

**József Attila Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Geometria Tanszék
Szeged**

Diplomamunka

Az ellipszisek jellemzése

**Készítette: Vécsei Farkas Ákos
V. matematikus hallgató**

Témavezető: Dr. Kurusa Árpád

1995.

Tartalomjegyzék

0. Bevezetés	1
1. Alapvető definíciók	2
2. A párhuzamos hűrok felezőegyenese	4
3. Az ekvireciprokalitás	11
3.1. Az ellipszis jellemzése ekvireciprokális pontokkal	11
3.2. A feltételek szükségessége	24
4. Összefoglalás	36
Felhasznált irodalom	37

0. Bevezetés

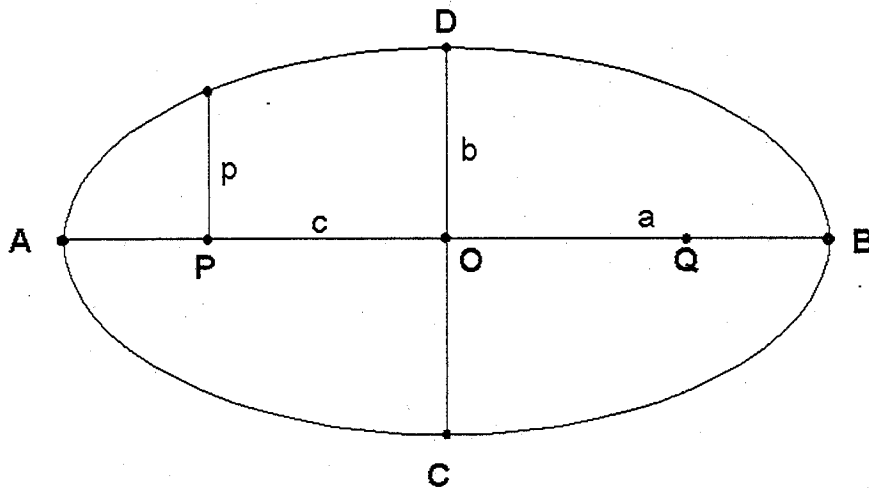
Dolgozatomban az ellipszis két újabb, az általánosan használtaktól merőben eltérő, integrálgeometriai jellemzését szeretném bemutatni.

Az első az ellipszis párhuzamos húrjainak azon tulajdonsága, hogy a húrfelező pontok egy egyenesre esnek. Látni fogjuk, hogy ez a tulajdonság a folytonos, zárt görbék közül csakis az ellipszisekre teljesül. A bizonyítás első része annak igazolása, hogy tetszőleges ellipszis húrfelező pontjai egy egyenesre esnek. A második részben először belátjuk, hogy a feltételt teljesítő folytonos, zárt görbék mindenütt differenciálhatóak. Ezután könnyen megmutatható, hogy ha egy zárt görbére igaz a fenti tulajdonság, akkor van olyan - a görbét metsző - ellipszis, hogy a görbe és az ellipszis bármely két metszéspontja között van egy újabb metszéspont. Ez - folytonossági megfontolások alapján - adja a tétel állítását.

A második jellemzés - K. J. Falconer : On the Equireciprocal Point Problem című cikke alapján - az ellipszis azon tulajdonsága, hogy egy, a fókuszon átmenő egyenesre illeszkedő két pontjának fókuszról való távolsága reciprokanak összege konstans. Azok a kétszer differenciálható, zárt síkgörbék, melyek két olyan ponttal rendelkeznek, melyre a pont és a görbe két (egy a ponton áthaladó egyenesre illeszkedő) pontja távolságának reciproka tetszőleges irányú egyenesre megegyezik, csak az ellipszisek lehetnek. Azt is belátjuk, hogy az összes feltétel szükséges, tehát bármelyiket elhagyva található olyan, ellipszistől különböző görbe, mely az új feltételrendszert kielégíti.

1. Alapvető definíciók

Definíció: Adott a síkon két pont, és egy - a két pont távolságánál nagyobb - távolság. Azon síkbeli pontoknak a mértani helyét, melyeknek a két ponttól mért távolsága összegül az adott távolságot adja *ellipszis*nek nevezzük. A két pont az ellipszis *fókusza*. Az ellipszis egy pontját a fókuszokkal összekötő szakaszok a ponthoz tartozó *rádiuszok*.



1. ábra

Az ellipszis nevezetes adatai:

AB : *nagytengety*, hossza $2a$

CD : *kistengely*, hossza $2b$

A, B, C, D : az ellipszis *csúcsai*,

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$: a fókuszok távolsága a középponttól,

$e = \frac{c}{a}$: *excentricitás* ($e < 1$)

$p = \frac{b^2}{a}$: *fokális paraméter* (a gyújtóponton átmenő, a nagytengetyre merőleges húr hosszának fele)

Megjegyzés: Ha a két pont (a fókuszok) egybeesik, kört kapunk.

Közismertek az ellipszis következő jellemzései:

kanonikus egyenlet: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ahol a koordináta tengelyek az ellipszis tengelyei

paraméteres egyenletek: $x = a \cdot \cos t$, $y = b \cdot \sin t$

polárkoordinátás egyenlet: $\rho = \frac{p}{1 - e \cdot \cos \varphi}$, ahol az origó az egyik fókusz, s a szöget a

nagy tengelytől az óramutató járásával ellentétes irányban mérjük

kúpszelet: az ellipszis a forgáskúp csúcsán át nem haladó, egy alkotóval sem párhuzamos sík és a kúpfelület metszete.

[2], [3]

2. A párhuzamos húrok felezőegyenese

1. Tétel: Legyen C egy folytonos, zárt síkgörbe. C akkor és csak akkor ellipszis, ha tetszőleges (adott) irányú egyenessel párhuzamos húrjainak felezőpontjai egy egyenesre esnek.

Bizonyítás:

2.1. Állítás: Az ellipszisre húrjainak felezőpontjai egy egyenesre esnek.

Biz.: Induljunk ki a kanonikus egyenletből, és vizsgáljuk az (n, m) normálvektorú húrokat. A hurok végpontjainak koordinátái az

$$\begin{aligned} m \cdot x + n \cdot y &= d \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásai, ahol d valós szám. A felezőpontot vizsgáljuk d függvényében. Az F felezőpont koordinátái $(x(F)$ és $y(F))$ a végpontok megfelelő koordinátáinak számtani közepe. Így :

$$y(F) = \frac{n \cdot b^2}{a^2 \cdot m^2 + b^2 \cdot n^2} \cdot d = \alpha \cdot d,$$

és $x(F) = \beta \cdot d$, ahol α és β konstans. Látható, hogy a felezőpont a d -től lineárisan függ. Ebből következik, hogy adott normálvektorú, azaz párhuzamos hurok felezőpontjai egy egyenesre esnek. Az is látható, hogy ezek az egyenesek az origóban metszik egymást, hiszen $d=0$ esetben tetszőleges irányú húr felezőpontja épp az origó.

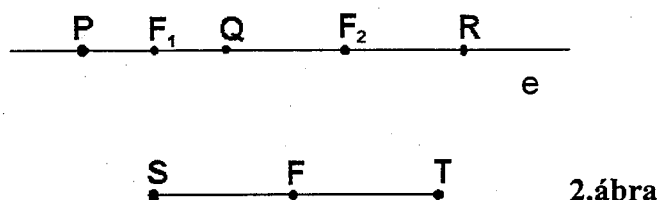
Vizsgáljuk most a fordított irányt!

2.2. Állítás: Ha egy C zárt görbe kielégíti a tétel feltételét, akkor ellipszis.

Biz.:

2.2.1. áll.: C szigorúan konvex

biz.: Tegyük fel, hogy létezik C -nek három egy egyenesre eső pontja, pl: P, Q, R illeszkedik e -re. Vizsgáljuk először az e -vel párhuzamos húrokat, ahol $\overline{PQ}$ felezőpontja: F_1 és $\overline{QR}$ felezőpontja: F_2

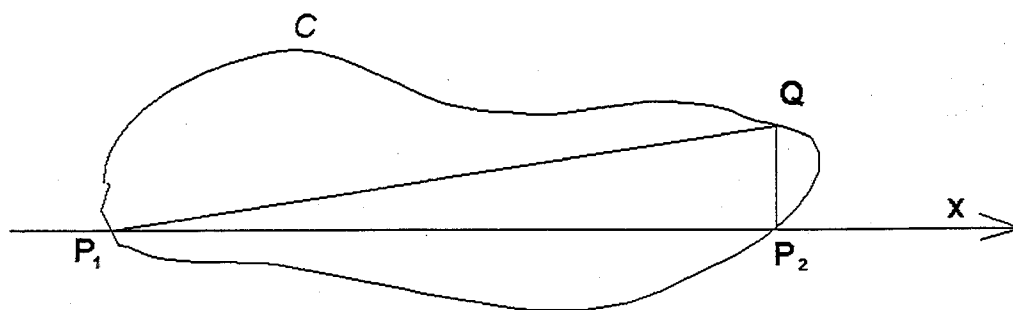


F_1 és F_2 meghatározza az e -vel párhuzamos hurok felezőegyenesét, de mivel illeszkednek is e -re, ezért a felezőegyenes éppen az e . C -nek van e -re nem illeszkedő S pontja. Ezen keresztül húzzunk e -vel párhuzamos $\overline{ST}$ húrt. Ennek F felezőpontja nem illeszkedik e -re, s ez ellentmondás, ami az indirekt feltételből adódik. (Lehet, hogy a húr csak egy pontból áll, de ekkor ez lesz a felezőpont is, s ez nem illeszkedik az e -re.)

Vegyük fel most a Descartes-féle koordináta rendszert a következő módon: az x -tengely legyen egy maximális hosszúságú húr egyenese, és az origó: az x -tengelyre eső, maximális húr felezőpontja. (A maximális húr létezése a konvexitás és a folytonosság következménye.)

2.2.2. áll.: C szimmetrikus az x -tengelyre.

biz.: Húzzunk az y -tengellyel párhuzamost a görbe x -tengelyen lévő pontjaiba. (Ilyen pontosan kettő van.) Ezek csak az x -tengelyen metszik a görbét, hiszen ha pl. $\exists Q \in C$, hogy Q illeszkedik P_2 -ben az x -tengelyre állított merőlegesre, akkor a $\overline{QP_1}$ szakasz a $\overline{QP_1P_2}$ derékszögű háromszög átfogója, ami hosszabb, mint a $\overline{P_1P_2}$ befogó, holott a $\overline{P_1P_2}$ húr maximális volt.



3. ábra

Így a P_1 és a P_2 pontok meghatározzák a függőleges húrok felezőpontjainak egyenesét, ami éppen az x -tengely. Mivel a vizsgált húrok a felezőegyenest merőlegesen metszik, a görbe szimmetrikus erre az egyenesre.

2.2.3. áll.: C szimmetrikus az y -tengelyre.

biz.: a.) A koordináta rendszer felvétele miatt az origó illeszkedik az x -tengellyel párhuzamos húrok felezőpontjainak egyenesére.

b.) Jelölje P a maximális y -koordinátájú pontot. (Ilyen pontosan egy van, hisz ha lenne két ilyen pont, akkor a konvexitás miatt a közöttük lévő is ilyenek lennének, de ekkor ellentmondásra jutunk a 2.2.1. pontban leírtakkal.)

Jelölje P' a P pont x -tengelyre vett tükörképét. Ez nyilván a minimális y -koordinátájú pont, hisz 2.2.2. szerint C szimmetrikus az x -tengelyre. Hasonlóan a 2.2.2 ponthoz, a $P'P$ egyenes éppen a húrfelező egyenes, párhuzamos az y -tengellyel és az a.) szerint az origó is illeszkedik rá, így $P'P$ éppen az y -tengely.

köv.: C szimmetrikus az origóra is.

2.2.4. áll.: Tetszőleges irányú húrok felezőegyenese átmegy az origón.

biz.: Triviálisan következik az origóra való szimmetriából, hiszen az adott irányú origón átmenő húr felezőpontja éppen az origó.

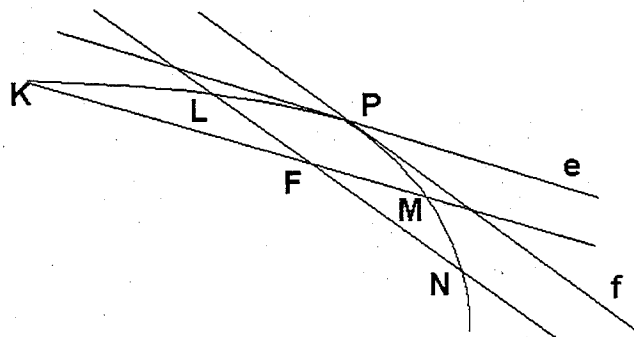
2.2.5. áll.: *A görbe mindenütt differenciálható.*

biz.: A konvexitás miatt tetszőleges pontjában húzható olyan egyenes, melynek a görbe egyazon oldalára esik. Ez az ún. támaszegyenes. Ez az egyenes csak egy pontban metszheti C -t, hiszen ha a görbe két különböző pontja is az egyenesen lenne, akkor a két pont közötti pontok is rajta lennének, s ez ellentmond 2.2.1.-nek.

Most tegyük fel, hogy létezik C -nek olyan P pontja, amelyben több támaszegyenes is állítható, azaz a görbének törése van. Jelöljön két különböző támaszegyenes e és f . Vizsgáljuk az e -vel és f -vel párhuzamos húrokat!

A centrális szimmetria miatt feltehető, hogy P az első síknegyedbe vagy valamely tengelyre esik. Különböztessünk meg két esetet aszerint, hogy P az x -tengelyen van-e.

a.) P nem az x -tengelyen van:



4. ábra

Feltehető, hogy e és f meredeksége negatív. Ekkor létezik $K, L, M, N \in C$, hogy $x(K) < x(L) < x(M) < x(N)$, ahol $x(K)$ jelöli a K pont x -koordinátáját, valamint $\overline{KM}$ felezőpontja megegyezik $\overline{LN}$ felezőpontjával a következők miatt:

Az e -vel és f -vel párhuzamos húrok felezőegyenese megegyezik, mert mindkettő áthalad P -n és az origón. Vegyünk fel egy e -vel párhuzamos $\overline{KM}$ húrt. ($K \neq M$)

Jelölje F a $\overline{KM}$ felezőpontját. F -en keresztül vegyünk fel f -fel párhuzamos $\overline{LN}$ húrt. Ennek felezőpontja éppen F . A felezőpont x -koordinátáját $\frac{x(K)+x(M)}{2}$ -ből kaphatjuk meg, amiért $x(F) = \frac{x(K)+x(M)}{2} < \frac{x(L)+x(N)}{2} = x(F)$, ami ellentmond e és f különbözőségének.

b.) Ha P az x -tengelyen van, teljesen hasonló eljárás alkalmazható. Elég az x -koordináták helyett az y -koordinátákat ugyanígy vizsgálni.

Ezek után rátérhetünk a bizonyítás lényegi részére, miszerint a tételbeli feltételnek eleget tevő görbék éppen az ellipszisek.

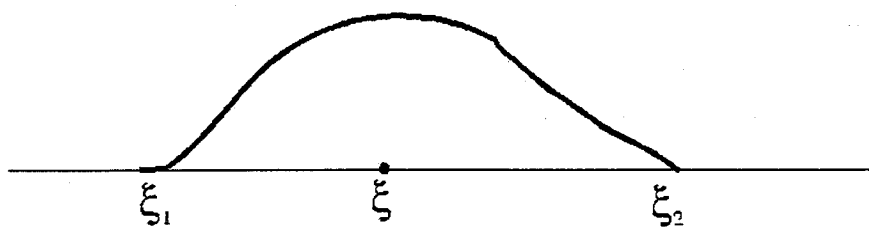
Nevezzük - az ellipszisekből vett párhuzammal - az x -tengelyen lévő húrt nagy-, az y -tengelyen lévő kistengelynek, a tengelyeken lévő pontokat csúcsoknak.

2.2.6. áll.: *Ha adott a nagy- és a kistengely hossza, ez egyértelműen meghatározza a görbét.*

biz.: Tudjuk, hogy a két tengely felezi egymást. Tegyük fel, hogy van két olyan különböző görbe, amely eleget tesz a feltételeknek és a megfelelő tengelyeik megegyeznek. Vegyük fel a két görbét közös koordináta rendszerben. A csúcsokban a két görbe megegyezik, hisz a csúcsok a koordináta tengelyeken vannak és a megfelelő, origótól mért távolságok megegyeznek. Vizsgáljuk ezután pl. az első síknegyedbe eső részek különbségét, mint függvényt.

Ha bármely két zérushely között lenne még egy zérushely, akkor a függvény egy sűrű halmazon 0 lenne, s a folytonosság miatt ekkor a két függvény a teljes intervallumon megegyezne. Ezért létezik két olyan pont, melyben a függvény zérus és közöttük már sehol sem az.

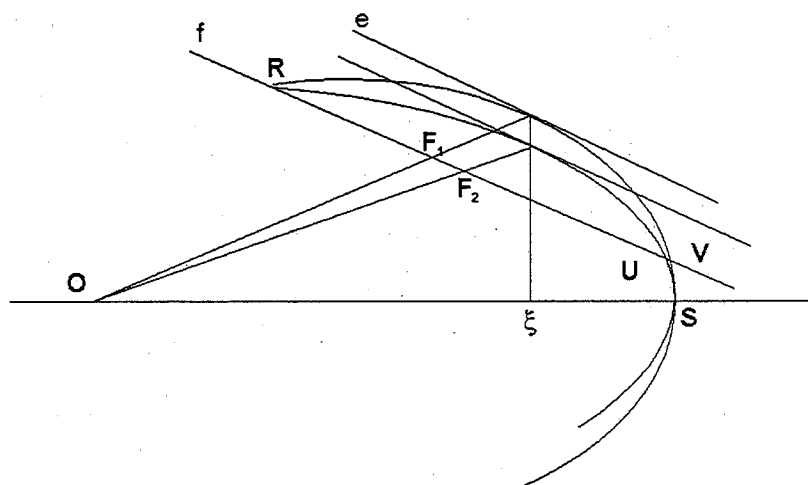
Vegyük tehát ezt a két zérushelyet. (ξ_1 és ξ_2) Rolle-tétele szerint van olyan $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$, hogy itt a derivált 0.



5. ábra

A két görbe a ξ abszcisszájú pontjába húzott érintője párhuzamos. Legyen az egyik ilyen pontbeli érintő: e .

a.) Ha S éppen a görbék csúcsa, akkor:

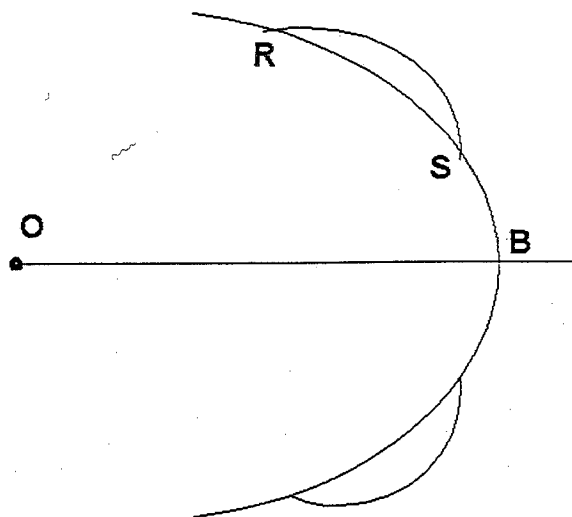


6. ábra

Legyen f az R -ből húzott e -vel párhuzamos egyenes valamint legyen az U és V pont f -nek és a görbéknek metszéspontjai. Legyen $F(R,U)=F_1$, $F(R,V)=F_2$, ahol $F(R,U)$ jelöli az $\overline{RU}$ szakasz felezőpontját. $|\overline{RU}| \leq |\overline{RV}|$, (akkor egyenlőek, ha f éppen S -ben metszi a görbéket), de $|\overline{RV}| = 2 \cdot |\overline{RF_1}| < 2 \cdot |\overline{RF_2}| = |\overline{RU}|$, ami ellentmondás.

Ha f az x -tengely alatt metszi a görbéket, használjuk ki az x -tengelyre vonatkozó szimmetriát. A külső ív a tükörképen is külső.

b.) Teljesen hasonló bizonyítás alkalmazható abban az esetben is, ha a csúcsnál közös ív van.



7. ábra

Az ellentmondás abból adódik, hogy feltettük, hogy van olyan intervallum, ahol a görbéknek nincs metszéspontja. Tehát a két görbének bármely két metszéspontja között van egy újabb metszéspont, azaz a két görbe megegyezik.

S mivel a megfelelő kis- és nagytengelyű ellipszis kielégíti a feltételeket, a görbe szükségszerűen ez az ellipszis. Ezzel újabb definíciót adhatunk az ellipszisre:

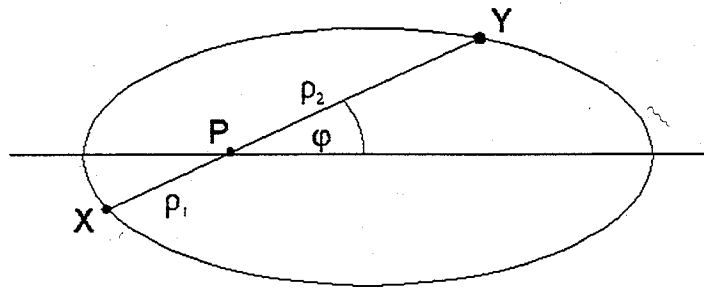
Definíció: *Ellipszis:* Olyan folytonos, zárt síkgörbe, melynek tetszőleges, adott irányú húrjainak felezőpontjai egy egyenesre esnek.

3. Az ekvireciprokalitás

3.1. Az ellipszis jellemzése ekvireciprokális pontokkal

Definíció: A P pont egy C síkgörbe *ekvireciprokális pontja* (*ER-pontja*), ha a C tetszőleges, P -n átmenő $\overline{XY}$ húrára teljesül az $\frac{1}{|\overline{XP}|} + \frac{1}{|\overline{YP}|} = \alpha$, ahol α pozitív konstans,

a C úgynevezett *ER-konstansa*.



8. ábra

Vizsgáljuk most az ellipszisek és az ekvireciprokális pontok kapcsolatát. Induljunk ki az ellipszis polárkoordinátás egyenletéből: $\rho = \frac{p}{1 - e \cdot \cos \varphi}$, ahol az origó az egyik fókusz.

Ebből azonnal jön, hogy a fókusz ER-pont, mivel

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{1 - e \cdot \cos \varphi}{p} + \frac{1 - e \cdot \cos(\pi + \varphi)}{p} = \frac{2}{p},$$

ahol $\rho_1 = |\overline{XP}|$ és $\rho_2 = |\overline{YP}|$. Eszerint az ellipszis fókuszai ekvireciprokális pontok, s az ER-konstans $\frac{2}{p}$.

Felmerül a kérdés, hogy létezik-e az ellipszisen kívül olyan zárt síkgörbe, melynek két ER-pontja is van.

2. Tétel: Ha C egy kétszer differenciálható zárt görbe a síkon, melynek van legalább két ER-pontja, akkor C ellipszis.

Ennél többet is állíthatunk. Vezessük be a következő jelölést: Legyen P és Q két ER-pont, α és β a hozzájuk tartozó ER-konstansok. Jelölje l a P -n és Q -n áthaladó egyenest, mely a C görbét X_0 -ban és Y_0 -ban metszi úgy, hogy X_0, Q, P, Y_0 ebben a sorrendben követik egymást az egyenesen. Ahhoz, hogy C szükségszerűen ellipszis legyen elég azt megkövetelni, hogy C kétszer differenciálható X_0 -ban vagy Y_0 -ban. A bizonyításhoz először lássuk be a következő lemmát!

3.1.1. Lemma:

Legyen a és $k < 1$ pozitív konstans, és legyen $\{a_r\}_{r=0}^{\infty}$ valós sorozat.

(i) Legyen m pozitív konstans (lehet ∞ is) úgy, hogy

$$k^r |a_0| + ark^{r-1} \leq m$$

minden r -re. (Ez a feltétel nyilván fölösleges, ha $m = \infty$.) Tegyük fel, hogy

$$(1) \quad |a_{r+1}| \leq k|a_r| + ak^r \quad \forall r = 0, 1, 2, \dots$$

ha $|a_r| \leq m$. Ekkor:

$$|a_r| \leq k^r |a_0| + ark^{r-1} \quad \forall r$$

(ii) Ha:

$$(2) \quad |a_{r+1} - a_r| \leq a(1 + |a_r|)k^r \quad \forall r$$

akkor:

$$|a_r - a_0| \leq \frac{a(1 + |a_0|)}{1 - k} \exp\left(\frac{a}{1 - k}\right) \quad \forall r$$

Bizonyítás:

Teljes indukcióval: Jelöljük H_r -rel az r -dik indukciós hipotézist:

$$|a_r| \leq k^r |a_0| + ark^{r-1} \leq m$$

H_0 triviálisan igaz, hiszen $|a_0| \leq |a_0| \leq m$. Tegyük fel, hogy $\forall i \leq r$ -re H_i teljesül.

$$(1) \Rightarrow |a_{r+1}| \leq k|a_r| + ak^r \leq k(k^r |a_0| + ark^{r-1}) + ak^r \leq k^{r+1} |a_0| + a(r+1)k^r \leq m$$

Ez éppen H_{r+1} -et adja, s így (i) -t beláttuk.

$$(2) \Rightarrow |a_{r+1} - a_r| \leq a(1 + |a_r|)k^r.$$

Átalakítva :

$$\begin{aligned} |a_{r+1}| &\leq |a_r| + a(1 + |a_r|)k^r \\ 1 + |a_{r+1}| &\leq (1 + |a_r|)(1 + ak^r) \end{aligned}$$

Így:

$$\begin{aligned} 1 + |a_r| &\leq (1 + |a_{r-1}|)(1 + ak^{r-1}) \leq (1 + |a_{r-2}|)(1 + ak^{r-2})(1 + ak^{r-1}) \leq \dots \leq \\ &\leq (1 + |a_0|) \cdot \prod_{i=0}^{r-1} (1 + ak^i) = \\ &= (1 + |a_0|) \cdot \exp \sum_{i=0}^{r-1} \ln(1 + ak^i) \leq (1 + |a_0|) \cdot \exp \sum_{i=0}^{\infty} ak^i, \end{aligned}$$

felhasználva azt, hogy ha $x \geq 0$, akkor $1 + x \leq \exp(x)$, így $\ln(1 + ak^i) \leq ak^i$. Azaz

$$1 + |a_r| \leq (1 + |a_0|) \cdot \exp \frac{a}{1-k}$$

Ezt (2) -be írva:

$$\begin{aligned} |a_r - a_0| &\leq |a_r - a_{r-1}| + \dots + |a_1 - a_0| \leq a(1 + |a_0|) \cdot \exp \left(\frac{a}{1-k} \right) \cdot \sum_{i=0}^{r-1} k^i \leq \\ &\leq \frac{a(1 + |a_0|)}{1-k} \cdot \exp \left(\frac{a}{1-k} \right) \end{aligned}$$

Ez adja a (ii) állítást.

3.1.2. Lemma:

Jelölje F és G a Descartes-féle koordináta tengelyeket, mint $\mathbf{R}^2$ -beli altereket. Nyilván $\mathbf{R}^2 = F \times G$. Legyen Ψ egy $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ C^∞ leképezés, mely az origó egy környezetében definiálva van és $\Psi(W) = W$, ha $W \in F$.

Tegyük fel, hogy Ψ linearizált formájának (valós) sajátértékei 1 és $\lambda < 1$, ahol E és F a megfelelő sajátalterek. Ekkor az origó valamely környezetében az

$\{W \in \mathbf{R}^2: \Psi^{(r)}(W) \rightarrow 0, \text{ ha } r \rightarrow \infty\}$ egy $G \rightarrow F$ C^∞ leképezés grafikonja lesz. ($\Psi^{(r)}$ jelöli a Ψ leképezés r -szeres végrehajtását.)

Bizonyítás:

Használjuk fel a stable manifold theorem következő változatát, melyet K. J. Falconer adott közre. [4]

Legyen W a 0 egy nyílt környezete az $(E, \|\cdot\|)$ Banach-térben, és legyen $f: W \rightarrow E$ $\mathcal{C}^p$ leképezés ($p > 1$). Legyen $F \subseteq E$ egy zárt altere feltéve, hogy $\Gamma = W \cap F$ f fixpontjaiból áll. Legyen G az az E -beli altér, melyre $E = F \oplus G$ úgy, hogy G invariáns az f 0 -beli $Df(0)$ deriváltjára. Tegyük fel, hogy $\|Df(0)|_G\| < 1$. Ekkor létezik a 0 -nak olyan N környezete, hogy $\left\{x \in N : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = 0\right\}$ egy $G \cap N \rightarrow F \cap N$ $\mathcal{C}^p$ függvény grafikonja lesz.

Alkalmazzuk ezt a tételt most a következő speciális esetre:

$(E, \|\cdot\|) : \mathbb{R}^2$ a szokásos metrikával, F és G a koordináta-alterek. Az origóbeli parciális differenciálhányadosok éppen a lineáris alak sajátértékei, így $\|Df(0)|_G\| < 1$ teljesül. Nyilvánvaló, hogy ha $f \in \mathcal{C}^\infty$ -beli volt, akkor a kapott függvény is az lesz, hisz tetszőleges p -re $\mathcal{C}^p$ -beli. Így a lemmát beláttuk.

Definiáljuk a Ψ_1 , Ψ_2 és Ψ leképezést a síkon, melyek a C -t önmagára képezik le. Adott X ponthoz $\Psi_1(X)$ legyen az a pont az XP egyenesen, melyre

$$(3) \quad \frac{1}{|XP|} + \frac{1}{|\Psi_1(X)P|} = \alpha,$$

úgy, hogy P az X és a $\Psi_1(X)$ között van. Hasonlóan adott Y -hoz $\Psi_2(Y) \in YQ$ egyenese, úgy, hogy

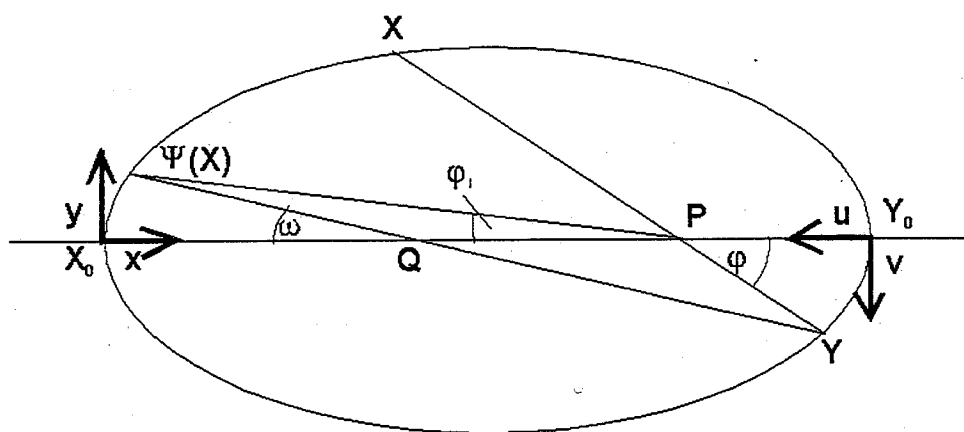
$$\frac{1}{|YQ|} + \frac{1}{|\Psi_2(Y)Q|} = \beta.$$

és Q az $\overline{\Psi_2(Y)Y}$ szakaszon van. Legyen Ψ ezen két leképezés kompozíciója $\Psi^{(-1)}$ pedig Ψ inverze. Mivel $\Psi(X) = \Psi_2(\Psi_1(X))$ a konstrukcióból adódik, hogy $\Psi^{(-1)}(X) = \Psi_1(\Psi_2(X))$ és X_0 és Y_0 fixpontja a Ψ leképezésnek.

Használjuk most fel Ψ_1 polárkoordinátás alakját. (Az origó legyen a P)
 $(3) \Rightarrow \Psi_1$ a (r, ϑ) polárkoordinátájú ponthoz a $(\frac{r}{r\alpha - 1}, \vartheta + \pi)$ koordinátájú pontot rendel. Ebből nyilvánvaló, hogy Ψ_1 analitikus függvény X_0 valamely környezetében.

Hasonlóan Ψ_2 analitikus Y_0 -hoz közel. Így, mivel analitikus függvények kompozíciója analitikus, Ψ és $\Psi^{(-1)}$ analitikus X_0 -hoz közel.

Vegyük fel két Descartes-féle koordináta rendszert X_0 és Y_0 origóval a 10. ábra szerint. Használjuk a következő jelölést: Ha X közel van X_0 -hoz, akkor $X = X_0 + (x, y)$, $Y = \Psi_1(X) = Y_0 + (u, v)$, és jelölje φ az $\angle XPX_0$ szöget.



9. ábra

Ekkor $x = |\overline{X_0P}| - |\overline{XP}| \cdot \cos \varphi = (|\overline{X_0P}| - |\overline{XP}|) + |\overline{XP}| \cdot (1 - \cos \varphi)$.

Ha ezt $|\overline{X_0P}| \cdot |\overline{XP}|$ -vel leosztjuk, átrendezés után az

$$\frac{1}{|\overline{XP}|} - \frac{1}{|\overline{X_0P}|} = \frac{x}{|\overline{X_0P}| |\overline{XP}|} + \frac{\cos \varphi - 1}{|\overline{X_0P}|}$$

összefüggést kapjuk. Hasonlóan $u = |\overline{Y_0P}| - |\overline{YP}| \cdot \cos \varphi$, így

$$\frac{1}{|\overline{YP}|} - \frac{1}{|\overline{Y_0P}|} = \frac{u}{|\overline{Y_0P}| |\overline{YP}|} + \frac{\cos \varphi - 1}{|\overline{Y_0P}|}$$

A két kapott egyenletet összeadva és felhasználva (3) -t:

$$(4) \quad 0 = \frac{x}{|\overline{X_0P}| |\overline{XP}|} + \frac{u}{|\overline{Y_0P}| |\overline{YP}|} + \alpha \cdot (\cos \varphi - 1)$$

Mivel $\sin \varphi = \frac{y}{|\overline{XP}|} = \frac{v}{|\overline{YP}|}$, adódik, hogy

$$(5) \quad v = \frac{|\overline{YP}|}{|\overline{XP}|} \cdot y$$

Legyen $k_1 = \frac{|\overline{Y_0P}|}{|\overline{X_0P}|}$

$$(4) \Rightarrow u = -x \cdot \frac{|\overline{Y_0P}| |\overline{YP}|}{|\overline{X_0P}| |\overline{XP}|} + (1 - \cos \varphi) \cdot \alpha \cdot \frac{|\overline{Y_0P}| |\overline{YP}|}{|\overline{X_0P}| |\overline{XP}|} \cdot |\overline{X_0P}| |\overline{XP}|$$

Ezen összefüggés segítségével, felhasználva, hogy

$$1 - \cos\left(2 \cdot \frac{\varphi}{2}\right) = 1 - \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

adódik, hogy

$$u = -x \cdot k_1 \frac{|\overline{YP}|}{|\overline{XP}|} + \frac{1}{2} \alpha \cdot k_1 \frac{|\overline{YP}|}{|\overline{XP}|} \cdot \frac{|\overline{X_0 P}|}{|\overline{XP}|} \left(2 \cdot |\overline{XP}| \cdot \sin \frac{\varphi}{2}\right)^2$$

Innen és (5) -ből következik:

$$(6) \quad \begin{cases} u = -(k_1^2 + O(x, y)) \cdot \left(x - \frac{1}{2} \alpha \cdot y^2\right) \\ v = (k_1 + O(x, y)) \cdot y \end{cases}$$

Hasonlóan, mivel $\Psi(X) = \Psi_2(Y)$ (jelölje ezt $X_0 + (x_1, y_1)$) és legyen $k_2 = \frac{|\overline{X_0 Q}|}{|\overline{Y_0 Q}|}$

$$(7) \quad \begin{cases} x_1 = -(k_2^2 + O(u, v)) \cdot \left(u - \frac{1}{2} \beta \cdot v^2\right) \\ y_1 = (k_2 + O(u, v)) \cdot v \end{cases}$$

(6) és (7) kombinálásával:

$$(8) \quad \begin{cases} x_1 = k^2 \left[x + \frac{1}{2} (\beta - \alpha) \cdot y^2 \right] \cdot (1 + O(x, y)) \\ y_1 = k \cdot y (1 + O(x, y)) \end{cases}$$

ahol $k = k_1 \cdot k_2 < 1$. Ennek segítségével egyszerűen belátható a következő hasznos segédállítás.

Definíció: Egy N halmaz *invariáns* a Ψ leképezésre, ha $\Psi(N) \subseteq N$

3.1.3. Lemma: Létezik az X_0 -nak egy olyan környezete, mely invariáns a Ψ leképezésre, és hasonlóan, létezik az Y_0 -nak egy olyan környezete, mely invariáns a $\Psi^{(-1)}$ -re.

Bizonyítás:

Az állítás első fele közvetlenül adódik (8) -ből. Ha x és y elég kicsi, akkor a k^2 -tel illetve k -val való szorzás miatt ($k < 1$) x_1 és y_1 is kicsi lesz.

pl.: $y < \varepsilon \Rightarrow y_1 < \varepsilon \cdot k \cdot (1 + O(x, y))$,

s ha ε elég kicsi, akkor $k \cdot (1 + O(x, y)) < 1$, így $y_1 < \varepsilon$

Felírható egy (8) -hoz hasonló összefüggés $\Psi^{(-1)}$ -re is, s ebből adódik az állítás második része.

3.1.4. Lemma: Legyen C olyan zárt görbe, melynek van két ER-pontja. Ekkor (az előbbi jelölésekkel) C -nek létezik érintője X_0 -ban és Y_0 -ban, s ezek l -re merőlegesek.

Bizonyítás:

Ennél egy erősebb állítást igazolunk, melynek egy speciális esete lesz a lemma állítása.

áll.: Minden $\gamma : 0 < \gamma < 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow X_0} \frac{|x|}{|y|^\gamma} = 0$, ha a C pontjain tartunk X_0 -hoz, ahol

$$X = X_0 + (x, y)$$

biz.: (8) -ból :

$$\frac{|x_1|}{|y_1|^\gamma} \leq k^{2-\gamma} \left[\frac{|x|}{|y|^\gamma} + \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \cdot |y|^{2-\gamma} \right] (1 + O(x, y))$$

A 3.1.3. Lemma alapján van X_0 -nak egy N Ψ -invariáns környezete. Itt:

$$(9) \quad \frac{|x_1|}{|y_1|^\gamma} \leq k_0 \cdot \frac{|x|}{|y|^\gamma} + a \cdot |y|^{2-\gamma}$$

és

$$(10) \quad |y_1| \leq k_0 \cdot |y|$$

valamilyen k_0 és a konstansra, ahol $k_0 < 1$. Vegyünk egy W pontot C -n (mondjuk pozitív y -koordinátájút) úgy, hogy az $[X_0, W]$ ív teljesen N -ben legyen. Legyen

$$(11) \quad c = \sup_{X=X_0+(x,y)} \frac{|x|}{|y|^\gamma}$$

és

$$(12) \quad y_0 = \sup_{X=X_0+(x,y)} |y| \quad \text{ahol } X \text{ befutja a } [W, \Psi(W)] \text{ ívet.}$$

Nyilván $c < \infty$ és $y_0 < \infty$, hisz a $[W, \Psi(W)]$ íven $|y| > 0$. Jelölje $\Psi^{(r)}(X)$ a Ψ leképezés r -szeres végrehajtását X -en. ($\Psi^{(r)}(X) = \Psi(\Psi(\dots(\Psi(X))\dots)$)) Továbbá legyen $\Psi^{(r)}(X) = X_0 + (x_r, y_r)$.

$$(9) \Rightarrow \frac{|x_{r+1}|}{|y_{r+1}|^\gamma} \leq k_0 \cdot \frac{|x_r|}{|y_r|^\gamma} + a \cdot |y_r|^{2-\gamma}$$

$$(10) \Rightarrow |y_r| \leq k_0 \cdot |y_{r-1}| \leq k_0^2 \cdot |y_{r-2}| \leq \dots \leq k_0^{r-1} \cdot |y_1| \leq k_0^r \cdot \sup |y| = k_0^r \cdot |y_0|$$

Így

$$\frac{|x_{r+1}|}{|y_{r+1}|^\gamma} \leq k_0 \cdot \frac{|x_r|}{|y_r|^\gamma} + a \cdot k_0^{r(2-\gamma)} \cdot |y_0|^{2-\gamma}$$

Mivel az $(X_0, W]$ ív minden pontja előáll $\Psi^{(r)}(X)$ alakban a $[\Psi(W), W]$ ív valamely X pontjára és valamely r -re, alkalmazható az 3.1.1. Lemma (i) része az $\left\{ \frac{|x_r|}{|y_r|^\gamma} \right\}$ sorozatra, ($m = \infty$ esettel), s (11) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\frac{|x|}{|y|^\gamma} \rightarrow 0$$

ha $X = X_0 + (x, y)$ tart X_0 -hoz az $(X_0, W]$ íven és $0 < \gamma < 2$.

Ugyanígy belátható negatív y -koordinátákra, s ekkor $\gamma = 1$ eset éppen a lemma állítását adja.

3.1.5. Lemma: Legyen C egy zárt görbe, melynek van két ER-pontja. Ekkor vagy $\{\kappa(X_0), \kappa(Y_0)\} = \{\infty, -\infty\}$, vagy a P -beli és Q -beli ER-konstans megegyezik és $|\overline{X_0 P}| = |\overline{Y_0 Q}|$. $\kappa(X_0)$ jelölje most a C X_0 -beli görbületét.

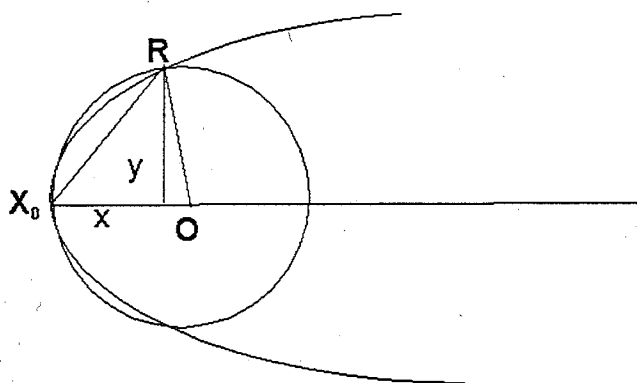
Bizonyítás: Először azt látjuk be, hogy C görbülete X_0 -ban, ha létezik, akkor megegyezik a következő határértékkel:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow X_0 \\ x \in C}} \frac{2x}{y^2}$$

Ehhez a görbületet a simulókör sugarából számítjuk ki. Tudjuk már, hogy X_0 -ban C érintője éppen az y -tengely. Jelölje $r(X)$ az $R=(x,y)$ ponton is átmenő simulókör sugarát.

Legyen $\alpha = \angle RX_0O$ és $\beta = \angle X_0OR$

$$\beta = \pi - 2\alpha = \pi - 2 \cdot \operatorname{atg}\left(\frac{y}{x}\right)$$



10. ábra

Számoljuk ki az X_0RO háromszög területét:

$$T = \frac{1}{2} r(x)y = \frac{1}{2} r(x)^2 \sin(\beta)$$

Innen a simulókör sugarának reciproka:

$$\frac{1}{r(x)} = \frac{\sin\left(\pi - 2 \cdot \operatorname{atg}\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{y} = \frac{\sin\left(2 \cdot \operatorname{atg}\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{y}$$

Feltehető, hogy $\sin(x)$ és $\cos(x)$ nemnegatív, mert az első síknegyedben, az origóhoz közel vizsgáljuk most őket. Ekkor igazak a következő trigonometrikus azonosságok:

$$\cos(z) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2(z) + 1}} \quad \text{és} \quad \sin(z) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2(z)} + 1}}$$

Innen :

$$\frac{1}{r(x)} = 2 \frac{\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{y^2} + 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1}}}{y}$$

Mivel az origóban a meredekség ∞ : $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in C}} \frac{x^2}{y^2} = 0$

Így:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in C}} \frac{1}{r(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in C}} \frac{2x}{y^2}$$

Feltéve, hogy C görbülete X_0 -ban nem ∞ vagy $-\infty$, ekkor vagy $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x}{y^2} < \infty$,

vagy $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x}{y^2} > -\infty$

Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy az első teljesül, ekkor (6)-ból

$$\begin{aligned} \frac{u}{v^2} &= \frac{-(k_1 + O(x, y)) \cdot (x - \frac{1}{2}\alpha \cdot y^2)}{k_1^2 + 2k_1 \cdot O(x, y) + O(x, y) \cdot y^2} = \\ &= \frac{(\frac{1}{2}\alpha \cdot y^2 - x) \cdot k_1^2}{y^2 \cdot (k_1^2 + c \cdot O(x, y))} + \frac{(\frac{1}{2}\alpha \cdot y^2 - x) \cdot O(x, y)}{y^2 \cdot (k_1^2 + c \cdot O(x, y))} = \\ &= \frac{\frac{1}{2}\alpha - \frac{x}{y^2}}{1 + d_1 \cdot O(x, y)} + d_2 \cdot O(x, y) \end{aligned}$$

Ahol c , d_1 és d_2 konstans. Így:

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \frac{u}{v^2} = \frac{1}{2}\alpha - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x}{y^2}$$

Azaz

$$(13) \quad \frac{1}{2}\alpha = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x}{y^2} + \overline{\lim}_{y \rightarrow y_0} \frac{u}{v^2}$$

Hasonlóan (7)-ből:

$$\frac{1}{2}\beta = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x}{y^2} + \overline{\lim}_{y \rightarrow y_0} \frac{u}{v^2}$$

Azaz $\alpha = \beta$. Így $\frac{1}{|X_0 Q|} + \frac{1}{|Y_0 P| + |PQ|} = \frac{1}{|X_0 Q| + |PQ|} + \frac{1}{|Y_0 P|}$, tehát $|X_0 Q| = |Y_0 P|$.

Ha C görbülete X_0 -ban $\pm\infty$, akkor (13) -ből következik, hogy Y_0 -ban is de ellenkező előjellel.

Következmény: Legyen C zárt görbe két ER-ponttal. Ha C konvex vagy ha C kétszer differenciálható X_0 -ban vagy Y_0 -ban , akkor az ER-konstansok egyenlők és $|\overline{X_0 Q}| = |\overline{Y_0 P}|$.

Biz.: Ha C konvex, akkor a görbület mindenütt nemnegatív, és ha kétszer differenciálható egy pontban, akkor itt a görbülete véges.

Tétel: Legyen C olyan zárt görbe, melynek van két ER-pontja és kétszer differenciálható X_0 -ban vagy Y_0 -ban. Ekkor C ellipszis.

Bizonyítás.: A 3.1.4. Lemma szerint C -nek létezik érintője X_0 -ban és Y_0 -ban, s ezek l -re merőlegesek. A 3.1.5. Lemma szerint a P és Q -beli ER-konstansok megegyeznek (legyen ez pl. α), és $|\overline{X_0 Q}| = |\overline{Y_0 P}|$ Legyen E az az ellipszis, melynek ER-pontjai éppen P és Q , valamint átmegy X_0 -n és Y_0 -n . Nyilvánvalóan pontosan egy ilyen ellipszis van, hisz az ER-pontok a fókuszok. E ER-konstansa P -ben és Q -ban α , hisz

$$\frac{1}{|\overline{X_0 P}|} + \frac{1}{|\overline{Y_0 P}|} = \alpha = \frac{1}{|\overline{X_0 Q}|} + \frac{1}{|\overline{Y_0 Q}|}$$

Jelölje C görbületét X_0 -ban $\kappa(X_0)$, Y_0 -ban $\kappa(Y_0)$, E görbületét X_0 -ban és Y_0 -ban κ_E .

áll.: $\kappa(X_0) = \kappa(Y_0) = \kappa_E$

biz.: A 3.1.5. Lemma bizonyítása és (13) szerint $\kappa(X_0) + \kappa(Y_0) = \alpha$. Egyszerűen látható, hogy $\kappa_E = \frac{1}{p} = \frac{2}{\alpha}$.

Így
$$2 \cdot \kappa_E = \kappa(X_0) + \kappa(Y_0)$$

Tegyük fel, hogy $\kappa(X_0) \neq \kappa(Y_0)$, azaz pl. $\kappa(X_0) < \kappa(Y_0)$.Ekkor $\kappa(X_0) < \kappa_E < \kappa(Y_0)$.

Ez azt jelenti, hogy C X_0 -hoz közel kívül, Y_0 -hoz közel belül fekszik E -n. Ebből adódik, hogy $\exists X : X \neq X_0$ és $X \neq Y_0$ úgy, hogy $X \in C \cap E$.

De ekkor a $\{\Psi^{(r)}(X)\}$ sorozat $C \cap E$ pontjaiból áll és konvergál X_0 -hoz, azaz X_0 tetszőleges környezetében van $C \cap E$ -nek X_0 -tól különböző pontja. Ezek szerint C nem haladhat E -n kívül X_0 egy kis környezetében.

Ugyanígy belátható, hogy $\kappa(Y_0) < \kappa(X_0)$ sem lehetséges, azaz $\kappa(X_0) = \kappa(Y_0) = \kappa_E = \frac{\alpha}{2}$

Ekkor (13)-ból :

$$(14) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow X_0 \\ x \in C}} \frac{x}{y^2} = \frac{1}{4} \alpha$$

Paraméterezzük át $\mathbb{R}^2 \setminus l$ -et a következő képpen: ($\mathbb{R}$ a valós számok halmaza)

$X = X_0 + (x, y)$ helyett írjunk (w, y) -t, ahol $w = \frac{x}{y^2}$. Az új koordináta rendszerben

jelölje Ψ_0 a Ψ leképezést. Ψ_0 nyilván definiált és analitikus a $\{(w, y) : 0 < |y^2| \leq \frac{m}{|w|}\}$

halmazon valamely m konstansra. Ilyen m azért létezik, mert ha x és y elég kicsi ahhoz, hogy Ψ_1 analitikus legyen pl $|x| \leq m$, akkor $|w \cdot y^2| = |x| \leq m$ és $0 < |y^2| \leq \frac{m}{|w|}$

Így, ha $\Psi_0(w, y) = (w_1, y_1)$, akkor (8)-ból következik, hogy:

$$(15) \quad \begin{cases} w_1 = w(1 + O(w^2 \cdot y, y)) \\ y_1 = k \cdot y \cdot (1 + O(w^2 \cdot y, y)) \end{cases}, \text{ mert } \alpha = \beta$$

Ebből látszik, hogy a $\{(w, y) : y = 0\}$ egyenes Ψ_0 megszüntethető szingularitásainak halmaza. Definiáljuk itt $\Psi_0(w, 0) = (w, 0)$ -val, ekkor Ψ_0 analitikus a $\{(w, y) : |y^2| \leq \frac{m}{|w|}\}$

halmazon.

Jelölje Ψ_L a Ψ_0 linearizált alakját.

$$(14) \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\alpha, 0\right) \text{ fixpontja } \Psi_L \text{-nek}$$

$$(15) \Rightarrow \Psi_L \text{ sajátértékei: } 1 \text{ és } k$$

Így használjuk fel a 3.1.2. Lemmát:

Az $S = \left\{ (w, y) : \left| \Psi_0^{(r)}(w, y) - \left(\frac{1}{4}\alpha, 0\right) \right| \rightarrow 0, \text{ ha } r \rightarrow \infty \right\}$ halmaz egy C^∞ leképezés az y -tengelyről a w -tengelyre $\left(\frac{1}{4}\alpha, 0\right)$ valamely környezetében.

Így, ha y elég kicsi, akkor y -hoz pontosan egy olyan w van, melyre $\Psi_0^{(r)}(w, y) \rightarrow \left(\frac{1}{4}\alpha, 0\right)$

Visszatérve az eredeti koordináta rendszerbe: $X_0 + (x_r, y_r) = \Psi^{(r)}(X_0 + (x, y))$ jelölést használva, ha y elég kicsi, $\exists! x$, hogy $\frac{x_r}{y_r} \rightarrow \frac{1}{4}\alpha$.

(14) -ből tudjuk, hogy ha $X = X_0 + (x, y)$ és C -n tart X_0 -hoz, akkor $\lim \frac{x}{y^2} = \frac{1}{4}\alpha$.

De ugyanez igaz akkor is, ha E -n futtatjuk a pontokat, ami azt jelenti, hogy C

és E egybeesik valamely, X_0 -t tartalmazó E_0 íven. Mivel $E = \bigcup_{r=0}^{\infty} \Psi^{(-r)}(E_0) \cup \{Y_0\}$, ahol

$\Psi^{(-r)}$ jelöli $\Psi^{(-1)}$ r -szeri végrehajtását, s ugyanez igaz C -re is, így E és C megegyeznek.

Ezzel a tételt beláttuk.

Következmény: *Nincs olyan kétszer differenciálható zárt görbe, melynek kettőnél több ER-pontja van.*

Bizonyítás: Két ER-pont egyértelműen meghatározza a görbét, s éppen az ellipszis fókuszpontjai lesznek az ER-pontok. Ha kettőnél több ekvireciprokális pont lenne, bármely kettőt kiválasztva az a pontok az ellipszis fókuszai lesznek. De ebből nyilván nem lehet kettőnél több.

Megjegyzés: Nem szabad figyelmen kívül hagyni, hogy nem minden ellipszisnek van két ER-pontja, mivel a körnek csak egy van.

Így az ellipszis egy újabb definícióját mondhatjuk ki:

Definíció: Egy kétszer differenciálható zárt C síkgörbe *ellipszis*, ha vagy kör, vagy létezik két különböző olyan pontja (P és Q), hogy $\forall R \in \{P, Q\}$ -ra igaz az ekvireciprokális egyenlet:

$$\frac{1}{|XR|} + \frac{1}{|YR|} = \text{const.}$$

ahol $X, Y \in C$ és X, R, Y egy egyenesre esik, ebben a sorrendben.

3.2. A feltételek szükségessége

3.2.1. Már korábban láttuk, hogy a 2. Tételben nem kötelező feltétel a kétszer differenciálhatóság. Csak egy pontban (X_0) használtuk ki ennek meglétét. Az erősebb feltétel mégsem szűkíti le azon görbék osztályát, melyek eleget tesznek a feltételeknek, hiszen, ha csak X_0 -ban kétszer differenciálható, már abból is következik, hogy a görbe ellipszis, s az pedig mindenütt kétszer deriválható, így -a kiegészítő feltételekkel- a két feltételrendszer ekvivalens.

3.2.2. Vizsgáljuk meg, szükséges feltétel-e a két ER-pont létezése, azaz van-e a körön kívül olyan kétszer differenciálható zárt síkgörbe, melynek egy ER-pontja van.

Egyszerűen konstruálható ilyen:

Pl: Induljunk ki a körből. A következőkben polárkoordináta rendszert vegyünk alapul.

Legyen $r(\alpha) = 1$, ha $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \pi\right]$. Így az ER-pont az origó, ER-konstans: 2.

Itt: $r(\alpha) = \text{const.} \Rightarrow r'(\alpha) = r''(\alpha) = 0$.

Ezért az X, Y, Z, V pontokban is teljesülnie kell ennek.

Elég a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ -n megadni, mert a $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ -n egyértelműen meghatározott a függvény az

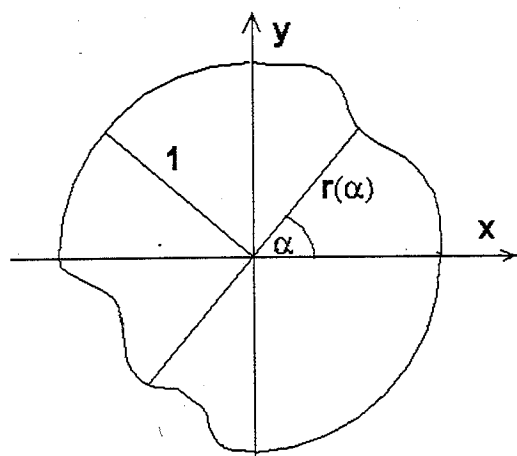
ezen intervallumon felvett értékek által, hisz.

$$\frac{1}{r(\alpha)} + \frac{1}{r(\alpha + \pi)} = 2$$

Ebből:

$$(16) \quad r(\alpha + \pi) = \frac{r(\alpha)}{2 \cdot r(\alpha) - 1}$$

Ezért definiáljuk r -et a következőképpen: $r(\alpha) = 1 + \varepsilon \alpha^3 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)^3$, ahol ε kis konstans.



11. ábra

Ekkor

$$r'(\alpha) = 3\varepsilon \cdot \alpha^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)$$

és

$$r''(\alpha) = 6\varepsilon \cdot \alpha \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) - \alpha \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) - \alpha^2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)^2 \right]$$

Nyilván $r(0) = r(\frac{\pi}{2}) = 1$, $r'(0) = r'(\frac{\pi}{2}) = 0$ és $r''(0) = r''(\frac{\pi}{2}) = 0$.

(16) -ből egyszerűen jön $r(\pi) = r(\frac{3\pi}{2}) = 1$, $r'(\pi) = r'(\frac{3\pi}{2}) = 0$ és

$r''(\pi) = r''(\frac{3\pi}{2}) = 0$ is mivel:

$$\frac{r(\alpha)}{2r(\alpha) - 1} = \frac{1 + \varepsilon \alpha^3 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)^3}{2\varepsilon \alpha^3 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)^3 + 1}$$

Ha ε elég kicsi, akkor $2\varepsilon \alpha^3 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)^3 > -1$, s ekkor a görbe a mindenütt kétszer differenciálható.

Tehát van az ellipszistől (körtől) eltérő kétszer differenciálható zárt síkgörbe, melynek van ER-pontja.

3.2.3. Szükséges feltétel-e a kétszer differenciálhatóság X_0 -ban?

3.Tétel: Legyenek P és Q különböző pontok a síkon és legyen α konstans, melyre teljesül a $0 < \alpha < \frac{4}{\overline{PQ}}$ feltétel.

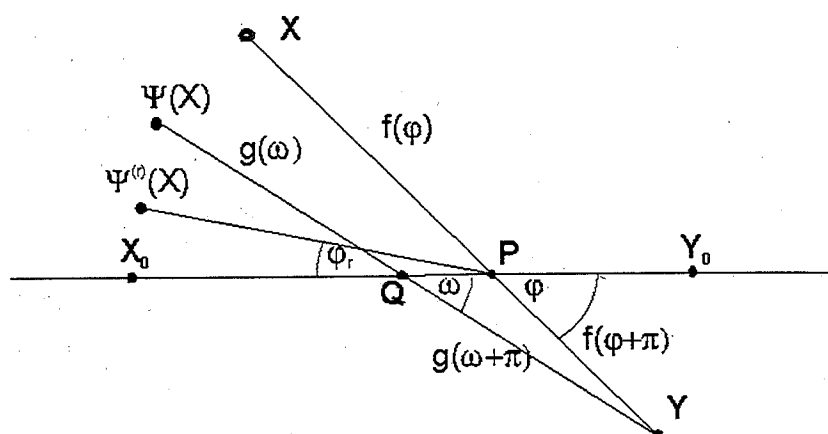
Ekkor létezik az ellipszistól különböző konvex görbe melynek P és Q ekvireciprokális-pontja α ER-konstanssal.

Megjegyzés: Ez azt jelenti, hogy ha nem kötjük ki a kétszer differenciálhatóságot, akkor még olyan két ER-ponttal rendelkező görbe is van, amely konvex s az ER-konstansai megegyeznek.

A következőkben jelöljük E -vel azt az ellipszist, melynek P és Q ER-pontja és ER-konstansa α . Használjuk a következő jelölést:

l a PQ egyenese, $\{X_0, Y_0\} = l \cap E$, Ψ_1, Ψ_2 és Ψ az X_0 és Y_0 valamely környezetében az előzőek szerint definiált leképezések, X egy X_0 -hoz közeli pont, $Y = \Psi_1(X)$, $\varphi = \angle_{XPX_0}$, $\omega = \angle_{YQY_0}$, $\varphi_r = \angle_{\Psi^{(r)}(X)PX_0}$ ($r = 1, 2, 3 \dots$).

C legyen kétszer folytonosan differenciálható görbeív, mely átmegy X -en és feltesszük, hogy C a P origójú polárkoordináta rendszerben $f(\vartheta)$ -val van megadva, ahol ϑ közel van φ -hez. Hasonlóan $\Psi_1(C)$ $f(\vartheta)$ -val van megadva közel $\varphi + \pi$ -hez a P origójú-, $g(\vartheta)$ -val $\omega + \pi$ -hez közel a Q origójú-, továbbá $\Psi^{(r)}(X)$ $f_r(\vartheta)$ -val φ_r -hez közel a P origójú polárkoordináta rendszerben ($r = 1, 2, 3 \dots$). A szöveget az óramutató járása szerint Y_0X_0 -tól mérve értjük



12.ábra

A C görbületét X -ben jelölje $\kappa(X)$, $\Psi_1(C)$ görbületét Y -ban $\kappa(Y)$ és $\Psi(r)(C)$ görbületét $\Psi(r)(X)$ -ben $\kappa(\Psi(r)(X))$.

3.2.1. Lemma: Létezik X_0 -nak egy $N \Psi$ -invariáns környezete és létezik m, a, b, k_0 pozitív konstansok ($k_0 < 1$), hogy ha $X \in N$, CX -en áthaladó görbét és $|f'(\varphi)| \leq m$ X -ben (az előző jelölés szerint), akkor

$$\begin{aligned} (i) \quad & |\varphi_1| \leq k_0 |\varphi| \\ (ii) \quad & |f'_1(\varphi_1)| \leq k_0 |f'(\varphi)| + a |\varphi| \\ (iii) \quad & |\kappa(\Psi(X)) - \kappa(X)| \leq b(1 + \kappa(X)) \cdot (|f'(\varphi)| + |\varphi|) \end{aligned}$$

Bizonyítás: Válasszuk k_3 -t a következőképp

$$\frac{|\overline{Y_0 P}|}{|\overline{X_0 P}|} \cdot \frac{|\overline{X_0 Q}|}{|\overline{Y_0 Q}|} < k_3 < 1$$

A 3.1.3. Lemma szerint létezik X_0 -nak Ψ -invariáns környezete. $\frac{|\overline{Y P}|}{|\overline{X P}|} \cdot \frac{|\overline{\Psi(X) Q}|}{|\overline{Y Q}|}$

tetszőleges közel lehet $\frac{|\overline{Y_0 P}|}{|\overline{X_0 P}|} \cdot \frac{|\overline{X_0 Q}|}{|\overline{Y_0 Q}|}$ -hoz, ha X elég közel van X_0 -hoz, így itt kisebb, mint

$k_3 \cdot \frac{|\overline{\Psi(X) P}|}{|\overline{X P}|}$ tetszőleges közel lehet 1-hez, így van olyan környezet, ahol szorzatuk is

kisebbsé k_3 -nál. Tehát van olyan $N_1 \Psi$ -invariáns környezete X_0 -nak, hogy:

$$(17) \quad N_1 \subseteq \left\{ X: \frac{|\overline{\Psi(X) P}| \cdot |\overline{\Psi(X) Q}| \cdot |\overline{Y P}|}{|\overline{X P}|^2 \cdot |\overline{Y Q}|} < k_3 \wedge |\varphi_1| \leq k_3 |\varphi| \right\}$$

Ψ_1 definíciója szerint:

$$(18) \quad \frac{1}{f(\vartheta)} + \frac{1}{f(\vartheta + \pi)} = \alpha$$

Legyen:

$$F(\vartheta) = \frac{1}{f(\vartheta)} + \frac{1}{f(\vartheta + \pi)} \equiv \alpha$$

Vizsgáljuk $F'(\vartheta)$ -t a φ helyen.

$$(19) \quad F'(\vartheta) = \frac{f'(\vartheta)}{f(\vartheta)^2} - \frac{f'(\vartheta + \pi)}{f(\vartheta + \pi)^2} \equiv 0$$

$$(20) \quad \mathbf{f}'(\varphi + \pi) = - \left(\frac{\mathbf{f}(\varphi + \pi)}{\mathbf{f}(\varphi)} \right)^2 \cdot \mathbf{f}'(\varphi)$$
$$|\overline{\mathbf{QN}'}| = |\mathbf{g}'(\omega + \pi)| \quad (\text{poláris szubnormális}) \quad [3]$$

$$\operatorname{tg}(\gamma) = \frac{g'(\omega + \pi)}{g(\omega + \pi)}$$

$$|\overline{\mathbf{PM}'}| = |\mathbf{f}'(\varphi + \pi)|$$

$$\operatorname{tg}(\varphi - \omega + \gamma) = \frac{f'(\varphi + \pi)}{f(\varphi + \pi)}$$

$$\operatorname{tg}(\gamma + \omega - \varphi) = \frac{\operatorname{tg}(\gamma) + \operatorname{tg}(\varphi - \omega)}{1 - \operatorname{tg}(\gamma)\operatorname{tg}(\varphi - \omega)}$$

28

$$\frac{f'(\varphi + \pi)}{f(\varphi + \pi)} = \frac{\frac{g'(\omega + \pi)}{g(\omega + \pi)} + \operatorname{tg}(\varphi - \omega)}{1 - \frac{g'(\omega + \pi)}{g(\omega + \pi)} \operatorname{tg}(\varphi - \omega)}$$

Átrendezve :

$$\frac{g'(\omega + \pi)}{g(\omega + \pi)} \cdot \left[1 + \frac{f'(\varphi + \pi)}{f(\varphi + \pi)} \operatorname{tg}(\varphi - \omega) \right] = \frac{f'(\varphi + \pi)}{f(\varphi + \pi)} - \operatorname{tg}(\varphi - \omega)$$

$$(20) \Rightarrow \frac{f'(\varphi + \pi)}{f(\varphi + \pi)} = \frac{f(\varphi + \pi)}{f(\varphi)} f'(\varphi)$$

Így :

$$g'(\omega + \pi) \cdot \left[1 - \frac{f(\varphi + \pi)}{f(\varphi)^2} f'(\varphi) \operatorname{tg}(\varphi - \omega) \right] = - \frac{f(\varphi + \pi)}{f(\varphi)^2} f'(\varphi) g(\omega + \pi) - g(\omega + \pi) \operatorname{tg}(\varphi - \omega)$$

Mivel $\omega = O(\varphi)$, létezik $m_1 > 0$, hogy ha $|f'(\varphi)| \leq m_1$ és $X \in N_1$, akkor

$$g'(\omega + \pi) \cdot [1 + O(\varphi)] = - \frac{f(\varphi + \pi)}{f(\varphi)^2} f'(\varphi) g(\omega + \pi) - g(\omega + \pi) + O(\varphi),$$

hisz $\frac{f(\varphi + \pi)}{f(\varphi)^2}$ korlátos ugyanis $f(\varphi + \pi) < \infty$ és $f(\varphi)^2 > 0$.

Azaz:

$$(21) \quad g'(\omega + \pi) = \left[- \frac{g(\omega + \pi) f(\varphi + \pi)}{f(\varphi)^2} f'(\varphi) + O(\varphi) \right] (1 + O(\varphi))$$

Ugyanez megismételhető úgy, hogy X helyett Y -t, Y helyett X_1 -et szerepeltetünk, ekkor $f(\varphi)$ szerepét $g(\omega + \pi)$, $g(\omega + \pi)$ -ét $f_1(\varphi_1)$ veszi át.

Ekkor:

$$f_1'(\varphi_1) = \left[- \frac{f_1(\varphi_1) g(\omega)}{g(\omega + \pi)^2} g'(\omega + \pi) + O(\omega) \right] (1 + O(\omega))$$

feltéve, hogy $|g'(\omega + \pi)|$ elég kicsi.

Kombinálva ezt (21) -gyel, és felhasználva, hogy

$$f_1'(\varphi_1) = \left[\frac{f_1(\varphi_1)g(\omega)f(\varphi+\pi)}{f(\varphi)^2g(\omega+\pi)} f'(\varphi) + O(\varphi) \right] (1 + O(\varphi)),$$

valamint $\frac{f_1(\varphi_1)g(\omega)f(\varphi+\pi)}{f(\varphi)^2g(\omega+\pi)} < k_3$ és $\frac{g(\omega+\pi)f(\varphi+\pi)}{f(\varphi)^2}$ korlátos

ezért:

$$(22) \quad |f_1'(\varphi_1)| \leq [k_3|f'(\varphi)| + O(\varphi)](1 + O(\varphi))$$

és (21) -ből:

$$(23) \quad g'(\omega+\pi) = O(f'(\varphi)) + O(\varphi)$$

ha $|f'(\varphi)| \leq m_2$ és $X \in N_2$ valamely N_2 Ψ -invariáns környezetre és valamely m_2 konstansra.

Használjuk fel a görbület polárkoordinátás formuláját: [3]

$$\kappa(X) = \frac{f(\varphi)^2 - f(\varphi)f''(\varphi) + f'(\varphi)^2}{[f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Innen azonnal jön, hogy létezik $m_3 \leq m_2$, hogy ha $X \in N_2$ és $|f'(\varphi)| \leq m_3$, akkor:

$$(24) \quad \left| \kappa(X) - \frac{f(\varphi) - f''(\varphi)}{f(\varphi)^2} \right| = (1 + \kappa(X))O(f'(\varphi))$$

mert:

$$\kappa(X) \left(1 + \frac{f'(\varphi)^2}{f(\varphi)^2} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{f(\varphi) - f''(\varphi)}{f(\varphi)^2} + \frac{f'(\varphi)^2}{f(\varphi)^3}$$

(19) -et újra differenciálva:

$$0 = 2 \left[\frac{f'(\varphi)^2}{f(\varphi)^3} + \frac{f'(\varphi+\pi)^2}{f(\varphi+\pi)^3} \right] - \left[\frac{f''(\varphi)}{f(\varphi)^2} + \frac{f''(\varphi+\pi)}{f(\varphi+\pi)^2} \right]$$

(20) -ből:

$$\frac{f'(\varphi+\pi)^2}{f(\varphi+\pi)^3} = - \frac{f(\varphi+\pi)^4}{f(\varphi+\pi)^3 f(\varphi)^4} f'(\varphi)^2 = - \frac{f(\varphi+\pi)}{f(\varphi)^4} f'(\varphi)^2$$

$$\begin{aligned}
& \kappa(X) - \frac{f(\varphi) - f''(\varphi)}{f(\varphi)^2} + \kappa(Y) - \frac{f(\varphi + \pi) - f''(\varphi + \pi)}{f(\varphi + \pi)^2} = \\
& = \kappa(X) + \kappa(Y) - \left(\frac{1}{f(\varphi)} + \frac{1}{f(\varphi + \pi)} \right) + \left(\frac{f''(\varphi)}{f(\varphi)^2} + \frac{f''(\varphi + \pi)}{f(\varphi + \pi)^2} \right) = \\
& = \kappa(X) + \kappa(Y) - \alpha + 2 \frac{f'(\varphi)^2}{f(\varphi)^4} (f(\varphi) - f(\varphi + \pi))
\end{aligned}$$

Innen (24) és az Y -beli görbületre felírt hasonló formula alapján:

$$\kappa(Y) = (1 + \kappa(X))O(f'(\varphi))$$

Ezért:

$$(25) \quad |\kappa(X) + \kappa(Y) - \alpha| = (1 + \kappa(X))O(f'(\varphi))$$

Hasonlóan:

$$\begin{aligned}
|\kappa(Y) + \kappa(\Psi(X)) - \alpha| &= (1 + \kappa(Y))O(g'(\omega + \pi)) = \\
&= (1 + \kappa(X))[O(\varphi) + O(f'(\varphi))]
\end{aligned}$$

Innen a háromszög egyenlőtlenséget felhasználva: $(|a| + |b| \geq |a - b| \geq |a| - |b|)$

$$(26) \quad |\kappa(\Psi(X)) - \kappa(X)| = (1 + \kappa(X))[O(\varphi) + O(f'(\varphi))]$$

ha $|f'(\varphi)| \leq m$ és $X \in N_2$ valamely N_2 Ψ -invariáns környezetre és valamely m konstansra.

k_0 -t úgy válasszuk meg, hogy $k_3 < k_0 < 1$ teljesüljön. Ekkor (17), (22) és (26) a lemma állításait adja.

3.2.2. Lemma: Adott $\varepsilon > 0$ -hoz létezik az X_0 -nak olyan Ψ -invariáns N_ε környezete és $\exists m_\varepsilon$ pozitív konstans, hogy ha $X \in N_\varepsilon$ és C egy az X -en áthaladó görbeív, melyre $|f'(\varphi)| \leq m_\varepsilon$, akkor

- (i) $f'_r(\varphi_r) \leq \varepsilon$ és
- (ii) $|\kappa(\Psi^{(r)}(X)) - \kappa(X)| \leq \varepsilon$

Bizonyítás: Az 3.2.1. Lemma szerint, ha $X \in N$ és $|f'_r(\varphi_r)| \leq m$, akkor

$$|\varphi_{r+1}| \leq k_0 |\varphi_r| \quad \text{és} \quad |f'_{r+1}(\varphi_{r+1})| \leq k_0 |f'_r(\varphi_r)| + A |\varphi_r|.$$

Ebből

$$|\varphi_r| \leq k_0 |\varphi_{r-1}| \leq k_0^2 |\varphi_{r-2}| \leq \dots \leq k_0^r |\varphi|$$

és

$$|f'_{r+1}(\varphi_{r+1})| \leq k_0 |f'_r(\varphi_r)| + a |\varphi| k_0^r$$

Így, ha $|f'(\varphi)|$ és $|\varphi|$ elég kicsi, hogy

$$(27) \quad \sup \{k_0^r |f'(\varphi)| + ar k_0^{r-1} |\varphi|\} \leq m$$

akkor az 3.1.1. lemma (i) részét alkalmazva az $\{f'_r(\varphi_r)\}$ sorozatra:

$$(28) \quad |f'_r(\varphi_r)| \leq k_0^r |f'(\varphi)| + ar k_0^{r-1} |\varphi| \leq a_1 k_1^r (|\varphi| + |f'(\varphi)|)$$

minden r -re, ahol a_1 és k_1 konstans úgy, hogy $k_0 < k_1 < 1$.

Továbbá az 3.2.1. Lemma (iii) pontja szerint

$$|\kappa(\Psi^{(r+1)}(X)) - \kappa(\Psi^{(r)}(X))| \leq b(1 + \kappa(\Psi^{(r)}(X))) (|f'_r(\varphi_r)| + |\varphi_r|)$$

minden r -re.

Ezért (28) felhasználásával:

$$|\kappa(\Psi^{(r+1)}(X)) - \kappa(\Psi^{(r)}(X))| \leq c(1 + \kappa(\Psi^{(r)}(X))) k_1^r \cdot (|f'_r(\varphi_r)| + |\varphi_r|)$$

Most alkalmazzuk az 3.1.1. Lemma (ii) részét a $\{\kappa(\Psi^{(r)}(X))\}$ sorozatra:

ha $|f'(\varphi)|$ és $|\varphi|$ elég kicsi akkor:

$$|\kappa(\Psi^{(r)}(X)) - \kappa(X)| \leq \varepsilon \text{ és (28)-ből } f'_r(\varphi_r) \leq \varepsilon.$$

Ezek után konstruáljunk olyan görbét, melynek két ER-pontja van, konvex és mégsem ellipszis.

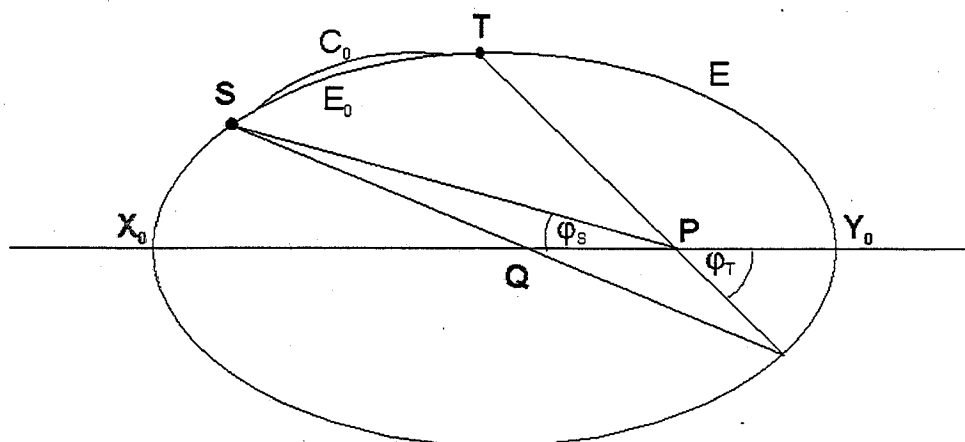
Jelölje $\Psi^{(0)}$ az identitást, ezzel tetszőleges egész r -re definiálva van egy $\Psi^{(r)}$ lokálisan invertálható, analitikus leképezés az E ellipszis közelében, mely az E -t fixen hagyja.

Legyen T az $E X_0$ -tól és Y_0 -tól különböző pontja és $S = \Psi(T)$

Jelölje E_0 az E ellipszis $[S, T]$ ívét, mely nem tartalmazza X_0 -t és $-Y_0$ -t. Az l egyenes két részre osztja az E -t. Az a rész, mely tartalmazza E_0 -t előáll $\bigcup_{r \in \mathbb{Z}} \Psi^{(r)}(E_0)$ alakban.

Hasonlóan a másik rész előáll, mint $\bigcup_{r \in \mathbb{Z}} \Psi^{(r)}(\Psi_2(E_0))$. Mindkét részre igaz, hogy az ezen

előállításban szereplő ívek csak a végpontjaikban metszhetik egymást.



14. ábra

Legyen C_0 egy kétszer folytonosan differenciálható E_0 -től különböző görbeív, melynek végpontjai S és T valamint S és T egy kis környezetében egybeesik E_0 -al.

Tegyük fel, hogy a C_0 minden pontja "látható" P -ből és Q -ból, azaz tetszőleges Q -ból (ill. P -ből) kiinduló félegyenesnek legfeljebb egy közös pontja lehet C_0 -al.

Legyen C az a görbe, melyet E -ből úgy kapunk, hogy $\Psi^{(r)}(E_0)$ -t $\Psi^{(r)}(C_0)$ -val és $\Psi^{(r)}(\Psi_2(E_0))$ -t $\Psi^{(r)}(\Psi_2(C_0))$ -vel helyettesítjük minden r -re. A konstrukció miatt C egybeesik E -vel a $\Psi^{(r)}(T)$ és a $\Psi^{(r)}(\Psi_2(T))$ pontok kis környezetében minden r -re, továbbá C invariáns Ψ_1 és Ψ_2 -re így C -nek is ER pontja lesz P és Q . (Feltéve persze, hogy P -ből és Q -ból C minden pontja látható.)

Mivel $\Psi^{(r)}$ és $\Psi^{(r)} \circ \Psi_2$ inverzükkel együtt analitikus leképezések minden r -re és C_0 kétszer folytonosan differenciálható görbe, ezért C is kétszer folytonosan differenciálható az X_0 és Y_0 pontok kivételével.

Még meg kell mutatni, hogy C minden pontja látható P -ből és Q -ból, valamint, hogy C konvex, ha elég közel van E -hez.

Tegyük fel, hogy C_0 és E_0 polárkoordinátákkal van megadva ($f_C(\vartheta)$ és $f_E(\vartheta)$), ahol az origó a P pont. Definiáljunk egy d metrikát az E -ből a fenti módon képzett görbék osztályán.

$$d(C, D) = \sup_{\vartheta \in [\vartheta_S, \vartheta_T]} \max \{ |f_C(\vartheta) - f_D(\vartheta)|, |f'_C(\vartheta) - f'_D(\vartheta)|, |f''_C(\vartheta) - f''_D(\vartheta)| \}$$

Ez metrika mert

$d(C, D) \geq 0$ és $d(C, D) = 0 \Leftrightarrow C = D$ (ha az E_0 íven megegyeznek, akkor a konstrukcióból következően mindenütt egybeesnek.)

$$d(C, D) = d(D, C)$$

$$d(C, D) \leq d(C, F) + d(F, D) \text{ (nyilvánvaló a definícióból)}$$

Mutassuk meg, hogy ha $d(C, E)$ elég kicsi, akkor C konvex.

Jelölje κ az E minimális görbületét. ($\kappa > 0$) Legyen $\varepsilon = \frac{1}{3}\kappa$ és N_ε legyen az X_0 pontnak a 3.2.2. Lemmában kapott ε -hoz tartozó környezete, m_ε a lemmában szereplő konstans. Legyen $N \subseteq N_\varepsilon$ X_0 -nak olyan környezete, hogy $|f'_E(\varphi)| \leq \frac{1}{2}m_\varepsilon$ N minden pontjára.

Vegyünk egy olyan egész s -t, hogy $\Psi^{(s)} \subseteq N$.

Mivel $\Psi^{(s)}$ lokálisan invertálható analitikus leképezés E_0 -hoz közel, ha A egy kétszer folytonosan differenciálható görbeív E_0 közelében és X az A egy pontja, akkor a $\Psi^{(s)}(A)$ érintője a $\Psi^{(s)}(X)$ pontban folytonosan változik az X és az A X -beli érintője szerint, valamint $\Psi^{(s)}(A)$ görbülete $\Psi^{(s)}(X)$ -ben folytonosan változik X , az A X -beli érintője és az A X -beli görbülete függvényében. Ezért ha $d(C, E)$ elég kicsi, akkor $\Psi^{(s)}(C_0) \subseteq N$, $|f'_s(\varphi)| \leq m_\varepsilon$ a $\Psi^{(s)}(C_0)$ minden pontjában és $\kappa(X) \geq \frac{2}{3}\kappa \quad \forall X \in \Psi^{(s)}(C_0)$, ahol $\kappa(X)$ a $\Psi^{(s)}(C_0)$ X -beli görbülete.

A 3.2.2. Lemmát alkalmazva a $\Psi^{(s)}(C_0)$ tetszőleges X pontjára:

$$(29) \quad |f'_{r+s}(\varphi_r)| \leq \varepsilon$$

és

$$(30) \quad |\kappa(\Psi^{(r)}(X)) - \kappa(X)| \leq \varepsilon = \frac{1}{3}\kappa \quad (r = 1, 2, 3, \dots)$$

(29) $\Rightarrow C$ látható P -ből, és (30) $\Rightarrow C$ görbülete legalább $\frac{1}{3}\kappa > 0$ az $(X_0, \Psi^{(s)}(T))$ íven,

mivel ezen ív minden pontja előállítható $\Psi^{(r)}(X)$ -ként valamely $X \in \Psi^{(s)}(C_0)$.

Ha $d(C, E)$ elég kicsi, akkor $\forall X \in C_0$ és $\forall 0 \leq r \leq s$ -re a $\Psi^{(r)}(C_0)$ látható P -ből és $\kappa(\Psi^{(r)}(X)) \geq \frac{1}{3}\kappa$, mert C_0 analitikus leképezések melletti képeinek véges halmazán

$d(C, E)$ megfelelően kicsinek választható, s az s -nél nagyobb indexűekre pedig a fentiek

szerint ugyanez igaz. Így, ha $d(C, E)$ elég kicsi, akkor C látható P -ből és így Q -ból is és pozitív görbületű az $(X_0, T]$ íven.

Hasonlóan belátható ugyanez az $(X_0, \Psi_1(T)]$, $[S, Y_0)$ és a $[\Psi_2(T), Y_0)$ íveken is.

Így C görbülete pozitív X_0 és Y_0 kivételével minden pontban. Láttuk, hogy C -nek X_0 -ban és Y_0 -ban létezik érintője (az l -re merőleges egyenesek), így C konvex.

Ezzel Hallstrom eljárását követve konstruáltunk olyan konvex, zárt görbét, melynek két ER-pontja is van és nem ellipszis.

Nyilvánvalóan ez azt jelenti, hogy C nem differenciálható kétszer az X_0 vagy az Y_0 pontban.

Tehát a 2. tételben minden feltétel szükséges.

4. Összefoglalás

Az előzőekben az ellipszis két, az eddigi megközelítésektől különböző jellemzését adtuk meg.

Az első egy speciális szimmetriai tulajdonság, mely szerint az ellipszis tetszőleges irányú, párhuzamos húrjaihoz létezik pontosan egy olyan egyenes, mely ezen húrok felezési pontjain halad keresztül. Ahhoz, hogy ezen tulajdonságot definícióként használhassuk, azt is meg kellett mutatni, hogy ez a folytonos, zárt görbék közül csak az ellipszisekre teljesül. Ennek belátásához megmutattuk, hogy megfelelően felvett koordináta rendszer esetén, a tengelyekre eső pontok egyértelműen meghatározzák a görbét.

A második jellemző tulajdonság az, hogy minden ellipszis -a kör kivételével- két ekvireciprokális-ponttal rendelkezik. Azt is beláttuk, hogy ha egy folytonos, zárt síkgörbe kétszer differenciálható és két ER-pontja van, akkor csakis ellipszis lehet, de létezik az ellipszistől különböző folytonos, zárt síkgörbe, melynek két ER-pontja van. Ez viszont nyilván nem minden pontjában kétszer differenciálható. A tételből az is következik, hogy a kétszer differenciálható, zárt görbéknek legfeljebb két ekvireciprokális-pontja lehet.

Köszönet mondok Dr. Kurusa Árpádnak a dolgozat elkészítéséhez nyújtott segítségéért.

Felhasznált irodalom

1. **K. J. Falconer**, *On the equireciprocal point problem*,
Geometriae Dedicata 14 (1983), 113-126 .
2. **Hajós György**, *Bevezetés a geometriába*,
Budapest (1972), Tankönyvkiadó.
3. **Bronstejn , Szemengyajev**, *Matematikai zsebkönyv*
Budapest (1987), Műszaki Könyvkiadó.
4. **K. J. Falconer**, *Differentiation of the limit mapping in a dynamical system*,
J. London Math. Soc. (2), 27 (1983), 356-372.
5. **M. W. Hirsch , C. C. Pugh**, *Stable manifolds and hyperbolic sets*,
Global analysis, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 14 (American
Mathematical Society, Providence, 1970), 133-163.
6. **K. J. Falconer**, *X-ray problems for point sources*,
Proc. London Math. Soc.(3), 46 (1983), 241-262.