

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉS INFORMATIKAI KAR

BOLYAI INTÉZET
GEOMETRIA TANSZÉK

Három dimenziós barlangtérkép elkészítésének
matematikai problémái

SZAKDOLGOZAT



Írta: Pásztor Péter
Matematika BSc hallgató
(matematika tanár szakirány)

Témavezetők:

Dr. Kurusa Árpád
Egyetemi docens
Geometria Tanszék

Dr. Mucsi László
Egyetemi docens
Természeti Földrajzi és
Geoinformatikai Tanszék

SZEGED, 2010

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Alapdefiníciók	2
3. A barlangtérkép koordinátázása	3
4. A barlang ábrázolása	5
4.1. Poligonszámítási munkálatok	5
4.2. Poliéder szerkesztése	7
5. Koordináta-transzformációk	8
5.1. GPS - General Positioning System	8
5.2. EOVS - Egységes Országos Vetület	9
5.3. Transzformációk	11
5.3.1. Ellipszoidi koordinátákból gömbi koordináták számítása .	12
5.3.2. Gömbi koordinátákból segédgömbi koordináták számítása	12
5.3.3. Segédgömbi koordinátákból hengerpalást-koordináták szá- mítása	13
6. Távolságmérés	14
7. Összegzés	16
Mellékletek	17
Felhasznált irodalom	19
Köszönetnyilvánítás	20
Nyilatkozat	21

1. Bevezetés

Jelen dolgozatomban azt kívánom bemutatni, hogy milyen matematikai jellegű problémák, feladatok merülhetnek fel egy barlangtérkép elkészítése során. A dolgozatot konkrét munkával kötöm össze: a bükki Hajnóczy-barlang 3 dimenziós, digitális térképének elkészítése során felmerülő problémákat veszem sorra. A térképen rendhagyó módon ábrázolom a barlangot körülvevő Ódorvár-hegy felszínét is, hogy még tökéletesebb, még több információval szolgáló kép rajzolódjon ki a járatok elhelyezkedéséről.

A barlangok összetett, szabálytalan térbeli felületekkel határolt üregek, felmérésük és térképi ábrázolásuk bonyolult, sok nehézségbe ütköző feladat. Bonyolultságuk miatt a barlangok felszínét matematikailag könnyen előállítható egzakt felületekkel megadni elméletileg lehetetlen, térképezési pontok tömegét felvenni pedig gyakorlatilag lehetetlen, ezért a barlangtérkép készítésekor nem tekinthető szempontnak a minél tökéletesebb és aprólékosabb ábrázolás. Plasztikus (a járat falát hűen ábrázoló) barlangtérkép készítése inkább képzőművészeti, mint matematikai feladat.

A szokásos 2 dimenziós barlangábrázolási módok, mint az alaprajz, az oldalvetület, vagy a hosszmeteszlet jelentős hossztorzulással ábrázolják a barlangi járatokat, térbeli távolságok számítása ezen térképek alapján meglehetősen nehézkes. Az alaprajz és a hosszmeteszlet alkalmatlan a térben gyakran egymás alatt illetve egymás mellett húzódó járatok szemléletes ábrázolására is. Többek közt ezért döntöttem a digitális, 3 dimenziós ábrázolás mellett.

Munkámhoz a Polygon nevű barlangtérkép-szerkesztő program 2.7-es verzióját használtam, mely térképezési pontok, illetve ezen pontok közötti megfelelő élek ábrázolására alkalmas. Ezen pontok és élek segítségével kívánom modellezni a barlang felszínét. A Polygon 2.7 program automatikusan elvégzi a dolgozatom 4. fejezetében ismertetett poligonszámítási munkálatokat. A program, illetve az ábrázolásmód előnye, hogy megfelelően szemlélteti a járatok elhelyezkedését, illetve a felszín és a barlangi járatok egymáshoz való viszonyát. A programban lehetőség van a térkép bármilyen irányú forgatására, ami igazán látványossá teszi az eredményeket.

Megjegyzem, hogy jelen munkámban nem a teljes Hajnóczy-barlangot térképeztem fel, csak annak egy részletét, illetve a hegy felszínének is csak a vizsgált járatokhoz belátható közelségben lévő részét ábrázoltam.

2. Alapdefiníciók

Dolgozatom legelején definiálni kívánok néhány olyan földrajzi fogalmat, amelyek megkerülésére - a témából adódóan - aligha lesz lehetőségem. Ugyanitt közlöm néhány alapvető fontosságú matematikai fogalom definícióját, illetve releváns tulajdonságát.

1. Definíció. Az olyan másodrendű felületet, amelynek egyenlete - megfelelően elhelyezett derékszögű koordinátarendszerben -

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

ahol $0 < a, b \in \mathbf{R}$, forgási ellipszoidnak, vagy szferoidnak nevezzük.

A szferoid egy forgástest, amelyet egy ellipszis valamely tengelye körüli forgatásával nyerünk. A szferoid paraméterezése a következő:

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \\ y &= a \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ z &= b \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

ahol α a parametrikus szélességi-, β pedig a hosszúsági koordináta.

A forgástengely és az ellipszoid metszetét, a $(0,0,1)$ és a $(0,0,-1)$ pontokat pólusoknak nevezzük.

Az olyan szferoid, melyben - a fenti nevezéktan szerint - $a = b$, az gömb.

Ha ezen G gömb középpontján átmegy egy S sík, akkor $G \cap S$ egy főkör G -n.

2. Definíció. Az olyan főkört, amely illeszkedik a pólusokra meridiánnak, vagy hosszúsági körnek nevezzük.

3. Definíció. Az olyan főkört, melynek síkja a pólusok szakaszának felezőmerőlegese, egyenlítőnek, ennek síkját egyenlítősíknak nevezzük.

4. Definíció. Egy forgási ellipszoidnak az E egyenlítősíkjával párhuzamos síkokkal vett metszetét paralelköröknek nevezzük.

5. Definíció. Függőleges: a földrajzi alapfelület adott pontban vett érintősíkjának normálisa.

6. Definíció. Vízszintes: a földrajzi alapfelület adott pontban vett érintősíkjával párhuzamos.

7. Definíció. Egy pont adott felületre vett merőleges vetítésének nevezzük, ha a ponthoz hozzárendeljük a hozzá legközelebb eső pontot a felületen.

3. A barlangtérkép koordinátázása

Koordinátázzuk a teret a következőképpen:

8. Definíció. Legyen az origó a barlang bejáratának egy meghatározott pontja. Legyen xy sík a vízszintes, origóra illeszkedő sík. Az x tengely mutasson a mágneses északi, y a keleti irány felé. A z tengely xy sík origóban vett normálisa, továbbá legyen ez az ortonormált koordinátarendszer jobbsodrású, azaz z lefelé mutat.

Vajon indokolt, illetve helyes-e euklidészi térben definiált koordináta-rendszert bevezetni gömbfelületen történő adatfelvételhez?

A válaszhoz szükségünk lesz a koszinusztételre, amely szerint ha egy a, b, c oldalú nemelfajuló háromszögben az oldalakkal szemközti szögek rendre α, β, γ , akkor

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma.$$

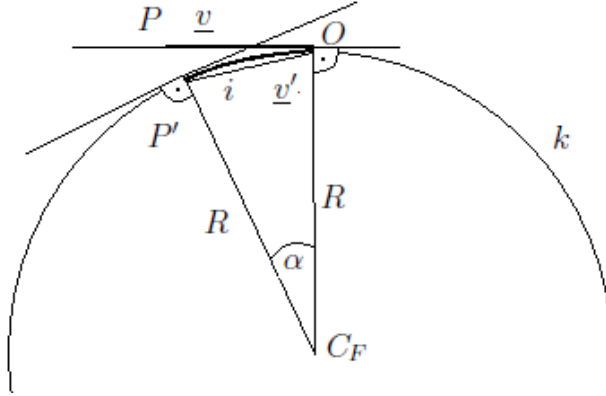
Ilyen típusú számításokhoz a Földet megfelelően modellezi a Kraszovszkij-féle forgási ellipszoiddal azonos felületű gömb, melynek sugara $R = 6371,116$ km (Karsay, 1991., 50.). Nevezzük ezt a gömböt F -nek.

F gömb C_F középpontja és a $\underline{v}$ vektor meghatároz egy S síkot.

9. Állítás. Adott C_F középpontú, $R = 6371.116$ km sugarú F gömbfelület tetszőleges O pontjába vont érintő sík P pontja ($d(O, P) \leq 1$ km), és a $C_F O P \cap F$ -re illeszkedő $d(O, P)$ hosszúságú $i(O, P)$ körív úgy, hogy $POP' < 90^\circ$. Ekkor $d(P', P) < 8$ cm.

Bizonyítás: Tekintsünk az origó kezdőpontú 1 km hosszú v vektort, és i egy egység hosszúságú O kezdő-, P' végpontú körívet. Legyen továbbá $\underline{v}'(O, P')$. Vizsgáljuk meg $\underline{v}$ és $\underline{v}'$ végpontjának távolságát.

Tekintsük az $F \cap S = k$ gömbi főkört ($i \in k$).



1. ábra

Számítsuk ki k kör területét!

$$K_k = 2 \cdot 6371,116 \text{ km} \cdot \pi = 40030.90244 \text{ km}$$

a $\underline{v}'$ -höz tartozó középponti szög:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{1 \text{ km}}{40030.90244 \text{ km}}$$

$$\alpha = 0.008993^\circ$$

$$\cos \alpha = 0.9999999877.$$

A koszinusztétel alapján:

$$\begin{aligned}(\underline{v}')^2 &= 2R^2 - 2R^2 \cdot \cos \alpha \\(\underline{v}')^2 &= 81182238.18 \text{ km}^2 - 81182237.18 \text{ km}^2 = 1 \text{ km}^2 \\|\underline{v}'| &= 1 \text{ km}.\end{aligned}$$

Továbbá felhasználva, hogy a háromszög belső szögeinek összege 180° , az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei egyenlő nagyságúak, valamint hogy a kör érintője merőleges a sugárra, a következő összefüggésekhez jutunk:

$$\begin{aligned}P'OC_F &= \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \\P'OP &= 90 - P'OF_C = \frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

Innen újabb koszinusztételt alkalmazásával megkapjuk a $\overline{P'P}$ hosszát

$$\begin{aligned}\overline{P'P}^2 &= 2 \text{ km}^2 - 2 \text{ km}^2 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = 0.00000000615892 \text{ km}^2 \\|\overline{P'P}| &= 0.000078478 \text{ km}.\end{aligned}$$

Ez annyit jelent, hogy az origótól az xy tengelyen 1 km távolságra lévő képpont és a valódi mérési pont között 0.0000784 km, azaz 7.84 cm eltérés van.

Ez a különbség még bőven belül van a mérési hibahatáron, ami a mérések pontatlanságából adódhat.

Megállapítható tehát, hogy a fent adott koordinátarendszer bevezetése nem jelent jelentős hibaforrást. Ezt a megállapítást tovább erősíti, hogy munkámban az origótól 50 méternél nagyobb távolságra egyetlen mérési pont sincs felvéve, így - mivel e hiba nagysága a távolsággal szigorú monoton csökken - a koordinátázásból adódó hiba meg sem közelíti a fenti számot.

4. A barlang ábrázolása

A barlangi járatok hű ábrázolása két komoly feladatot ró rám. Ezeket ismeretemen alább.

4.1. Poligonszámítási munkálatok

A barlangi térkép megszerkesztése térképezési pontok alapján történik, melyek felvétele barlangászati probléma, így ezzel nem foglalkozom részletesebben. A felvett pontok meghatároznak egy töröttvonalat, ami a barlangi termék hosszát, irányát, illetve mélységét jól szemlélteti.

10. Definíció. A $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ véges sok, különböző pont által meghatározott $\overline{P_0P_1}, \overline{P_1P_2}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}$ szakaszokból álló geometriai alakzatot töröttvonalnak - másképpen poligonnak - nevezzük. A töröttvonal szomszédos szakaszai - élei - a közös végpontú szakaszok. A pontok a töröttvonal csúcsai, vagy másképpen szögpontjai. Az elsőként megadott csúcs a töröttvonal kezdőpontja, az utolsóként megadott a végpontja.

A méréseket követően a poligon szakaszairól a következő adatokkal rendelkezünk: irányzög, lejtőszög, hossz.

11. Definíció. Adott $\underline{v}(v_1, v_2, v_3)$ vektor az $\mathbf{R}^3$ térben. A $\underline{v}$ vektor y tengellyel bezárt szögét nevezzük $\underline{v}$ irányyszögének.

12. Definíció. Adott $\underline{v}(v_1, v_2, v_3)$ vektor az $\mathbf{R}^3$ térben. A $\underline{v}$ vektor xy síkkal bezárt szögét nevezzük $\underline{v}$ lejtőszögének.

Mivel a mérések módszerei nem tartoznak a témámhoz, ezen adatokat egyszerűen ismertnek tekintem, és csak a további számítási feladatokkal foglalkozok.

13. Tétel. Adott t_n hosszúság, γ_n irányyszög és δ_n lejtőszög alapján az n -edik pont koordinátáit az alábbi módon számíthatjuk ki:

$$\begin{aligned} X_n &= X_{n-1} + \cos \gamma_n \cdot \cos \delta_n \cdot t_n \\ Y_n &= Y_{n-1} + \cos \gamma_n \cdot \sin \delta_n \cdot t_n \\ Z_n &= Z_{n-1} + \sin \gamma_n \cdot t_n. \end{aligned}$$

Bizonyítás. Legyen

$$\begin{aligned} X_n - X_{n-1} &= \Delta X_n \\ Y_n - Y_{n-1} &= \Delta Y_n \\ Z_n - Z_{n-1} &= \Delta Z_n. \end{aligned}$$

Ekkor

$$t_n = \sqrt{\Delta X_n^2 + \Delta Y_n^2 + \Delta Z_n^2},$$

illetve a trigonometrikus függvények definícióiból adódóan

$$\begin{aligned} \sin \delta_n &= \frac{\Delta Y_n}{\sqrt{\Delta X_n^2 + \Delta Y_n^2}} \\ \cos \delta_n &= \frac{\Delta X_n}{\sqrt{\Delta X_n^2 + \Delta Y_n^2}} \\ \sin \gamma_n &= \frac{\Delta Z_n}{t_n} \\ \cos \gamma_n &= \frac{\sqrt{\Delta X_n^2 + \Delta Y_n^2}}{t_n}. \end{aligned}$$

Ezek után

$$\begin{aligned} \Delta X_n &= \frac{\sqrt{\Delta X_n^2 + \Delta Y_n^2}}{t_n} \cdot \frac{\Delta X_n}{\sqrt{\Delta X_n^2 + \Delta Y_n^2}} \cdot t_n \\ \Delta Y_n &= \frac{\sqrt{\Delta X_n^2 + \Delta Y_n^2}}{t_n} \cdot \frac{\Delta Y_n}{\sqrt{\Delta X_n^2 + \Delta Y_n^2}} \cdot t_n \\ \Delta Z_n &= \frac{\Delta Z_n}{t_n} \cdot t_n. \end{aligned}$$

Jól látható mindhárom esetben az azonosság, ezzel bizonyítást nyert, hogy a formulák helyesek.

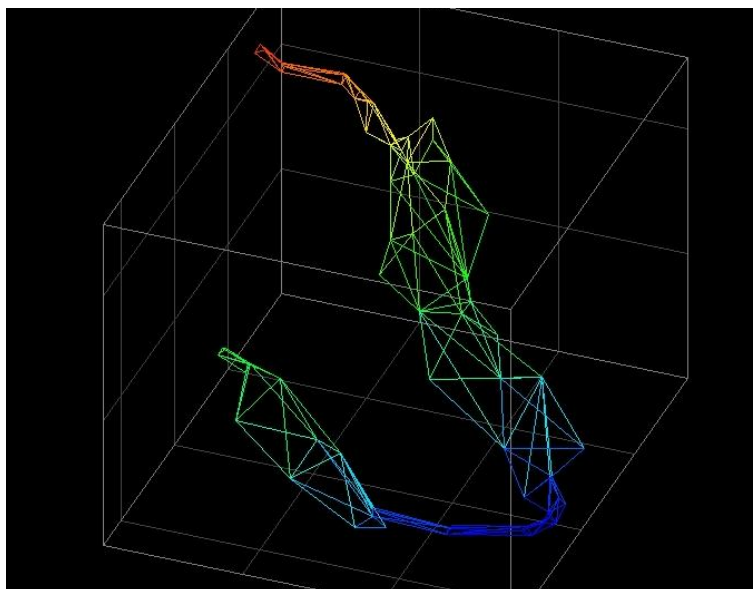
4.2. Poliéder szerkesztése

Poligonokkal rendszerint a barlangi járatok iránya és hossza mutatható be, ám a termék térbeli kiterjedéséről nem szolgáltatnak adatot. Ezt a hiányt pótolandóan az origóból kiindulva 3, páronként zárt poligont alkotó töröttvonalat vettem fel. Ezek közül egyet a járat tetején futtattam végig (legyen e töröttvonal T , melynek csúcsait T_i -vel, éleit t_i -vel jelölöm), kettőt pedig a járat két falán, alul (B és J , B_j, J_k csúcsok, b_j, j_k élek), majd a ezen három poligon pontjait az origóból kiindulva elkezdtem síkokkal lefedni úgy, hogy a kapott test minden csúcsánál kövesse a három poligon által kirajzolódni látszó járatokat és termeket. Ezt általános matematikai eljárás híján tapasztalati úton végeztem.

Amennyiben a módszert helyesen alkalmaztam, a barlang felületéül épp egy egyszerű poliédert kellett kapnom. Poliéder, mert a tér véges számú sokszöggel határolt véges része, és egyszerű, mert felülete egyszeresen összefüggő, és minden lapja egyszerű sokszög (esetemben speciálisan háromszög).

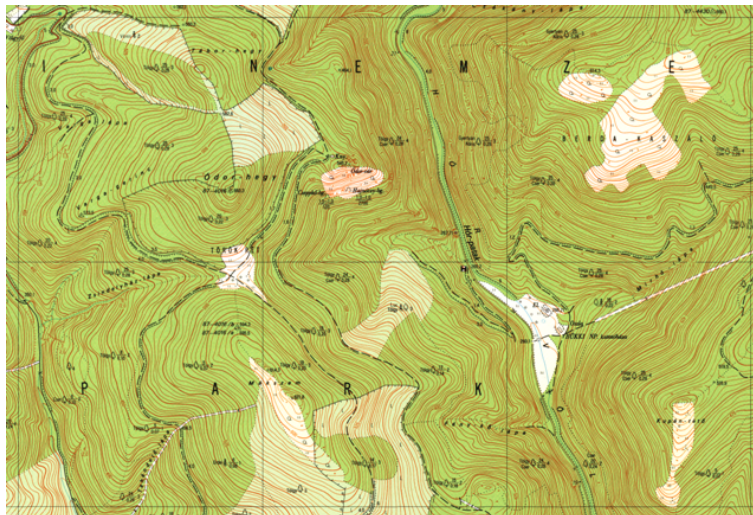
A tapasztalati úton végezett eljárás helyességének ellenőrzésére az újonnan keletkező éleket és oldalakat folyamatosan számoltam. Ha az eljárást helyesen végeztem, akkor az Euler-féle poliédertétel szerint a kész poliéder csúcsainak és oldalainak száma kettővel több az élek számánál.

Végül a számozott csúcsok száma 72, az éleké 203, és ezek pontosan 133 oldallapot határoznak meg. $72 + 133 = 203 + 2$, így a tétel legalábbis nem mutat hibát az eljárásomban.



A Hajnóczy-barlang 3 dimenziós térképe.

A felszíni adatokat egy szintvonalas térképről nyertem (3. ábra), melyről a képpontok alapján fejtettem vissza a térképezési pontok koordinátáit. A térképen 1 km távolság 1178 képpont reprezentál, így $1 \text{ képpont} = \frac{1}{1178} \text{ km}$, azaz 85 cm. A felszíni és a barlangi pontok azonos koordinátázása a következő fejezet témája lesz.



3. ábra

5. Koordináta-transzformációk

Munkám matematikailag legbonyolultabb része, hogy több koordináta rendszerből nyert adatot összeegyeztessenek egyetlen rendszerben.

A hegy felszíni koordinátáit ún. EOV (Egységes Országos Vetület) térképről nyertem, a barlangot egy relatív, általam meghatározott koordinátázás szerint mértem fel, a két rendszert kapcsolódási pontjának - a barlang bejáratának - pedig a GPS szögkoordinátáját ismerem. A következő fejezetben ismertetem ezen koordinátázásokat, illetve a transzformációs lépéseket, amelyekkel sikerült összeegyeztetnem az adatokat.

5.1. GPS - General Positioning System

A GPS egy műholdakon alapuló földrajzi navigációs rendszer. Segítségével a földfelszín bármely pontján gyorsan, kb. 1 méter pontossággal meghatározhatók a navigációs adatok. A rendszer további felhasználásai, illetve működése számunkra érdektelenek.

A geodéziában a Föld felszínét gömbbel, vagy forgási ellipszoiddal helyettesítik a számítások típusától és az érintett földi terület nagyságától függően. A Föld formája valójában sokkal bonyolultabb ezeknél a felületeknél, ám a számítások bonyolultsága miatt ezeknél kifinomultabb modellek bevezetésére nincs mód.

Az itt bemutatott rendszerben a Föld felszínét egy szferoiddal modellezzük. Ezt a szferoidot a geodéziában WGS84 ellipszoidnak nevezik. A WGS84

ellipszoid fél-tengelyeinek hosszai:

$$\begin{aligned} a &= 6378137 \text{ m} \\ b &= 6356752,314 \text{ m.} \end{aligned}$$

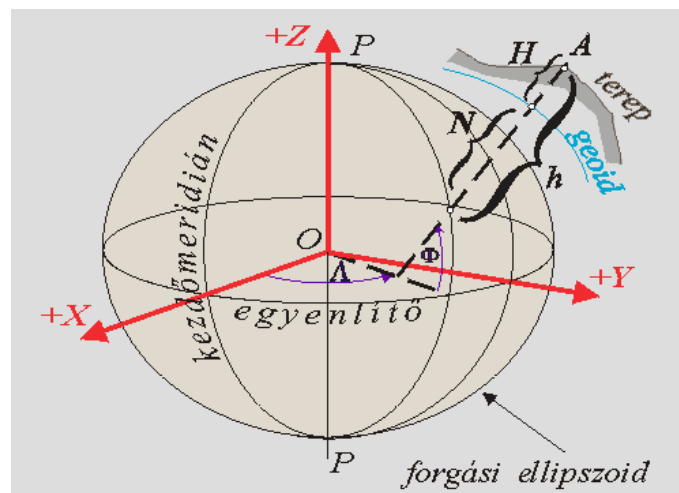
A szferoid A pontjának GPS koordinátái a következők:

Φ := Az A pontba vont érintősík normálvektorának az egyenlítősi síkkal bezárt szöge.

Λ := Az A pontra illeszkedő meridián síkjának a kezdőmeridián síkjával bezárt szöge. A kezdőmeridián a greenwichi meridián, tehát ezen a hosszúsági körön $\Lambda = 0$

h := magasság, azaz az alapfelülettől való távolság, ami a szögkoordinátákkal adott pontban a felület érintősíkjának normálegyenese az érintési pont és a mérési pont távolsága.

E három adattal teljesen pontosan megadható egy pont térbeli helyzete, ám én h -val gyakorlati okból nem foglalkozom, hisz az első két koordináta megfelelő transzformációjával kapott pont magasságát a szintvonalas EOV térképről egyszerűen és egyértelműen leolvashatom.



4. ábra

5.2. EOV - Egységes Országos Vetület

Az egységes országos vetületi rendszer létrehozását teljesen más cél motiválta, mint a GPS navigációs rendszert, így jellege is teljesen más. Az EOV rendszer célja térképek készítése volt, tehát a földfelszín sík felületre vetítése.

A magyarországi térképek készítése - így az EOV rendszer is - kettős vetítéssel történik. Az első vetítés az IUGG1967 elnevezésű forgási ellipszoidról az ellipszoid egy adott pontjában vett ún. Gauss-gömbre történik.

Az IUGG ellipszoid fontos geodéziai tulajdonsága, hogy jól simul a geoid (a földfelület) magyarországi részéhez, ám mivel a vetületi rendszert kizárólag hazai mérésekre alakították ki, az ellipszoid nem földközéppontú.

Az IUGG ellipszoid féltengelyeinek hossza:

$$\begin{aligned}c &= 6378160 \text{ m} \\d &= 6356774,516 \text{ m}.\end{aligned}$$

Az ellipszoidi koordinátákat görög nagybetűvel jelölöm. A Φ és Λ koordináták jelentése a következő:

Φ := Adott pontba vont érintősík normálvektorának az egyenlítősíkkal bezárt szöge.

Λ := Adott pontra illeszkedő meridián síkjának a kezdőmeridián síkjával bezárt szöge. A kezdőmeridián ebben az rendszerben is a greenwichi meridián.

A kettős vetítés első lépéseként tekintsünk egy gömböt, mely a

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= 47^\circ 10',0000'' \\ \Lambda_0 &= 19^\circ 12'54,8584''\end{aligned}$$

koordinátájú pontban érinti az ellipszoidot. A gömb és az ellipszoid normálvektora e pontban megegyező irányú. Legyen e gömb sugara

$$R = 6379743,001 \text{ m}$$

A gömbi koordinátákat az ellipszoidihoz hasonló módon adjuk meg, és görög kisbetűkkel (φ, λ) jelöljük.

Az érintési pont gömbi koordinátái:

$$\begin{aligned}\phi_0 &= 47^\circ 07'20,0578'' \\ \lambda_0 &= 00^\circ 00'00,0000''\end{aligned}$$

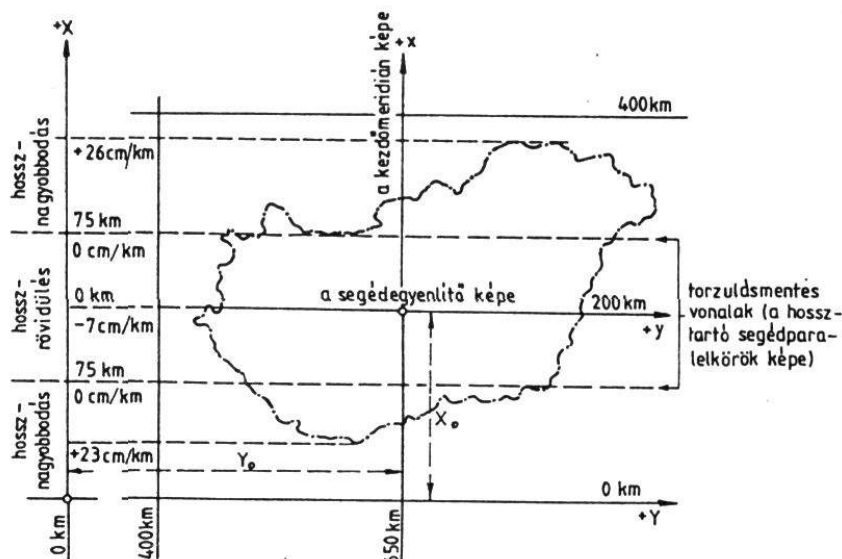
Tekintsünk ezután azt a gömbi főkört, mely áthalad a

$$\begin{aligned}\phi_1 &= 47^\circ 06'00,0000'' \\ \lambda_1 &= 00^\circ 00'00,0000''\end{aligned}$$

ponton. Nevezzük e főkört segédegyenlítőnek.

Legyen H egy olyan henger, amelynek tengelye a gömb középpontjában merőlegesen döfi a segédegyenlítő síkját, sugara pedig a gömb sugarának 0,99993-szorosa. A második vetítés a gömb pontjait vetíti merőlegesen a hengerpalástra.

Végezetül számszaki okokból ezeket a síkkoordinátákat x tengely mentén 200000, y mentén pedig 650000 méterrel toljuk el negatív irányba! Ezáltal az ország teljes területének minden koordinátája pozitív lesz, továbbá egyértelműen megkülönböztethetővé válnak az x és az y koordináták attól függően, hogy 400000-nél kisebbek vagy nagyobbak az értékek.



A ilyen módon nyert térképek tulajdonsága, hogy szögtartóak, ám a henger és a gömb által kimetszett paralelkörökön kívül bizonyos hossztorzulásuk van. Ezen tulajdonságok igen jól dokumentáltak, így részletesen nem foglalkozom velük, ám megjegyzem, hogy a valós és a képi adatok ennél a koordinátázásnál is mutatnak néhány centiméteres eltérést, csakúgy, mint a derékszögű barlangi koordinátarendszer.

A fentebb ismertetett adatok ismeretében feladatunk, hogy a barlangi koordinátarendszer ismert GPS koordinátáját EOVS koordinátává transzformáljuk, majd e pont koordinátájának -1 -szeresével eltoljuk a hegy ismert EOVS koordinátáit.

A barlangi derékszögű koordinátarendszer GPS-koordinátái a következők:

$$\Lambda_{WGS} = 20^{\circ}30'41.88980''$$

WGS84 ellipszoidi koordinátákból viszonylag könnyedén ki tudjuk számítani az IUGG ellipszoid szögkoordinátáit .

$$\begin{aligned}\Phi_{IUGG} &\approx \Phi_{WGS} + 0,9'' \\ \Lambda_{IUGG} &\approx \Lambda_{WGS} + 4,0''\end{aligned}$$

Ez az adat nem pontos, ám Magyarország teljes területére megfelelő közelítést ad (Varga, 2002).

5.3.1. Ellipszoidi koordinátákból gömbi koordináták számítása

IUGG1967-es ellipszoidi Φ, Λ koordinátákról gömbi φ, λ koordinátákra áttérni a következő zárt képletekkel tudunk:

$$\varphi = 2 \cdot \arctan \left(k \cdot \tan \left(45^\circ + \frac{\Phi}{2} \right) \cdot \left(\frac{1 - \epsilon \cdot \sin \Phi}{1 + \epsilon \cdot \sin \Phi} \right) \right)^{\left(\frac{n \cdot \epsilon}{2} \right)} - 90^\circ,$$

ahol ϵ a numerikus excentricitás

$$\epsilon = \sqrt{\frac{c^2 - d^2}{c^2}} = 0.0818205679407,$$

$$k = 1.003110007693,$$

$$n = 1.000719704936,$$

illetve

$$\lambda = n \cdot \Lambda - \Lambda_n,$$

ahol

$$\Lambda_n = 0.33246029531.$$

5.3.2. Gömbi koordinátákból segédgömbi koordináták számítása

A számolás megkönnyítése céljából vezessünk be egy gömböt, melyet a fent definiált gömb 0.99993 arányszámú kicsinyítésével kapunk, melynek fixpontja a gömb középpontja. E segédgömb koordinátázásának origója az előbbi gömbünk (ϕ_1, λ_1) koordinátájú pontjának a képe. A számításokat a következőképpen folytatjuk:

$$\varphi' = \arcsin(\cos \varphi_0 \sin \varphi - \sin \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda),$$

$$\lambda' = \arcsin \left(\frac{\cos \varphi \cdot \sin \varphi}{\cos \varphi'} \right),$$

ahol λ', φ' a segédgömbi koordináták.

5.3.3. Segédgömbi koordinátákból hengerpalást-koordináták számítása

$$\begin{aligned}x &= R \cdot m_0 \cdot \ln \tan \left(45^\circ + \frac{\varphi'}{2} \right) + 200000 \\y &= R \cdot m_0 \cdot \lambda' + 650000,\end{aligned}$$

ahol R a simulógömb sugara, m_0 pedig a Gauss-gömb és a segédgömb aránytényezője:

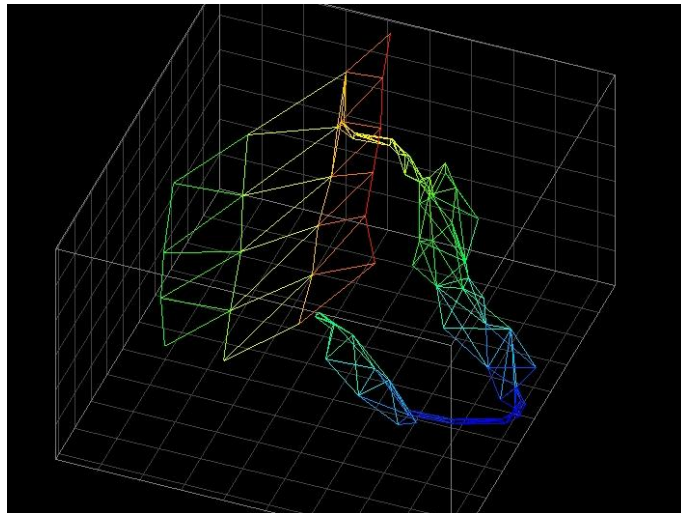
$$\begin{aligned}R &= 6379743,001m \\m_0 &= 0,99993.\end{aligned}$$

A fenti formulákba egyszerűen behelyettesítve a kezdő adatokat megkapjuk, hogy a Hajnóczy-barlang bejáratának EOV koordinátái:

$$\begin{aligned}X_{EOV} &= 759300,9 \\Y_{EOV} &= 294269,45.\end{aligned}$$

A tengerszint feletti magasság ezen a ponton $h = 450$ m.

Jelen adatokkal sikerült pozícionálni a barlangot, ezzel a hegy felszínének és a barlang koordinátáinak összeegyeztetése előtt minden akadály elhárult. Mostantól a barlangi koordinátatengely origójának a fenti pontot tekintem, és ehhez képest veszem fel a hegy felszíni koordinátáit.



6. ábra

6. Távolságmérés

Munkám végeztével bemutatom a kész térkép egy hasznosítási módját.

Probléma: Számítsuk ki adott barlangi pont (P) felszíntől való legkisebb távolságát.

Megoldás: Ismertek a barlang és a felszín adott pontjainak koordinátái. Adjuk meg a felszíni pontok által meghatározott síkok egyenletét, majd keressük meg ezen síkok felszín alkotó háromszöglapjainak P -hez legközelebb eső pontjait és határozzuk meg ezeket a távolságokat. Ezen távolságok minimuma lesz $P(p_1, p_2, p_3)$ pont felszíntől való távolsága.

1. Adjuk meg síkok egyenletét! A számítás módszerét egy $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3)$ és $C(c_1, c_2, c_3)$ felszíni pontok által meghatározott S síkra mutatom be.

Számítsuk ki S normálvektorát!

$$\begin{aligned}\underline{n}_s = AB \times AC &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = \\ &= [(b_2 - a_2) \cdot (c_3 - a_3) - (c_2 - a_2) \cdot (b_3 - a_3), \\ &\quad (b_3 - a_3) \cdot (c_1 - a_1) - (c_3 - a_3) \cdot (b_1 - a_1), \\ &\quad (b_1 - a_1) \cdot (c_2 - a_2) - (c_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)] = [n_1, n_2, n_3].\end{aligned}$$

Ez alapján a S sík egyenlete

$$S = n_1(x - a_1) + n_2(y - a_2) + n_3(z - a_3) = 0.$$

Ezután számítsuk ki P és S távolságát, ami a P -ből S -re bocsátott merőleges egyenes P és a D dőféspont által meghatározott szakaszának hossza.

PD egyenes egyszerűen megadható, mivel S egyenes normálvektora épp PD egyenes irányvektora. Formálisan $\underline{n}_S = \underline{v}_{PD}(v_1, v_2, v_3)$. Ebből

$$\begin{aligned}x &= p_1 + v_1 \cdot t, \\ y &= p_2 + v_2 \cdot t, \\ z &= p_3 + v_3 \cdot t.\end{aligned}$$

Ezeket S egyenletébe helyettesítve megkapjuk a t paramétert, majd t -t a fenti képletbe visszahelyettesítve x, y, z -t kiszámíthatjuk D pont (d_1, d_2, d_3) koordinátáit.

Ezután a távolság:

$$\sqrt{(p_1 - d_1)^2 + (p_2 - d_2)^2 + (p_3 - d_3)^2}$$

Ellenőrizzük, hogy D a felszín alkotó háromszöglap belsejében van-e! Adjuk meg ABC háromszög oldalegyeneseinek egyenletét!

Az oldalegyenes irányvektora a rajta fekvő két csúcs által meghatározott vektor, pontja pedig e két pont valamelyike. A paraméteres egyenletbe $z = 0$ helyettesítéssel megkapjuk az oldalegyenes xy síkra vett merőleges vetületi képét. Ha x és y nem egyszerre 0, akkor egy egyenest kapunk, melynek felírhatjuk az általános egyenletét (ha $x = y = 0$, akkor egy pontot, ám a térképünkön ilyen egyenes nincs). Az általános egyenletet könnyen megkaphatjuk, ha az x koordináta paraméteres egyenletéből kifejtjük a t paramétert, majd a kapott kifejezést behelyettesítjük az y egyenletébe. Ez az egyenes xy síkot két félsíkra osztja. A egyenletbe helyettesítsük be előbb D , majd a harmadik csúcs x és y koordinátáit. A helyettesítéssel kapott szám előjele egyértelműen meghatározza, hogy a pont xy sík mely félsíkjaiban van. A két pont pontosan akkor esik azonos félsíkra, ha előjeleik megegyeznek. A síkról síkra történő merőleges vetítés tartja az osztóviszonyt, így amely pontok az xy síkon azonos félsíkra esnek, azon pontok ősei az alapsíkon szintén azonos félsíkra illeszkednek.

Végezzük el ezt az eljárást a háromszög minden oldalegyenesére! Amennyiben D mindhárom oldalegyenes esetén a harmadik csúccsal azonos félsíkra illeszkedik, úgy D a háromszög belsejében található, ellenkező esetben nem.

Vizsgáljuk meg az összes síkot! Amelyeknél D a háromszög belsejében van, azok közül válasszuk ki azt, amelynél $d(P, D)$ minimális. Legyen ez a sík S_0 , a dőféspont pedig D_0 . Az összes $d(P, D_0)$ -nál nagyobb adatot, amelynél a pont a háromszög első pontja, zárjuk ki a további számításokból.

Maradtak tehát olyan síkjaink, amelyeknél $d(D_i, P) < d(D_0, P)$, de D_i kívül esik a az $A_i B_i C_i$ háromszögon.

2. Keressük $A_i B_i C_i$ háromszögnek a D_i ponttól vett távolságát! Ehhez adjuk meg $\overline{D_i}$ -nek az oldalegyenesekhez legközelebb eső pontját.

Az $\overline{A_i B_i}$ normálvektorú D_i pontra illeszkedő sík $A_i B_i$ egyenessel vett metszéspontja legyen E_i . Ugyanilyen módszer szerint keressük meg $d(D_i, B_i C_i)$ -t (F_i), és $d(D_i, A_i C_i)$ -t (G_i).

Ellenőrizzük, hogy D_i kívül esik-e (A_i, B_i) szakaszon, vagy eleme neki! Ha D_i koordinátái A_i és B_i koordinátái közé esnek, akkor $D_i \in (A_i, B_i)$, különben nem. Ugyanezt a módszert alkalmazzuk a másik két oldalon is.

Ha $D_i \in (A_i, B_i)$, akkor $d(P, (A_i, B_i)) = d(P, D_i)$, ha nem, akkor e távolság a szakasz D_i ponthoz közelebbi végpontjától vett távolsága lesz P -nek. P pont és $A_i B_i C_i$ háromszög távolsága pedig e három eredmény minimuma.

A második pontban vizsgált $d(P, A_i B_i C_i)$ -k, illetve az első pont eredményeként kapott $d(P, D_0)$ -ak minimuma a P pont felszíntől való távolsága.

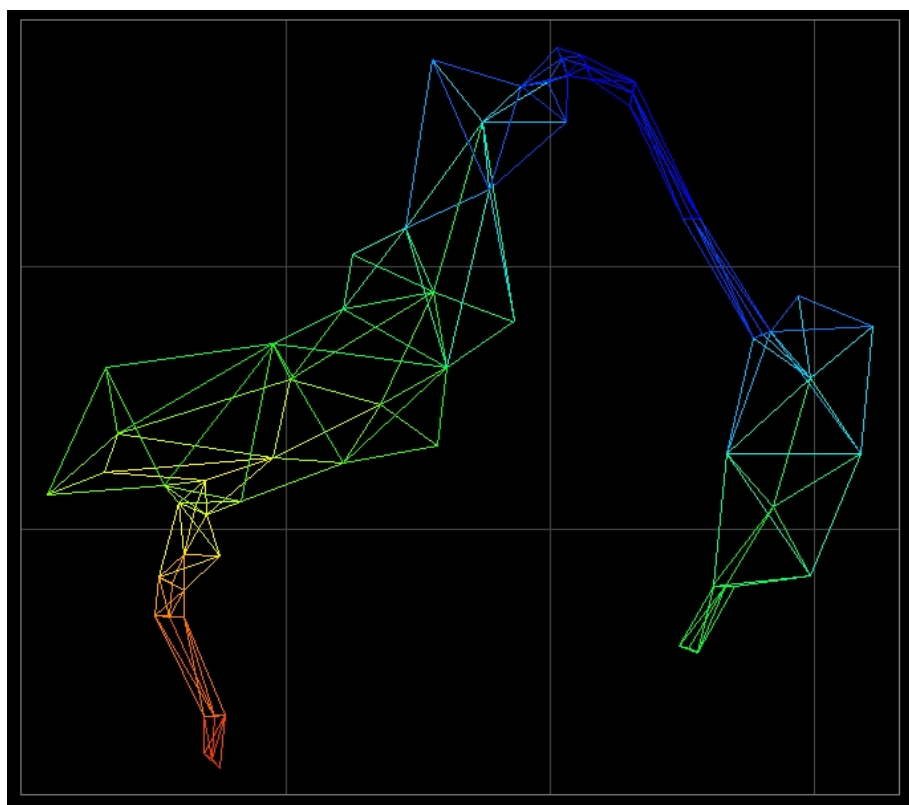
Konkrét számítást a dolgozat terjedelmére való tekintettel itt nem közlök.

7. Összegzés

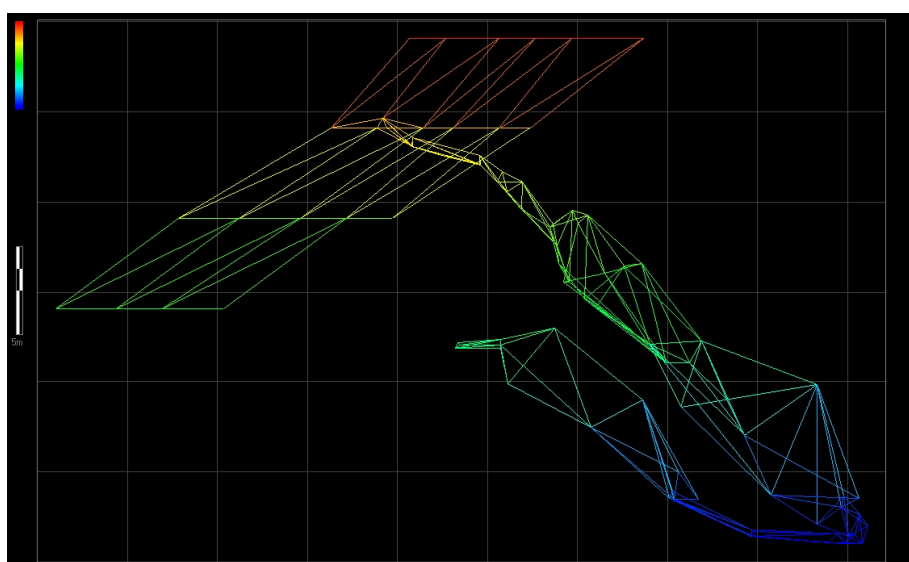
Dolgozatomban bemutattam, hogy egy három dimenziós barlangtérkép elkészítése matematikailag igen összetett feladat. Amellett, hogy rengeteg számítást igényel, igen sok apróbb problémát vet fel. Az elkészült munkával kapcsolatban fontos azonban megjegyezni, hogy a különböző földrajzi helymeghatározó rendszerek, és ábrázoló módszerek pontatlansága, torzulása, illetve a térképezés nehézségei és a mérések hibái miatt a valóságot pontosan tükröző eredményre akkor sem juthattam, ha a matematikai formulák teljesen hibátlanok.

Az elkészült térkép mégis megfelel az előzetes elvárásoknak. Jól szemlélteti a járatok elhelyezkedését, méretét, és további számítási munkálatok alapjául szolgálhat.

Mellékletek



A Hajnóczy-barlang alaprajza



A kész térkép hosszmetsete

Hajnóczy-barlág				Survey_1						
	Cimke	Ponttól	Pontig	Hossz	Írány	Lejtés		Xm	Ym	Zm
1		0	1	0,800	-46,870	0,000		-0,584	0,547	0,000
2		1	2	1,720	0,000	-35,670		-0,584	1,944	-1,003
3		2	3	1,910	-26,580	-15,800		-1,406	3,588	-1,523
4		3	4	2,450	-26,580	-12,050		-2,478	5,731	-2,034
5		4	5	2,120	6,980	-45,100		-2,296	7,216	-3,536
6		5	6	4,160	14,630	-46,180		-1,569	10,003	-6,538
7		6	7	2,180	-39,310	-66,730		-2,115	10,669	-8,540
8		7	8	4,410	-94,290	0,000		-6,512	10,339	-8,540
9		8	9	6,320	24,510	-33,650		-4,330	15,126	-12,042
10		9	10	6,510	81,640	-8,840		2,035	16,062	-13,043
11		10	11	2,940	63,730	0,000		4,671	17,363	-13,043
12		11	12	2,890	10,010	-43,730		5,034	19,419	-15,041
13		12	13	3,000	63,470	-41,830		7,034	20,418	-17,041
14		13	14	7,330	8,940	-28,530		8,035	26,780	-20,542
15		14	15	3,540	106,570	-8,110		11,394	25,780	-21,042
16		15	16	2,290	43,090	-27,150		12,786	27,268	-22,087
17		16	17	1,390	108,440	-46,240		13,698	26,964	-23,091
18		17	18	2,240	116,580	0,000		15,701	25,962	-23,091
19		18	19	5,770	154,140	3,970		18,212	20,782	-22,691
20		19	20	5,450	148,240	22,540		20,861	16,502	-20,602
21		20	21	1,730	37,890	0,000		21,924	17,867	-20,602
22		21	22	3,370	112,450	26,450		24,712	16,715	-19,101
23		22	23	5,440	185,030	27,350		24,289	11,902	-16,602
24		23	24	5,580	202,610	25,330		22,350	7,246	-14,214
25		24	25	3,500	262,170	34,840		19,504	6,855	-12,215
26		25	26	2,880	209,010	0,000		18,107	4,336	-12,215

A B poligon adatai

Felhasznált irodalom

1. Dr. Karsay Ferenc - Alkalmazott vetülettan, Tankönyvkiadó, Bp, 1991.
2. Bácsatyi László - Magyarországi Vetületek, Sopron, 2005.
3. Kratochvilla Krisztina - Az EOV-alapfelületek térbeli helyzetének vizsgálata in Geodézia és Kartográfia, 2003., 10. szám.
4. Kurusa Árpád - Euklidészi geometria, Polygon, Szeged, 2008.
5. Zaletnyik Piroska - WGS-84 EOV koordináta transzformáció neurális hálózattal, Budapest, 2003.
6. Dr. Varga József - A vetületnélküli rendszerektől az UTM-ig. WEB, 2002.
7. Dr. Varga József - GPS alapismeretek. (Kezdő térinformatikai felhasználáshoz) WEB, 2002.
8. Krauter András - Geodézia. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1995.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani Dr. Kurusa Árpádnak és Dr. Mucsi Lászlónak a szakdolgozatom elkészítésében nyújtott segítségükért, végtelen türelmükért és hasznos tanácsaikért. Továbbá köszönettel tartozom Solymosi Rita barlangász társamnak, aki nélkülözhetetlen adatokkal segítette munkám.

Nyilatkozat

Alulírott Pásztor Péter kijelentem, hogy a szakdolgozatban foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

Szeged, 2010. március-május.

Aláírás