

# RÖNTGENSUGÁR PROBLÉMÁK

SZAKDOLGOZAT

Készítette : **Nagy Tibor**  
mat.-fiz. szakos hallgató

Témavezető: **Dr. Kurusa Árpád**  
egyetemi docens

JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM  
GEOMETRIAI TANSZÉK  
SZEGED, 1995.

## TARTALOMJEGYZÉK

|                       |    |
|-----------------------|----|
| Bevezetés .....       | 1  |
| 1.Fejezet .....       | 4  |
| 2.Fejezet .....       | 13 |
| 3.Fejezet .....       | 21 |
| 4.Fejezet .....       | 23 |
| 5.Fejezet .....       | 29 |
| 6.Fejezet .....       | 45 |
| Irodalomjegyzék ..... | 49 |

## Bevezetés

Röntgensugárzás (vagy X-sugárzás) akkor keletkezik, ha gyorsan mozgó elektronok valamely anyagba ütköznek. Ha a röntgenforrásból kilépő röntgensugarak elé fényérzékeny lemezt teszünk, akkor a lemez erősen megfeketedik. Ha az ernyő és a sugárforrás közé valamilyen anyagot is helyezünk, akkor a lemezen sötét és világos foltokat észlelhetünk. Ha ugyanaz a sugárzás egy másik anyagon halad át, akkor teljesen más képet kapunk. Ennek oka, hogy ugyanazon keménységű röntgensugárzás különböző anyagokon való áthaladáskor annál jobban gyengül, minél nagyobb az anyag sűrűsége. Tehát ha a röntgensugarak útjába például szeget vagy csontot teszünk, akkor a fluoreszkáló ernyőn a fémdaraboknak illetve a csontoknak a környezettől élesen különálló árnyékképét figyelhetjük meg. Ezen alapul a röntgensugarak gyakorlati alkalmazásainak nagy része, az orvosi és a technikai röntgenátvilágítás.

Írjuk fel a gyengítésre vonatkozó összefüggéseket! Az  $I_0$  erősségű röntgensugárzás erőssége az átsugárzott réteg  $d$  vastagságával exponenciálisan csökken

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot d}$$

ahol  $\mu$  a "gyengítési együttható".

Az előzőek alapján érvényes a következő összefüggés is:

$$\ln \frac{I}{I_0} = \int_{test} \rho$$

ahol a  $\rho$  az anyag sűrűségfüggvénye.

Ezek az eredmények a matematikában is számos kérdést vetettek fel.

1961-ben P. C. Hammer azt a problémát kezdte vizsgálni, hogy hány darab röntgensugár szükséges ahhoz, hogy egy konstans sűrűségű, nem üres, síkbeli konvex halmaz szerkezetét megismerjük.

Gardner és McMullen 1979-ben e probléma vizsgálata kapcsán megmutatta, hogy két konvex halmaz megkülönböztethető a röntgen-fényképeik segítségével. Jelenleg azonban még nem létezik olyan módszer, amellyel teljes mértékben rekonstruálni lehetne egy konvex halmazt a röntgen-fényképeinek segítségével. Mivel végig olyan halmazokra történtek a vizsgálatok, amelyeknek a sűrűségfüggvénye konstans volt, így az előbbi képlet jobb oldalán levő integrál éppen a röntgensugár irányában a halmazon átmenő húr hosszát adja. Ezeket a húrokat -amelyek (vagy a húrok meghosszabbításai) egy rögzített egyenessel  $\theta$  szöget zárnak be- nevezzük ezután  $f(\theta)$  húrfüggvénynek. A húrfüggvények segítségével bizonyos esetekben elméletileg lehetséges, hogy a kívánt pontosságig felépítsünk egy  $K$  konvex halmazt. Nyilvánvaló, hogy az eljárásunk annál pontosabb lesz, minél több röntgen-fényképet készítünk. A probléma így tehát valójában az, hogy a  $P_1$  és  $P_2$  különböző pontokhoz tartozó  $f_1(\theta)$  és  $f_2(\theta)$  húrfüggvények segítségével hogyan lehet felépíteni a  $K$  konvex halmazt. Ehhez azonban először meg kell vizsgálnunk, milyen a  $P_i$  pontok helyzete a  $K$  halmazhoz képest! Legyen kezdetben adott egy  $P$  pont és a  $K$  halmazhoz

tartozó  $f$  húrfüggvény. Az  $f$  függvényből következtethetünk a  $P$ -nek a  $K$ -hoz való viszonyára. A  $P$  pont akkor és csak akkor belső pontja  $K$ -nak, ha az  $f$  folytonos és nem eltűnő függvény. Ha az  $f(\theta)$  valamely  $\theta_i$ -kre eltűnik, akkor a  $P$  vagy külső pontja vagy pedig határpontja  $K$ -nak. Ha  $P$  egy határpontja a  $K$ -nak, akkor a  $K$ -nak az  $f$  húrfüggvényekkel való rekonstrukciója -a  $P$ -re való tükrözésektől eltekintve- triviális. Ezentúl tegyük fel, hogy a  $P_1$  és  $P_2$  pontok egyike sem határpont. Ezzel azonban még mindig egy probléma merült fel, hiszen ha a  $P_i$ -k külső pontjai a  $K$  halmaznak, akkor két lényegesen különböző esetet is meg kell vizsgálni. Az egyik amikor a sugárforrás végtelen távoli pontban helyezkedik el, a másik amikor a sugarak véges pontból érkeznek. Az előbbi probléma lényegében azt mutatja, hogy a  $K$  halmaz vizsgálendő húrjai párhuzamosak lesznek egymással. Ezt az esetet hívjuk Hammer röntgenkép problémájának, de ennek bizonyítását itt nem végezzük el. Mi csak a második eset bizonyításával foglalkozunk, ezt fogjuk a pontforrásokra vonatkozó röntgenproblémának nevezni. Tehát ennek a dolgozatnak a végső célja az, hogy a következő tételt bizonyítsuk:

Ha a  $P_1$  és  $P_2$  belső pontjai a  $K$  konvex halmaznak, akkor a rajtuk átmenő  $f_1$  és  $f_2$  húrfüggvények egyértelműen meghatározzák a  $K$  halmazt, viszont ha a  $P_1$  és  $P_2$  külső pontok, akkor  $K$  halmaz vagy a  $P_1$  és  $P_2$  pontok között fekszik, vagy pedig a  $P_1$  és  $P_2$  azonos oldalán.

## 1.FEJEZET

A továbbiak érdekében mondjuk ki a következő lemmát:

1.Lemma: Legyenek  $\{x_r\}$  és  $\{y_r\}$  valós számsorozatok és legyenek  $M, M_1, R, \mu$  és  $k < 1$  nemnegatív számok.

Tegyük fel hogy:

$$|x_{r+1} - x_r| \leq \mu \cdot k^r \cdot |x_r| + M \cdot |y_r| + M_1 \cdot k^r \quad (1)$$

$$\text{és } |y_{r+1}| \leq \mu \cdot k^r \cdot |x_r| + k \cdot |y_r| + M_1 \cdot k^r \quad (2)$$

ahol  $r=1,2,\dots$

Ekkor  $y_r \rightarrow 0$  és  $x_r \rightarrow x_0$  valamely  $x_0$ -ra.

Részletezve: egy adott  $m$  számhoz, amelyre  $k < m < 1$ , létezik olyan  $A$  szám, amelyre érvényes, hogy

$$|x_1|, |y_1| \leq R$$

$$|y_r| \leq A \cdot m^r \quad (3)$$

$$\text{és } |x_r - x_0| \leq A \cdot m^r \quad (4)$$

Valamint, ha  $M_1=0$  és  $y_1=0$ , akkor egy adott  $\delta > 0$  -hoz

$$|x_0 - x_1| \leq \delta \cdot |x_1| \quad (5)$$

feltéve azt, hogy  $\mu$  elegendően kicsi, például

$$0 \leq \mu \leq \mu(M, k, \delta)$$

Bizonyítás: Ha az (1) bal oldaláról az  $|x_r|$ -et átvisszük a jobb oldalra, kapjuk:

$$|x_{r+1}| \leq (1 + \mu k') |x_r| + M |y_r| + M_1 k' \quad (6)$$

Most szorozzuk meg  $M$ -mel a (2)-t:

$$(*) \quad M \cdot |y_{r+1}| \leq M \cdot \mu \cdot k' \cdot |x_r| + k \cdot |y_r| \cdot M + M_1 \cdot M \cdot k'$$

valamint  $(1-k)$ -val szorozzuk a (6)-ot:

$$(**) \quad |x_{r+1}| \cdot (1-k) \leq (1 + \mu k') \cdot (1-k) \cdot |x_r| + M \cdot (1-k) |y_r| + M_1 (1-k) \cdot k'$$

Most adjuk össze a  $(*)$ -ot és a  $(**)$ -ot:

$$M |y_{r+1}| + |x_{r+1}| (1-k) \leq M \mu k' |x_r| + k |y_r| M + M_1 \cdot M \cdot k' + (1 + \mu k') \cdot (1-k) |x_r| + M \cdot (1-k) |y_r| + M_1 \cdot (1-k) \cdot k'$$

Átrendezve:

$$M |y_{r+1}| + |x_{r+1}| (1-k) \leq (1-k) |x_r| + M |y_r| + M \cdot \mu \cdot k' |x_r| + k |y_r| M + M_1 \cdot M \cdot k' + \mu \cdot k' \cdot (1-k) |x_r| - M \cdot k |y_r| + M_1 (1-k) k'$$

vagyis

$$M |y_{r+1}| + |x_{r+1}| (1-k) \leq (1-k) |x_r| + M |y_r| + \mu \cdot k' \cdot (M+1-k) |x_r| + M \cdot k' \cdot (M+1-k)$$

Bevezetve a következő jelöléseket:

$$z_r = (1-k) |x_r| + M |y_r|$$

$$z_{r+1} = (1-k) |x_{r+1}| + M |y_{r+1}|$$

$$(***) \quad z_{r+1} \leq z_r + \mu \cdot k' \cdot (M+1-k) |x_r| + M_1 \cdot k' \cdot (M+1-k)$$

Ezután vegyük a következő egyenlőtlenséget:

$$\mu \cdot M|y_r| + \mu \frac{M_1(M+1-k)}{1-k} \cdot k^r \geq 0$$

Ez biztosan igaz lesz, ha a tétel feltételeit figyelembe vesszük.

Végezzük el a következő átalakításokat:

$$\begin{aligned} \mu M|y_r| + \mu \frac{M_1(M+1-k)}{1-k} \cdot k^r &\geq M_1(1-k) + kM_1 - M_1 \\ M_1 + \mu M|y_r| + \mu \frac{M_1(M+1-k)}{1-k} \cdot k^r - kM_1 &\geq M_1(1-k) \\ \frac{M_1(M+1-k)}{1-k} + \frac{\mu M|y_r|(M+1-k)}{1-k} + \mu M_1 \frac{(M+1-k)^2}{(1-k)^2} k^r - \\ - kM_1 \frac{(M+1-k)}{1-k} &\geq M_1(M+1-k) \end{aligned}$$

Legyen  $\alpha = \frac{M_1(M+1-k)}{1-k}$  és  $\beta = \frac{\mu(M+1-k)}{1-k}$

Ezekkel felírva az előző sort:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta M|y_r| + \alpha \beta k^r - \alpha k &\geq M_1(M+1-k) \quad / \cdot k \\ \alpha k + \beta k M|y_r| + \alpha \beta k^{2r} - \alpha k^{r+1} &\geq M_1 k(M+1-k) \end{aligned}$$

A (\*\*\*)-ban láttuk, hogy

$$z_{r+1} \leq z_r + \mu \cdot k^r(M+1-k) |x_r| + M_1 k^r(M+1-k)$$

Az előzőek alapján viszont így tovább tudjuk felülről becsülni az egyenlőtlenség jobb oldalát:

$$\begin{aligned} z_{r+1} &\leq z_r + \mu \cdot k^r(M+1-k) |x_r| + \alpha k + \beta k M|y_r| + \alpha \beta k^{2r} - \\ &- \alpha k^{r+1} \end{aligned}$$

Írjuk be  $\beta$ -t ebbe a sorba:

$$z_{r+1} + \alpha k^{r+1} \leq z_r + \beta k(1-k) |x_r| + \beta k M|y_r| + \alpha \beta k^{2r} + \alpha k$$

Beírhatjuk most már  $z_r$  definícióját is:

$$z_{r+1} + \alpha k^{r+1} \leq z_r + z_r \beta k^r + \alpha \beta k^{2r} + \alpha k^r$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldal szorzattá alakítható:

$$z_{r+1} + \alpha k^{r+1} \leq (z_r + \alpha k^r)(1 + \beta k^r) \quad (7)$$

Ha  $k < 1$ , akkor  $\prod_{r=1}^{\infty} (1 + \beta k^r)$  konvergens.

Emiatt a  $\{z_r + \alpha k^r\}$  korlátos lesz, ugyanis:

$$z_2 + \alpha k^2 \leq (z_1 + \alpha k)(1 + \beta k)$$

$$z_3 + \alpha k^3 \leq (z_2 + \alpha k^2)(1 + \beta k^2)$$

$$z_4 + \alpha k^4 \leq (z_3 + \alpha k^3)(1 + \beta k^3)$$

⋮

$$z_{r+1} + \alpha k^{r+1} \leq (z_r + \alpha k^r)(1 + \beta k^r)$$

Szorozzuk össze a fenti egyenlőtlenségek megfelelő oldalait!

Rendezés után kapjuk:

$$z_{r+1} + \alpha k^{r+1} \leq (z_1 + \alpha k) \left[ \prod_{i=1}^r (1 + \beta k^i) \right]$$

A jobb oldal első tényezője egy konstans, a második tényező viszont, mivel konvergens, így korlátos is.

Tehát  $\{z_r + \alpha k^r\}$  korlátos lesz. Viszont ebből következik, hogy  $\{x_r\}$  és  $\{y_r\}$  is korlátos lesz, hiszen ezekből épül fel a  $\{z_r + \alpha k^r\}$ .

$$\left\{ (1-k)|x_r| + M|y_r| + \alpha k^r \right\} = \{z_r + \alpha k^r\}$$

Ezek után a (2) sorból következik, hogy

$$\begin{aligned} |y_{r+1}| &\leq \mu k^r |x_r| + M_1 k^r + k |y_r| \\ |y_{r+1}| &\leq M_2 k^r + k |y_r| \end{aligned}$$

ahol  $M_2$  független az  $r$ -től.

Ismételten alkalmazva az előző egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} |y_{r+1}| &\leq M_2 k^r + k |y_r| \leq M_2 k^r + k(M_2 k^{r-1} + k |y_{r-1}|) \leq \\ &\leq M_2 k^r + M_2 k^r + k^2(M_2 k^{r-2} + k |y_{r-2}|) \leq \\ &\leq M_2 k^r + M_2 k^r + M_2 k^r + \dots + M_2 k^r + |y_1| k^r \end{aligned}$$

Az utolsó becslésnél  $r$  darab  $(M_2 k^r)$  tag szerepel:

$$|y_{r+1}| \leq r M_2 k^r + |y_1| k^r \quad (8)$$

Ezt helyettesítsük be az (1) egyenlőtlenségbe:

$$\begin{aligned} |x_{r+1} - x_r| &\leq \mu k^r |x_r| + M |y_r| + M_1 k^r \\ |x_{r+1} - x_r| &\leq \mu k^r |x_r| + (r-1) M_2 k^{r-1} + k^{r-1} |y_1| + M_1 k^r \\ |x_{r+1} - x_r| &\leq k^r \left( \mu |x_r| + \frac{|y_1|}{k} + M_1 \right) - M_2 k^{r-1} + r M_2 k^{r-1} \end{aligned}$$

Legyen  $M_2^* \geq \mu |x_r| + \frac{|y_1|}{k} + M_1$ .

Így adódik, hogy:

$$\begin{aligned} |x_{r+1} - x_r| &\leq k^r M_2^* + r M_2 k^{r-1} \\ |x_{r+1} - x_r| &\leq r k^r M_2^* + r M_2 k^{r-1} \\ |x_{r+1} - x_r| &\leq r k^r \left( M_2^* + \frac{M_2}{k} \right) \end{aligned}$$

Legyen  $M_3 > M_2^* + \frac{M_2}{k}$ .

$$|x_{r+1} - x_r| \leq M_3 r k^r \leq (k^r \sqrt{r})^r M_3$$

Mivel  $r \rightarrow \infty$ , így  $\sqrt[r]{r} \rightarrow 1$  és  $k < m$  miatt adódik, hogy

$$|x_{r-1} - x_r| \leq M_4 m_r$$

ahol  $M_3$  és  $M_4$  független  $r$ -től.

Így, ha  $r < s$

$$\begin{aligned} |x_s - x_r| &= |x_s - x_{s-1} + x_{s-1} - x_{s-2} + x_{s-2} - \dots + x_{r+1} - x_r| \leq \\ &\leq |x_s - x_{s-1}| + |x_{s-1} - x_{s-2}| + \dots + |x_{r+1} - x_r| \end{aligned}$$

Itt minden tagra alkalmazhatjuk az előbb levezetett egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} &|x_s - x_{s-1}| + |x_{s-1} - x_{s-2}| + \dots + |x_{r+1} - x_r| \leq \\ &\leq M_4(m^{s-1} + m^{s-2} + \dots + m^r) = M_4 m^r (m^{s-r-1} + m^{s-r-2} + \dots + 1) = \\ &= M_4 m^r \frac{1 - m^{s-r}}{1 - m} \leq M_4 \frac{m^r}{1 - m} \end{aligned}$$

Tehát kaptuk, hogy

$$|x_s - x_r| \leq M_4 \frac{m^r}{1 - m} \quad (9)$$

Ha így adunk meg egy  $\{x_r\}$  Cauchy sorozatot, akkor a (8) sorból

$$\begin{aligned} |y_{r+1}| &\leq r M_2 k^r + k^r |y_1| \\ |y_{r+1}| &\leq (k \sqrt[r]{r})^r M_2 + k^r |y_1| \\ |y_{r+1}| &\leq m^r M_2 + m^r |y_1| \\ |y_{r+1}| &\leq m^r (M_2 + |y_1|) \end{aligned}$$

Legyen  $A \geq M_2 + |y_1|$ .

Így beláttuk a (3) állítást:  $|y_{r+1}| \leq A m^r$ .

A (9) sorból pedig adódik a (4) állítás, ha az  $A$  konstans úgy választjuk meg, hogy

$$A \geq \frac{M_4}{1-m}$$

Most bizonyítsuk be az Lemma állításának utolsó részét!

Ha  $M_1 = y_1 = 0$ , akkor a definíció miatt  $\alpha = 0$ .

Így a (7) sorból  $z_{r+1} \leq z_r (1 + \beta k^r)$ .

Ezután végezzük el a következő becslést:

$$\frac{z_{r+1}}{z_1} = \frac{z_{r+1}}{z_r} \cdot \frac{z_r}{z_{r-1}} \cdot \frac{z_{r-1}}{z_{r-2}} \cdot \dots \cdot \frac{z_3}{z_2} \cdot \frac{z_2}{z_1}$$

ez pedig az előző sor alapján biztosan kisebb mint

$$\prod_{q=1}^r (1 + \beta k^q)$$

Erről viszont már tudjuk, hogy korlátos, azaz

$$\frac{z_{r+1}}{z_1} \leq \prod_{q=1}^r (1 + \beta k^q) \leq M'_5$$

Helyettesítsük be a  $z_r$  definícióját és vegyük figyelembe az  $M_1 = y_1 = 0$  feltételt!

$$\frac{(1-k)|x_r| + M|y_r|}{(1-k)|x_1|} \leq M'_5$$

Mivel a számlálóban csak pozitív mennyiségek vannak

$$\frac{|x_r|}{|x_1|} \leq M'_5 \text{ és } \frac{|y_r|}{|x_1|} \leq \frac{1-k}{M} \cdot M'_5$$

Legyen  $M_5 = \max(M'_5, \frac{1-k}{M} \cdot M'_5)$

Ekkor teljesül, hogy  $|x_r|, |y_r| \leq M_5 |x_1|$  ahol  $M_5$  független az  $r$ -től és az  $x_1$ -től.

Vegyük a (2) sort, úgy, hogy a feltételeket figyelembe vesszük:

$$|y_{r+1}| \leq \mu k^r |x_r| + k |y_r|$$

Az  $|y_r|$ -ekre alkalmazzuk többször ezt az egyenlőtlenséget!

$$|y_{r+1}| \leq \mu k^r |x_r| + \mu k^r |x_{r-1}| + k^2 |y_{r-1}|$$

$$|y_{r+1}| \leq \mu k^r |x_r| + \mu k^r |x_{r-1}| + \mu k^r |x_{r-2}| + k^3 |y_{r-2}|$$

Végezzük el ezt a becslést  $r$ -szer

$$|y_{r+1}| \leq \mu k^r \sum_{i=1}^r |x_i| + k^{r+1} |y_1| \leq \mu k^r \sum_{i=1}^r |x_i|$$

$$|y_1| = 0$$

Mivel minden  $|x_i| \leq |x_1| M_5$  és  $r$  darab ilyen  $|x_i|$  van, tovább növelhetjük a jobb oldalt:

$$|y_{r+1}| \leq \mu k^r r M_5 |x_1|$$

Ezt az eredményt, és az  $|x_r| \leq |x_1| M_5$  -t használjuk fel az (1) sor becsléséhez, ha tudjuk, hogy  $M_1 = y_1 = 0$ .

$$|x_{r+1} - x_r| \leq \mu k^r |x_r| + M |y_r| + 0$$

$$|x_{r+1} - x_r| \leq \mu k^r M_5 |x_1| + M(r-1) M_5 \mu k^r |x_1| =$$

$$= \mu k^r |x_1| M_5 (1 + M(r-1)) =$$

$$= \mu m^r |x_1| M_5 \frac{(1 + M(r-1)) k^r}{m^r} =$$

(ahol tudjuk, hogy  $k \leq m \leq 1$ )

$$= \mu m^r |x_1| M_5 (1 + M(r-1)) \left( \frac{k}{m} \right)^r$$

Ekkor viszont  $\frac{k}{m} \leq 1$  így  $\left( \frac{k}{m} \right)^r \rightarrow 0$ , ha  $r \rightarrow \infty$ .

Belefoglalhatjuk a konstansokat egy nagyobb konstansba:

$$M_5 (1 + M(r-1)) \left( \frac{k}{m} \right)^r \leq M_6$$

azaz kaptuk:

$$|x_{r+1} - x_r| \leq M_6 m^r \mu |x_1|$$

Ha most az  $x_r$  határértékére felírjuk azt a sort, hogy

$$|x_0 - x_1| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_{r+1} - x_r| \leq |x_1| \mu M_6 \sum_{i=1}^{\infty} m^i$$

viszont innen látszik, hogy  $\sum_{i=1}^{\infty} m^i = \frac{m}{1-m}$

Azaz  $|x_0 - x_1| \leq \mu |x_1| M_6 \frac{m}{1-m}$

Legyen ezután  $\mu \leq \frac{\delta(1-m)}{M_6 m}$

behelyettesítve adódik az (5) sor állítása

$$|x_0 - x_1| \leq \delta |x_1|$$

Ezzel az 1. Lemmát teljes egészében beláttuk.

## 2. FEJEZET

Tegyük fel, hogy egy konvex halmaz, amelyet a  $\partial K$  görbe határol, valamint a  $P_1$  és  $P_2$  pontokon átmenő  $l$  egyenes messe a  $K$ -t. Ezzel a metszéssel az lesz a célunk, hogy találjunk az  $f_1$  és  $f_2$  húrfüggvények és az  $l \cap \partial K$   $X_0$  és  $Y_0$  pontjai között. A későbbiekben (4. lemma) meg fogjuk mutatni, hogy egy ismeretlen konvex halmaz  $X_0$  és  $Y_0$  pontjait az  $f_1$  és  $f_2$  húrfüggvények meghatározzák. Ehhez azonban először bizonyítsuk be a következő segédteételt. (Megjegyezzük, hogy az  $f_1(\theta)$  és  $f_2(\theta)$  megadásában a  $\theta$  szöget az  $l$ -től az óramutató járásával ellentétes irányban értjük, valamint a vektorok belső szorzatát a síkon  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  zárójellel fogjuk jelölni.)

2. Lemma: Legyen  $K$  egy konvex halmaz és legyen  $l$  egy  $K$ -t metsző egyenes, amely az  $X_0$  és  $Y_0$  pontokban metszi a  $\partial K$ -t. Legyen  $P$  egy pontja az  $l$ -nek és jelöljük a  $PX_0$  és  $PY_0$  előjeles hosszúságokat  $p$ -vel és  $q$ -val. Ha  $\varphi$  egy  $l$ -re merőleges egységvektor és  $K_\varepsilon$  egy olyan halmaz, amelyre

$$K_\varepsilon = \{X \in K : |\langle P-X, \varphi \rangle| \geq \varepsilon\}$$

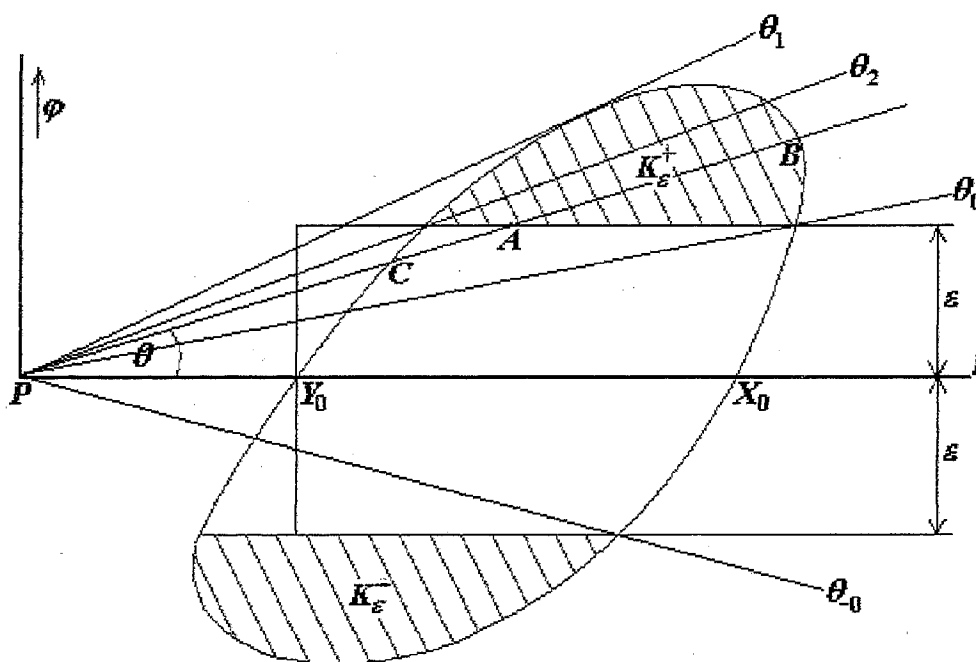
akkor

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[ \int_{K_\varepsilon} \frac{dX}{|\langle P-X, \varphi \rangle|} - \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta \right] = p \cdot \log p - q \cdot \log q - (p - q)$$

ahol  $f$  a  $K$  húrfüggvénye a  $P$  ponton át.

Bizonyítás:

Tekintsük a következő ábrát:



1. ábra

A bizonyítás első részében a  $K$  halmaz  $l$  "feletti" részével fogunk foglalkozni.

A sátozott részek lesznek azok a pontok, amelyek beletartoznak a  $K_\varepsilon$  halmazba. Először a  $K_\varepsilon^+$ -al foglalkozunk, amely nem más, mint a  $K_\varepsilon$   $l$  feletti része.

$$\int_{K_\varepsilon^+} \frac{dX}{|\langle P - X, \varphi \rangle|} = \int_{K_\varepsilon^+} \frac{dX}{|P - X| \sin \theta(x)}$$

ahol alkalmaztuk a belső szorzat definícióját, és figyelembe vettük az ábra jelöléseit. Térjünk át síkbeli polárkoordinátákra:

$X=(r\cos\theta, r\sin\theta)$  és  $dX=rdrd\theta$ , valamint

$$b(\theta)-a(\theta)\leq f(\theta)$$

(az ábra jelöléseivel:  $\overline{PA}=a(\theta)$ ,  $\overline{PB}=b(\theta)$  és  $\overline{PC}=c(\theta)$  )

Tehát ezekkel a jelölésekkel folytatva:

$$\int_{K_\varepsilon^+} \frac{dX}{|P-X|\sin\theta(x)} = \int_{\theta a(\theta)}^{b(\theta)} \int_{a(\theta)}^{b(\theta)} \frac{rdrd\theta}{r\sin(\theta)} = \int_{\theta a(\theta)}^{b(\theta)} \int_{a(\theta)}^{b(\theta)} \frac{drd\theta}{\sin(\theta)}$$

Kiintegrálva:

$$\int_{\theta a(\theta)}^{b(\theta)} \frac{drd\theta}{\sin(\theta)} = \int_{\theta} \frac{b(\theta)-a(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta$$

Nekünk elég, ha csak  $\theta_0$ -tól  $\theta_1$ -ig integrálunk, mert ezek között található a  $K_\varepsilon^+$ .

$$\begin{aligned} \int_{\theta} \frac{b(\theta)-a(\theta)}{\sin\theta} d\theta &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{b(\theta)-a(\theta)}{\sin\theta} d\theta = \\ &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{f(\theta)d\theta}{\sin\theta} - \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{a(\theta)-c(\theta)}{\sin\theta} d\theta \end{aligned}$$

mivel  $f(\theta)=b(\theta)-c(\theta)$ . Az első tagot bontsuk két részre és vegyük észre, hogy

a  $\theta_0$  függ az  $\varepsilon$ -tól. Így kapjuk, hogy

$$\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{f(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta - \int_{\varepsilon}^{\theta_0(\varepsilon)} \frac{f(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta - \int_{\theta_0(\varepsilon)}^{\theta_1} \frac{a(\theta)-b(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta \quad (*)$$

Tudjuk, hogy  $\theta_0(\varepsilon) = \kappa\varepsilon + \varepsilon^2\theta'_0(\varepsilon)$ .

Tegyük fel, hogy  $\theta_0(\varepsilon) = \kappa\varepsilon$

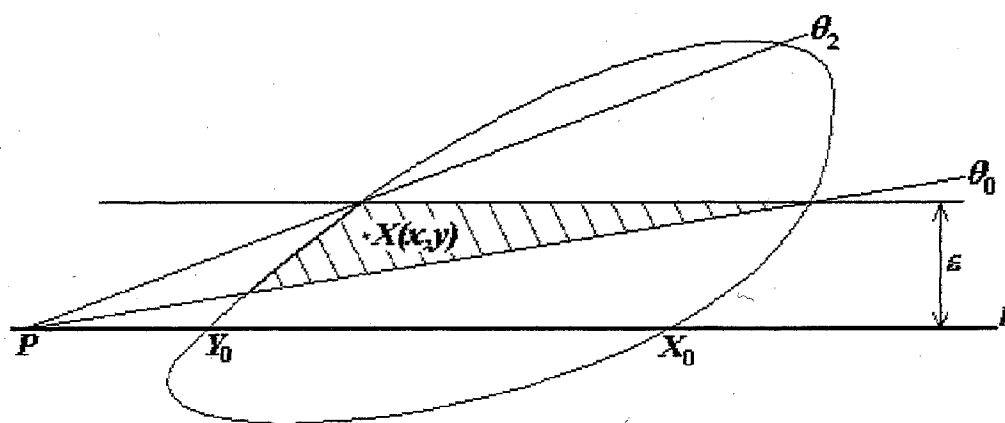
$$\text{akkor } \kappa = \lim_{\varepsilon} \frac{\theta_0(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

Így a (\*) 2. tagjára írhatjuk, hogy

$$\int_1^{\kappa} \frac{f(v\varepsilon)}{\sin v\varepsilon} \varepsilon dv \rightarrow (p-q) \int_1^{\kappa} \frac{1}{v} dv \quad \text{ha } \varepsilon \rightarrow 0$$

mivel  $\frac{\varepsilon}{\sin v\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{v}$  ha  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Mielőtt a 2. tagot alakítanánk tovább, vizsgáljuk meg a 3. tagot. Az 1. tag megegyezik az állításban szereplő taggal, így azzal nem foglalkozunk.



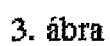
2. ábra

A 3. tagban elég csak  $\theta_0$ -tól  $\theta_2$ -ig integrálni, hiszen utána nincs értelme a számlálónak:

$$\int_{\theta_0(\varepsilon)}^{\theta_1} \frac{a(\theta) - c(\theta)}{\sin \theta} d\theta = \int_{\theta_0(\varepsilon)}^{\theta_2(\varepsilon)} \frac{a(\theta) - c(\theta)}{\sin \theta} d\theta = \int_{\theta_0(\varepsilon)}^{\theta_2(\varepsilon)} \int_{c(\theta)}^{a(\theta)} \frac{r dr d\theta}{r \sin \theta}$$

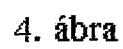
Jelöljük most a besatírozott területet  $M$ -mel, valamint az egyszerűség kedvéért vezessük be a  $dX = r dr d\theta$  és  $y = r \sin \theta$  jelöléseket.

Mielőtt tovább mennénk vegyük figyelembe a következőket:



ahol  $\overline{PY_0} = q$  és  $\overline{PX_0} = p$ .

Kinagyítva a hasonló háromszögeket



Tehát

$$\overline{X0} = y - \delta$$

$$\overline{0L} = \delta$$

$$\overline{Y_0 L} = \delta'$$

$$\overline{PY_0} = q$$

$$\text{innen } \overline{XJ} = \frac{y - \delta}{\delta} (q + \delta')$$

valamint láthatjuk, hogy  $\delta' = \text{ctg} \delta$

Felhasználva a párhuzamos szelők tételét (előző ábra)

$$\frac{\varepsilon}{\delta} = \frac{p + \varepsilon'}{q + \delta} \rightarrow \frac{p}{q} \quad \text{ha } \varepsilon \rightarrow 0$$

$$\text{innen } \delta(\varepsilon) = \frac{p}{q} \varepsilon + \varepsilon^2 \kappa(\varepsilon)$$

legyen  $y = v\varepsilon$ , ekkor  $dy = \varepsilon dv$

Mindezeket figyelembe véve az új jelölésekkel folytatva a 3. tag átalakításait:

$$\int_{M^y} \frac{1}{y} dX = \int_{\delta(\varepsilon)}^{\varepsilon} \frac{1}{y} \frac{(q + \delta'(\varepsilon)) \cdot (q - \delta(\varepsilon))}{\delta(\varepsilon)} dy$$

vagyis áttértünk az  $X$  szerinti integrálásról az  $y$  szerinti integrálásra.

Felhasználva számításainkat kapjuk, hogy

$$\int_{\frac{q}{p} + \varepsilon \kappa(\varepsilon)}^1 \frac{1}{v\varepsilon} \frac{\left( q + \text{ctg}\left(\frac{q}{p} \varepsilon + \varepsilon^2 \kappa(\varepsilon)\right) \right) \cdot \left( v\varepsilon - \frac{q}{p} \varepsilon - \varepsilon^2 \kappa(\varepsilon) \right)}{\frac{q}{p} \varepsilon + \varepsilon^2 \kappa(\varepsilon)} \varepsilon dv$$

Abban az esetben, ha az  $\varepsilon \rightarrow 0$ -hoz, a következő határértéket kapjuk:

$$\int_{\frac{q}{p}}^1 \frac{q \left( v - \frac{q}{p} \right)}{\frac{q}{p}} \frac{dv}{v} \quad \text{ahol legyen } v = \frac{X}{p}, \quad \text{így } dX = p dv.$$

Helyettesítsünk be!

$$\int_p^q \frac{\left( \frac{X}{p} - \frac{q}{p} \right) p}{\frac{q}{p}} \frac{1}{p} dX = \int_p^q \frac{(p - q)}{X} dX = (p - q) - \int_p^q \frac{q}{X} dX =$$

$$= p - q - q[\ln X]_q^p = p - q - q(\ln p - \ln q)$$

Tehát kaptuk, hogy

$$\int_{\theta_0(\varepsilon)}^{\theta_1} \frac{a(\theta) - c(\theta)}{\sin \theta} d\theta = (p - q) + q(\ln p - \ln q) \quad (**)$$

Tudjuk, hogy  $\kappa = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\theta_0(\varepsilon)}{\varepsilon}$  ha  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Így írhatjuk, hogy

$$\kappa = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \theta_0(\varepsilon)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{\varepsilon}{p + \varepsilon'}}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{p + \varepsilon'} = \frac{1}{p}$$

Így most már visszatérhetünk a 2. tag alakításához:

$$\int_1^{\kappa} \frac{f(v\varepsilon)}{\sin v\varepsilon} \varepsilon dv \rightarrow (p - q) \int_1^{\kappa} \frac{1}{v} dv \quad \text{ha } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Így folytatva:

$$(p - q) \int_1^{\frac{1}{p}} \frac{1}{v} dv = (p - q) \left[ \ln v \right]_1^{\frac{1}{p}} = (q - p) \ln p.$$

Tehát kaptuk, hogy

$$\int_{\varepsilon}^{\theta_0(\varepsilon)} \frac{f(\theta) d\theta}{\sin \theta} = (q - p) \ln p \quad (***)$$

Most már (\*\*) és (\*\*\*) segítségével visszatérhetünk a (\*) leírásához,

ha  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \int_{K_{\varepsilon}^+} \frac{dX}{\langle P - X, \varphi \rangle} &= \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\theta)}{\sin \theta} d\theta - (q - p) \ln p - (p - q - q \ln p + q \ln q) = \\ &= \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\theta)}{\sin \theta} d\theta + q - p + p \ln p - q \ln q \end{aligned}$$

Hasonlóan végigcsinálva az eljárást a  $K_\varepsilon^-$  tartományra is, ha  $\varepsilon \rightarrow 0$  kapjuk,

$$\int_{K_\varepsilon^-} \frac{dX}{\langle P-X, \varphi \rangle} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\theta)}{\sin \theta} d\theta + q - p + p \ln p - q \ln q$$

A kettőt összeadva adódik az állítás, ha  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{K_\varepsilon} = \int_{K_\varepsilon^+} + \int_{K_\varepsilon^-} = \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\theta)}{\sin \theta} d\theta + 2(q - p + p \ln p - q \ln q)$$

A végeredmény:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[ \int_{K_\varepsilon} \frac{dX}{\langle P-X, \varphi \rangle} - \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\theta)}{\sin \theta} d\theta \right] = p \ln p - q \ln q - (p - q)$$

Ezt a Lemmát tovább folytatva, nézzük meg hogyan tudjuk alkalmazni előbbi eredményünket két különböző  $P_1$  és  $P_2$  pont esetén.

Ehhez kapcsolódik a 3. lemma.

### 3. FEJEZET

3. Lemma: Legyenek a  $K$  konvex halmaz hűfűggvényei a  $P_1$  és  $P_2$  pontokban  $f_1$  és  $f_2$ . Legyen  $l$  olyan egyenes, átmegy a  $P_1$  illetve a  $P_2$  pontokon és metszi  $K$  halmazt.

Vegyük a  $p_1, q_1, p_2, q_2$  értékeket a következő előjeles távolságokra:

$$P_1X_0, P_1Y_0, P_2X_0, P_2Y_0.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[ \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f_2(\theta)}{\sin \theta} d\theta - \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f_1(\theta)}{\sin \theta} d\theta \right] = \\ = (p_1 \log|p_1| - q_1 \log|q_1|) - (p_2 \log|p_2| - q_2 \log|q_2|) \end{aligned}$$

Bizonyítás:

Válasszuk úgy a  $\varphi$  egységvektort, hogy legyen merőleges az  $l$  egyenesre, vagyis

$$\langle P_1 - P_2, \varphi \rangle = 0.$$

Ebből viszont következik, hogy

$$\int_{K_\varepsilon} \frac{dX}{|\langle P_1 - X, \varphi \rangle|} = \int_{K_\varepsilon} \frac{dX}{|\langle P_2 - X, \varphi \rangle|}$$

Most  $p_1 - q_1 = p_2 - q_2$ , mert ez éppen az  $X_0 Y_0$  húr hossza, így ha alkalmazzuk a 2. lemmát az előző sor mindkét oldalára

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[ \int_{K_\varepsilon} \frac{dX}{|\langle P_1 - X, \varphi \rangle|} - \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} \frac{f_1(\theta)}{\sin \theta} d\theta \right] = p_1 \log|p_1| - q_1 \log|q_1| - (p_1 - q_1)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[ \int_{K_\varepsilon} \frac{dX}{|\langle P_2 - X, \varphi \rangle|} - \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} \frac{f_2(\theta)}{\sin \theta} d\theta \right] = p_2 \log|p_2| - q_2 \log|q_2| - (p_2 - q_2)$$

Adjuk össze a két sort, és vegyük figyelembe az eddigi kikötéseket:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[ \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} \frac{f_2(\theta)}{\sin \theta} d\theta - \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} \frac{f_1(\theta)}{\sin \theta} d\theta \right] =$$

$$= (p_1 \log|p_1| - q_1 \log|q_1|) - (p_2 \log|p_2| - q_2 \log|q_2|)$$

és éppen ez volt az állítás.

A következő lemmában próbáljuk meghatározni a  $P_1$  és  $P_2$  pontokból húzott  $f_1$  és  $f_2$  húrfüggvények segítségével azokat az  $X_0$  és  $Y_0$  pontokat, amelyekben az  $l$  egyenes metszi a  $\partial K$ -t. (Az  $l$  egyenes tartalmazza a  $P_1$  és  $P_2$  pontokat.)

Emlékezzünk rá, hogy a korábbiakban említettük már, hogy az  $f_1$  és  $f_2$  húrfüggvényekből a  $P_1$  és  $P_2$  pontoknak a  $K$ -hoz való viszonya egyértelmű.

## 4. FEJEZET

Ezek után kimondhatjuk a következő állítást:

4. Lemma: Ha  $P_1$  és  $P_2$  belső pontjai  $K$ -nak, akkor az  $f_1$  és  $f_2$  húrfüggvények egyértelműen megadják  $X_0$  és  $Y_0$  pontokat. Abban az esetben, ha  $P_1$  és  $P_2$  külső pontok, akkor az  $X_0Y_0$  szakasz vagy  $P_1$  és  $P_2$  között van, vagy a  $P_1$  és  $P_2$  pontok ugyanazon az oldalán vannak az  $X_0Y_0$  szakasznak.

Bizonyítás:

Legyen  $m = f_1(0) = f_2(0) = p_1 - q_1 = p_2 - q_2$ .

A 3. Lemma szerint meghatározhatjuk  $f_1$  és  $f_2$  húrfüggvények segítségével

$[F(p_1) - F(p_2)]$ -t, ahol

$$F(t) = t \log |t| - (t - m) \log |t - m|$$

Ismerjük a  $(p_1 - p_2)$ -t (ez a  $P_1P_2$  távolság), és így kapunk egy kétismeretlenes egyenletrendszer  $p_1$ -re és  $p_2$ -re:

$$\left. \begin{aligned} p_1 - p_2 &= A \\ F(p_1) - F(p_2) &= B \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Tegyük az origót a  $P_1$  pontba. Ekkor minden esetben  $m > 0$ .

Keressük a megoldások számát.

$$\begin{aligned} p_1 &= p_2 + A \\ \underline{F(p_1) &= F(p_2) + B} \\ F(p_2 + A) &= F(p_2) + B \end{aligned}$$

Keressük a

$$\varphi(p_2) = F(p_2 + A) - F(p_2) - B = 0 \quad \text{egyenlet megoldásait.}$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(p_2) &= \dot{F}(p_2 + A) - \dot{F}(p_2) = \\ &= \ln \left| \frac{p_2 + A}{p_2 + A - m} \right| - \ln \left| \frac{p_2}{p_2 - m} \right| = \\ &= \ln \left| \frac{(p_2 + A)(p_2 - m)}{p_2(p_2 + A - m)} \right| \end{aligned}$$

Keressük meg a  $\varphi(p_2)$  függvény lokális minimumát illetve maximumát!

a.,

$$\frac{(p_2 + A)(p_2 - m)}{p_2(p_2 + A - m)} = 1$$

$$p_2^2 + Ap_2 - mp_2 - Am = p_2^2 + p_2A - mp_2$$

$$-Am = 0$$

Nincs megoldás, hiszen  $m \neq 0$  és  $A \neq 0$ , mert akkor  $p_1 = p_2$  lenne.

b.,

$$\frac{(p_2 + A)(p_2 - m)}{p_2(p_2 + A - m)} = -1$$

$$-(p_2 + A)(p_2 - m) = p_2(p_2 + A - m)$$

$$0 = p_2^2 + p_2(A - m) - \frac{Am}{2}$$

$$p_2 = \frac{m - A \pm \sqrt{(A - m)^2 - 2Am}}{2} = \frac{m - A \pm \sqrt{A^2 + m^2}}{2}$$

Tegyük fel, hogy  $A > 0$ .

Vizsgáljuk meg a  $\varphi(p_2)$  függvény grafikonját igen nagy  $p_2$  esetén!

$$A > 0 \Leftrightarrow -Am < 0 \Leftrightarrow \frac{p_2 + A}{p_2 + A - m} < \frac{p_2}{p_2 - m}$$

Tehát a függvény monoton csökken.

Milyen a  $\varphi(p_2)$  függvény grafikonja igen kicsi  $p_2$  esetén?

$$A > 0 \Leftrightarrow -Am < 0 \Leftrightarrow \frac{p_2 + A}{p_2 + A - m} < \frac{p_2}{p_2 - m}$$

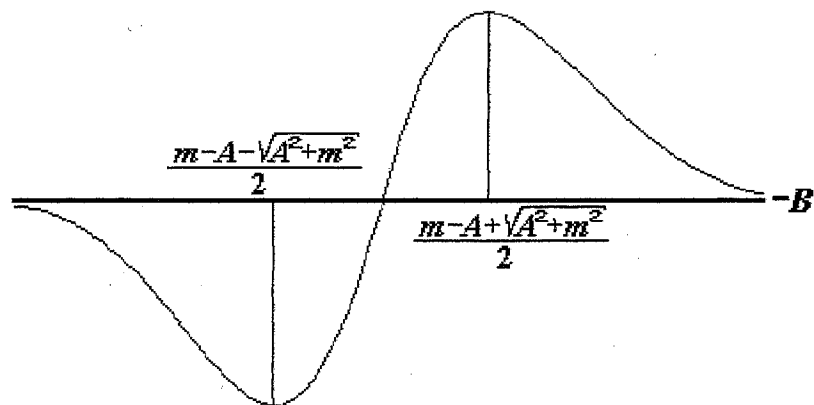
Ekkor is monoton csökkenő a függvény.

Mekkora a  $\varphi$  értéke  $p_2 = +\infty$  és  $p_2 = -\infty$  esetén?

$$\varphi(+\infty) = F(+\infty) - F(+\infty) - B = -B$$

$$\varphi(-\infty) = F(-\infty) - F(-\infty) - B = -B$$

Rajzoljuk meg a függvényt!



5. ábra

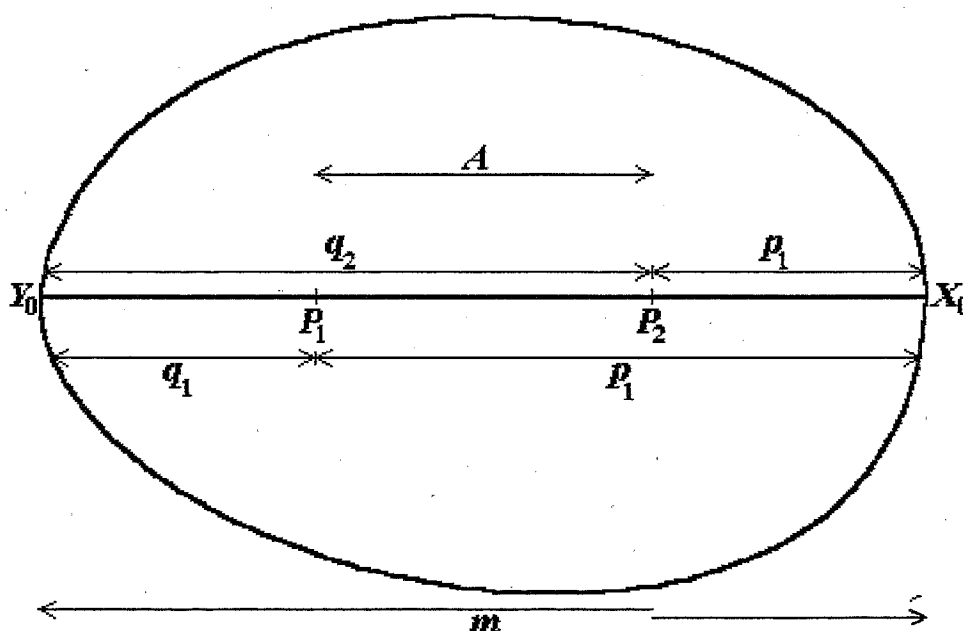
A függvény grafikonjából már látszik, hogy az egyenletnek legfeljebb két gyöke van. Határozzuk meg az origó helyét!

Mivel

$$\frac{m - A - \sqrt{A^2 + m^2}}{2} < 0 \quad \text{és} \quad \frac{m - A + \sqrt{A^2 + m^2}}{2} > 0$$

az origó a két érték között van valahol.

Próbáljuk az ábra alapján kigyűjteni, hogy mit tudunk mondani  $p_2$ -ről abban az esetben, ha mindkét pont belső pont.



6. ábra

Belső pontoknál:  $0 < p_2 < m - A$

Meg kell vizsgálnunk a függvény menetét a  $[0, m - A]$  intervallumon.

Tudjuk:  $0 < 2mA$

$$A^2 + m^2 > A^2 + m^2 - 2mA$$

$$\sqrt{A^2 + m^2} > (m - A)$$

$$m - A + \sqrt{A^2 + m^2} > 2(m - A)$$

$$\frac{m-A+\sqrt{A^2+m^2}}{2} > m-A$$

Viszont tudjuk, hogy a  $\left[0, \frac{m-A+\sqrt{A^2+m^2}}{2}\right]$  intervallumon a függvény

monoton növekedő, így a  $[0, m-A]$  intervallumon is monoton növekedő.

Tehát így létezik, és csak egy megoldás létezik a belső pontok esetében.

Külső pontok esetében ha a  $K$  a két pont között van:

Ekkor tudjuk, hogy  $p_2 < 0$  és  $p_1 > m$

$$p_1 = p_2 + A$$

$$\text{így } p_2 > m-A,$$

de ebben az esetben  $m < A$  tehát:

Tudjuk, hogy  $\frac{m-A-\sqrt{A^2+m^2}}{2} < m-A,$

és az  $\left[\frac{m-A-\sqrt{A^2+m^2}}{2}, 0\right]$  intervallumon a függvény monoton növekvő.

Ekkor látszik, hogy a  $[m-A, 0]$  intervallumon is monoton növekvő, így

ebben az esetben is csak pontosan egy megoldás létezik.

Külső pontok esetében, ha a két pont a  $K$  azonos oldalán helyezkedik el:

$$p_2 > 0 \text{ és } q_1 > A \Rightarrow p_1 - m > A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_2 + A - m > A \Rightarrow p_2 > m$$

Tehát  $p_2 > m$

Tudjuk viszont, hogy a  $\left[ \frac{m - A + \sqrt{A^2 + m^2}}{2}, +\infty \right)$  intervallumon monoton

csökkenő a függvény és

$$\frac{m - A + \sqrt{A^2 + m^2}}{2} < m$$

így az  $[m, +\infty)$  intervallumon is monoton csökkenő a függvény, tehát ebben az esetben is csak pontosan egy megoldást találhatunk.

Ezzel viszont éppen lemmánkat bizonyítottuk be.

## 5.FEJEZET

Az előző lemmából tehát már ismerjük a  $\partial K$  görbe és a  $P_1, P_2$  pontokra illeszkedő  $l$  egyenes  $X_0$  és  $Y_0$  metszéspontjait. Próbáljuk meghatározni az  $X_0$  és  $Y_0$  egy környezetében a  $\partial K$  görbét. Erről szól a következő lemma.

5. Lemma: Tegyük fel, hogy  $X_0$  és  $Y_0$  már ismertek és  $P_1$  és  $P_2$  pontokról tudjuk, hogy mindketten belső, vagy külső pontok. Ekkor  $\partial K$  az  $X_0$  és  $Y_0$  szomszédságában meghatározható az  $f_1$  és  $f_2$  húrfüggvényekkel.

Bizonyítás: Az előző lemmában is láthattuk, hogy ha  $P_1$  és  $P_2$  mindketten belső, vagy külső pontok, akkor három lényegesen különböző esetet különböztethetünk meg:

- a.,  $P_1$  és  $P_2$  mindketten belső pontok
- b.,  $P_1$  és  $P_2$  a  $K$ -nak ugyanazon az oldalán helyezkednek el
- c.,  $P_1$  és  $P_2$  a  $K$ -nak különböző az oldalán helyezkednek el

Mi csak az a., részre látjuk be az állítást, a többi részre is hasonlóan történik a bizonyítás, az esetleges eltéréseket a bizonyítás végén megjegyezzük.

Tegyük fel, hogy az  $Y_0, P_1, P_2, X_0$  az  $l$  egyenesen helyezkednek el ebben a sorrendben.

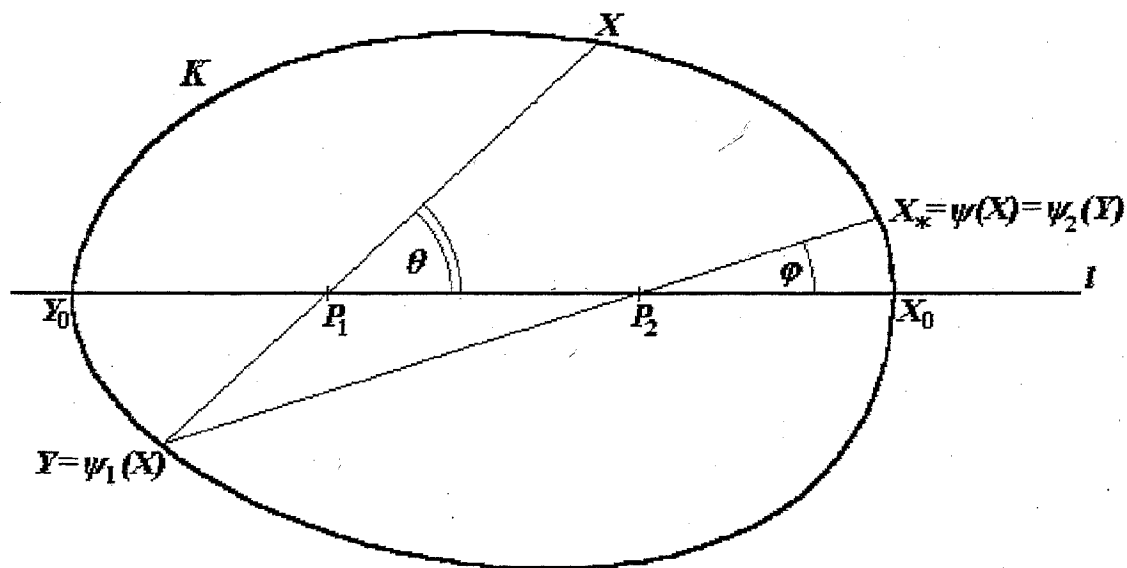
Definiáljuk a sík  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  és  $\psi$  leképezéseit a következőképpen:

$\psi_1(X)$ : Ha az  $l$ -nek a  $P_1X$ -el bezárt szöge  $\theta$  (az óramutató járásával ellentétes irányban felmérve), akkor a  $\psi_1(X)$  az a pont, amely az  $XP_1$  meghosszabbításán fekszik  $f_1(\theta)$  távolságra az  $X$ -től úgy, hogy a  $P_1$  az  $X$  és a  $\psi_1(X)$  között legyen.

$\psi_2(Y)$ : ha az  $l$ -nek a  $P_2Y$ -al bezárt szöge  $\varphi$  (az óramutató járásával ellentétes irányban felmérve), akkor a  $\psi_2(Y)$  az a pont, amely az  $YP_2$  meghosszabbításán fekszik  $f_2(\varphi)$  távolságra az  $Y$ -től úgy, hogy a  $P_2$  az  $Y$  és a  $\psi_2(Y)$  között legyen.

Ezután legyen :  $\psi(x) = \psi_2(\psi_1(X))$

Mivel ezek a leképezések az  $X_0$  és  $Y_0$  közvetlen környezetében jól definiáltak, ezért ha veszünk egy olyan  $X$  pontot, amely rajta van a  $\partial K$  görbén, akkor a definíciókból következően a  $\psi_1(X)$  és a  $\psi_2(X)$  is rajta lesz a görbén.



7. ábra

Mivel  $l$  metszi a  $K$  halmazt, valamint  $f_1$  és  $f_2$  valamely konvex halmaz hűfűggvényei, így  $f_1$  és  $f_2$  Lipschitz-fűggvények, amelyekre léteznek olyan  $c_1$  és  $c_2$  konstansok, hogy minden  $\theta$ -ra és  $\theta'$ -re

$$\begin{aligned} & \text{és} \quad |f_1(\theta) \cos \theta - f_1(\theta') \cos \theta'| \leq c_1 |\theta - \theta'| \\ & \quad |f_2(\theta) \cos \theta - f_2(\theta') \cos \theta'| \leq c_2 |\theta - \theta'| \end{aligned} \quad (11)$$

Vegyük a következő  $a, b, c, d$  számokat úgy

$$\begin{aligned} & 0 < a < |X_0 P_1|, \quad 0 < c < |Y_0 P_2| \\ & |P_1 Y_0| < b, \quad |P_2 X_0| < d \quad \text{és} \quad \frac{bd}{ac} < 1 \end{aligned} \quad (12)$$

Vegyük az  $X_0$  és  $Y_0$  pontoknak olyan kör alakú  $N(X_0)$  és  $N(Y_0)$  környezeteit, amelyekre ha  $X \in N(X_0)$ , akkor

$$|XP_1| > a \quad \text{és} \quad |P_2 X| < d$$

és ha  $Y \in N(Y_0)$ , akkor

$$|YP_2| > c \text{ és } |P_1Y| < b$$

Tegyük fel, hogy

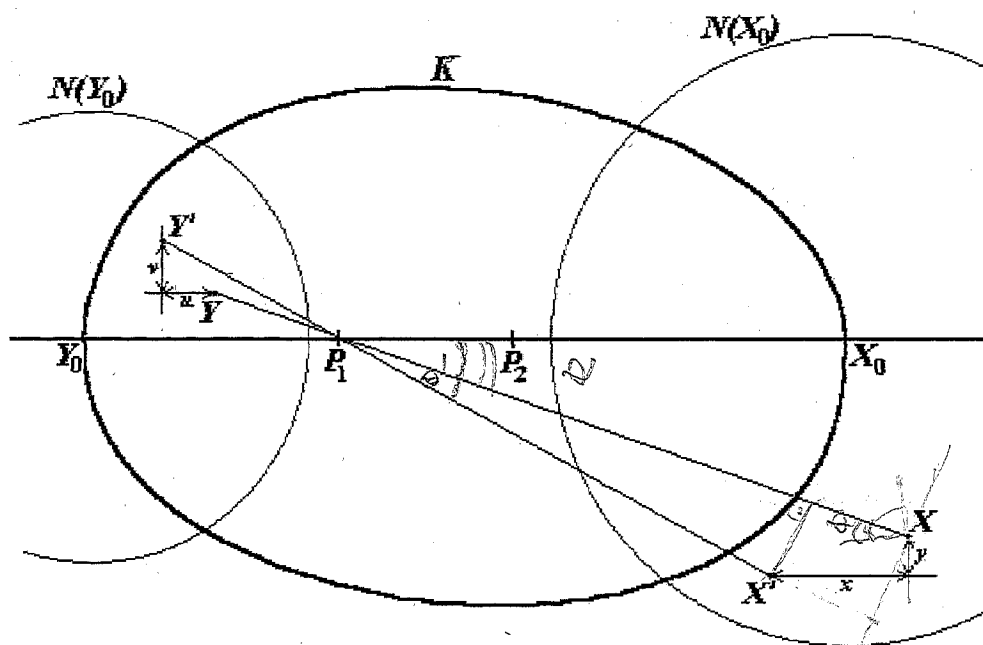
$$X, X' \in N(X_0) \text{ és } Y, Y' \in N(Y_0)$$

ahol  $Y = \psi_1(X)$  és  $Y' = \psi_1(X')$

Vegyünk olyan koordinátatengelyeket, amelyek párhuzamosak az  $l$ -l, illetve merőlegesek  $l$ -re. Koordinátázzuk az  $X'$  és  $Y'$  pontokat a következőképpen:

$$X' = X + (x, y) \text{ és } Y' = Y + (u, v).$$

Legyen  $\theta' = \angle X'P_1P_2$  és  $\varphi = \angle YP_2P_1$ .



8. ábra

Kezdjük hozzá az  $|x-u|$  és a  $|v|$  becsléséhez  $|x|$  és  $|y|$  segítségével.

Ehhez először tekintsük az  $X'$  vetületét az  $X$ -en átmenő  $XY$ -ra merőleges egyenesre, valamint  $Y'$  vetületét az  $Y$ -en átmenő  $XY$ -ra merőleges egyenesre.

Vegyünk fel az  $XY$  egyenesen egy egységvektort, amelynek koordinátái:

$$(\cos \theta, \sin \theta)$$

Ha most vesszük az erre merőleges egységvektort, akkor éppen az  $XY$  egyenesre merőleges egyenes egységvektorát kaptuk. Ennek segítségével felírhatjuk az  $X'$  pont merőleges vetületének és az  $X$ -nek a távolságát:

$$(x, y)(-\sin \theta, \cos \theta) = y \cos \theta - x \sin \theta$$

Ugyanígy meghatározhatjuk az  $Y'$  pont merőleges vetületének a távolságát  $Y$ -től:

$$(u, v)(-\sin \theta, \cos \theta) = v \cos \theta - u \sin \theta$$

Ezután felírhatjuk, hogy a háromszögek hasonlósága alapján ezen szakaszok aránya megegyezik az  $Y'P_1$  és  $X'P_1$  szakaszok arányával, amelyekről a (12)-ből tudjuk, hogy

$$|Y'P_1| < b \text{ és } |X'P_1| > a$$

Tehát

$$\frac{|v \cos \theta - u \sin \theta|}{|y \cos \theta - x \sin \theta|} = \frac{|Y'P_1|}{|X'P_1|} \leq \frac{b}{a}$$

$$\text{vagyis } |v \cos \theta - u \sin \theta| \leq \frac{b}{a} |y \cos \theta - x \sin \theta|.$$

Osszunk le  $\cos \theta$ -val és rendezzük át!

$$|v| \leq \left(\frac{a}{b}\right) |y| + |\operatorname{tg} \theta| \left(|u| + \frac{b}{a} |x|\right) \quad (13)$$

A továbbiakban legyen  $\theta' = X' P_1 P_2$ .

Ennek a szögnek a segítségével végezzük el az alábbi becslést:

$$\frac{|y \cos \theta - x \sin \theta|}{|P_1 X'|} = |\sin(\theta' - \theta)| \geq |\theta' - \theta|(1 - \varepsilon)$$

$$\text{mivel } 1 \geq \frac{|\sin x|}{|x|} \geq 1 - \varepsilon$$

Ezek után  $a$ -val leosztva és  $|P_1 X'|$ -vel beszorozva

$$\frac{|y \cos \theta - x \sin \theta|}{a} \geq |\theta' - \theta| \frac{(1 - \varepsilon) |P_1 X'|}{a}$$

Mivel  $|P_1 X'| > a$ , ezért létezik olyan  $\delta$ , hogy

$$|P_1 X'| = a + \delta$$

$$\text{Ezért } |\theta' - \theta| \frac{(1 - \varepsilon) |P_1 X'|}{a} = |\theta' - \theta| \frac{(1 - \varepsilon)(a + \delta)}{a}$$

Vegyük ezek után olyan  $\varepsilon$ -t, amelyre fennáll:

$$\varepsilon \leq 1 - \frac{a}{a + \delta}$$

Ezzel folytatva tovább:

$$|\theta' - \theta| \frac{(1 - \varepsilon)(a + \delta)}{a} \geq |\theta' - \theta|$$

Azaz, ha  $X'$  elég közel van  $X$ -hez ( $N(\theta)$  elég kicsi, ), akkor

$$|(\theta - \theta')| \leq \frac{1}{a} |y \cos \theta - x \sin \theta| \leq \frac{1}{a} (|y| + |x| |\theta|)$$

Ezt az eredményünket, és a (11) sorban szereplő egyenlőtlenséget fogjuk felhasználni arra, hogy az  $XY$  és  $X'Y'$  szakaszoknak az  $l$  egyenesre való vetületeit vizsgáljuk:

$$\begin{aligned} |x - u| &= |f_1(\theta) \cos \theta - f_1(\theta') \cos \theta'| \leq \\ &\leq c_1 |(\theta - \theta')| \leq \frac{c_1}{a} (|y| + |x| |\theta|) \end{aligned}$$

Legyen ezután  $\frac{c_1}{a} \leq A$ , ekkor

$$|x - u| \leq A |y| + A |x| |\theta| \quad (14)$$

Válasszuk úgy az  $A'$ -t és az  $A''$ -t, hogy

$$\frac{c_1}{a} \leq A' \quad \text{és} \quad \frac{c_1 |\theta|}{a} \leq A''$$

Ekkor az előzőek alapján

$$|x - u| \leq A' |y| + A'' |x|$$

mivel  $|x| - |u| \leq |x - u|$

$$|u| - |x| \leq A' |y| + A'' |x|$$

Tegyük fel, hogy az  $A'$  és az  $A''$  között fennáll:

$$A'' = A' - \frac{b}{a} - 1$$

Ezt beírva az előző sorba:

$$\begin{aligned} |u| - |x| &\leq A' |y| + A' |x| - \frac{b}{a} |x| - |x| \\ |u| + \frac{b}{a} |x| &\leq (|y| + |x|) A' \end{aligned}$$

Legyen ezután: 
$$A \geq A' \left[ \max \frac{|\tan \theta|}{\theta} \right]$$

ezt beírva a következő sorba:

$$\frac{|\tan \theta|}{\theta} \left( |u| + \frac{b}{a} |x| \right) \leq (|y| + |x|) A' \left[ \max \frac{|\tan \theta|}{\theta} \right]$$

$$|\tan \theta| \left( |u| + \frac{b}{a} |x| \right) \leq A |\theta| |y| + A |\theta| |x|$$

Ha hozzáadunk mindkét oldalhoz  $\frac{b}{a}|y|$ -t, akkor éppen a (13) sort becsültük felülről

$$|v| \leq \left( A |\theta| + \frac{b}{a} \right) |y| + A |x| |\theta| \quad (15)$$

Ha most kikötjük, hogy

$$A = \max \left( \frac{c_1}{a}, A' \max \frac{|\tan \theta|}{\theta} \right) \quad \text{és} \quad |\theta| \leq \frac{1}{4} \pi,$$

akkor teljesülni fog a (14) és (15) sor.

Legyen ezután

$$X_* = \psi_2(Y) \quad \text{és} \quad X'_* = \psi_2(Y')$$

Ekkor tegyük fel, hogy az előzőekhez hasonlóan koordinátázva

$$X'_* = X_* + (x_*, y_*) \quad \text{és} \quad \theta_* = X_* P_1 P_2 \angle$$

Ha feltesszük, hogy az  $X_*, X'_* \in N(X_0)$ , akkor látszik, hogy a (14) illetve a

(15) sorokhoz hasonló eredmény adódik:

$$|u - x_*| \leq B |v| + B |u| |\varphi| \quad (16)$$

$$\text{és} \quad |y_*| \leq \left( B |\theta| + \frac{d}{c} \right)^{|v|} + B |u| |\varphi| \quad (17)$$

ahol  $B$  az  $A$ -hoz teljesen hasonló módon meghatározható  $c, d, c_2$ -ből, és feltettük, hogy  $|\varphi| \leq \frac{1}{4}\pi$ .

Ha figyelembe vesszük, hogy  $|\varphi| \leq |\theta|$ , akkor a (14) és (16) sorokat összeadva kapjuk:

$$\begin{aligned}
 |x - x_*| &\leq |x - u + u - x_*| \leq |x - u| + |u - x_*| \leq \\
 &\leq A|y| + B|v| + A|x||\theta| + B|u||\varphi| \leq \\
 &(\text{beírva az } |v| \text{-re és } |u| \text{-ra kapott kifejezéseket}) \\
 &\leq A|y| + \left( BA|\theta| + B\frac{b}{a} \right)|y| + BA|x||\theta| + BA'|y||\varphi| + BA'|x||\varphi| \leq \\
 &(\text{mivel } |\varphi| \leq |\theta| \leq \frac{\pi}{4}) \\
 &\leq \left[ A + BA\frac{\pi}{4} + B\frac{b}{a} + BA'\frac{\pi}{4} \right]|y| + [A + BA + BA']|x||\theta| \quad (*)
 \end{aligned}$$

Ugyanezeket a feltételeket felhasználva a (17) sorba beírva a (15) sort

$$\begin{aligned}
 |y_*| &\leq \left( B|\varphi| + \frac{d}{c} \right) \left( A|\theta||y| + \frac{b}{a}|y| + A|x||\theta| \right) + B|u||\varphi| \\
 |y_*| &\leq B|\varphi|A|\theta||y| + \frac{d}{c}A|\theta||y| + B|\varphi|\frac{b}{a}|y| + \frac{db}{ac}|y| + \\
 &\quad + B|\varphi|A|x||\theta| + \frac{d}{c}A|x||\theta| + BA'|y||\varphi| + BA'|x||\varphi| \\
 |y_*| &\leq \left[ \left( BA\frac{\pi}{4} + \frac{d}{c}A + B\frac{b}{a} + BA' \right) |\theta| + \frac{db}{ac} \right] |y| + \\
 &\quad + \left[ BA\frac{\pi}{4} + \frac{d}{c}A + BA' \right] |x||\theta| \quad (**)
 \end{aligned}$$

Légyen

$$M = \max \left[ A + BA \frac{\pi}{4} + B \frac{b}{a} + BA' \frac{\pi}{4} ; A + BA + BA' ; \right. \\ \left. BA \frac{\pi}{4} + \frac{d}{c} A + B \frac{b}{a} + BA' ; BA \frac{\pi}{4} + \frac{d}{c} A + BA' \right]$$

Ekkor a (\*) és a (\*\*) egyenlőtlenségek

$$|x - x_*| \leq M|y| + M|x| |\theta| \quad (18)$$

$$|y_*| \leq \left( M|\theta| + \frac{db}{ac} \right) |y| + M|x||\theta| \quad (19)$$

ahol, ha  $|\theta| \leq \frac{\pi}{4}$ , akkor  $M$  csak  $a, b, c, d, c_1, c_2$ -től függ.

Emlékezzünk vissza  $\psi$  definíciójára!

Most  $X_* = \psi(X)$  és  $\psi'_* = \psi(X')$  és a (18) és (19) sor éppen ezt adja számunkra, ha  $X, X' \in B(\varepsilon)$ . Itt  $B(\varepsilon)$  egy  $X_0$  középpontú és  $\varepsilon > 0$  sugarú körlemez, és igaz rá, hogy :

$$B(\varepsilon) \subset N(X_0) \cap \psi_1^{-1}(N(Y_0)) \cap \psi^{-1}(N(X_0)) \cap \{X: |XP_1P_2| < \frac{\pi}{4}\}$$

Vagyis  $B(\varepsilon)$  egy olyan kis környezete  $X_0$ -nak, amelyben az eddig tárgyalt összes állítás igaz..

Válasszuk úgy  $k$ -t, hogy teljesüljön  $\frac{bd}{ac} < k < 1$ .

Ha  $X \in B(\varepsilon)$ , és tekintjük az  $X$  és az  $X_*$  vetületét egy  $l$ -re merőleges egyenesre, akkor bevezetve a következőjelöléseket:

$$Y = (Y^x, Y^y) \quad X_* = (X_*^x, X_*^y) \quad X = (X^x, X^y)$$

azt kapjuk, hogy

$$\tan \theta_* = \frac{X_*^y}{X_*^x} \quad \text{és} \quad \tan \theta = \frac{-Y^y}{-Y^x}$$

Ezekből

$$\frac{\tan \theta_*}{\tan \theta} = \frac{X_*^y}{X_*^x} \cdot \frac{-Y^x}{-Y^y} \leq \frac{(P_2 X_*)(P_1 Y)}{(P_1 X_*)(P_2 Y)}$$

Ha felhasználjuk a (12) sor becsléseit:

$$\frac{\tan \theta_*}{\tan \theta} \leq \frac{bd}{ac}$$

Így, ha  $X \in B(\varepsilon)$  és a  $\theta$  elegendően kicsi, akkor írhatjuk, hogy

$$|\theta_*| < k|\theta| \quad (20)$$

Vegyük  $\theta_a$ -t olyan kicsinek, hogy ha  $|\theta| \leq \theta_a$  fennáll, akkor a (20)

egyenlőtlenség és az

$$M|\theta| + \frac{bd}{ac} < k \quad (21)$$

valamint a

$$M\theta_a \leq k\mu \quad (22)$$

is fennáll, ahol  $\mu = \mu(M, k, \frac{1}{2})$  adva van az 1.Lemma szerint.

Legyen  $B(\varepsilon_1)$  egy olyan  $\varepsilon_1$  sugarú környezet, amelynek elemeire

$$B(\varepsilon_1) \subset \{X \in B(\varepsilon) : |XP_1P_2| < \theta_a\}$$

Legyen  $\alpha = \frac{M}{1-k}$  és tegyük fel, hogy az  $N$  az  $X_0$ -nak egy olyan

környezete, melyre :  $N = \{X_0 + (x, y) : |x| + \alpha|y| < \beta\}$

Ekkor, ha  $\beta$  elegendően kicsi, akkor feltehetjük, hogy  $N \subset B(\varepsilon_1)$ .

Írjuk be a (19) és (18)-ba, hogy

$$X' = X_0 + (x, y) \in N \quad \text{és} \quad X = X_0.$$

$\theta = 0$  behelyettesítéssel kapjuk

$$\begin{aligned} |x_*| + \alpha |y_*| &\stackrel{(19)}{\leq} |x_*| + \alpha \left( \left( M|\theta| + \frac{bd}{ac} \right) \cdot |y| + M|x||\theta| \right) \leq \\ &\stackrel{(21)}{\leq} |x_*| + \alpha (k|y| + M|x||\theta|) = \alpha k|y| + |x_*| + \alpha M|x||\theta| \leq \\ &\leq \alpha k|y| + |x_* - x| + |x| + \alpha M|x||\theta| \leq \\ &\stackrel{(18)}{\leq} (\alpha k + M)|y| + M|x||\theta| + |x| + \alpha M|x||\theta| = \\ &= (\alpha k + M)|y| + |x||\theta|M(1 + \alpha) + |x| \end{aligned}$$

Mivel  $\theta = 0$  és  $\alpha k + M = \alpha$  kapjuk, hogy

$$|x_*| + \alpha |y_*| \leq |x| + \alpha |y| \leq \beta$$

ahol  $\psi(X') = \psi(X_0) + (x_*, y_*) = X_0 + (x_*, y_*)$

Tehát  $\varphi$  leképezi  $N$ -et önmagára.

Tegyük fel, hogy  $X \in N$  és tekintsük az  $N$  pontjainak  $\{\psi^{(r)}(X)\}_1^\infty$  sorozatát.

A (20) sor szerint  $\theta \rightarrow 0$ , és a (18) sorból

$$|x - x_*| \leq 0, \quad \text{mivel most } \theta = 0 \text{ és } y = 0.$$

Tehát  $X = X_*$ , ami azt jelenti, hogy a  $\{\psi^{(r)}(X)\}$  konvergál az  $N \cap l$  egy pontjához. Így definiálhatunk egy leképezést:

$$\begin{aligned} \psi_0: N &\rightarrow N \cap l \\ \psi_0(X) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \psi^{(r)}(X) \end{aligned}$$

Legyen  $l_1$  párhuzamos  $l$ -lel és messé az  $N$ -et. Vegyünk  $X, X' \in N \cap l_1$ -et,

és tegyük fel, hogy:

$$\psi^{(r-1)}(X') = \psi^{(r-1)}(X) + (x_r, y_r) \quad (r \geq 1)$$

Ekkor  $r=1$ -re  $X' = X + (x_1, y_1)$ , amiből következik  $y_1 = 0$ , hiszen az  $y$  koordináta nem változik. Így kapjuk:

$$\psi_0(X') = \psi_0(X) + (x_0, y_0)$$

ahol tehát  $y_1 = 0$ ,  $x_r \rightarrow x_0$ ,  $y_r \rightarrow y_0$ .

Ha most a  $\epsilon_r$ -et úgy definiáljuk, hogy  $\psi^{(r-1)}(X)P_1P_2 \ll \epsilon_r$ ,

akkor a (20)-ból következik, hogy  $|\epsilon_r| < k^{r-1} \epsilon_a$ .

Ezt felhasználva a (18) és (22) sorok segítségével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |x_{r+1} - x_r| &\stackrel{43.}{\leq} M|y_r| + M|x_r| |\theta_r| \leq \\ &\leq M|y_r| + M|x_r| k^{r-1} \epsilon_a \stackrel{42.}{\leq} M|y_r| + k^r \mu |x_r| \end{aligned}$$

Ugyanígy a (19) a (21) és a (22) segítségével:

$$\begin{aligned} |y_{r+1}| &\leq \left( M|\theta_r| + \frac{bd}{ac} \right) \cdot |y_r| + M|x_r| |\theta_r| \leq \\ &\leq k|y_r| + M|x_r| k^{r-1} \epsilon_a \leq k|y_r| + k^r \mu |x_r| \end{aligned}$$

Így viszont megkaptuk az 1.Lemma (1) és (2) feltételét az  $M_1=0$  és  $y_1=0$  esetén. Alkalmazhatjuk az 1.lemma utolsó részét:

$$|x_0 - x_1| \leq \frac{1}{2}|x_1| \quad \text{teljesül minden } r\text{-re.}$$

Ezek segítségével becsülhetjük tovább:

$$\begin{aligned} |\psi_0(X) - \psi_0(X')| &= \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = |x_0| \leq |x_0 - x_1| + |x_1| \leq \\ &\leq \frac{1}{2}|x_1| + |x_2| \leq \frac{3}{2}|x_1| = \frac{3}{2}\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \frac{3}{2}|X - X'| \\ |x_0| &\geq |x_1| - |x_1 - x_0| \geq |x_1| - \frac{1}{2}|x_1| = \frac{1}{2}|x_1| = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \frac{1}{2} |X - X'|$$

Tehát azt kaptuk, hogy

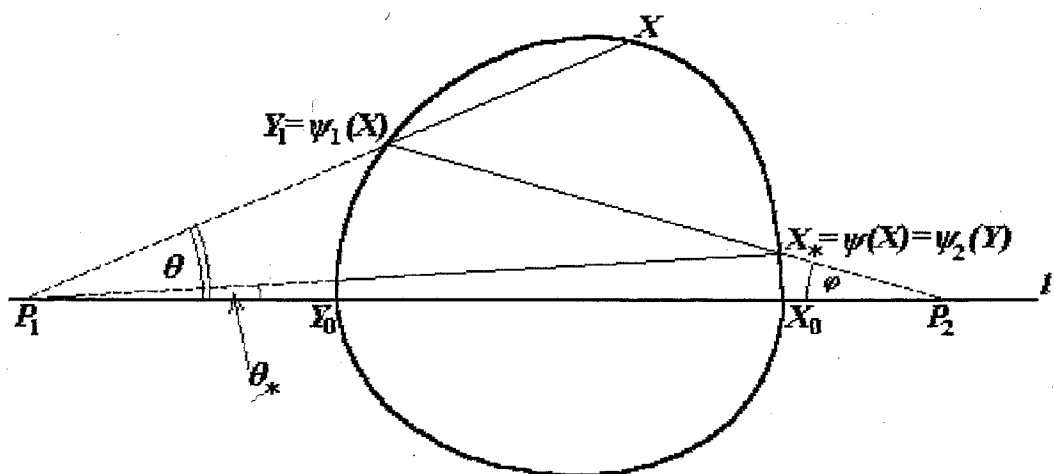
$$\frac{1}{2} |X - X'| \leq |\psi_0(X) - \psi_0(X')| \leq \frac{3}{2} |X - X'|$$

Így  $\psi_0$  egy folytonos, nyitott, kölcsönösen egyértelmű leképezés  $N \cap l_1$ -ről  $N \cap l$ -re. Tudjuk, hogy  $\partial K$  áthalad az  $X_0$ -on, és ha az  $X$  egy pontja a  $\partial K$ -nak az  $N$ -ben, akkor  $\psi$  definíciójából  $\psi^{(r)}(X) \in \partial K$  minden  $r$ -re, így  $\psi_0(X) = X_0$ .

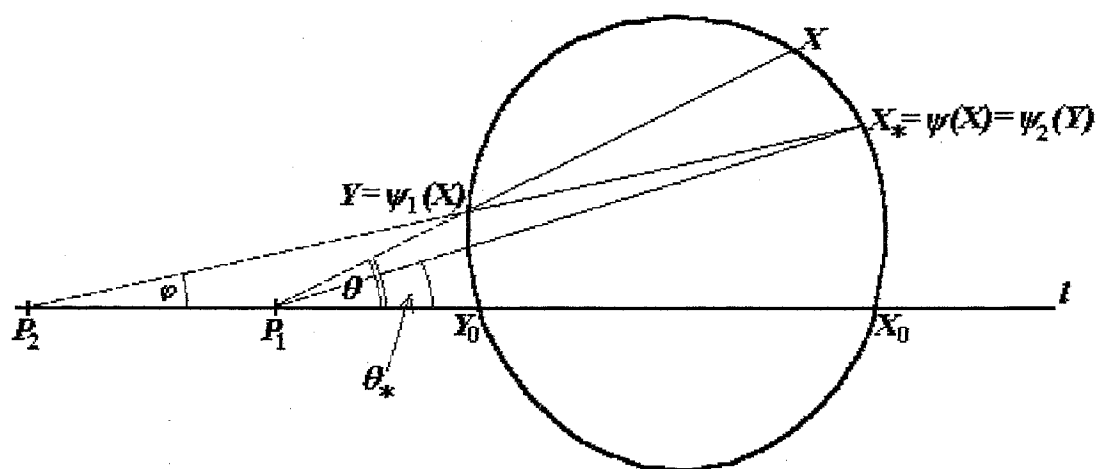
A kölcsönösen egyértelműség miatt azonban legfeljebb csak egy pontja  $X$  pontja létezik az  $l_1 \cap N$ -nek, melyre  $\psi_0(X) = X_0$  amelyik  $l$ -el párhuzamos  $l_1$ -re.

Így meghatároztuk az  $N$  belsejében a  $\partial K$ -t. Hasonló eredmény adódik abban az esetben is, ha a  $\partial K$ -t az  $Y_0$ -nak egy bizonyos környezetében határozzuk meg, vagy ha vizsgáljuk a  $\psi_1(\partial K \cap N)$ -et.

A bizonyításnak ebben a részében a  $P_1$  és  $P_2$  pontok mindketten belső pontok voltak. Ha  $P_1$  és  $P_2$  külső pontok, akkor a  $\psi_1, \psi_2, \psi$  leképezések definíciói különböznek az előzőektől. Az egyes eltéréseket a (9) és a (10) ábra mutatja:



9. ábra



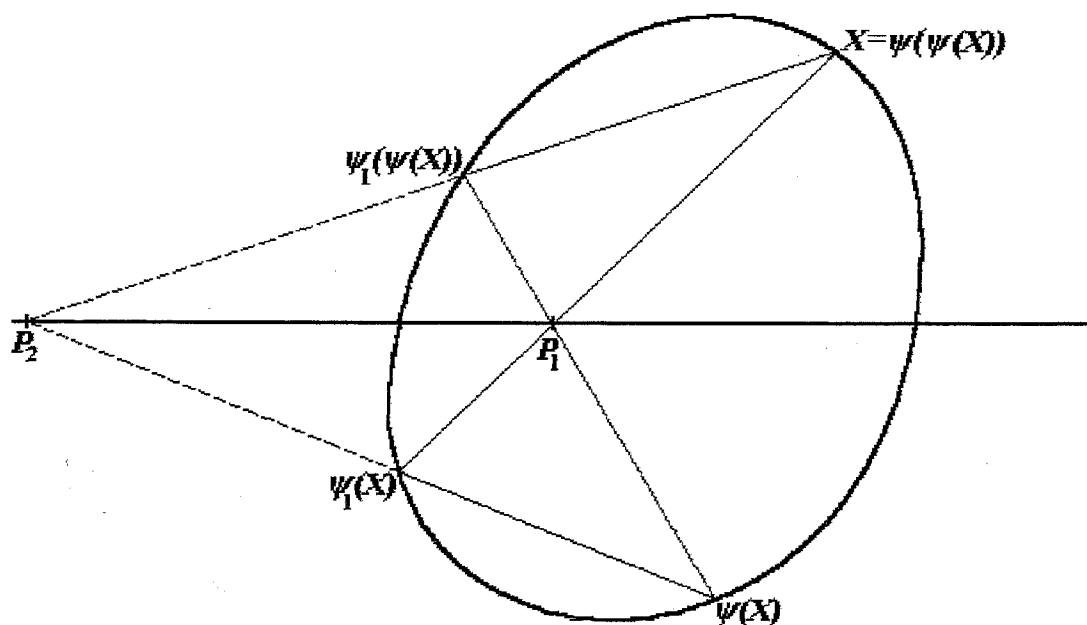
10. ábra

Ebben a részben is vegyük észre, hogy

$$\frac{|P_1 Y_0| |P_2 X_0|}{|X_0 P_1| |Y_0 P_2|} < 1$$

Ekkor választhatjuk az  $a, b, c, d$  számokat ugyanúgy, mint ahogy a (12)-ben tettük. Továbbra is Lipschitz függvények lesznek az  $f_1(\theta)$  és  $f_2(\theta)$  húrfüggvények elegendően kicsi  $\theta$ -ra. Meg kell jegyeznünk, hogy abban az esetben, amikor a  $P_1$  és  $P_2$  pontok a  $K$  ellentétes oldalán helyezkednek el, nem szükségszerűen kell, hogy a  $|\varphi| \leq |\theta|$  egyenlőtlenséget használjuk a (18) és (19) összefüggések eléréséhez. Elég ekkor használni a  $|\varphi| \leq \alpha |\theta|$  feltételt, ahol  $\alpha$  függ az  $a, b, c, d$  számoktól.

Bár az 5.Lemmában nem volt benne, de érdemes megjegyezni azt az esetet is, ha a  $P_1$  belső pont és a  $P_2$  külső pont. Ekkor, ha az ábra szerint definiáljuk a  $\varphi(X)$  leképezéseket, akkor ugyanígy eljuthatunk a tétel állításához.



11. ábra

## 6.FEJEZET

Ezek után most már rátérhetünk a tételünk bizonyítására.

Tétel: Ha  $P_1$  és  $P_2$  belső pontok, akkor  $f_1$  és  $f_2$  húrfüggvények egyértelműen meghatározzák a  $K$  halmazt. Ha  $P_1$  és  $P_2$  külső pontok, akkor az  $f_1$  és  $f_2$  két lehetőséget ad  $K$ -ra. Az egyik, ha a  $K$  a  $P_1$  és  $P_2$  pontok között van, a másik, ha

$P_1$  és  $P_2$  azonos oldalán helyezkedik el a  $K$ -nak.

Bizonyítás:

Ha összerakjuk a 4. és 5. lemmát, akkor már csak azt kell bizonyítanunk, hogy amennyiben  $\partial K$  ismert az  $X_0$  és  $Y_0$  szomszédságában, akkor  $f_1$  és  $f_2$  teljesen meghatározzák  $\partial K$ -t

Először tegyük fel, hogy  $P_1$  és  $P_2$  belső pontok.

Induktíve megalkothatjuk ekkor a  $\partial K$  nyílt íveinek  $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$  sorozatát, hogy minden  $r$  esetén az  $A_r$  tartalmazza az  $X_0$ -t, mint végpontot, és ez mindig az  $I$  egyik oldalán legyen. Ugyanígy a  $B_r$  ív tartalmazza az  $Y_0$ -at, mint végpontot, de ez mindig az  $I$  másik oldalán legyen.

Legyen az  $A_1$  ív az 5.Lemmában megadott ív.

Adott az  $A_r$  az  $r$  valamilyen értékére és legyen a  $B_r$  az  $A_r$  által a  $P_2$ -n keresztül az  $f_2$  húrfüggvénnyel meghatározott ív oly módon, hogy bármely

egyenes, amely átmegy  $P_2$ -n, akkor és csak akkor metszi a  $B_r$ -et, ha metszi az  $A_r$ -et is.

Hasonlóan, ha az adott  $B_r$  az  $r$  valamilyen értékére és az  $A_{r+1}$  lesz a  $B_r$  által

$P_1$ -en keresztül  $f_1$  húrfüggvénnyel meghatározott ív.

Az ívek  $\{A_r\}$  és  $\{B_r\}$  sorozata növekvő.

Legyen

$$A = \bigcup_{r=1}^{\infty} A_r \quad \text{és} \quad B = \bigcup_{r=1}^{\infty} B_r$$

valamint tegyük fel, hogy az  $A$  az  $(X_0, X)$  nyílt ív és az  $l$  egyik oldalán, míg a  $B$  az  $(Y_0, Y)$  nyílt ív az  $l$  másik oldalán helyezkedik el.

Azt állítjuk, hogy  $Y=X_0$  és  $X=Y_0$ . Ha nem így lenne, akkor két lehetőség van:

a., Az  $Y$  és  $P_2$  egyenese metszi  $A$ -t, így metszi az  $A_r$ -t valamilyen  $r$ -re. Ekkor viszont  $Y \in B_r$ .

Ez pedig ellentmondás.

b., Az  $X$  és  $P_1$  egyenese metszi  $B$ -t, így metszi az  $B_r$ -t valamilyen  $r$  esetén

Ekkor viszont  $X \in A_{r+1}$ , ami szintén ellentmondás.

Így tehát az  $A$  és a  $B$  ívek a  $\partial K$ -nak teljes ívei, amelyek az  $X_0$  és  $Y_0$  pontokban kapcsolódnak egymáshoz az  $l$  valamelyik oldalán.

Tehát a  $\partial K$  teljesen meghatározott.

Abban az esetben, ha a  $P_1$  és  $P_2$  külső pontok, akkor a  $\partial K$  részeit külön-külön vizsgáljuk az  $l$  mindkét oldalán. Induktíven megalkothatjuk a  $\partial K$  íveinek az

$A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$  sorozatát – amely ebben az esetben vagy véges, vagy korlátlanul folytatódik.

Legyen az  $A_r$  végpontja az  $X_0$  és a  $B_r$  végpontja az  $Y_0$ , valamint minden ív fekszen azonos oldalán az  $l$ -nek.

Legyen az  $A_1$  az 5.lemma szerint meghatározott ív.

Tegyük fel, hogy már megalkottuk a sorozatot  $A_r$ -ig.

Ha valamelyik,  $P_2$  ponton átmenő egyenes több mint egyszer metszi az  $A_r$ -et, akkor a kölcsönösen egyértelműség miatt az  $A_r$  és az  $f_2$  egyértelműen meghatározzák a  $\partial K$ -t az  $l$ -nek ezen az oldalán, így az eljárás véget ér.

Ellenkező esetben, vagyis ha az  $A_r$ -t csak egyszer metszi a  $P_2$ -n átmenő egyenes, akkor legyen a  $B_r$  az  $A_r$  által meghatározott ív.

Így tehát bármelyik  $P_2$ -n átmenő egyenes metszi  $B_r$ -t akkor és csak akkor, ha metszi  $A_r$ -t. Hasonlóan, ahogy megalkottuk  $B_r$ -t, megalkothatjuk  $A_{r+1}$ -t is a  $P_1$ -beli  $f_1$  húrfüggvényt használva. Ha az  $A_{r+1}$ -nek egynél több metszéspontja van a  $P_2$ -ből kiinduló valamely egyenessel, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor ezt az eljárást folytatjuk addig, míg nem találunk két metszéspontot.

Hátramaradt még az az eset, ha az  $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$  sorozat korlátlanul folytatódik.

Az  $\{A_r\}$  és  $\{B_r\}$  sorozat növekvő.

Legyen az  $A = \bigcup_{r=1}^{\infty} A_r$  az  $(X_0, X)$  ív és a  $B = \bigcup_{r=1}^{\infty} B_r$  az  $(Y_0, Y)$  ív. Ha az  $A$ -nak

és a  $B$ -nek van közös pontja, akkor az  $A \cup B$  kiadja a  $\partial K$ -t az  $I$ -nek ezen az oldalán.

Ha  $A \cap B = \emptyset$  és  $X \neq Y$ , akkor vagy az  $X$  és  $P_1$  egyenese metszi  $B$ -t (azaz  $B_r$ -t metszi valamilyen  $r$  esetén) vagyis  $X \in A_{r+1}$ , vagy pedig az  $Y$  és  $P_2$  egyenese metszi az  $A$ -t (azaz  $A_r$ -t metszi valamilyen  $r$  esetén) vagyis  $Y \in B_r$ , így mind a két esetben ellentmondásra jutottunk, tehát ismét megkaptuk a  $\partial K$ -t.

Maradt még az a lehetőség, hogy  $X=Y$ , amely esetben az  $A \cup B \cup \{X\}$  kiadja a  $\partial K$ -t az  $I$ -nek ezen az oldalán.

Tehát mindig meg tudtuk határozni a  $\partial K$ -t az  $f_1$ -ből és az  $f_2$ -ből az  $I$ -nek mindkét oldalán, így tételünket bebizonyítottuk.

## Irodalomjegyzék

- [1]. Dr Budó Ágoston: Kísérleti Fizika III  
(Tankönyvkiadó, Budapest, 1980, 254-261.)
- [2]. R. J. Gardner: Geometric Tomography  
(jelenleg kiadás alatt -bevezető)
- [3]. R. J. Gardner and P. McMullen: On hammers X-ray problems  
(J. London Math. Soc.(2),21 (1980), 171-175.)
- [4]. K. J. Falconer: X-ray problems for point sources  
(proc. London Math. Soc.(3), 46 (1983), 241-262.)

## KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

}  
Köszönetemet szeretném kifejezni Dr.Kurusa Árpád egyetemi docensnek e  
dolgozat elkészítéséhez nyújtott segítségéért.