

Kovariogram és Blaschke-vektor

Diplomamunka védés

Zombory Tibor

Természettudományi és Informatikai Kar
Bolyai Intézet

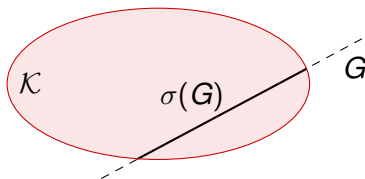
2015. május 21.

Témavezető: Dr. Kurusa Árpád

A síkbeli $\mathcal{K}$ konvex test **Blaschke-vektorának** nevezzük az

$$I_n(\mathcal{K}) := \int \sigma^n(G) dG$$

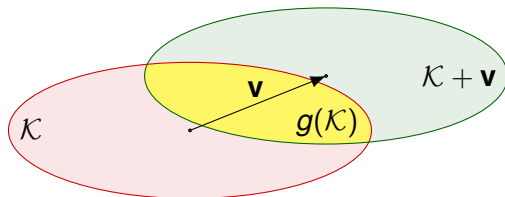
integrálokból összeállított $I(\mathcal{K}) := (I_n(\mathcal{K}))_{n=0}^{\infty}$ sorozatot, ahol $\sigma(G)$ a G egyenes által $\mathcal{K}$ -ból kimetszett húr hosszát jelöli, $I_n(\mathcal{K})$ pedig a $\mathcal{K}$ test n -edik momentuma.



A síkbeli $\mathcal{K}$ konvex test **kovariogramjának** nevezzük a

$$g_{\mathcal{K}}(\mathbf{v}) := |\mathcal{K} \cap (\mathcal{K} + \mathbf{v})|$$

függvényt, ahol $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, $|\cdot|$ pedig a terület.



Blaschke 1916-ban vetette fel a $\mathcal{K} \mapsto I(\mathcal{K})$ leképezés injektivitásának problémáját.

1986-ban *Matheron* tette fel a kérdést, hogy egy konvex testet vajon egyértelműen meghatároz-e a kovariogramja eltolások és az origóra vonatkozó centrális tükrözés erejéig.

Dolgozatom ezen két probléma kapcsolatát vizsgálja, az itt bemutatott tételek legtöbbjének bizonyításával.

A szükséges háttér:

1. Konvexitás
2. Klasszikus integrálgeometria
3. A Steiner-szimmetrizálás (σ_ℓ)
4. Hausdorff-féle momentumprobléma

Tétel

Legyen $\mathcal{K}$ és $\mathcal{L}$ konvex test $\mathbb{R}^n$ -ben és $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^{n-1}$. Ekkor

1. $g_{\mathcal{K}, \mathcal{L}} = \chi_{\mathcal{K}} * \chi_{-\mathcal{L}}$.
2. $\mathcal{K} \mapsto g_{\mathcal{K}}$ folytonos a Hausdorff-távolságra és a sup-normára nézve.
3. Az $r \mapsto g_{\mathcal{K}}(r\mathbf{v})$ leképezés monoton csökkenő és konvex.
4. $\int_{\mathbb{R}^n} g_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = |\mathcal{K}|^2$.
5. $\text{supp}(g_{\mathcal{K}}) = D(\mathcal{K})$.
6. A $\varphi: \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{b} + \mathbf{x}\mathbf{A}$ affinitásra, aminek $\mathbf{A}$ a mátrixa,

$$g_{\varphi(\mathcal{K})}(\mathbf{x}) = |\det(\mathbf{A})| g_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}\mathbf{A}^{-1}).$$

Tétel

Legyen $\mathcal{K}$ konvex test, $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^{n-1}$ egy rögzített egységvektor, és $d := \sup\{r : g_{\mathcal{K}}(r\mathbf{v}) \neq 0\}$.

- 1. Az $r \mapsto \gamma_{\mathcal{K}}(r, \mathbf{v})$ leképezés folytonos $(0, d)$ -n, és jobbról folytonos 0 -ban.*
- 2. Az $r \mapsto g_{\mathcal{K}}(r\mathbf{v})$ leképezés folytonosan differenciálható a $(0, d)$ intervallumon, és ott a deriváltja $-\gamma_{\mathcal{K}}(r, \mathbf{v})$. Az $r = 0$ pontban a jobb oldali derivált $-\gamma_{\mathcal{K}}(0, \mathbf{v})$.*

Matheron 1986-ban vetette fel a kérdést, hogy egy konvex testet vajon egyértelműen meghatároz-e a kovariogramja eltolások és az origóra vonatkozó centrális tükrözés erejéig?

Ez az úgynevezett *kovariogram probléma*.

Matheron pozitív választ sejtett a síkbeli kovariogram problémára, de ennek bizonyítása csak később, több lépcsőben történt meg.

Tétel (Averkov–Bianchi, 2008)

Minden síkbeli konvex testet eltolás és pontra való centrális tükrözés erejéig egyértelműen meghatároz a kovariogramja.

Tétel (Bianchi, 2009)

Az $\mathbb{R}^3$ -beli konvex politópok meghatározhatók a kovariogramjukból.

Nagyobb általánosságban a térbeli eset még nyitott probléma. Ugyanakkor tetszőleges dimenzióban teljesülnek a következők.

Tétel (Bianchi, 2005)

Bármely centrálisan szimmetrikus konvex testet eltolás erejéig meghatároz a kovariogramja.

Tétel (Goodey–Schneider–Weil, 1997)

Azok a testek, melyeket nem határoz meg a kovariogramja, Baire 1 kategóriájú halmazt alkotnak a konvex halmazok terében.

A most következő tétel lényegében eljárást ad arra, hogyan konstruáljunk 3-nál magasabb dimenzióban ellenpéldákat.

Tétel (Bianchi, 2005)

Legyenek $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ és $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^m$ konvex testek, és legyen $T \in \text{End}(\mathbb{R}^{n+m})$. Ekkor

- $T(\mathcal{K} \times \mathcal{L})$ és $T(\mathcal{K} \times (-\mathcal{L}))$ kovariogramja megegyezik.*
- Ha $\mathcal{K}$ és $\mathcal{L}$ egyike sem centrálszimmetrikus, akkor $T(\mathcal{K} \times (-\mathcal{L}))$ nem kapható meg eltolással vagy origóra való tükrözéssel $T(\mathcal{K} \times \mathcal{L})$ -ből.*

Definíció

Legyen $\mathcal{K}$ konvex test a síkon. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén az

$$I_n(\mathcal{K}) := \int \sigma^n(G) dG$$

integrált, ahol $\sigma(G)$ annak a húrnak a hosszát jelöli, melyet a G egyenes metsz ki $\mathcal{K}$ -ból, a $\mathcal{K}$ test n -edik momentumának nevezzük. Az $I(\mathcal{K}) := (I_n(\mathcal{K}))_{n=0}^{\infty}$ sorozatot **Blaschke-vektornak** hívjuk.

Blaschke vetette fel a $\mathcal{K} \mapsto I(\mathcal{K})$ leképezés injektivitásának problémáját. Ennek érdekében születtek eredmények, melyek a $\mathcal{K}$ test jellemzőit kapcsolják össze az $I(\mathcal{K})$ Blaschke-vektorral, illetve ezen sorozat elemei közti összefüggéseket állítanak fel.

Tétel (Crofton, 1885; Santaló, 1976)

$$l_0 = |\partial\mathcal{K}|, \quad l_1 = \pi|\mathcal{K}|, \quad l_3 = 3|\mathcal{K}|^2.$$

Tétel (Santaló, 1976)

Ha $0 \leq m \leq n \leq p$ egészek, akkor

$$l_{2m}l_{2n} \geq l_{m+n}^2, \quad l_m^{p-n}l_p^{n-m} \geq l_n^{p-m}.$$

Tétel (Sulanke, 1960)

Tetszőleges $n, k \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \frac{2^{n+i} l_{n+i}}{l_0^{n+i}} \geq 0.$$

$$I_n(\mathbb{B}_r^1) = \frac{\pi}{2} \frac{n!!}{(n+1)!!} (2r)^{n+1} \begin{cases} 2, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ \pi, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Tétel (Blaschke, 1918)

A $\mathcal{K}$ konvex test ℓ egyenesre való Steiner-féle szimmetrizálásával kapott $\sigma_\ell \mathcal{K}$ testre $I_n(\mathcal{K}) \geq I_n(\sigma_\ell \mathcal{K})$, ahol egyenlőség pontosan akkor van, ha $\mathcal{K}$ -nak van ℓ -el párhuzamos szimmetriatengelye.

Tétel (Általánosított izoperimetrikus egyenlőtlenség. Blaschke, 1918)

$$I_n \geq \frac{n!!}{(n+1)!!} \frac{2^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}}{\pi^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} I_1^{\frac{n+1}{2}},$$

ahol egyenlőség pontosan kör esetén teljesül.

Definíció

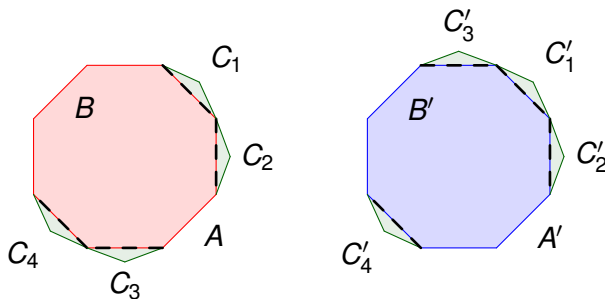
*Legyen $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ egy konvex test. Jelölje a $\sigma_{\mathcal{K}}(G)$ véletlen változó eloszlásfüggvényét $F_{\mathcal{K}}(x)$. Ez azt a valószínűséget adja meg, hogy egy véletlen egyenes legfeljebb x hosszúságú húrt metsz ki $\mathcal{K}$ -ból. $F_{\mathcal{K}}(x)$ -et a **$\mathcal{K}$ test húrhossz-eloszlásának** hívjuk.*

Definíció

*Ha $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^n$ egy egységvektor, akkor azt az $F_{\mathcal{K},\mathbf{v}}(x)$ függvényt, mely annak valószínűségét adja meg, hogy egy $\mathbf{v}$ irányvektorú véletlen egyenes $\mathcal{K}$ -ból legfeljebb x hosszú húrt metsz ki, a **$\mathcal{K}$ test $\mathbf{v}$ irány szerinti húrhossz-eloszlásának** nevezzük.*

Tétel (Mallows–Clark, 1970)

Vannak azonos húrhossz-eloszlású különböző poligonok.



Tétel

Jelölje $x \implies y$ azt, hogy x meghatározza y -t. Ekkor a síkon

$$\mathcal{K} \iff g_{\mathcal{K}} \iff (\mathbb{S}^1 \ni \mathbf{v} \mapsto F_{\mathcal{K}, \mathbf{v}}) \implies F_{\mathcal{K}} \iff I(\mathcal{K}).$$

Köszönöm a figyelmet!