

Szakaszok takarási száma

Lukács Péter

III. éves matematika szakos BSc hallgató

Témavezető: dr. Kurusa Árpád

Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar

Bolyai Intézet
Geometriai Tanszék

2016

TARTALOMJEGYZÉK

1. Bevezetés	1
2. Előismeretek és jelölések	2
3. Egy szakasz és egy kör	7
4. Két szakasz és egy kör	12
5. Megoldatlan problémák	21
Irodalom	21
Nyilatkozat	22

1. BEVEZETÉS

A matematikai alakfelismerés témakörébe számos érdekes kérdés esik, melyek azt az általános problémát célozzák meg, hogy milyen jellegű és mennyi információ szükséges ahhoz, hogy egy síkbeli vagy térbeli test alakját meghatározhassuk.

Ebbe a kérdéskörbe tartoznak a különböző röntgenkép, átvilágítási és árnyékolási problémák is. Az ezen a téren elért matematikai eredményeket számos helyen felhasználják a való életben, ennek leghíresebb példája az orvosi képalkotásban is használt tomográf.

Szakdolgozatom témája is a matematikai alakfelismerés tárgykörébe esik. A legelső kérdés amelyből kiindulunk: *Ha egy kör belsejében fekvő két konvex alakzat a kör minden pontjából ugyanakkora szög alatt látszik, akkor egybeesik-e a két alakzat?* Erre a következő válasz adhatjuk:

1.1. Tétel ([1, Lemma 2.1]) *Ha egy $\mathcal{C}$ kör belsejében fekvő $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ konvex poligonok a kör bármely pontjából ugyanakkora szög alatt látszanak, akkor a két poligon egybeesik.*

Szakdolgozatom első felében azzal az esettel foglalkozunk, amikor a $\mathcal{C}$ kör belsejében egy $\mathcal{S}$ szakasz helyezkedik el, és ismerjük, hogy a $\mathcal{C}$ kör pontjaiból mekkora szög alatt látszódik ez a szakasz, azaz ismerjük a $\nu_{\mathcal{S}}(\underline{x})$ látószögfüggvényt a körön. Az [1] cikkben megfogalmazott unicitáshoz egy konstruktív bizonyítást adunk, amellyel az $\mathcal{S}$ szakasz meg is szerkeszthető, majd több másik módszerrel is kiszámoljuk a szakasz helyzetét a körben.

Dolgozatom második felében a probléma általánosítása felé teszünk egy lépést: Több, a $\mathcal{C}$ kör belsejében elhelyezkedő $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n$ szakasz takarási számának a

$$\tau_{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n}(\underline{x}) := \nu_{\mathcal{S}_1}(\underline{x}) + \dots + \nu_{\mathcal{S}_n}(\underline{x})$$

függvényt hívjuk,¹ azaz az egyes szakaszok látószögeinek az összegét, ahol $\underline{x}$ egy pont a síkon. Egy általános kérdés, amely rögtön felmerül az, hogy:

Ismerve a takarási szám értékeit a $\mathcal{C}$ körön, a szakaszok meghatározhatóak-e?

Erre a problémára általunk ismert válasz még nem született.

Ebben a dolgozatban az $n = 2$ esettel foglalkozunk. Szükséges és elégséges feltételt adunk a szakaszok szimmetriájára, és megmutatjuk, hogyan kaphatjuk vissza ezen szimmetrikus szakaszokat a takarási függvényből, remélve, hogy közelebb kerülünk ezzel az általános eset kidolgozásához.

¹A takarási szám ennél általánosabb fogalom [4], de ebben a dolgozatban elegendő ez az értelmezés.

2. ELŐISMERETEK ÉS JELÖLÉSEK

Egy $\mathcal{M}$ multiszakasz takarási számának függvényét $\tau_{\mathcal{M}}$, egy konvex $\mathcal{K}$ alakzat látószögének függvényét $\nu_{\mathcal{K}}$ jelöli.

Legyen $g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ egy ívhossz szerint paraméterezett differenciálható görbe. Legyen $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ és $\kappa(s)$ a g görbe érintő egységvektora, normál vektora, és a g görbe görbülete a $g(s)$ pontban. Legyen $A(s)$ és $B(s)$ a $g(s)$ pontból a $\mathcal{K}$ szigorúan konvex tartományhoz húzott két érintő egy-egy érintési pontja, $\mathbf{t}^a(s)$ a $g(s)$ pontból az A pontba mutató egységnyi vektor, $\alpha(s)$ pedig ennek szöge a $\mathbf{t}(s)$ érintőhöz mérve. Végül $a(s)$ legyen az A pont távolsága a $g(s)$ ponttól.

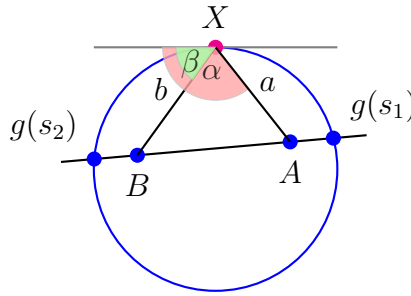
2.1. Lemma (Kurusa [3, Lemma 1]) *Az α differenciálható, és $\dot{\alpha}(s) = \frac{\sin \alpha(s)}{a(s)} - \kappa(s)$.*

Bizonyítás. Véve az $R(\xi) = \begin{pmatrix} \cos \xi & \sin \xi \\ -\sin \xi & \cos \xi \end{pmatrix}$ forgatási mátrixot,

$$A(s) = a(s)\mathbf{t}(s)R(\alpha(s)) + g(s)$$

adódik. A Frenet-formulák szerint ennek deriváltja

$$0 = \dot{a}(s)\mathbf{t}(s)R(\alpha(s)) + a(s)\kappa(s)\mathbf{n}(s)R(\alpha(s)) + a(s)\mathbf{t}(s)\dot{R}(\alpha(s))\dot{\alpha}(s) + \mathbf{t}.$$



Ha felhasználjuk a $\mathbf{t}\dot{R}(\alpha(s)) = \mathbf{n}R(\alpha(s))$ összefüggést, és beszorozzuk mindkét oldalt az $R(-\alpha(s))$ mátrixszal, majd rendezzük az egyenlőséget

$$\mathbf{t}(s)R(-\alpha(s)) = -\dot{\alpha}(s)\mathbf{t}(s) - a(s)(\kappa(s) + \dot{\alpha}(s))\mathbf{n}(s)$$

adódik. Mivel a $\mathbf{t}(s)R(-\alpha(s)) = \mathbf{t} \cos \alpha(s) - \mathbf{n} \sin \alpha(s)$, ebből következik, hogy

$$a(s)(\kappa(s) + \dot{\alpha}(s)) = \sin \alpha(s).$$

Az egyenlőség rendezése igazolja az állítást. □

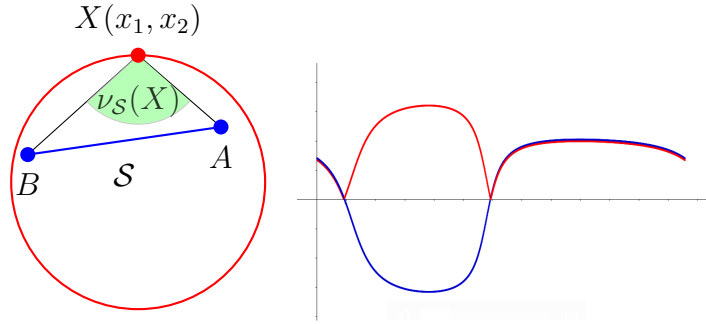
Legyen $\mathbf{t}^b(s)$ a $g(s)$ pontból a B pontba mutató egységnyi vektor, $\beta(s)$ pedig ennek szöge a $\mathbf{t}(s)$ érintőhöz mérve, valamint $b(s)$ legyen a B pont távolsága a $g(s)$ ponttól. Vizsgáljuk a $\mu(s) := \alpha(s) - \beta(s)$ függvényt, melyre egyrészt nyilván $\nu_{\mathcal{K}}(s) = |\mu(s)|$, másrészt a 2.1 lemma szerint

$$\dot{\mu} = \frac{\sin \alpha}{a} - \frac{\sin \beta}{b}. \quad (2.1)$$

Eszerint a ν nyilván mindaddig differenciálható, amíg μ nem vált előjelet.

Tegyük most fel, hogy $\mathcal{K}$ egy $\overline{AB}$ szakasz és a g görbe egy ezt körülvevő kör.

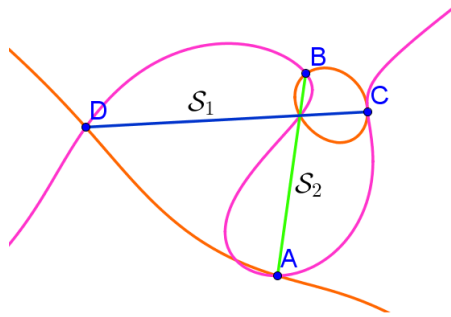
Ebben az esetben μ a körnek pontosan két pontjában vált előjelet, így ott a $\nu_{\overline{AB}}(s)$ nem differenciálható. Tehát a $\nu_{\overline{AB}}(s)$ ezen két hely kivételével mindenütt differenciálható, vagyis $\nu_{\overline{AB}}(s)$ irány szerinti deriváltjai pontosan e két pont kivételével egymás ellentettjei, ebben a két pontban viszont megegyeznek.



Az egységkörön az $A = (0.6, 0.4)$ és a $B = (-0.8, 0.2)$ $\mathcal{S}$ szakaszához tartozó $\nu_{\mathcal{S}}$ függvény pirossal, a $\mu_{\mathcal{S}}$ függvény pedig kékkel ábrázolva.

A síkban két konvex tartományt azonos szög alatt látó pontok halmazának lezártját *ekvioptikusnak*, az alakzatokat kiegészítő szög alatt látó pontjait pedig *kompoptikusnak* nevezzük.

2.2. Tétel [2, 2.1. Tétel] *Két szakasz ekvioptikusának, és kompoptikusának uniója két, legfeljebb harmadfokú algebrai görbe.*



Az $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ szakasz Apollóniosz-görbéi lila és narancssárga színnel.

A 2.2 tétel által meghatározott két görbét *Apollóniosz-görbének* nevezzük. Két, nem egybeeső és nem elfajuló $\mathcal{S}_1 := \overline{AB}$ és $\mathcal{S}_2 := \overline{CD}$ szakasz két Apollóniosz-görbéjének egyenlete [2, (2.3)]

$$\begin{aligned}
 & |\mathbf{x}|^2 \langle \mathbf{x}, (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{m} \rangle + \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle |\mathbf{x}|^2 - \langle \mathbf{x}, (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{c} + \mathbf{d} \rangle + \\
 & + \langle \mathbf{x}, \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle ((\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{m}) - \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle (\mathbf{c} + \mathbf{d}) \rangle + \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle \\
 & = \pm (|\mathbf{x}|^2 \langle \mathbf{x}, (\mathbf{c} - \mathbf{d}) \times \mathbf{m} \rangle + \langle \mathbf{b} \times \mathbf{d}, \mathbf{m} \rangle |\mathbf{x}|^2 - \langle \mathbf{x}, (\mathbf{c} - \mathbf{d}) \times \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle + \\
 & + \langle \mathbf{x}, \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle ((\mathbf{c} - \mathbf{d}) \times \mathbf{m}) - \langle \mathbf{c} \times \mathbf{d}, \mathbf{m} \rangle (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \rangle + \langle \mathbf{c} \times \mathbf{d}, \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle),
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

ahol $\mathbf{x} = (x, y, 0)$, $\mathbf{a} = (a, \bar{a}, 0)$, $\mathbf{b} = (b, \bar{b}, 0)$, $\mathbf{c} = (c, \bar{c}, 0)$, $\mathbf{d} = (d, \bar{d}, 0)$ az A, B, C és D végpontok koordinátái, $\mathbf{m} = (0, 0, 1)$ a $z = 0$ sík normálisa.

2.3. Lemma *Legyen $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ egy-egy szakasz az f egyenesen.*

1. Ha $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ különböző hosszúságúak, akkor Apollóniosz-görbéik előállnak az f egyenes és egy-egy (esetleg elfajuló) kör uniójaként, melyek egyike az ekvioptikus, másika pedig a kompoptikus része.
2. Ha $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ azonos hosszúságúak, akkor Apollóniosz-görbéik előállnak az f egyenes, és egy erre merőleges g egyenes, illetve egy esetleg elfajuló C kör uniójaként, ahol g az ekvioptikus, C pedig a kompoptikus része.

Bizonyítás. A sík koordinátázása legyen olyan, hogy a szakaszok ráessenek az x tengelyre, azaz, $\mathbf{a} = (a, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (b, 0, 0)$, $\mathbf{c} = (c, 0, 0)$, $\mathbf{d} = (d, 0, 0)$. Felhasználva a $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, $\mathbf{c} \times \mathbf{d} = \mathbf{0}$ összefüggéseket, a (2.2) egyenlet az

$$\begin{aligned} & |\mathbf{x}|^2 \langle \mathbf{x}, (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{m} \rangle - \langle \mathbf{x}, (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{c} + \mathbf{d} \rangle + \langle \mathbf{x}, \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle ((\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{m}) \rangle \\ &= \pm(|\mathbf{x}|^2 \langle \mathbf{x}, (\mathbf{c} - \mathbf{d}) \times \mathbf{m} \rangle - \langle \mathbf{x}, (\mathbf{c} - \mathbf{d}) \times \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{x}, \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle ((\mathbf{c} - \mathbf{d}) \times \mathbf{m}) \rangle) \end{aligned}$$

formára vezet. Mivel $((\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{m}) = (0, b - a, 0)$ és $((\mathbf{c} - \mathbf{d}) \times \mathbf{m}) = (0, d - c, 0)$ ebből

$$\begin{aligned} & (x^2 + y^2)y(b - a) - y(b - a)x(c + d) + ycd(b - a) \\ &= \pm((x^2 + y^2)y(d - c) - y(d - c)x(a + b) + yab(d - c)) \end{aligned} \quad (2.3)$$

adódik. Eszerint az $y = 0$ egyenes pontjai mind rajta vannak mindkét Apollóniosz-görbén. Az Apollóniosz-görbe x -tengelyen kívüli, vagyis $y \neq 0$, pontjaira az

$$(x^2 + y^2)((b - a) - (d - c)) \pm x((b - a)(c + d) - (d - c)(a + b)) \pm cd(b - a) - ab(d - c) = 0$$

egyenletek, vagyis

$$x^2((b - a) \pm (d - c)) + y^2((b - a) \pm (d - c)) - 2x(bc - ad) + cd(b - a) \pm ab(d - c) = 0 \quad (2.4)$$

érvényes.

1. ESET.

Ha a szakaszok hossza különböző, vagyis $|b - a| \neq |d - c|$, akkor a (2.4) egyenletek a másodfokú

$$\begin{aligned} & y^2 + \left(x - \frac{bc - ad}{(b - a) - (d - c)}\right)^2 + \frac{cd(b - a) - ab(d - c)}{(b - a) - (d - c)} - \left(\frac{bc - ad}{(b - a) - (d - c)}\right)^2 = 0 \\ & y^2 + \left(x - \frac{bd - ac}{(b - a) + (d - c)}\right)^2 + \frac{cd(b - a) + ab(d - c)}{(b - a) + (d - c)} - \left(\frac{bd - ac}{(b - a) + (d - c)}\right)^2 = 0 \end{aligned}$$

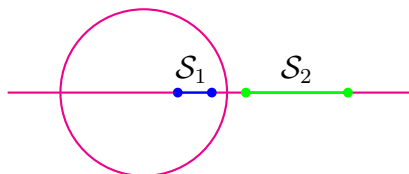
formát veszik fel. Ezek olyan körök, amelyek középpontjai az x -tengelyen vannak, sugarainak négyzete pedig

$$\begin{aligned} r_1^2 &= \frac{(a - b)(a - c)(b - d)(c - d)}{((b - a) - (d - c))^2}, \\ r_2^2 &= \frac{(b - a)(b - c)(a - d)(c - d)}{((b - a) + (d - c))^2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Az a kör elfajul, mely sugarának négyzete nem pozitív. Az $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ elhelyezkedésétől függően az alábbi esetek lehetségesek:

Ha $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ diszjunktak:

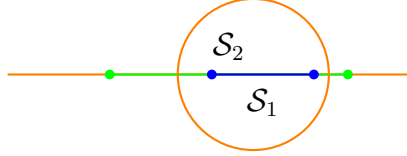
Válasszuk a koordinátázást olyanra, hogy az O origó a két szakasz közé essen. Az általánosság megszorítása nélkül ekkor feltehető, hogy $a < b < 0 < c < d$. Ekkor a második kör elfajul, a komptikus összes pontja az f egyenesre kell, hogy essen, így a nem elfajuló kör az ekvoptikus része lesz.



Két egy egyenesre eső diszjunkt szakaszok ekvoptikusa.

Ha $\mathcal{S}_1$ tartalmazza $\mathcal{S}_2$ -t:

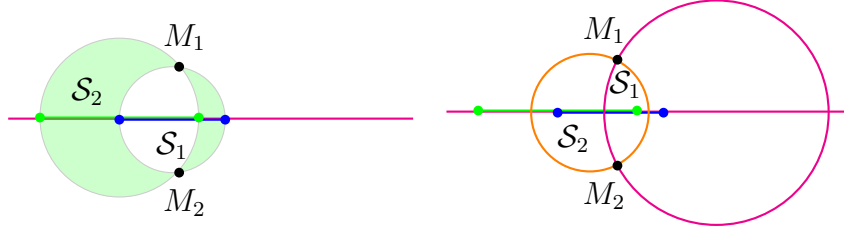
Most válasszuk az origót olyannak, hogy $a < c < 0 < d < b$ teljesüljön. Ekkor az első kör az elfajuló. Mivel az $\mathcal{S}_2$ szakasz csak magáról az $\mathcal{S}_2$ szakaszcól nem látszódik kisebb szögben, mint $\mathcal{S}_1$, így a nem elfajuló kör a komptikus része.



Egymást tartalmazó szakaszok komptikususa.

Ha $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ nem tartalmazzák egymást és van két közös pontjuk:

Ekkor egyik kör sem elfajuló és mindkettőnek át kell mennie a két szakasz Thalész-köreinek M_1 és M_2 metszéspontjain. Legyen zöld azon pontok halmaza, amelyek az egyik Thalész-körön belül, a másikon pedig kívül helyezkednek el.

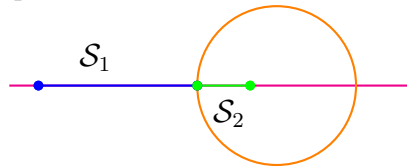


Az egyik Apollóniosz-görbe a zöld tartományban, a másik azon kívül halad, így az $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ Apollóniosz-görbéinek lila és narancssárga körei az ekvoptikus és komptikus részei.

A komptikus pontok csak a zöld területen, az ekvoptikus pontok viszont csakis azon kívül helyezkednek el. Egy kör, amelynek középpontja a tengelyre esik, és átmegy az M_1 és M_2 pontokon, csak a zöld területen belül, vagy csak azon kívül helyezkedik el. Így a két Apollóniosz-görbe egy-egy köre teljesen ekvoptikus, vagy teljesen komptikus.

Ha $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ érinti egymást:

Ekkor az egyik kör elfajuló, a másik nem. A fentebb definiált zöld terület üres, ezért a nem elfajuló kör az ekvoptikus része.



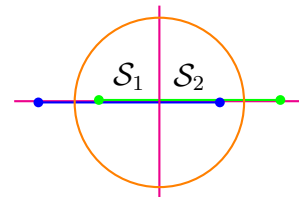
Ha $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ érintik egymást.

2. ESET.

Minthogy $|b - a| = |d - c| \neq 0$, $b - a = d - c$ vagy $b - a = c - d$. Tegyük fel, hogy $b - a = d - c$. A (2.4) alapján az Apollóniosz-görbék egyenletei

$$x = \frac{cd(b - a) - ab(d - c)}{2(bc - ad)},$$

$$0 = \left(x - \frac{c - a}{2}\right)^2 + y^2 + (c + a)\frac{c + 2b - a}{4}.$$



(2.6)

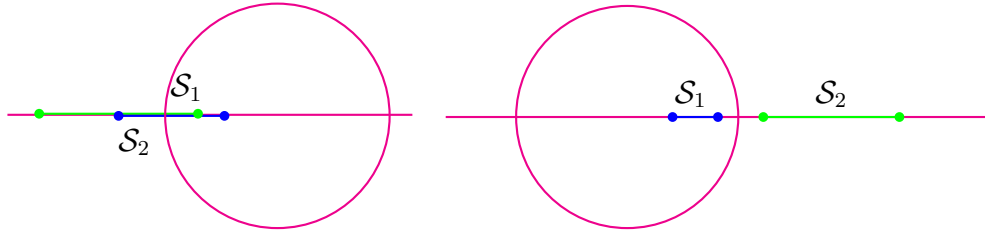
Ez az egyenes és kör átmegy a szakaszok Thalész-köreinek M_1 és M_2 metszéspontjain, így a korábbi indoklást követve adódik, hogy az y -tengellyel párhuzamos egyenes az ekvioptikus része, az esetleg elfajuló kör pedig a kompoptikus része. $\square$

2.4. Következmény *Legyen adott két szakasz egy egyenesen.*

1. *Ha a szakaszok hossza különböző, akkor*
 - (1.a) *amennyiben egyik tartalmazza a másikat, akkor nincs ekvioptikus körük,*
 - (1.b) *amennyiben nem tartalmazzák egymást és van közös pontjuk, akkor az ekvioptikus körük áthalad a szakaszok megfelelő közös pontján,*
 - (1.c) *amennyiben diszjunktak, akkor az ekvioptikus körük áthalad a szakaszok közelebbi végpontjainak szakaszán,*
2. *Ha a szakaszok hossza egyenlő, akkor az ekvioptikus egyenesük a két szakasz szimmetria-tengelye.*

Bizonyítás. (1.a) akkor a 2.3 lemma szerint csak kompoptikus körük van.

(1.b) Legyenek az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ szakaszok egymáshoz legközelebbi végpontjai B és C . Ha egy X pontnak B a vetülete, akkor a B közelében az $AXB \angle$ szög közel $\pi/2$, az $CXD \angle$ szög pedig közel π . Ha egy Y pontnak C a vetülete, akkor a C közelében az $AYB \angle$ szög közel π , az $CYD \angle$ szög pedig közel $\pi/2$. A látószög függvény folytonossága miatt tehát az $\overline{XY}$ szakaszon van egy ekvioptikus Z pont. Mivel X és Y rendre a B és C pontokhoz tetszőlegesen közel van, ebből következik, hogy az ekvioptikus kör metszi a $\overline{BC}$ szakaszt.



Kicsi leírás.

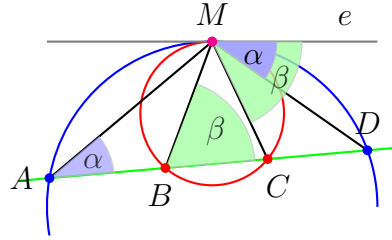
(1.c) Legyenek az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ szakaszok egymáshoz legközelebbi végpontjai B és C . Ha egy X pontnak B a vetülete, akkor a B közelében az $AXB \angle$ szög közel $\pi/2$, az $CXD \angle$ szög pedig közel 0. Ha egy Y pontnak C a vetülete, akkor a C közelében az $AYB \angle$ szög közel 0, az $CYD \angle$ szög pedig közel $\pi/2$. A látószög függvény folytonossága miatt tehát az $\overline{XY}$ szakaszon van egy ekvioptikus Z pont. Mivel X és Y rendre a B és C pontokhoz tetszőlegesen közel van, ebből következik, hogy az ekvioptikus kör metszi a $\overline{BC}$ szakaszt.

2. Mivel a szakaszok elhelyezkedése szimmetrikus, az ekvioptikus egyenes is szimmetrikus lesz, azaz egybeesik a szimmetria tengellyel. $\square$

3. EGY SZAKASZ ÉS EGY KÖR

3.1. Lemma *Legyenek $\mathcal{C}_1$ és $\mathcal{C}_2$ egymást belülről egy M pontban érintő körök. Legyen f egy tetszőleges egyenes, amely $\mathcal{C}_1$ -et és $\mathcal{C}_2$ -t is metszi. A metszéspontok az f egyenesen rendre legyenek A, B, C és D . Ekkor az M pontból az $\overline{AB}$ és az $\overline{CD}$ szakaszok azonos szög alatt látszanak.*

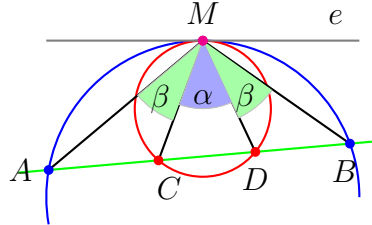
Bizonyítás. Legyen e a két kör közös érintő egyenese. A kerületi szögek tételének érintőkre vonatkozó részállítása miatt az $MAD \sphericalangle$ szög megegyezik a $\overline{DM}$ szakasz és az e egyenes által bezárt α szöggel, az $MBC \sphericalangle$ szög pedig a $\overline{CM}$ szakasz és az e egyenes által bezárt β szöggel. Így az M pontból a $\overline{CD}$ szakasz $\beta - \alpha$ szög alatt látszik.



Másrészt az ABM háromszöget vizsgálva, az M csúcsnál fekvő belső szög megegyezik a B csúcsnál fekvő külső szög, és az A csúcsnál fekvő belső szög különbségével, ami éppen $\beta - \alpha$. $\square$

3.2. Tétel ([1, Lemma 2.1]) *Tegyük fel, hogy a $\overline{CD}$ szakasz a $\mathcal{C}$ kör belsejében fekszik. A $\mathcal{C}$ körön adott $\nu_{\overline{CD}}$ függvény meghatározza a $\overline{CD}$ szakaszt.*

Bizonyítás. A $\mathcal{C}$ körön a $\nu_{\overline{CD}}$ függvény egyedül a $\overline{CD}$ szakasz f egyenesének a $\mathcal{C}$ körrel vett A és B metszéspontjaiban zéró, tehát f meghatározott.



Az f egyenes a kört két ívre bontja. Ezek közül a továbbiakban csak az egyik, tetszőlegesen kiválasztott ívvel foglalkozunk. Keressük meg ezen az íven a $\nu_{\overline{CD}}$ függvény M maximumhelyét és itt a függvény értéke legyen α .

A $\overline{CD}$ szakasz α szögű $\mathcal{L}$ látóköri íve érinti az M pontban a $\mathcal{C}$ kört, hiszen a $\nu_{\overline{CD}}$ függvény szintvonalai éppen a $\overline{CD}$ szakasz látóköri ívei, és α az a legnagyobb szög, amelyre a $\mathcal{C}$ körnek és a látóköri íveknek van közös pontja. A 3.1 lemma szerint az M pontból a $\overline{CA}$ és a $\overline{BD}$ szakaszok azonos szögben látszódnak. Ekkor, ha az $AMB \sphericalangle$ szögből levonjuk az α szöget, és az így kapott szög felét felmérjük az M pontban az $\overline{MB}$, illetve az $\overline{MD}$ szögszárakra, akkor az új szögszáraknak, és az f egyenesnek a metszéspontjai kiadják a D és a C pontokat. Ez igazolja az állítást. $\square$

Két szakasz ekvoptikusa a két harmadrendű Apollóniosz-görbe részhalmaza. Bézout tétele [5] szerint két, közös komponenstől mentes algebrai görbe metszéspontjainak száma legfeljebb a görbék fokszámának szorzata, ezért egy másodrendű $\mathcal{C}$ kör, és egy harmadrendű Apollóniosz-görbe legfeljebb hat pontban metszheti egymást úgy, hogy a kör ne legyen az ekvoptikus része. Ebből következik az alábbi állítás.

3.3. Tétel *Ha a $\mathcal{C}$ körnek létezik 13 olyan pontja, amelyekből a kör belsejében fekvő $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ szakaszok azonos szög alatt látszanak, akkor $\mathcal{S}_1 \equiv \mathcal{S}_2$.*

Ez azonnal adja a következőt.

3.4. Következmény ([1, Lemma 2.2]) *Ha a $\mathcal{C}$ körnek létezik olyan nyílt $\mathcal{C}'$ köríve, hogy a körív minden pontjából a kör belsejében fekvő $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ szakaszok azonos szög alatt látszódnak, akkor $\mathcal{S}_1 \equiv \mathcal{S}_2$*

A továbbiakban az ismeretlen szakasz végpontjainak kiszámítási módjait mutatjuk meg néhány fontos speciális esetre.

Legyen az ívhossz szerint g -vel paraméterezett ϱ sugarú $\mathcal{C}$ körön $g(s_1)$ és $g(s_2)$ az a két pont, ahol az $\mathcal{S} := \overline{AB}$ szakasz nulla szög alatt látszik. Ekkor feltehető, hogy $0 \leq s_1 < s_2 < 2\varrho\pi$. Legyen $s_3, s_4 \subset (0, 2\varrho\pi)$ úgy, hogy $\nu_{\mathcal{S}}(s_3) \neq 0$, és $\nu_{\mathcal{S}}(s_4) \neq 0$ tetszőleges, és jelölje $\mathcal{H}$ a $g(s_1)g(s_2)$ húrt, amelynek hossza $h > 0$.

3.5. Tétel *A $\dot{\mu}_{\mathcal{S}}(s_1)$ és $\dot{\mu}_{\mathcal{S}}(s_2)$ értékek meghatározzák az $\mathcal{S}$ szakaszt.*

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül² számolhatunk olyan körrel, ami-
ben $h = 2$. Legyen az A és B pontok húrfelező ponttól való előjeles távolsága a és b . Ekkor $-1 < b < a < 1$. A $\mathbf{t}(s_1)$ és $\mathcal{H}$ által bezárt szög legyen ξ .

A (2.1) formula szerint

$$|\dot{\mu}(s_1)| = \left| \frac{\sin \xi}{1-a} - \frac{\sin \xi}{1-b} \right| \quad \text{és} \quad |\dot{\mu}(s_2)| = \left| \frac{\sin(\pi - \xi)}{1+a} - \frac{\sin(\pi - \xi)}{1+b} \right|. \quad (3.1)$$

Legyen

$$x := \frac{|\dot{\mu}(s_1)|}{\sin \xi} \quad \text{és} \quad y := \frac{|\dot{\mu}(s_2)|}{\sin(\pi - \xi)},$$

és jegyezzük meg, hogy

$$x = \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-b} = \frac{a-b}{(1-a)(1-b)} > 0 \quad \text{és} \quad y = \frac{1}{1+b} - \frac{1}{1+a} = \frac{a-b}{(1+a)(1+b)} > 0.$$

A (3.1) első egyenlete alapján $b = \frac{a-x(1-a)}{1-x(1-a)}$, hiszen $x \neq \frac{1}{1-a}$, mert $x = \frac{1}{1-a}$ esetén az $\frac{1}{1-b} = 0$ ellentmondás adódna. A (3.1) második egyenlete b visszaírása és rendezés után a

$$a^2(x - 2xy - y) + a(-2x - 2y) + (x + 2xy - y) = 0$$

formulát eredményezi. Ennek $16xy + 16x^2y^2$ diszkriminánsa pozitív, így az

$$a_1 = \frac{x + y - 2\sqrt{xy + x^2y^2}}{x - y - 2xy} \quad \text{és} \quad a_2 = \frac{x + y + 2\sqrt{xy + x^2y^2}}{x - y - 2xy}$$

gyökei különbözőek. Ugyanakkor $|a_2| > 1$, mert a háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$|x + y + 2\sqrt{xy + x^2y^2}| = |x| + |y| + |2\sqrt{xy + x^2y^2}| > |x| + |y| + |2xy| > |x - y - 2xy|,$$

így az a_1 az egyedüli megoldás. Visszaírva a_1 értékét a b kifejezésébe, a

$$b = \frac{x + y - 2\sqrt{xy + x^2y^2}}{x - y + 2xy}$$

eredmény adódik. Ez bizonyítja a tétel állítását. $\square$

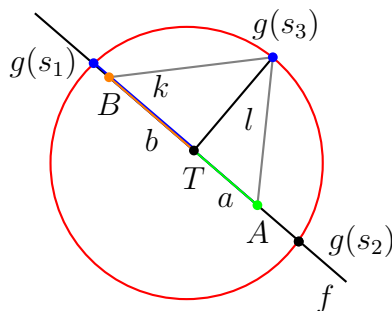
²A 2.1 formula a kör sugarától függetlenül teljesül, mert a κ görbületek kiesnek.

$$\begin{aligned} a - b &= \frac{4xy(x + y - 2\sqrt{xy + x^2y^2})}{(x - y)^2 - 4x^2y^2} = \frac{4xy(x + y - 2\sqrt{xy + x^2y^2})}{(x + y)^2 - 4(x^2y^2 + xy)} \\ &= \frac{4xy}{x + y + 2\sqrt{xy + x^2y^2}} \end{aligned}$$

3.6. Tétel Legfeljebb egy olyan, az $\mathcal{S}$ szakasztól különböző, vele egy húron lévő $\hat{\mathcal{S}}$ szakasz létezik, amelyre

1. $\dot{\mu}_{\mathcal{S}}(s_1) = \dot{\mu}_{\hat{\mathcal{S}}}(s_1)$ és $\nu_{\mathcal{S}}(s_3) = \nu_{\hat{\mathcal{S}}}(s_3)$, vagy
2. $\nu_{\mathcal{S}}(s_4) = \nu_{\hat{\mathcal{S}}}(s_4)$ és $\nu_{\mathcal{S}}(s_3) = \nu_{\hat{\mathcal{S}}}(s_3)$.

A $g(s_3)$ merőleges vetülete a $\mathcal{H}$ húron legyen T , ennek távolsága a $g(s_3)$ ponttól legyen l , a $g(s_1)$ ponttól pedig k . Az A és B pontok előjeles távolsága a T ponttól rendre legyen a és b . Ekkor $k - h < a < b < k$.


$$x := \operatorname{tg} \nu_S(s_3) = \operatorname{tg} \left(\operatorname{atg} \frac{b}{l} - \operatorname{atg} \frac{a}{l} \right) = \frac{bl - al}{l^2 + ab} > 0, \quad (3.2)$$
$$k^2y - bky - ak y + aby = b - a. \quad (3.3)$$
$$b^2(l y - x - k x y) + b y(k^2 x - 2 l k - l^2 x) + (l k^2 y + k l^2 x y - x l^2) = 0 \quad (3.4)$$
$$\begin{aligned} D &= (k^2xy - 2lky - l^2xy)^2 - 4(ly - x - kxy)(lk^2y + l^2kxy - x l^2) \\ &= k^4x^2y^2 + 2l^2k^2x^2y^2 + 4lk^2xy + 4l^3xy - 4l^2x^2 + l^4x^2y^2 \end{aligned}$$
$$b_{1,2} = \frac{-y(k^2x - 2kl - l^2x) \pm \sqrt{D}}{2(ly - x - kxy)}.$$
$$a^2(x - ly - kxy) + ay(2kl - xl^2 + k^2x) + (kl^2xy + l^2x - k^2ly) = 0 \quad (3.5)$$

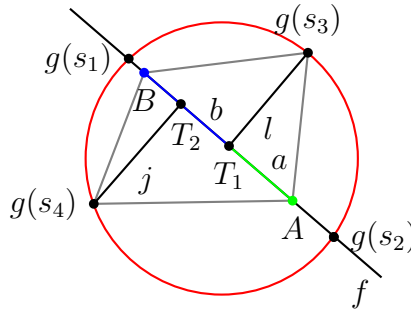
adódik, melynek megoldásai

$$a_{1,2} = \frac{-y(k^2x + 2kl - l^2x) \mp \sqrt{D}}{2(x - ly - kxy)}.$$

Ez bizonyítja az első eset állítását.

2. ESET.

Legyen a $g(s_3)$ és $g(s_4)$ pontok távolsága a húrtól rendre l és j , a húrra bocsátott merőlegesek talppontjai T_1 és T_2 , ezek távolsága pedig $k = |T_1T_2|$. Most a és b legyen az $\mathcal{S}$ végpontjainak T_1 -től vett távolsága. A kör sugarát olyanra válasszuk a számítások megkönnyítése végett, hogy $k = 1$ teljesüljön.



Ekkor az

$$x := \operatorname{tg} \nu_{\mathcal{S}}(s_3) = \frac{bl - al}{l^2 + ab} \quad \text{és} \quad y := \operatorname{tg} \nu_{\mathcal{S}}(s_4) = \frac{bj - aj}{j^2 + (1 - a)(1 - b)}$$

egyenletek első formulájából $b = \frac{l^2x + al}{l - ax}$, aztán ezt a második formulába írva

$$\left(\frac{l^2x + al}{l - ax}\right)j - aj = j^2y + a\left(\frac{l^2x + al}{l - ax}\right)y - ay - \left(\frac{l^2x + al}{l - ax}\right)y + y = 0$$

adódik. Ezt rendezve a másodfokú

$$a^2(jx - ly - xy) + a(2ly + xy + j^2xy - l^2x) + (l^2jx - lj^2y + l^2xy - ly) = 0 \quad (3.6)$$

egyenlethez jutunk. Ennek

$$D = (2ly + xy + j^2xy - l^2x)^2 - 4(jx - ly - xy)(l^2jx - lj^2y + l^2xy - ly)$$

diszkriminánsa nem negatív, hiszen a (3.6) egyenletnek van megoldása. Eszerint a (3.6) egyenlet gyökei

$$a_{1,2} = \frac{-2ly - xy - j^2xy + l^2x \pm \sqrt{D}}{2(jx - ly - xy)},$$

melyeket visszaírva

$$b_{1,2} = \frac{-2ly + xy + j^2xy - l^2x \pm \sqrt{D}}{2(jx - ly + xy)}$$

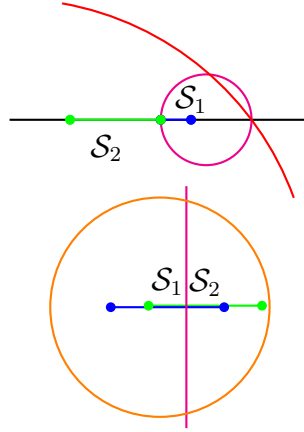
adódik. Ez bizonyítja a második eset állítását. □

A 3.6 tétel mindkét állítása éles.

Példa a 3.6 tétel 1. esetére. Tekintsünk egy $\varrho > 0.8$ sugarú $\mathcal{C}$ kört, amely át-megy a $\mathcal{H}$ húr $g(s_1) := (0.8, 0.6)$ és $g(s_2) := (-0.8, 0.6)$ végpontján. Vegyük azt az $\mathcal{S}$ szakaszt, melynek végpontjai $A := (0.6, 0.6)$ és $B := (0.5, 0.6)$, továbbá legyen $C := (0.5, 0.6)$ és $D := (0.2, 0.6)$ az $\hat{\mathcal{S}}$ szakasz végpontja. Ekkor a (2.1) alapján

$$\dot{\mu}_{\mathcal{S}}(s_1) = \frac{\sin \xi}{0.8 - 0.6} - \frac{\sin \xi}{0.8 - 0.5} = \frac{\sin \xi}{0.8 - 0.5} - \frac{\sin \xi}{0.8 - 0.2} = \dot{\mu}_{\hat{\mathcal{S}}}(s_1),$$

továbbá az Apollóniosz-görbe köreinek sugaraira vonatkozó (2.5) egyenletek közül az első alapján a nem elfajuló $\mathcal{K}$ kör sugara $r = 0.15$, középpontja pedig $G = (0.5 + 0.15, 0.6) = (0.65, 0.6)$. Minthogy a $\mathcal{K}$ kör $\pi/2$, a $\mathcal{C}$ kör viszont ennél határozottan kisebb szögben metszi a $\mathcal{H}$ húr egyenesét, a $\mathcal{K}$ és $\mathcal{C}$ körök a $g(s_1)$ ponton kívül is metszik egymást valamely $g(s_3)$ pontban. Minthogy a nem elfajuló kör a 2.3 lemma értelmében az ekvoptikus része, $\nu_{\mathcal{S}}(s_3) = \nu_{\hat{\mathcal{S}}}(s_3)$, vagyis a 3.6 tétel első állítása tényleg éles. $\triangle$



3.1. ábra. Ellenpélda a 3.6 tétel 1. és 2. esetére

Példa a 3.6 tétel 2. esetére. A 2. lemma alapján két azonos hosszúságú $\mathcal{S}$ és $\hat{\mathcal{S}}$ szakasz ekvoptikusa a szimmetria tengelyük, ami két, mondjuk $g(s_3)$ és $g(s_4)$ pontban metszi a szakaszok unióját körbevevő bármely $\mathcal{C}$ kört. Ekkor $\nu_{\mathcal{S}}(s_4) = \nu_{\hat{\mathcal{S}}}(s_4)$ és $\nu_{\mathcal{S}}(s_3) = \nu_{\hat{\mathcal{S}}}(s_3)$, vagyis a 3.6 tétel második állítása tényleg éles. $\triangle$

3.7. Lemma *Ha az egy húron fekvő $\mathcal{S}$ és $\hat{\mathcal{S}}$ szakaszokra $\nu_{\mathcal{S}}(s_3) = \nu_{\hat{\mathcal{S}}}(s_3) > 0$, $\nu_{\mathcal{S}}(s_4) = \nu_{\hat{\mathcal{S}}}(s_4) > 0$, és $\nu_{\mathcal{S}}(s_5) = \nu_{\hat{\mathcal{S}}}(s_5) > 0$, akkor $\mathcal{S} \equiv \hat{\mathcal{S}}$.*

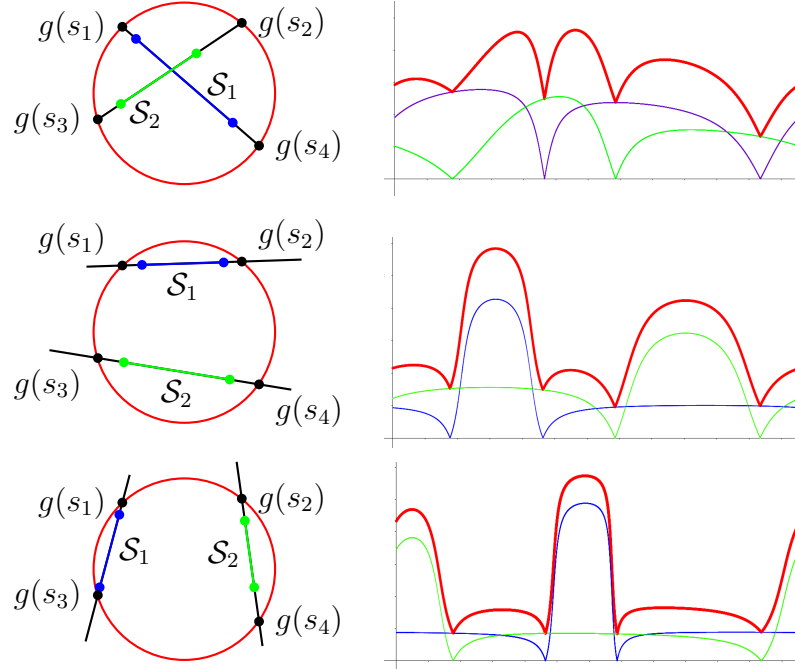
Bizonyítás. A különböző $g(s_3)$, $g(s_4)$ és $g(s_5)$ pontok rajta vannak a két szakasz ekvoptikusán, ami a 2.3 lemma szerint a szakaszok közös egyenesén kívül egy erre szimmetrikus kör vagy egyenes. Ebből következik, hogy az ekvoptikus tartalmazza a $\mathcal{C}$ kört. Viszont a 3.2 tétel alapján ekkor a két szakasz is egybeesik, így ellentmondáshoz jutottunk. $\square$

4. KÉT SZAKASZ ÉS EGY KÖR

Legyenek az $\mathcal{S}_1 = \overline{AB}$ és $\mathcal{S}_2 = \overline{CD}$ szakaszok a $\mathcal{C}$ kör belsejében, továbbá legyen $\tau_{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2} = \nu_{\mathcal{S}_1} + \nu_{\mathcal{S}_2}$ a takarási szám függvénye.

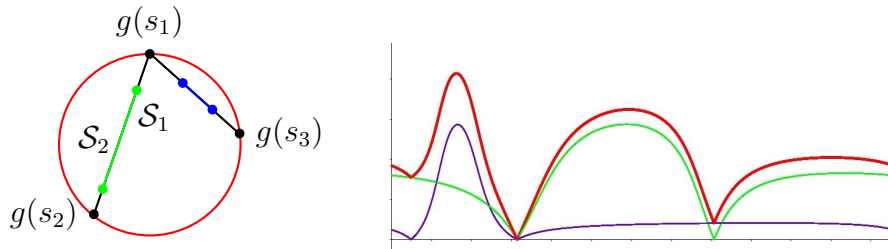
A szakaszok elhelyezkedésének három lényegileg különböző esete van, annak megfelelően, hogy a szakaszok rendre f_1 és f_2 egyenesei összesen hány különböző pontban metszik a $\mathcal{C}$ kört.

Az első eset az, amikor a $\mathcal{C}$ körön négy pontban nem differenciálható a $\tau_{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2}$ függvény. Ilyenkor f_1 és f_2 két-két pontban metszik a kört. A két egyenes ekkor három különböző módon illeszkedhet a metszéspontokra.



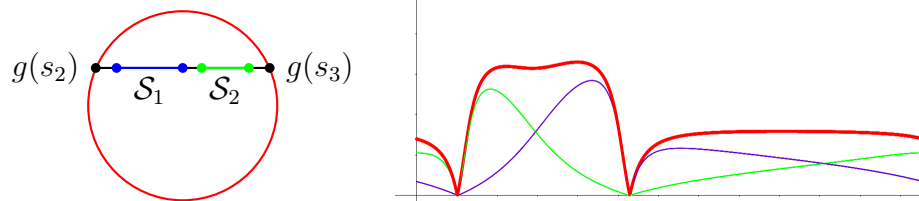
Ha négy pontban nem differenciálható a takarási függvény.

A második eset az, amikor a $\mathcal{C}$ körön három pontban nem differenciálható a $\tau_{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2}$ függvény. Ilyenkor f_1 és f_2 a körön metszik egymást.



Ha három pontban nem differenciálható a takarási függvény.

A harmadik eset az, amikor a $\mathcal{C}$ körön kettő pontban nem differenciálható a $\tau_{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2}$ függvény. Ilyenkor f_1 és f_2 egybeesik.



Ha két pontban nem differenciálható a takarási függvény.

4.1. Tétel $A \tau_{S_1, S_2}$ függvény a $\mathcal{C}$ körön a $\mathcal{C}$ kör valamely origón átmenő σ egyenesére akkor és csak akkor szimmetrikus, ha az $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ szakaszok a σ egyenesre szimmetrikusan helyezkednek el.

Bizonyítás. Világos, hogy a szakaszoknak a $\mathcal{C}$ kör valamely origón átmenő σ egyenesére való szimmetrikus elhelyezkedéséből következik a takarási szám szimmetriája.

Most tegyük fel, hogy a szakaszok takarási száma szimmetrikus. A szakaszok elhelyezkedésének fentebb megfogalmazott esetei szerint haladunk.

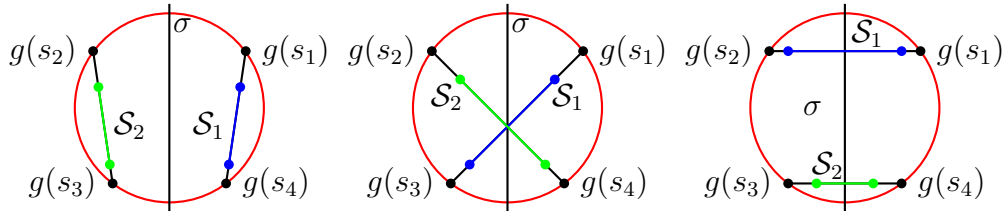
NÉGY PONTBAN NEM DIFFERENCIÁLHATÓ A TAKARÁSI SZÁM

Ez a négy $g(s_1), g(s_2), g(s_3)$ és $g(s_4)$ pont a körön két módon helyezkedhet el:

(a) egyik sem esik a σ tengelyre, vagy (b) két pont is illeszkedik rá.

(a) *A négy pont egyike sem esik a σ tengelyre.*

Ekkor essen az egyenes egy oldalára $g(s_1)$ és $g(s_4)$, $g(s_1)$ tükörképe $g(s_2)$, $g(s_4)$ tükörképe pedig $g(s_3)$. Ekkor az egyenesek elhelyezkedése háromféle lehet:

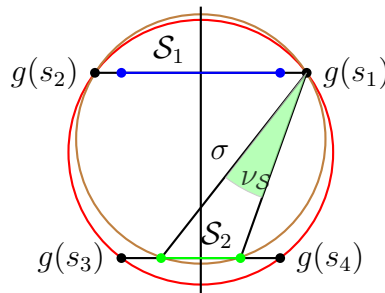


Az a1), a2) és a3) esetek

a1) *Az $\mathcal{S}_1$ szakasz a $g(s_1)$ és $g(s_4)$, az $\mathcal{S}_2$ szakasz a $g(s_2)$ és $g(s_3)$ egyenesére esik:* Vegyük észre, ha a szakaszok egyeneseit már tudjuk, akkor a szakaszok helyét a következőképpen számolhatjuk ki: Vegyük $\tau_{S_1, S_2} = \nu_{S_1} + \nu_{S_2}$ jobb és bal irány szerint vett deriváltját, és adjuk ezeket össze. Azokban a pontokban, ahol ν_{S_1} és ν_{S_2} differenciálható, a jobb és bal irányú derivált egymás ellentettje, következésképp a képzett összeg ezekben a pontokban eltűnik. Viszont s_1 -ben ν_{S_1} irány szerinti deriváltjai megegyeznek, míg ν_{S_2} deriváltjai továbbra is ellentettjei egymásnak, így az összegben ezek kiejtik egymást, és megkapjuk ν_{S_1} irány szerinti deriváltjának kétszeresét. E módszerrel kiszámolhatjuk az $\mathcal{S}_1$ szakaszhoz tartozó $|\dot{\mu}_{S_1}(s_1)|$ és $|\dot{\mu}_{S_1}(s_4)|$ deriváltakat az s_1 és s_4 pontokban. A 3.5 tétel alapján ezek már egyértelműen meghatározzák a szakaszt. A szimmetria miatt az $\mathcal{S}_1$ húrjával szimmetrikus húron fekvő $\mathcal{S}_2$ -t is ugyanazok a deriváltak határozzák meg, így $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ szimmetrikusak.

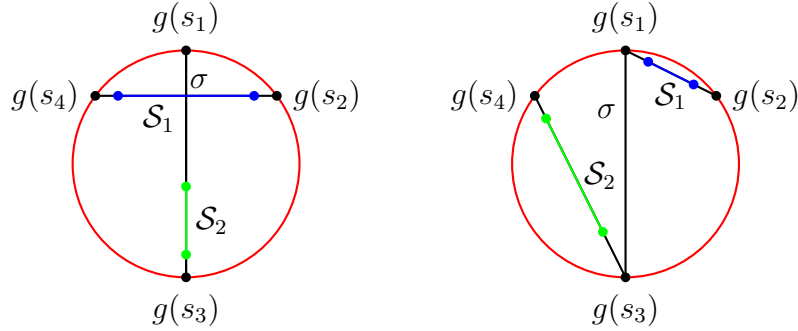
a2) *Az $\mathcal{S}_1$ szakasz a $g(s_1)$ és $g(s_3)$, az $\mathcal{S}_2$ szakasz a $g(s_2)$ és $g(s_4)$ egyenesére esik:* A bizonyítás megegyezik az előző esetével, a szakaszokat ugyanazon deriváltak határozzák meg a szimmetrikus húrokon, így a szakaszok is szimmetrikusak.

a3) *Az $\mathcal{S}_1$ szakasz a $g(s_1)$ és $g(s_2)$, az $\mathcal{S}_2$ szakasz a $g(s_3)$ és $g(s_4)$ egyenesére esik:* Ekkor az $\mathcal{C}, D$ és $g(s_1)$ pontok köré írt körének megfelelő íve az $\mathcal{S}_2$ szakasz $\nu_{S_2}(s_1)$ szögű látószögmögíve.



A szimmetria miatt erre rá kell essen a $g(s_2)$ pont is, ez csak akkor lehet, ha a $C, D, g(s_1), g(s_2)$ pontok húrtrapézot alkotnak, azaz a négyszög tengelyesen szimmetrikus. Hasonlóan bizonyítható A és B szimmetriája.

b) Ha $g(s_1)$ és $g(s_3)$ a σ egyenesre esik, akkor két helyzetben állhat f_1 és f_2 .



A b1) és b2) esetek

b1) Ha az egyik egyenes egybe esik σ -val (legyen ez most f_2):

Ekkor ν_{S_2} szimmetrikus a körön, így τ_{S_1, S_2} szimmetriája miatt ν_{S_1} is szimmetrikus, ami csak úgy lehet, ha S_1 tengelyesen szimmetrikus.

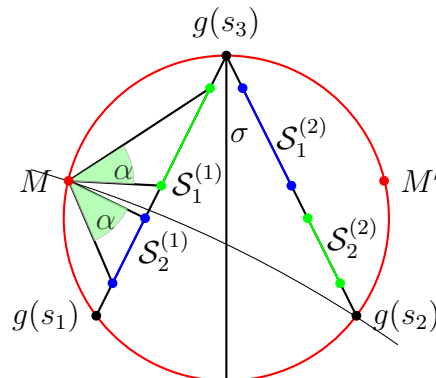
b2) Ha sem f_1 , sem f_2 nem esik egybe σ -val:

Ebben a helyzetben nem lehet a takarási függvény szimmetrikus. Legyen S_1 az $f_1 = g(s_1)g(s_2)$ egyenesre eső, S_2 pedig az $f_2 = g(s_3)g(s_4)$ egyenesre eső szakasz. Tekintsük s_1 -ben a takarási szám jobb és bal irány szerinti deriváltját. A ν_{S_1} bal- és jobboldali deriváltjai megegyeznek s_1 -ben, ν_{S_2} deriváltjai viszont egymás ellentettjei. Mivel a szimmetria miatt a takarási számnak s_1 -ben lokális szélsőértéke van, így a jobb és a bal irányú deriváltak ebben a pontban meg kell egyeznie, ami csak úgy lehetséges, ha ν_{S_2} -nek lokális maximuma van s_1 -ben. Hasonlóan belátható, hogy s_3 -ban pedig ν_{S_1} -nek van lokális maximuma.

Most vizsgáljuk s_2 -ben, és s_4 -ben a takarási szám irány szerinti deriváltjait. Az s_2 pontban s_1 felé tartva az irány szerinti derivált értéke nagyobb, mint s_3 felé tartva, hiszen ν_{S_2} értéke az s_1 lokális maximum felé nő, s_3 felé pedig csökken. Az s_4 pontban hasonló gondolatmenettel ennek fordítottjára jutunk, a derivált értéke itt s_1 felé nagyobb, mint s_3 felé, ami ellentmond a szimmetriának.

HÁROM PONTBAN TŰNIK EL A TAKARÁSI SZÁM

Legyen ez a három pont $g(s_1), g(s_2)$ és $g(s_3)$, úgy hogy $\tau_{S_1, S_2}(s_3) = 0$. Ekkor az a1) eset bizonyításánál leírt módszerrel kiszámolhatjuk a $\dot{\nu}_{S_1}(s_1) = \dot{\nu}_{S_2}(s_2)$ értékeket. A deriváltak és a $\tau_{S_1, S_2}(s_1) = \nu_{S_2}(s_1) = \nu_{S_1}(s_2)$ értékek a 3.6 tétel szerint legfeljebb két-két szakaszt határozhatnak meg az f_1 és f_2 egyeneseken.



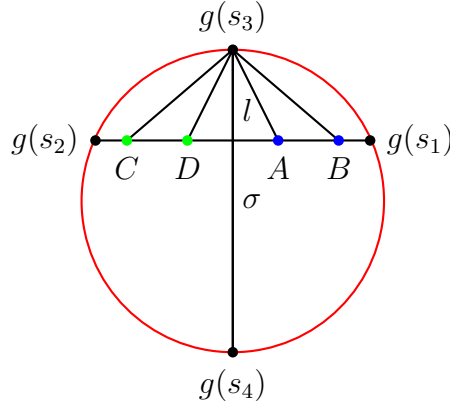
Legyenek ezek $\mathcal{S}_1^{(1)}$, $\mathcal{S}_2^{(1)}$, $\mathcal{S}_1^{(2)}$, $\mathcal{S}_2^{(2)}$, ahol $\mathcal{S}_1^{(1)}$ és $\mathcal{S}_1^{(2)}$, illetve $\mathcal{S}_2^{(1)}$ és $\mathcal{S}_2^{(2)}$ szimmetrikus σ -ra.

Ha az $\mathcal{S}_1^{(1)}$ és $\mathcal{S}_2^{(2)}$ szakaszok takarási száma szimmetrikus, akkor a $\mathcal{S}_2^{(1)}$ és $\mathcal{S}_1^{(2)}$ szakaszoknak is szimmetrikus a takarási száma, így az egy egyenesre eső $\mathcal{S}_1^{(1)}$ és $\mathcal{S}_2^{(2)}$ azonos szögben látszanak az f_1 egyenesen kívül eső $g(s_2)$ pontból. Ez a pont rajta van tehát a két egyenes ekvoptikusán, ami vagy egy kör, amely áthalad a két szakasz között, ha azok diszjunktak, vagy mindkét szakaszon, ha van közös metszetük, vagy a szakaszok hosszának egyezése esetén egy egyenes, ami szimmetriatengelye a szakaszoknak.³ Ez az $\mathcal{I}$ izoptikus kör vagy egyenes áthalad a $g(s_2)$ ponton, továbbá a 2.4 következmény miatt átmegy a $\overline{g(s_1)g(s_3)}$ húron is. Szimmetria miatt így az $\mathcal{I}$ izoptikus metszi azt a $g(s_1)g(s_3)$ ívet is, amely nem tartalmazza a $g(s_2)$ pontot. Legyen ez a metszéspont M . Mivel M -ben azonos szög alatt látszik ezen két szakasz, és a szakaszok kétfajta párosításának is ugyanaz a takarási száma M -ben, ezért itt $\mathcal{S}_1^{(2)}$ és $\mathcal{S}_2^{(1)}$ is azonos szögben látszik.

A szimmetriát felhasználva M σ -ra vett képében, M' -ben pedig $\mathcal{S}_1^{(1)}$ és $\mathcal{S}_2^{(2)}$ is azonos szögben látszik. Ez a két szakasz tehát azonos szög alatt látszik az f_1 egyenesen kívüli $g(s_2)$ -ben, M -ben, és M' -ben. De az egyenesen kívüli három függvényérték a 3.7 lemma miatt már egyértelműen meghatározza a szakaszokat, így $\mathcal{S}_1^{(1)} \equiv \mathcal{S}_2^{(1)}$. Hasonlóan $\mathcal{S}_1^{(2)} \equiv \mathcal{S}_2^{(2)}$, ahol a szimmetria természetesen már fenn kell hogy álljon.

KÉT PONTBAN TŰNIK EL A TAKARÁSI SZÁM

Az $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ szakaszok által meghatározott húr felezőjétől a végpontok előjeles távolságai rendre a, b, c és d , úgy hogy $a < b$ és $c < d$. A $\tau_{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2}(s)$ két zérushelye s_1 és s_2 , a húrfelező merőleges pedig a $g(s_3)$ és $g(s_4)$ pontokban metszi a $\mathcal{C}$ kört.



A $g(s_1)$ -ben húzott érintő, és $\mathcal{H}$ által bezárt szög legyen ξ , valamint a $\mathcal{H}$ húr távolsága a $g(s_3)$ -tól legyen l . A (2.1) képlet miatt

$$\dot{\tau}_{[a,b],[c,d]}(s_1) = \left| \frac{\sin \xi}{h-a} - \frac{\sin \xi}{h-b} + \frac{\sin \xi}{h-c} - \frac{\sin \xi}{h-d} \right|, \quad (4.1)$$

és

$$\dot{\tau}_{[a,b],[c,d]}(s_2) = \left| \frac{\sin \xi}{h+a} - \frac{\sin \xi}{h+b} + \frac{\sin \xi}{h+c} - \frac{\sin \xi}{h+d} \right|. \quad (4.2)$$

További két egyenletet írhatunk fel a takarási szám s_3 -ban felvett értékéből, illetve a derivált s_3 -beli értékéből. A $g(s_3)$ és az A pont távolsága a Pitagorasz-tétel miatt

³Könnyen belátható, hogy a szakaszok hossza különböző, mert azonos hosszúságú szakaszok esetén az s_1 -től távolabbi szakasz s_1 -beli deriváltja kisebb lenne.

$\sqrt{a^2 + l^2}$, az α szög szinusza pedig $\frac{l}{\sqrt{a^2 + l^2}}$. A megfelelő összefüggések felírhatóak a többi végpontra is, így adódik a harmadik egyenlet:

$$\dot{\tau}_{[a,b],[c,d]}(s_3) = \left| \frac{l}{l^2 + a^2} - \frac{l}{l^2 + b^2} + \frac{l}{l^2 + c^2} - \frac{l}{l^2 + d^2} \right| \quad (4.3)$$

A negyedik összefüggést a

$$\mu_{S_1}(s_3) = \operatorname{atg} \frac{b}{l} - \operatorname{atg} \frac{a}{l} \quad \mu_{S_2}(s_3) = \operatorname{atg} \frac{d}{l} - \operatorname{atg} \frac{c}{l}$$

$$\tau_{[a,b],[c,d]}(s_3) = |\mu_{S_1}(s_3) + \mu_{S_2}(s_3)| = \left| \operatorname{atg} \frac{b}{l} - \operatorname{atg} \frac{a}{l} + \operatorname{atg} \frac{c}{l} - \operatorname{atg} \frac{d}{l} \right|$$

egyenletek

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\tau_{[a,b],[c,d]}(s_3)) &= \operatorname{tg} \left(\operatorname{atg} \frac{b}{l} - \operatorname{atg} \frac{a}{l} + \operatorname{atg} \frac{d}{l} - \operatorname{atg} \frac{c}{l} \right) \\ &= \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{atg} \frac{b}{l} - \operatorname{atg} \frac{a}{l}) + \operatorname{tg}(\operatorname{atg} \frac{d}{l} - \operatorname{atg} \frac{c}{l})}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{atg} \frac{b}{l} - \operatorname{atg} \frac{a}{l}) \operatorname{tg}(\operatorname{atg} \frac{d}{l} - \operatorname{atg} \frac{c}{l})} = \frac{\frac{l(b-a)}{l^2+ab} + \frac{l(d-c)}{l^2+cd}}{1 - \frac{l(b-a)}{l^2+ab} \frac{l(d-c)}{l^2+cd}} \end{aligned}$$

tangensének rendezése után kapjuk:

$$\operatorname{tg}(\tau_{[a,b],[c,d]}(s_3)) = \frac{l(b-a)(l^2 + cd) + l(d-c)(l^2 + ab)}{(l^2 + cd)(l^2 + ab) - l^2(b-a)(d-c)}. \quad (4.4)$$

A kör sugarát az általánosság megszorítása nélkül választhatjuk akkorára, hogy a húr h hossza 2 legyen. Így feltehető, hogy $-1 < a < b < 1$ és $-1 < c < d < 1$.

A takarási szám szimmetriája miatt

$$\dot{\tau}_{[a,b],[c,d]}(s_1) = \dot{\tau}_{[a,b],[c,d]}(s_2) \quad \text{és} \quad \dot{\tau}_{[a,b],[c,d]}(s_3) = 0,$$

amiért

$$\frac{\sin \xi}{1-a} - \frac{\sin \xi}{1-b} + \frac{\sin \xi}{1-c} - \frac{\sin \xi}{1-d} = - \left(\frac{\sin \xi}{1+a} - \frac{\sin \xi}{1+b} + \frac{\sin \xi}{1+c} - \frac{\sin \xi}{1+d} \right)$$

és

$$\frac{l}{l^2 + a^2} - \frac{l}{l^2 + b^2} + \frac{l}{l^2 + c^2} - \frac{l}{l^2 + d^2} = 0.$$

Megfelelő egyszerűsítések után, ezekből rendre

$$1 - a^2 = \frac{(1 - b^2)(1 - c^2)(1 - d^2)}{(1 - c^2)(1 - d^2) - (1 - b^2)(1 - d^2) + (1 - b^2)(1 - c^2)}$$

és

$$l^2 + a^2 = \frac{(l^2 + b^2)(l^2 + c^2)(l^2 + d^2)}{(l^2 + c^2)(l^2 + d^2) - (l^2 + b^2)(l^2 + d^2) + (l^2 + b^2)(l^2 + c^2)}$$

következik. E két egyenlet összege

$$\begin{aligned} 1 + l^2 &= (1 - a^2) + (l^2 + a^2) \\ &= \frac{(1 - b^2)(1 - c^2)(1 - d^2)}{(1 - c^2)(1 - d^2) - (1 - b^2)(1 - d^2) + (1 - b^2)(1 - c^2)} + \\ &\quad + \frac{(l^2 + b^2)(l^2 + c^2)(l^2 + d^2)}{(l^2 + c^2)(l^2 + d^2) - (l^2 + b^2)(l^2 + d^2) + (l^2 + b^2)(l^2 + c^2)}. \end{aligned}$$

A nevezőkkel felszorozva:

$$\begin{aligned} & (1 + l^2)[(l^2 + c^2)(l^2 + d^2) + (l^2 + b^2)(c^2 - d^2)] \times \\ & \quad \times [(1 - c^2)(1 - d^2) + (1 - b^2)(d^2 - c^2)] \\ & = (1 - b^2)(1 - c^2)(1 - d^2)[(l^2 + c^2)(l^2 + d^2) + (l^2 + b^2)(c^2 - d^2)] + \\ & \quad + (l^2 + b^2)(l^2 + c^2)(l^2 + d^2)[(1 - c^2)(1 - d^2) + (1 - b^2)(d^2 - c^2)] \end{aligned}$$

adódik. A jobb oldalon a szorzásokat elvégezve, a bal oldalon kiemelve

$$\begin{aligned} & (1 + l^2)(1 - c^2)(1 - d^2)(l^2 + c^2)(l^2 + d^2) + \\ & \quad + (1 + l^2)(1 - c^2)(1 - d^2)(l^2 + b^2)(c^2 - d^2) + \\ & \quad + (1 + l^2)(1 - b^2)(d^2 - c^2)(l^2 + c^2)(l^2 + d^2) + \\ & \quad + (1 + l^2)(1 - b^2)(d^2 - c^2)(l^2 + b^2)(c^2 - d^2) \\ & = (1 - b^2)(l^2 + b^2)(c^2 - d^2)[(1 - c^2)(1 - d^2) - (l^2 + c^2)(l^2 + d^2)] + \\ & \quad + (1 - c^2)(1 - d^2)(l^2 + c^2)(l^2 + d^2)(1 + l^2), \end{aligned}$$

majd rendezés után

$$\begin{aligned} 0 = & -(1 - b^2)(l^2 + b^2)(c^2 - d^2)[(1 - c^2)(1 - d^2) - (l^2 + c^2)(l^2 + d^2)] + \\ & + (1 + l^2)(1 - c^2)(1 - d^2)(l^2 + b^2)(c^2 - d^2) + \\ & + (1 + l^2)(1 - b^2)(d^2 - c^2)(l^2 + c^2)(l^2 + d^2) + \\ & + (1 + l^2)(1 - b^2)(d^2 - c^2)(l^2 + b^2)(c^2 - d^2), \end{aligned}$$

vagyis

$$\begin{aligned} 0 = & (1 - b^2)(l^2 + b^2)(c^2 - d^2)(l^2 + 1)(2d^2 + l^2 - 1) + \\ & + (1 + l^2)(c^2 - d^2)[(1 - c^2)(1 - d^2)(l^2 + b^2) - (1 - b^2)(l^2 + c^2)(l^2 + d^2)] \end{aligned}$$

adódik. Ezt $(c^2 - d^2)$ -tel és $(1 + l^2)$ -tel (ezek nyilvánvalóan nem 0-k) osztva

$$0 = (1 - b^2)(l^2 + b^2)(2d^2 + l^2 - 1) + (1 - c^2)(1 - d^2)(l^2 + b^2) - (1 - b^2)(l^2 + c^2)(l^2 + d^2)$$

amiben a zárójeleket kibontva

$$\begin{aligned} 0 = & 2d^2l^2 + l^4 - l^2 + 2d^2b^2 + b^2l^2 - b^2 - 2b^2d^2l^2 - \\ & - b^2l^4 + b^2l^2 - 2b^4d^2 - b^4l^2 + b^4 + \\ & + l^2 - c^2l^2 - d^2l^2 + c^2d^2l^2 + b^2 - b^2c^2 - b^2d^2 + b^2c^2d^2 - \\ & - l^4 - c^2l^2 - d^2l^2 - c^2d^2 + b^2l^4 + b^2c^2l^2 + b^2c^2d^2 + b^2d^2l^2 \end{aligned}$$

jön ki, melynek szorzat alakja

$$0 = (b^2 - c^2)(l^2(b^2 + d^2 - 2) - (b^2 + d^2 - 2b^2d^2)).$$

Ennek a szorzatnak a második tényezője mindig negatív, mert $b^2 + d^2 - 2 < 0$ és $b^2 + d^2 > 2b^2d^2$, ezért ebből $b = \pm c$ adódik. Ezt a második egyenletbe visszaírva $a = \pm d$ adódik.

Ha $b = c$ és $a = -d$, vagy $b = -c$ és $a = d$, akkor a két szakasz uniója a húrfelező pontra szimmetrikus szakasz.

A $b = c$ és $a = d$ helyzet a kezdeti $a < b$ és $c < d$ feltételek miatt nem állhat elő.

Ha $b = -c$ és $a = -d$ akkor a húrfelezőre szimmetrikus szakaszokat kapunk.

Ha pedig $c^2 = d^2$, azaz $c = -d$, akkor $a = -b$, ami két, a húrfelezőre egyenként is szimmetrikus szakaszt határoz meg. Ezzel a harmadik esetet is igazoltuk.

A tétel bizonyítása befejeződött. $\square$

Szimmetrikus takarási függvény esetén bizonyos helyzetű szakaszok kiszámíthatóak.

4.2. Tétel *Ha két szakasz takarási száma szimmetrikus és a szakaszok egy egyenesre esnek, akkor a szakaszok helye egyértelműen meghatározható.*

Bizonyítás. Először azt az esetet tekintjük, amikor a szakaszok egyenese nem az átmérőre esik. Ekkor a $\mathcal{H}$ húr felezőmerőlegese metszse a $\mathcal{C}$ kört a $g(s_1)$ és $g(s_2)$ pontokban. A kör sugarát most akkorára választjuk, hogy a $g(s_1)$ és a felezőmerőleges T talppontjának távolsága egységnyi legyen. A $g(s_2)$ és T távolsága legyen l , melyről az általánosság megszorítása nélkül tehetjük fel, hogy $l > 1$. Mivel a takarási szám szimmetrikus, a fenti lemma alapján tudjuk, hogy a szakaszok is szimmetrikusan helyezkednek el, ezért

$$x := \operatorname{tg} \left(\frac{\tau_{[a,b][c,d]}(s_1)}{2} \right) = \frac{b-a}{1+ab} \quad y := \operatorname{tg} \left(\frac{\tau_{[a,b][c,d]}(s_1)}{2} \right) = \frac{\frac{b}{l} - \frac{a}{l}}{1 + \frac{ab}{l^2}} = \frac{bl-al}{l^2+ab},$$

hiszen $\tau_{[a,b][c,d]}(s_1) \neq \pi$. Ekkor kifejezve a -t, és visszahelyettesítve

$$y = \frac{bl - \frac{b-x}{1+bx}l}{l^2 + \frac{b-x}{1+bx}b} = \frac{bl + b^2lx - bl + lx}{l^2 + bl^2x + b^2 - bx}$$

teljesül. Ez a b -ben másodfokú

$$b^2(lx - y) + b(xy - l^2xy) + lx - l^2y = 0$$

egyenletre vezet, melynek megoldásai

$$b_{1,2} = \frac{l^2xy - xy \pm \sqrt{(xy - l^2xy)^2 - 4(lx - y)(lx - l^2y)}}{2(lx - y)}.$$

Tudjuk a szakaszok szimmetriája miatt, ha az egyik megoldás megadja b -t, akkor a másik megoldás pedig c -t. Ekkor szintén a szimmetria miatt, mivel $a = -c$ és $b = -d$, már meg tudjuk adni a másik végpontokat:

$$a = \frac{-l^2xy + xy + \sqrt{(xy - l^2xy)^2 - 4(lx - y)(lx - l^2y)}}{2(lx - y)},$$

$$d = \frac{-l^2xy + xy - \sqrt{(xy - l^2xy)^2 - 4(lx - y)(lx - l^2y)}}{2(lx - y)}.$$

Ha $g(s_1)$ -ből az $\mathcal{S}_1$ derékszög alatt látszik, akkor az első egyenlet helyett az $ab = -1$ egyenletből számolhatunk. Ekkor

$$y = \frac{bl + \frac{1}{b}}{l^2 - 1} \quad \text{amiből} \quad b^2l - b(y - l^2y) - l,$$

vagyis

$$b = \frac{yl^2 - y + \sqrt{(y - l^2y)^2 - 4l^2}}{2l} \quad d = \frac{yl^2 - y - \sqrt{(y - l^2y)^2 - 4l^2}}{2l}$$

$$c = \frac{-yl^2 + y - \sqrt{(y - l^2y)^2 - 4l^2}}{2l} \quad a = \frac{-yl^2 + y + \sqrt{(y - l^2y)^2 - 4l^2}}{2l}$$

adódik.

Ha a szakaszok az átmérőre esnek, akkor a két szög felírt egyenlőség megegyezne, ezért ebben az esetben már fel kell használnunk a takarási szám deriváltjának egyik zérushelyen felvett értékét.

$$\frac{b-a}{1+ab} = \operatorname{tg} \left(\frac{\tau_{[a,b][c,d]}(s_1)}{2} \right) \quad \left| \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} - \frac{1}{1-d} \right| = |\dot{\mu}(s_3)|$$

Az abszolút érték felbontása után, és behelyettesítve $c = -b$ -t és $d = -a$ -t:

$$\frac{b-a}{1+ab} = \operatorname{tg} \left(\frac{\tau_{[a,b][c,d]}(s_1)}{2} \right) =: x \quad \frac{1}{1-b} - \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+b} = |\dot{\mu}(s_3)| =: y$$

Ekkor $a = \frac{b-x}{1+bx}$ -et visszahelyettesítve:

$$\frac{1}{1-b} - \frac{1}{1-\frac{b-x}{1+bx}} + \frac{1}{1+\frac{b-x}{1+bx}} - \frac{1}{1+b} = y,$$

$$2b^4x - b^4y + b^4x^2y + 4b^3xy + 4b^2x + 2b^2y - 2b^2x^2y - 4bxy + 2x - y + x^2y = 0,$$

$$b^4(2x - y + x^2y) + b^3(4xy) + b^2(4x + 2y - 2x^2y) - b(4xy) + (2x - y + x^2y) = 0$$

Ekkor $b^2 \neq 0$ -val osztva

$$(b^2 + \frac{1}{b^2})(2x - y + x^2y) + (b - \frac{1}{b})(4xy) + (4x + 2y - 2x^2y) = 0$$

majd a $b - \frac{1}{b} = e$ helyettesítéssel

$$(e^2 + 2)(2x - y + x^2y) + e(4xy) + (4x + 2y - 2x^2y) = 0$$

adódik. Ez a másodfokú

$$e^2(2x - y + x^2y) + e(4xy) + 8x = 0$$

egyenletre vezet, melynek gyökei

$$e_{1,2} = \frac{-2xy \pm 2\sqrt{-4x^2 + 2xy - 2x^3y + x^2y^2}}{2x - y + x^2y}.$$

Keressük tehát a

$$b - \frac{1}{b} = e_{1,2} \tag{4.5}$$

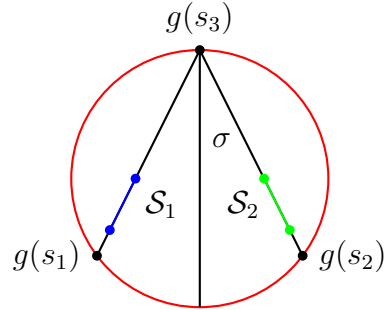
egyenletek megoldásait, melyek:

$$b_{1,2} = \frac{e \pm \sqrt{e_1^2 + 4}}{2} \quad b_{1,2} = \frac{e \pm \sqrt{e_2^2 + 4}}{2}.$$

Tudjuk, hogy az eredeti problémának legalább két megoldása van b -re (a szimmetria miatt), és ez a megoldás egyértelmű is, mert ha egy $-1 < b < 1$ érték megoldása az (4.5) egyenletnek, akkor $\frac{1}{b}$ is megoldás lesz, viszont $|\frac{1}{b}| > 1$, ezért az eredeti problémának ez nem megoldása. $\square$

4.3. Tétel *Ha a szimmetrikus $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ egyenesei a $\mathcal{C}$ körön metszik egymást, a szakaszok egyértelműen meghatározottak.*

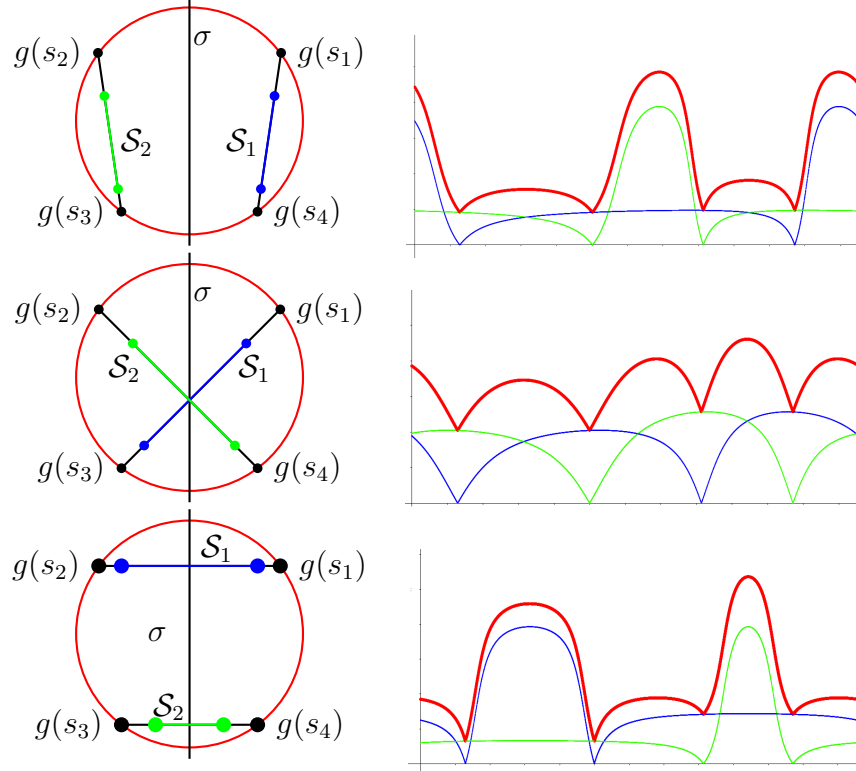
Bizonyítás. Legyen $g(s_1)$ az a pont, ahol a takarási szám eltűnik, valamint $\mathcal{S}_1$ egyenese messe a kört $g(s_2)$ -ben, $\mathcal{S}_2$ egyenese pedig $g(s_3)$ -ban.



A $g(s_1)$ pont ráesik a szimmetria tengelyre, itt $|\dot{\nu}_{\mathcal{S}_1}(s_1)| = |\dot{\nu}_{\mathcal{S}_2}(s_1)| = \frac{|\dot{\tau}_{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2}(s_1)|}{2}$, valamint megkaphatjuk a $|\dot{\nu}_{\mathcal{S}_1}(s_2)| = |\dot{\nu}_{\mathcal{S}_2}(s_3)|$ értékeket is. Ekkor a 3.5 lemma alapján a szakaszok egyértelműen meghatározottak. $\square$

5. MEGOLDATLAN PROBLÉMÁK

Ha két szimmetrikus szakasz egyenese négy metszéspontot határoz meg, a megoldandó probléma ezen egyenesek kiválasztása.



Ha az egyeneseket megtaláljuk, a metszéspontokban ki tudjuk számolni az adott egyenesre eső szakaszhoz tartozó deriváltakat, és így a szakaszok helyzete már egyértelmű lenne.

Sejtésünk az, hogy az egyenesek egyértelműen meghatározottak, azaz nincs olyan szimmetrikus takarási függvény, amelyhez két különböző szakasz-pár tartozna.

További kérdés, hogy a szimmetriát elhagyva, mit mondhatunk két általánosan elhelyezkedő szakaszcól, a takarási szám ismeretében.

Az 1.1 tétel felveti a *kérdést*, hogy felismerhető-e a $\tau_{S_1 \dots S_2}$ függvényből az $S_1 \dots S_2$ szakaszok elhelyezkedésének konvexitása?

A válaszok hasonlóak lehetnek a szimmetrikus esetében adottakhoz.

IRODALOM

- [1] J. KINCSES és Á. KURUSA, Felismerhető-e egy alakzat az árnyékképeiből, *Polygon*, **I:2** (1991), 69–71. ⟨1, 7, 8⟩
- [2] Á. KURUSA, Szakaszok ekviptikusai, *Polygon*, **36** (2012), 43–57. ⟨3⟩
- [3] Á. KURUSA, You can recognize the shape of a figure by its shadows!, *Geom. Dedicata*, **59**(1996), 113–125; DOI: [10.1007/BF00155723](https://doi.org/10.1007/BF00155723). ⟨2⟩
- [4] Á. KURUSA, The masking function of multicurves, *kézirat*, (2015),. ⟨1⟩
- [5] WIKIPEDIA, https://en.wikipedia.org/wiki/B%C3%A9zout's_theorem. ⟨7⟩

NYILATKOZAT

Alulírott Lukács Péter kijelentem, hogy a szakdolgozatomban foglaltak a saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

Szeged, 2016. május 14.

Lukács Péter