}{x'(t)} \cdot x(t) \right).\end{aligned}$$

Legyen a szorzatuk

$$\overline{\beta \circ \mu}: (x(t), y(t)) \mapsto (x^{\beta \circ \mu}(t), y^{\beta \circ \mu}(t)).$$

Ekkor

$$\begin{aligned}x^{\beta \circ \mu}(t) &= \left[x'(t) - \left(\frac{x''(t) \cdot y'(t) - x'(t) \cdot y''(t)}{(y'(t))^2} \cdot y(t) + \frac{x'(t)}{y'(t)} \cdot y'(t) \right) \right] : \\ &\quad : \frac{x''(t) \cdot y'(t) - x'(t) \cdot y''(t)}{(y'(t))^2} \\ &= -\frac{x''(t) \cdot y'(t) - x'(t) \cdot y''(t)}{(y'(t))^2} \cdot y(t) \cdot \frac{(y'(t))^2}{x''(t) \cdot y'(t) - x'(t) \cdot y''(t)} \\ &= -y(t), \\ y^{\beta \circ \mu}(t) &= x(t) - \frac{x'(t)}{y'(t)} \cdot y(t) - (-y(t)) \cdot \frac{x'(t)}{y'(t)} = x(t),\end{aligned}$$

vagyis a két transzformáció szorzatára

$$\overline{\beta \circ \mu}: (x(t), y(t)) \mapsto (x^{\beta \circ \mu}(t), y^{\beta \circ \mu}(t)) = (-y(t), x(t)) \quad (4.6)$$

adódik, ahogy a tételünk állítja.

□

Tétel. $\mu \circ \beta$ szorzat négyzete a görbét az x -tengelyre tükrözve adja vissza.

Bizonyítás. Legyen

$$\overline{\mu \circ \beta} : (x(t), y(t)) \mapsto (x^{\mu \circ \beta}(t), y^{\mu \circ \beta}(t))$$

$$\begin{aligned} x^{\mu \circ \beta}(t) &= \frac{y''(t) \cdot x'(t) - y'(t) \cdot x''(t)}{(x'(t))^2} : \\ &\quad : \left[y'(t) - \left(\frac{y''(t) \cdot x'(t) - y'(t) \cdot x''(t)}{(x'(t))^2} \cdot x(t) + \frac{y'(t)}{x'(t)} \cdot x'(t) \right) \right] \\ &= \frac{y''(t) \cdot x'(t) - y'(t) \cdot x''(t)}{(x'(t))^2} \cdot -\frac{(x'(t))^2}{y''(t) \cdot x'(t) - y'(t) \cdot x''(t)} \cdot \frac{1}{x(t)} \\ &= -\frac{1}{x(t)} \end{aligned}$$

valamint

$$y^{\mu \circ \beta}(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} - \left(-\frac{1}{x(t)} \right) \cdot \left(y(t) - \frac{y'(t)}{x'(t)} \cdot x(t) \right) = \frac{y(t)}{x(t)}.$$

Ebből

$$\overline{\mu \circ \beta} : (x(t), y(t)) \mapsto (x^{\mu \circ \beta}(t), y^{\mu \circ \beta}(t)) = \left(-\frac{1}{x(t)}, \frac{y(t)}{x(t)} \right), \quad (4.7)$$

amiért

$$\overline{\mu \circ \beta}^2 : (x(t), y(t)) \mapsto \left(-\frac{1}{-\frac{1}{x(t)}}, \frac{\frac{y(t)}{x(t)}}{-\frac{1}{x(t)}} \right) = (x(t), -y(t)), \quad (4.8)$$

ahogy a tétel állítja. $\square$

Látható, hogy a transzformációk szorzata nem kommutatív, azonban

$$\beta^2(\mu\beta)^2 = \tau_y\tau_x = \tau_x\tau_y = (\mu\beta)^2\beta^2,$$

ahol τ_x az x -tengelyre, τ_y az y -tengelyre vett tükrözést jelöli, mégis mutat egyfajta kommutativitást.

Irodalomjegyzék

- [1] S. K. Butler: Tangent line transformations: or there and back again, *The Colloge Mathematics Journal*, **34** (2003), 105–106.
- [2] H. Fast: Inversion of the Crofton-transform for sets in the plane, *Real Analysis Exchange*, **19** (1993-1994), 59–80.
- [3] A. Horwitz: Reconstructing a Function from Its Set of Tangent Lines, *Amer. Math. Monthly*, **96** (1989), no. 9, 807–813.
- [4] Kurusa Árpád: Bevezetés a differenciálgeometriába, *Polygon, Szeged*, (1998).
- [5] Kurusa Árpád: Euklidészi geometria, *Polygon, Szeged*, (2008).
- [6] Kurusa Árpád: Pictures by X-rays, kézirat (2010), 1–32, <http://www.math.u-szeged.hu/~kurusa>.
- [7] L. Santalo: Integral Geometry and Geometric Probability, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Addison-Wesley (1976).
- [8] C. Schütt, E. Werner: The convex floating body, *Math. Scand.*, **66** (1990), 275–290.
- [9] H. Steinhaus: Length, shape, and area, *Colloq. Math.*, **3** (1954), 1–13.
- [10] Szőkefalvi-Nagy Gyula, Gehér László, Nagy Péter: Differenciálgeometria, *Műszaki Könyvkiadó, Budapest*, (1979).

Nyilatkozat

Alulírott Víg-Mácsai Zsanett, matematika szakos hallgató, kijelentem, hogy a szakdolgozatban foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem azt, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában, a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.

Víg-Mácsai Zsanett

Szeged, 2010. május 14.