

József Attila Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Bólyai Intézet
Geometria Tanszék

***Geometriai egyenlőtlenségek:
Válogatott feladatok***

Témavezető:
Dr. Kurusa Árpád

Készítette:
Papné Somlyai Csilla
matematika V.

TARTALOMJEGYZÉK

	oldal
Bevezetés	1.
1. fejezet	4.
2. fejezet	7.
3. fejezet	28.
4. fejezet	40.
5. fejezet	79.
Irodalomjegyzék	

BEVEZETÉS

Szakedolgozatom témája

Az egyenlőtlenségek a matematika minden ágában lényeges szerepet játszanak, olykor lényegesebbet, mint az egyenlőségek. Új szemléletmód elsajátítását teszik lehetővé az egyenlőtlenségek (becslés) és ezt igen fontosnak tartom.

Geometriai egyenlőtlenségek témaköre azért vonzott, mert állításait könnyű megérteni (szemlélet is segít) és a bizonyítások során használva egy-egy egyszerűbb egyenlőtlenséget, újabb és újabb érdekes egyenlőtlenségeket nyerhetünk, sejtethetünk meg. Így született ma már nevezetesnek mondható több egyenlőtlenség, amelyikből a dolgozat is tartalmaz néhányat.

A feladatokat a megoldásban felhasználtak alapján csoportosítottam. Főként a középiskolás anyagban szereplő ismeretanyagot használó feladatokat választottam.

Az első fejezet az egyenlőtlenségi reláció tulajdonságait tartalmazza, majd következő fejezetek a háromszög-egyenlőtlenséggel, tükrözési-elvel nevezetes közepek közötti egyenlőtlenséggel megoldható feladatokat.

Az ötödik fejezetben a nemrég elhunyt világhírű, magyar származású matematikus, Erdős Pál által felvetett egyik problé-

mával foglalkozom. Néhány egyszerű alkalmazását is adok az Erdős-Mordell-egyenlőtlenségnek. A sokféle feladattal arra szerettem volna felhívni a figyelmet, hogy az egyes egyenlőtlenségek alkalmazási területe a geometrián belül is igen széles. Törekedtem arra is, hogy ne tartalmazzanak hosszas számításokat a bizonyítások, hanem olyan feladatok kerüljenek a válogatásba, amik ötletesek, frappánsak.

Végezetül szeretnék köszönetet mondani dr. Kurusa Árpád szakdolgozati témavezetőmnek, akinek irányító segítségével nélkül nem nyerte volna el jelenlegi formáját dolgozatom.

Jelölések és néhány fontos felhasznált összefüggés

A következő általánosan elfogadott jelöléseket használjuk:

$A; B; C$	háromszög síkidom csúcsai
$a; b; c$	rendre A, B, C csúcsokkal szembeni oldalak
$\alpha; \beta; \gamma$	rendre az A, B, C csúcsoknál levő szögek
$m_a; m_b; m_c$	rendre az A, B, C csúcsokból induló magasságvonalak
$s_a; s_b; s_c$	rendre az A, B, C csúcsokból induló súlyvonalak
$f_a; f_b; f_c$	rendre az A, B, C csúcsokból induló szögfelezők
R	háromszög köré írt kör sugara
r	háromszögbe írt kör sugara
k	háromszög kerülete
s	háromszög kerületének fele
t	háromszög területe

Felhasznált, de nem bizonyított összefüggések, amik nem szerepelnek a középiskolás törzsanyagban.

$$t = \frac{abc}{4R}$$

$$f_a = \frac{2cb}{c+b} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$f_b = \frac{2ac}{a+c} \cdot \cos \frac{\beta}{2}$$

$$f_c = \frac{2ab}{a+b} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$t = \sqrt{s \cdot (s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{Héron-képlet}$$

1. fejezet

A valós számok és a számegyenes. Ha felveszünk egy egyenest és azon egy O pontot, az egyenes minden egyes pontjához hozzá tudunk rendelni egy valós számot, az O -tól jobbra eső pontokhoz pozitívakat, a tőle balra esőkhöz negatívakat, az O -hoz pedig nullát. A valós számokkal így összekapcsolt egyenest valós számegyenesnek mondjuk. Valós számok fogalmának szabatos értelmezésére nem térünk ki. Azonban, amikor a valós számokat hozzárendeljük egy egyenes pontjaihoz, hallgatólagosan feltételezzük, hogy a valós számok rendelkeznek bizonyos tulajdonságokkal, amelyek fontosak.

Valós számhalmaznak van egy részhalmaza, amit pozitív valós számok halmazának nevezünk $(\mathbf{R}^+)$, és ennek megvan a következő két tulajdonsága.

1. Minden a valós számra a következő három állítás közül pontosan egy igaz:

$$a \in \mathbf{R}^+; \quad -a \in \mathbf{R}^+; \quad a = 0$$

2. Ha a és b benne van $\mathbf{R}^+$ -ben, akkor $a + b$ és ab is $\mathbf{R}^+$ -ben van.

A valós számok halmaza rendezett és definiálható rajta rendezési reláció.

Definíció: $a > b$ (a nagyobb mint b), akkor és csakis akkor, ha $a - b > 0$, azaz, ha létezik olyan h pozitív szám, hogy $a = b + h$.

Az $a < b$ (a kisebb mint b) szimbolikus állítást egyenlőtlenségnek hívjuk. Az előzőekből következik, hogy minden a, b valós számra az $a > b$, $a = b$, $a < b$ állítások közül egy és csakis egy teljesül.

Azt, hogy az $a < b$ és az $a = b$ állítások közül legalább az egyik teljesül, így jelöljük: $a \leq b$ (a kisebb-egyenlő b).

A rendezettséget felhasználtuk akkor, amikor az egyenes pontjaihoz valós számokat rendeltük.

Minden $a > 0$ valós számot pozitívnak nevezünk.

Minden $a < 0$ valós számot negatívnak nevezünk, ha a nem nulla és nem pozitív.

Következő tulajdonságok alapvető szerepet játszanak majd azoknál az egyenlőtlenség-átalakításoknál, amelyek feladatokban szerepelni fognak. Gyakran felhasználásra kerülnek anélkül, hogy erre külön felhívnánk a figyelmet.

Mivel geometriai példákról lesz szó, úgy tekinthetjük, hogy pozitívok az egyenlőtlenségekben szereplő kifejezések (szakaszok hossza).

Következőket állíthatjuk egyenlőtlenségi relációról.

1. Tranzitív, azaz **ha $a > b$ és $b > c$, akkor $a > c$.**

Biz: Egyenlőtlenségek jelentését felhasználva van olyan h és k pozitív valós szám, hogy

$$a = b + h \quad \text{és} \quad b = c + k$$

Ebből $a = (c + k) + h$, vagyis $a = c + (k + h)$.

$k + h$ azonban pozitív (h és k is pozitív), definíciónk szerint tehát $a > c$.

2. Ha $a > b$ és $c \geq d$, akkor $a + c > b + d$

Biz: Az egyenlőtlenség és kisebb-egyenlőség jelentését felhasználva, van olyan h és k pozitív valós szám, hogy

$$a = b + h \quad \text{és} \quad c = d + k \quad \text{vagy} \quad c = d$$

Ebből

$$a + c = b + h + d + k = b + d + (h + k),$$

$h + k$ pozitív, így definíció szerint $a + c > b + d$,

$$\text{vagy } a + c = b + h + d = b + d + h,$$

h pozitív, így definíció szerint $a + c > b + d$

3. Ha $a > b$ és $c \geq d$, akkor

$$* \quad ac > bd$$

$$* * \quad ac > bc$$

$$* * * \quad \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

Biz:

* Létezik olyan h és k pozitív valós szám, hogy

$$a = b + h \quad \text{és} \quad c = d + k, \quad \text{kivéve ha } c = d, \text{ ekkor } k = 0\text{-val.}$$

$$ac = (b + h)(d + k) = bd + bk + hd + hk.$$

Ha $k = 0$, akkor is $bk + hd + hk$ pozitív, ezért definíció szerint $ac > bd$

$$* * \quad ac = (b + h)c = bc + hc,$$

mivel hc pozitív, így definíció szerint $ac > bc$

* * * A * * egyenlőtlenséget alkalmazva $c = \frac{1}{a} - ra$,

$$a \cdot \frac{1}{a} > b \cdot \frac{1}{a}, \quad \text{azaz } 1 > \frac{b}{a}.$$

Alkalmazzuk $*$ egyenlőtlenséget $1 > \frac{b}{a}$ -ra és $c = \frac{1}{b}$ -re,

kapjuk, hogy $1 \cdot \frac{1}{b} > \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{b}$, azaz $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$.

4. Ha $a > b$ és $p > 0$, akkor $a^p > b^p$;

ha viszont $p < 0$, akkor $a^p < b^p$.

Biz: Az $a > b$ -re alkalmazva $(*)$ ahol $c = a$, $d = b$. $a^2 > b^2$.

Tehát $p = 2$ bebizonyítottuk.

Tegyük fel, hogy $p - 1$ -re is igaz az állítás.

$a^{p-1} > b^{p-1}$ -re alkalmazzuk $(*)$ ahol $c = a$, $d = b$

$$a^{p-1} a > b^{p-1} b$$

$$a^p > b^p$$

2. fejezet

A háromszög-egyenlőtlenség. A geometriai egyenlőtlenségek tekintélyes részét közvetlenül vagy közvetve arra a tényre lehet visszavezetni, hogy két pont között legrövidebb az egyenes út. Háromszögek esetében ennek pontosab megfogalmazása a háromszög-egyenlőtlenség: **egy háromszög bármely két oldalának összege nagyobb a harmadik oldalnál.**

A háromszög-egyenlőtlenségnek számos átfogalmazása és közvetlen következménye használatos. Ha az a , b , c szakaszokról el akarjuk dönteni, hogy lehetnek-e egy háromszög

oldalai, akkor az

$$a + b > c, \quad b + c > a, \quad c + a > b$$

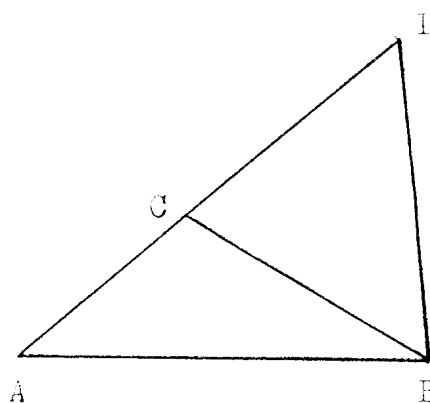
egyenlőtlenségek mindegyikének a teljesülését bizonyítani kell. Ha azonban pl. közöttük c a legnagyobb, elég az első igazolása, mert a másik kettő akkor eleve teljesül.

Szemléltetjük az $AC + CB > AB$ egyenlőtlenséget az ABC háromszögben.

Az AC meghosszabbítására C-ből felmérjük BC-t. Így kapjuk D-t.

A BCD háromszög egyenlő szárú, ezért $\angle CBD = \angle BDC$.

De $\angle ABD > \angle CBD$, mert BC az $\angle ABD$ belsejében halad, így $\angle ABD > \angle BDC$.



Ekkor viszont $AD > AB$, mert háromszögben nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal áll és viszont $AC + CD > AB$ felvétel miatt $AC + CB > AB$.

Háromszög-egyenlőtlenség gyakran használt következményei:

K1: A háromszögben bármelyik oldal nagyobb a másik kettő különbségének, az abszolút értékénél.

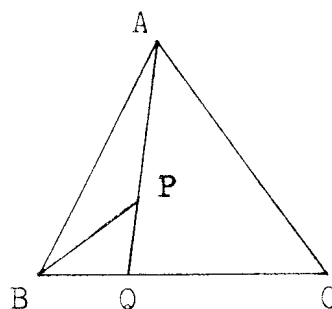
Mivel $a + b > c$ és $b + c > a$ rendezése után kapjuk $b > c - a$ és $b > a - c = -(c - a)$ egyenlőtlenségeket.

K2: Az ABC háromszög egy belső vagy a határon lévő P pontjának az A és B csúcsoktól mért távolságösszege kisebb az AC és BC oldalak összegénél.

Ha P belső pont, messe az AP egyenes a BC oldalt a Q pontban, háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy

$$AC + CQ > AP + PQ$$

$$PQ + QB > PB.$$



E két egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeadva éppen a bizonyítandót kapjuk $AC + CQ + QB > AP + PB$

Hasonlóan igazolható állításunk, ha P valamelyik oldalon van.

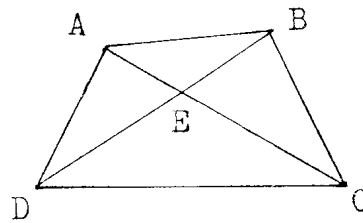
Ugyancsak a háromszög-egyenlőtlenségből következik egy, a konvex négyszögek körében gyakran alkalmazott egyenlőtlenség:

K3: A konvex négyszögben az átlók összege nagyobb bármely két szemközti oldal összegénél.

Az ABCD konvex négyszögben ugyanis az átlók egy belső E pontban metszik egymást. Az ABE és CDE háromszögekre alkalmazva a háromszög-egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$AB < AE + BE,$$

$$CD < ED + EC,$$



a megfelelő oldalakat összegezve az adódik, amit bizonyítanunk kellett $AB + CD < AE + EC + BE + ED = AC + BD$

K4: Ha egy egyszerű töröttvonal csúcsai nem kollineárisak, akkor a töröttvonal hossza nagyobb, mint a kezdő- és végpontok távolsága.

Három pontra igaz, mert meghatároznak egy háromszöget, amire érvényes a háromszög-egyenlőtlenség. Tegyük fel, hogy állításunkat minden, legfeljebb n csúcsú töröttvonalra már igazoltuk. Nézzük $n + 1$ -re.

Ha egy egyenesbe esik az utolsó szakasz $A_n A_{n-1}$ -gyel, a tétel akkor is igaz.

Ha nem, a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$A_0 A_{n-1} + A_{n-1} A_n > A_0 A_n.$$

F.2.1. Valamely háromszög teljesen egy sokszög belsejében fekszik. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög kerülete nem lehet nagyobb a sokszögénél.

Hosszabbítsuk meg a sokszög belsejében fekvő háromszögnek AB , BC , CA oldalait rendre A -n, B -n, illetve C -n túl

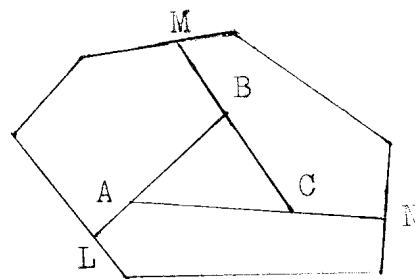
addig, míg elérjük a sokszög területét. Az így kapott L, M, N pontok a sokszög területét az [LM], [MN], [NL] részekre osztják.

Bármely törött vonal hosszabb a végpontjait összekötő egyenesszakasznál, azért

$$[LM] + MB > LA + AB,$$

$$[MN] + NC > MB + BC,$$

$$[NL] + LA > NC + CA.$$



Ha összeadunk és a mindkét oldalon fellépő egyenlő tagokat elhagyjuk, akkor valóban az

$$[LM] + [MN] + [NL] > AB + BC + CA$$

egyenlőtlenséget kapjuk.

Megjegyzés: A feladat állítása igaz háromszög helyett bármilyen a sokszög belsejében levő konvex sokszögre is. Ennek bizonyítása teljesen hasonló az előbbihez.

7.2.2. Határozzuk meg a $z = x + y + \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}$

kifejezés minimumát, ha a és b valós számok,

x és y tetszőleges nem negatív valós számok!

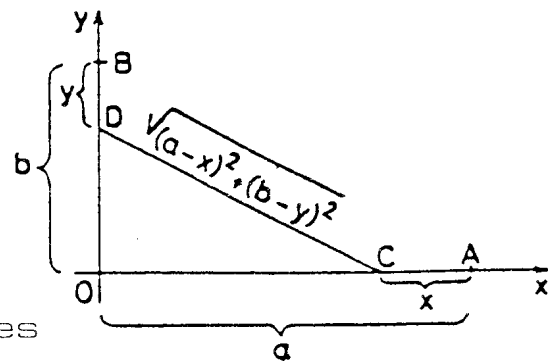
Kihasználjuk, hogy a kifejezésben lévő tagok nem negatívak. Az ábra jelöléseivel

$$z = AC + CD + DB = \\ = x + y + \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2},$$

tehát az ACDB töröttvonal hosszúsága. Ez nyilván akkor a legkisebb, ha a vonal egyenes szakasz, vagyis

$$z = AB = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ez nemnegatív x és y esetében pontosan akkor következik be, ha $x = 0$ és $y = 0$.



F.2.3. Igaz-e, hogy minden tetraédernek van olyan csúcsa, hogy az onnan kiinduló élekből szerkeszthető háromszög?

Az állítás igaz, és ezt indirekt úton bizonyítjuk be.

Tegyük fel, hogy az ABCD tetraéder semelyik csúcsából kiinduló élekből sem szerkeszthető háromszög. Válasszuk a csúcsok betűzését úgy, hogy AB a tetraéder (egyik) leghosszabb éle legyen. Mivel az AB, AC és AD élekből nem szerkeszthető háromszög, ezért közülök a legnagyobb (azaz AB) legalább akkora, mint a másik kettő összege:

$$[1] \quad AB \geq AD + AC$$

Ugyanígy kapjuk meg, hogy

$$(2) \quad AB \geq BD + BC$$

(1)-et és (2)-t összeadva:

$$(3) \quad 2AB \geq AD + BD + AC + BC.$$

Viszont az ABC és az ABD háromszögekben (oldallapok) a háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$AB < AC + BC,$$

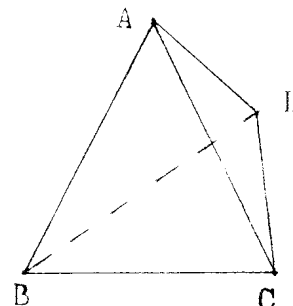
$$AB < AD + BD,$$

ezeket összeadva

$$(4) \quad 2AB < AD + BD + AC + BC.$$

Látható, hogy (3) és (4) ellentmond egymásnak, tehát indirekt feltevésünk hibás.

Ezzel beláttuk, hogy az eredeti állítás igaz.



F.2.4. Mutassuk meg, hogy tetszőleges háromszögben (a szokásos jelölésekkel)

$$a^2 + 4m_a^2 \leq (b + c)^2.$$

Állítsunk az ABC háromszög B csúcsában merőlegest a BC oldalegyenesre, és vegyük fel ezen a merőlegesén a D pontot úgy, hogy A és D a BC-nek ugyanazon az oldalán legyen, és $BD = 2m_a$ teljesüljön. Jelöljük BD felezőpontját F-fel.

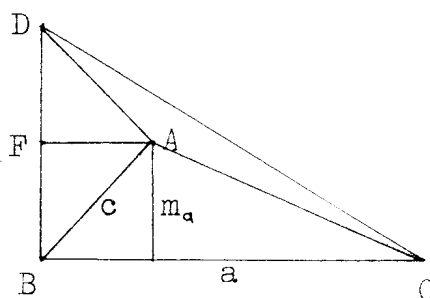
Ekkor $FA \parallel BC$, tehát az FAB és a FAD háromszögek egybevágóak, vagyis $AD = c$. A DBC derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele szerint.

$$a^2 + (2m_a)^2 = DC^2.$$

De $DC \leq DA + AC = c + b$, ezért

$$a^2 + 4m_a^2 \leq (b + c)^2.$$

Ezzel a feladat állítását beláttuk.



F.2.5. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges $ABC \Delta$ súlyvonalainak összhossza mindig kisebb a háromszög kerületénél, de nagyobb kerületének $3/4$ részénél.

$$k > s_a + s_b + s_c > \frac{3}{4}k$$

Legyen M az ABC háromszögben

$$AD = s_a, BE = s_b \text{ és } CF = s_c$$

súlyvonalának metszéspontja, ekkor

$$AM = \frac{2}{3}s_a, \quad BM = \frac{2}{3}s_b, \quad CM = \frac{2}{3}s_c,$$

$$MD = \frac{1}{3}s_a, \quad ME = \frac{1}{3}s_b, \quad MF = \frac{1}{3}s_c.$$

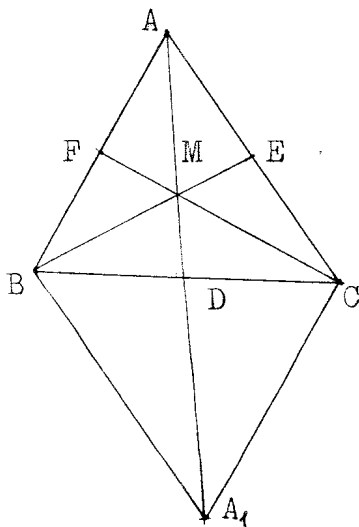
A BMC , CMA és AMB háromszögeket tekintve,

$$\frac{2}{3}s_b + \frac{2}{3}s_c > a, \quad \frac{2}{3}s_c + \frac{2}{3}s_a > b, \quad \frac{2}{3}s_a + \frac{2}{3}s_b > c$$

Összeadva a három egyenlőtlenséget, azt kapjuk, hogy

$$\frac{4}{3}(s_a + s_b + s_c) > a + b + c$$

$$\text{azaz } s_a + s_b + s_c > \frac{3}{4}k$$



Másrészt, ha a D pontból felmérjük az AD szakasz D-n túli meghosszabbítására a $DA_1 = AD$ szakaszt, akkor $BA_1 = AC = b$, hiszen az ABA_1C négyszög paralelogramma. Az ABA_1 háromszögből látható, hogy:

$$b + c > 2s_a$$

Hasonlóan bebizonyítható, hogy

$$a + c > 2s_b \quad \text{és} \quad a + b > 2s_c$$

Az utolsó három egyenlőtlenséget összeadva azt kapuk, hogy

$$2(a + b + c) > 2(s_a + s_b + s_c),$$

azaz $k = a + b + c > s_a + s_b + s_c$

F.2.6. Bizonyítsuk be, hogy ha a háromszög nem tompaszögű, akkor súlyvonalainak összege nagyobb, mint a háromszög köré írt kör sugarának négyszerese!

Ha az ABC háromszög nem tompaszögű, akkor [a belsőjében vagy a határán] tartalmazza a köré írt kör O középpontját. Ezért az S súlypont által meghatározott SAB, SBC, SCA háromszögek közül legalább az egyik szintén tartalmazza az O pontot. Legyen az SAB háromszög ilyen.

Mint hogy az SAB háromszög tartalmazza az OAB háromszöget, így

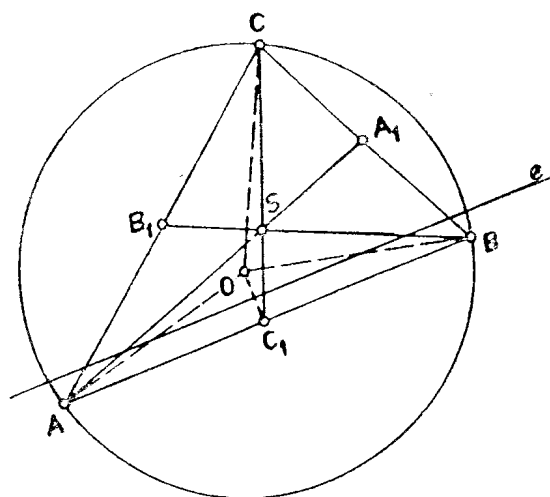
$$SA + SB \geq OA + OB,$$

és az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha O és S azonos. Eszerint az $s_a = AA_1$, $s_b = BB_1$ súlyvonalakra és a körülírt kör R sugarára

$$\frac{2}{3}s_a + \frac{2}{3}s_b \geq 2R$$

vagyis:

$$s_a + s_b \geq 3R$$



Ha O azonos C_1 -gyel, akkor nyilván $CO = CC_1$. Ha azonban O nem azonos C_1 -gyel, akkor az OC_1 szakaszt merőlegesen felező e egyenes belevág a háromszögbe, tehát a vele párhuzamos AB szakaszt elválasztja a C csúcstól. Eszerint C és O ugyanabban az e egyenes által határolt félsíkban van, s ezért a C pont az e egyenesre vonatkozólag szimmetrikusan elhelyezkedő O , C_1 pontok közül O -hoz van közelebb. A $CC_1 = s_c$ és $CO = r$ szakaszokra

ezek szerint $s_c \geq R$ mindig teljesül, és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha O és C_1 azonos.

Egyenlőtlenségeinket összeadva

$$s_a + s_b + s_c \geq 4R$$

adódik, de itt az egyenlőség soha sem teljesülhet, mert egyszerre nem teljesülhet mind a két összeadott egyenlőtlenségben, hiszen O nem lehet az egymástól különböző S , C_1 pontok mindegyikével azonos.

F.2.7. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c valós számok, akkor

$$\sqrt{a^2 + b^2 - ab} + \sqrt{b^2 + c^2 - bc} \geq \sqrt{a^2 + c^2 + ac}$$

Az egyenlőtlenséget geometriai úton bizonyítjuk. Azt fogjuk belátni, hogy ha a, b, c valós számok, akkor

$$(1) \quad \sqrt{|a|^2 + |b|^2 - |a||b|} + \sqrt{|b|^2 + |c|^2 - |b||c|} \geq \sqrt{|a|^2 + |c|^2 + |a||c|}$$

Itt a bal oldal kisebb, a jobb oldal nagyobb a bizonyítandó egyenlőtlenség megfelelő oldalánál, tehát a fenti egyenlőtlenségből már következik a feladat állítása.

Az (1) belátásához tekintsünk a síkon négy pontot. O, A, B, C -t úgy, hogy $OA = |a|$, $OB = |b|$, $OC = |c|$, továbbá $\angle AOB = \angle BOC = 60^\circ$, $\angle AOC = 120^\circ$ legyen. A koszinusz tétel szerint

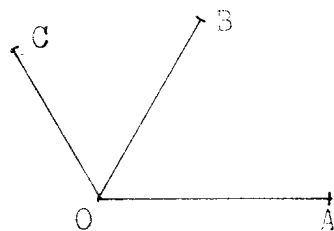
$$\overline{AB} = \sqrt{OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{a^2 + b^2 - |a||b|},$$

ugyanígy $\overline{BC} = \sqrt{b^2 + c^2 - |b||c|}$ és

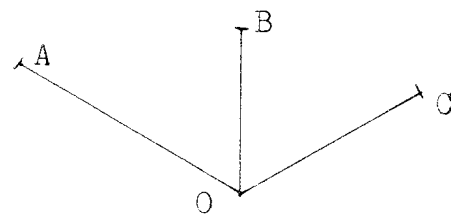
$$\overline{AC} = \sqrt{OA^2 + OC^2 - 2OA \cdot OC \cos 120^\circ} = \sqrt{a^2 + c^2 + |a||c|}$$

Az [1] egyenlőtlenség tehát éppen az $AB + BC \geq AC$ háromszög-egyenlőtlenség, s így igaz.

Nyilvánvaló, hogy [1]-ben egyenlőség pontosan akkor áll, ha A, B, C egy egyenesbe esik (2. ábra). Ekkor az OAC háromszög kétszeres területe, $|a||c|\sin 120^\circ$ egyenlő az OAB és OBC háromszögek kétszeres területének összegével, $|b|(|a| + |c|)\sin 60^\circ$ -kal. Innen $|b|(|a| + |c|) = |a||c|$. Ezenkívül szükséges, hogy [1] megegyezzen a feladatbeli egyenlőtlenséggel, tehát $|a||b| = ab, |a||c| = ac, |b||c| = bc$ teljesüljön, azaz a, b és c előjele azonos legyen.



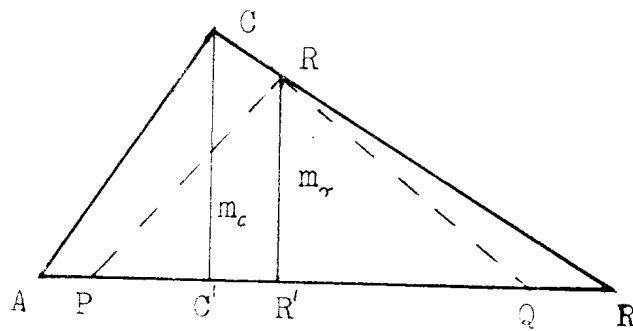
1. ábra



2. ábra

F.2.8. Az ABC háromszög kerületét a P, Q, R pontok három egyenlő részre osztják. Igazoljuk, hogy a PQR háromszög területe nagyobb, mint az ABC háromszög területének $2/9$ része.

A három pont (P, Q, R) nem lehet mind egy oldalon az ABC háromszögben, mert akkor ez az oldal legalább a terület $\frac{2}{3}$ része lenne, s ez ellentmondana a háromszög-egyenlőtlenségnek.



Legyen az AB oldalon a P és a Q, a BC oldalon az R pont (P és Q közül P van A-hoz közelebb).

Feltehetjük, hogy a terület 3 egység, vagyis $a + b + c = 3$. Ekkor $PQ = 1$ és $QB + BR = 1$. A háromszög-egyenlőtlenségből $c < 1,5, a < 1,5$. A PQR háromszög R-hez tartozó magasságát m_r -rel, az ABC háromszög C-hez tartozó magasságát m_c -vel jelölve: (BRR' és BCC' hasonlóságából)

$$\frac{T_{PQR}}{T_{ABC}} = \frac{1 \cdot m_r}{c \cdot m_c} = \frac{1}{c} \cdot \frac{BR}{BC} = \frac{1}{c} \cdot \frac{BR}{a}$$

De $BR = PQ - QB > PQ - (c - PQ) > 2PQ - 1,5 = 0,5$, így

$$\frac{T_{PQR}}{T_{ABC}} = \frac{1}{ca} \cdot BR > \frac{0,5}{1,5 \cdot 1,5} = \frac{2}{9}$$

F.2.9. Keressük meg az ABC zárt háromszöglemez azon P pontját, amelyre $PA + PB + PC$ maximális, továbbá azt a Q pontját, amelyre $QA^2 + QB^2 + QC^2$ maximális. Bizonyítsuk be, hogy $P = Q$.

Keressük először a $PA + PB + PC$ maximumát. Legyen egyelőre P belső pont, és tegyük fel, hogy $BC \geq CA \geq AB$.

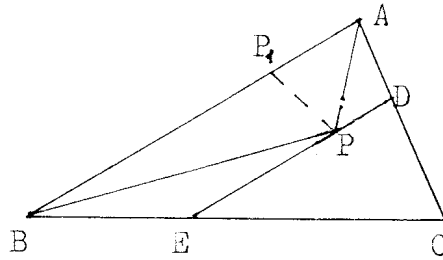
A P -n át AB -vel húzott párhuzamos a másik két oldalt a D , illetve E pontokban metszi. Az ABC és DEC háromszögek hasonlóságból következik, hogy $EC \geq DC \geq DE$. Ebből és a háromszögegyenlőtlenségből

$$PC < EC$$

$$DE \leq DC$$

$$PA < AD + DP$$

$$PB < PE + EB.$$



A négy egyenlőtlenséget összeadva:

$$DE + PA + PB + PC < (EC + EB) + (AD + DC) + (DP + PE).$$

azaz

$$(1) \quad PA + PB + PC < BC + CA.$$

Ha P a háromszög határának egy, a csúcsoktól különböző pontja pl. $P = P_1$, akkor

$$(2) \quad PA + PB + PC < AB + BC \leq BC + CA.$$

Ha például $P = C$, akkor

$$(3) \quad PA + PB + PC = BC + CA.$$

Az (1), (2) és (3) összefüggésekből láthatjuk, hogy $PA + PB + PC$ akkor maximális, ha P a legkisebb oldallal szemkötti csúcs.

Vizsgáljuk meg ezután, hogy $QA^2 + QB^2 + QC^2$ mikor maximális. A 2. ábrán Q a háromszöglemez tetszőleges pontja. S pedig a háromszög súlypontja. Legyen

$$\overrightarrow{SA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{SB} = \mathbf{b}, \overrightarrow{SC} = \mathbf{c}, \overrightarrow{SQ} = \mathbf{q},$$

$$\text{és } |\mathbf{a}| = a, |\mathbf{b}| = b, |\mathbf{c}| = c, |\mathbf{q}| = q$$

$$QA^2 + QB^2 + QC^2 =$$

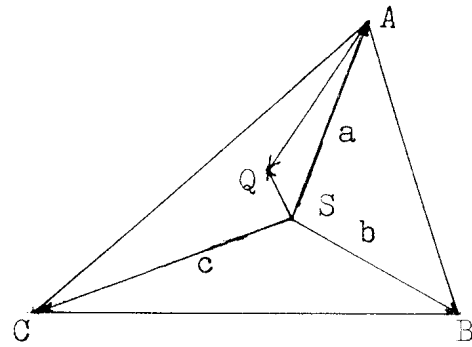
$$= (\mathbf{q} - \mathbf{a})^2 + (\mathbf{q} - \mathbf{b})^2 + (\mathbf{q} - \mathbf{c})^2 =$$

$$= 3q^2 - 2\mathbf{q}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) + a^2 + b^2 + c^2$$

$$\text{Mivel } \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0},$$

$$QA^2 + QB^2 + QC^2 = 3q^2 + a^2 + b^2 + c^2. \text{ Az utolsó három tag összege}$$

konstans, a vizsgált összeg tehát akkor a legnagyobb, ha q a lehető legnagyobb. Ezért a háromszöglemez S -től legtávolabbi pontját kell megkeresnünk, ez pedig az S -től legtávolabbi csúcs. Ismeretes, hogy a háromszög s_c súlyvonala $s_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, ami akkor a legnagyobb, ha a c oldal a legkisebb. Tehát $QA^2 + QB^2 + QC^2$, akkor maximális, ha Q a legkisebb oldallal szemkölti csúcs. A két eredményből következik, hogy $P = Q$.



F.2.10. Legyen ABC egyenlő oldalú háromszög, M

pedig ennek síkjában egy tetszőleges pont.

Bizonyítsuk be, hogy mindig fennáll a következő

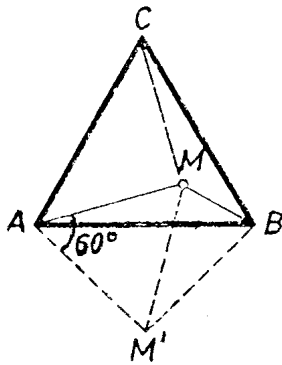
egyenlőtlenség. $BM \leq AM + CM$. Milyen esetben

áll fenn az egyenlőség?

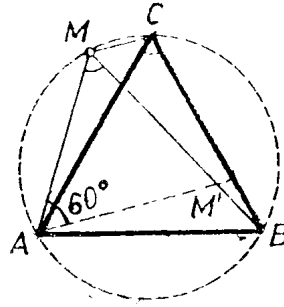
Forgassuk el az ACM háromszöget az A pont körül 60° -kal az ABM' helyzetbe. (1. ábra) Ekkor

$$MM' = AM' = AM, \quad CM = BM', \text{ de } \quad BM \leq BM' + MM'$$

$$\text{tehát:} \quad BM \leq AM + CM$$



1. ábra



2. ábra

Itt $BM = BM' + M'M$ csak akkor teljesül, ha M' a BM szakasz pontja. Mivel $AM = AM'$ és $\angle M'AM = 60^\circ$ $\angle AMM' = 60^\circ$, ezért ebben az esetben $\angle AMB = 60^\circ$, ami azt jelenti, hogy az M pont az ABC háromszög köré írható kör AC ívének egy pontja. [Egy ívhez tartozó kerületi szögek.]

F.2.11. Keressük meg az ABC hegyesszögű háromszög síkjában azt a pontot, amelytől a háromszög csúcsaihoz húzható szakaszok összhossza a lehető legkisebb.

Az ABC hegyesszögű háromszög síkjában legyen I az a pont, amelyre az $IA + IB + IC$ összeg minimális. Ekkor

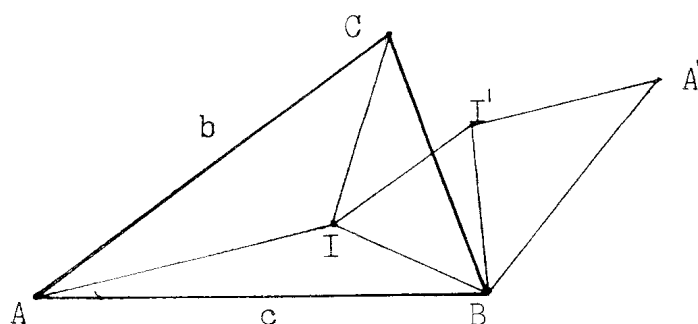
$$IA + IB + IC = z.$$

Legyen ugyanis I az ABC háromszög síkjának egy pontja. Forgassuk el B körül a BIC háromszöget 60° -kal "kifelé" $BI'A'$ helyzetbe. A 60° -os elforgatás miatt a $BI'I$ és a BCA' háromszögek szabályosak, ezért $IB = I'B = I'I$, ezért

$$IA + IB + IC = AI + I'I + I'A'.$$

Az A -t az A' -vel összekötő töröttvonal nem lehet nagyobb AA' -nál, tehát

$$IA + IB + IC \leq AA'.$$



I pont ezért csakis akkor szolgáltathat minimumot, ha rajta van az AA' szakaszon, és így A, I, I', A' egy egyenesre esnek, ennél fogva $\angle AIB \leq 120^\circ$. I pont viszont csak akkor rendelkezhet a szóban forgó minimumtulajdonsággal, ha ilyen elhelyezkedése lehetséges, méghozzá nemcsak az A csúcsból, hanem a másik két csúcsból kiindulva is. I pont ilyen felvétele valóban lehetséges, mert az AB, BC, CA oldalak fölé befelé szerkesztett 120° -os látóörvények valóban egy pontban metszik egymást, hiszen ha pl. az AB és BC fölé szerkesztett ilyen ívek egy I pontban metszik egymást, akkor abból az I pontból a CA oldal is 120° -os szögben látszik. Az ezzel a tulajdonsággal rendelkező I pont a háromszög izogonális pontja. **Az izogonális pont tehát a hegyesszögű háromszögnek az a pontja, amelynek a három csúctól mért távolság összege minimális.**

Meggondolásunkból következik, hogy a hegyesszögű háromszög csúcsait a szemközti oldalra kifelé szerkesztett szabályos háromszög külső csúcsával összekötő szakaszok átmennek az izogonális ponton.

Ezek a szakaszok szükségképpen mind egyenlők az $IA + IB + IC$ szakaszösszeggel, és könnyen belátható, hogy hosszuk z , hiszen pl. az ABA' háromszögre a koszinusz-tételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$AA'^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos(\beta + 60^\circ) = z^2.$$

Megjegyezzük, hogy meggondolásainkban az ABC háromszög hegyesszögű voltát csak annyiban használtuk fel, hogy az AA' szakasz a háromszög belsejében haladt, s ez mindaddig igaz, míg az ABC valamelyik szöge el nem éri a 120° -ot. Ebben az esetben a szélső értéket szolgáltató pont a háromszög tompaszögű csúcsa.

F.2.12. Keressük meg:

- a) az $ABCD$ négyszög belsejében,*
- b) az $ABCD$ négyszög síkjában azt az X pontot,*
amelytől a négyszög csúcsaihoz húzható
szakaszok összhossza a lehető legkisebb!

Kényelmesebb a [b] résszel kezdenünk a megoldást.

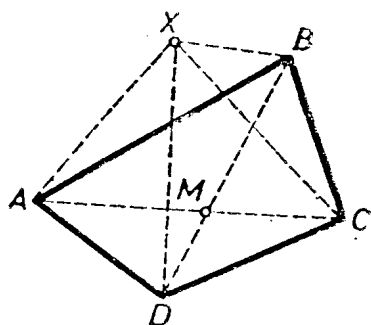
b) Legyen $ABCD$ tetszőleges négyzet. M átlóinak a metszéspontja, X a sík tetszőleges más pontja.

Látható, hogy

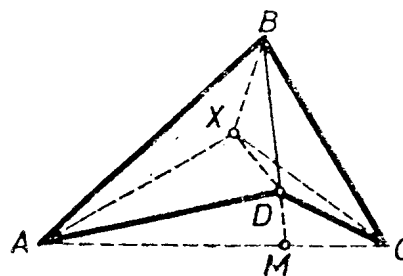
$$XA + XC \geq AC = MA + MC,$$

és
$$XB + XD \geq BD = MB + MD,$$

ezért
$$XA + XB + XC + XD \geq MA + MB + MC + MD.$$



1. ábra



2. ábra

Egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha az X pont megegyezik M-mel. Tehát a keresett pont az átlók M metszéspontja.

a) Ha az ABCD négyszög konvex, akkor az M pont belső pont, és mint a [b] rész megoldása mutatja, ez lesz a keresett pont.

Ha az ABCD négyszög konkáv és $\angle D > 180^\circ$, akkor a keresett pont a konkáv szög D csúcsa. Valóban, ha X tetszőleges pont a négyszög belsejében, akkor nyilvánvaló, hogy $XB + XD \geq BD = DB + DD$ és $XA + XC > DA + DC$. Mivel az AXC töröttvonal tartalmazza az ADV töröttvonalat, ezért $XA + XB + XC + XD > DA + DB + DC$ ($DD = 0$, ezért azt ki se írtuk).

F.2.13. A sík két pontját szomszédosnak nevezzük, ha távolságuk nem nagyobb egy egységnél. Egy pont önmagának nem szomszédja. Bizonyítsuk be, hogy a sík négy olyan pontja, melyek mindegyikének a fennmaradó három közül legalább kettő szomszédja, mindig lefedhető egy egységnyi sugarú körlappal

Ha A, B, C és D pontok közül valamelyiküknek, legyen ez D, 3 szomszédja is van, akkor a D közepű egység sugarú körlemez valamennyi pontunkat lefedi.

Ha nincs a pontok között 3 szomszédú, akkor mindnek pontosan 2 szomszédja van: az A-nak legyen B és C a szomszédja, ekkor D szomszédjai - mivel A nem ilyen - ugyancsak a B és a C. (1. ábra)

Jelölje F az AD felezőpontját. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$(1) \quad FA = FD = \frac{1}{2}AD \leq \frac{1}{2}(AB + BD) \leq \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

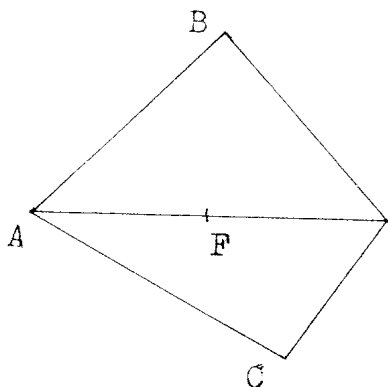
Az FB, illetve FC az (esetleg elfajuló) ABD, illetve ACD háromszögnek ezért (az F pontra tükrözve a B, illetve a C pontokat, a 2. ábra - esetleg elfajuló - paralelogrammájából)

$$(2) \quad BF \leq \frac{1}{2}(AB + BD) \leq 1$$

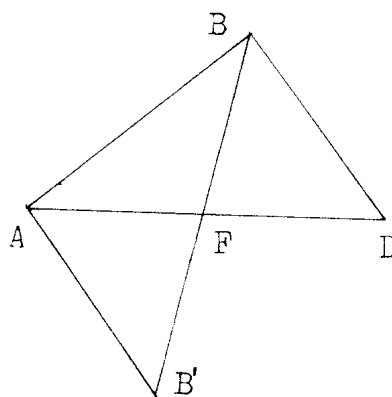
illetve

$$(3) \quad CF \leq \frac{1}{2}(AC + CD) \leq 1$$

Az (1), (2) és (3) miatt az F közepű egységnyi sugarú körlemez lefedi az adott pontnégyest



1. ábra

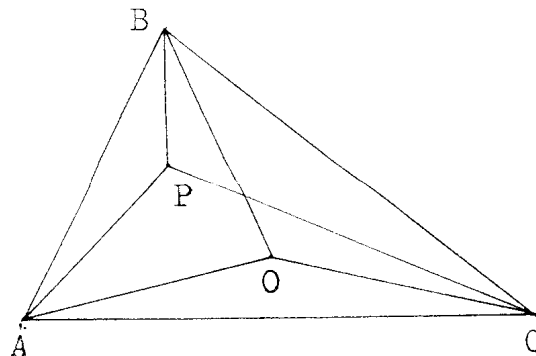


2. ábra

F.2.14. Legyen P az ABC hegyesszögű háromszög belsejének valamely, a körülírt kör középpontjától különböző pontja. Bizonyítandó, hogy az AP , BP , CP távolságok között van R -nél nagyobb, és van R -nél kisebb.

Egy háromszög belsejében vagy a határán fekvő pont két csúcstól mért távolságának összege kisebb, mint a harmadik csúcsban találkozó oldalak összege, ha csak a pont a harmadik csúccsal nem azonos, bizonyított K.2. felhasználjuk.

Kössük össze O -t a háromszög csúcsaival. Az O -tól különböző P pont az AOB , BOC , COA háromszögek valamelyikének -mondjuk az elsőnek - belsejében vagy határán van.



K. 2. szerint

$$AP + PB < AO + OB = 2R$$

és így AP és PB közül a kisebbik feltétlenül kisebb, mint R .
Másként kössük össze P -t a háromszög csúcsaival.

Mivel a háromszög hegyesszögű, O a háromszög belsejében van, tehát az APB , BPC , CPA háromszögek valamelyikének - mondjuk APC -nek - belsejébe vagy határára esik, és különbözik P -től. Így a K.2. szerint

$$AP + PC > AO + OC = 2R,$$

tehát AP és PC közül a nagyobbik biztosan nagyobb, mint R .

3. fejezet

Ebben a részben a feladatok megoldásának kulcsa a tengelyes tükrözés, kihasználjuk a szögtartó és távolságtartó tulajdonságát. Általános iskolában feladható feladat a következő, és jól mutatja az elv lényegét.

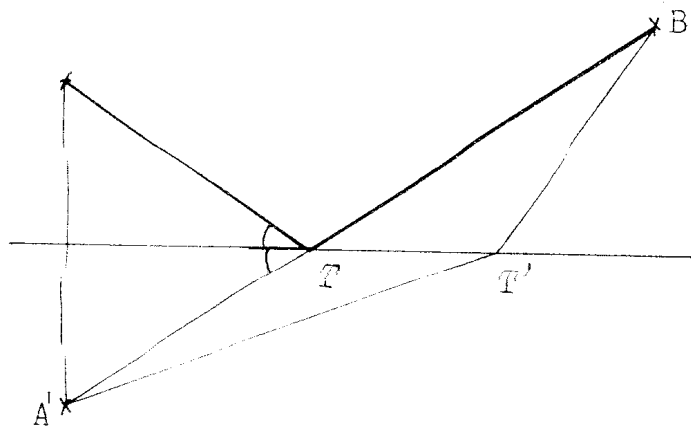
F.3.1. Egy egyenes országút ugyanazon oldalán helyezkedik el két község. Mindkét községbe bevezetik a villanyt, és a két község számára közvetlenül az országút mellett közös transzformátorállomást létesítenek. Hol kell az állomást elhelyezni, hogy a lehető legrövidebb vezetékre legyen szükség? (Legyen A és B község.)

Ha az A pontot tükrözzük az útra tengelyesen megkapjuk A' -t. Azt állítjuk, hogy $A'B$ egyenese ahol metszi a t egyenest, az a

keresett pont T . Vegyünk egy T ponttól különböző T' pontot a tengelyen, ekkor $T'A + T'B = T'A' + T'B$. Az $A'T'B$ háromszögből a háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$T'A' + T'B > A'B = A'T + TB = AT + TB.$$

Tehát az $AT + TB$ minimális minden t -n levő pontra, mivel T' tetszőleges pontja volt t -nek.



A tengelyes tükrözés szögtartó, így a jelölt szögek egyenlőek. A T -nél lévő csúcsszögek egyenlőségéből látszik, hogy AT és BT ugyanakkora szöget zár be t -vel. Két fizikai jelenséggel kapcsolható össze.

Ha egy fénysugár egy A pontból kiindulva síktükörről való visszaverődés után egy B pontba jut, akkor a megtett út A és B között a lehető legrövidebb.

Ha egy golyó tökéletesen rugalmasan ütközve egy falról visszapattan, akkor a falra merőleges síkkal bezárt szöge, az érkezési és távozási iránynak ugyanakkora.

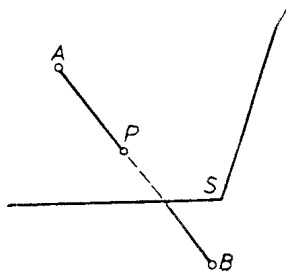
F.3.2. Adott a térben egy S sík és a rá nem illeszkedő A és B pontok. Melyik a legrövidebb, A -t B -vel összekötő útvonal, amely az S síknak legalább egy pontját is tartalmazza?

Két esettel kell foglalkoznunk annak megfelelően, hogy az S sík elválasztja vagy nem választja el az A és a B pontokat.

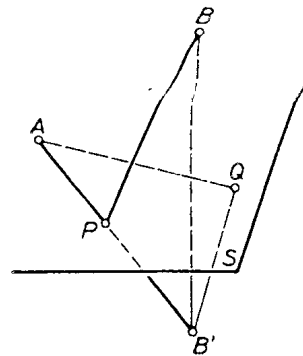
Ha P jelöli az S síknak azt a pontját, amelyre az $AP + PB$ útvonal a legrövidebb, akkor ez két szakaszból fog állani, mivel az A -ból P -be, illetve a P -ből B -be vivő legrövidebb útvonal az AP , illetve a PB szakasz.

Az első esetben tehát az AB szakasz adja a megoldást.

A második esetben tükrözzük a B pontot az S síkra, B tükörképét jelölje B' . Mivel $PB = PB'$ a szimmetria miatt, ezért egyrészt az A -ból a B' -be vezető legrövidebb út az AB' szakasz, másrészt az AB' szakasznak az S síkkal való közös P pontjára $AP + PB = AP + PB' = AB'$ és P az S -nek az egyetlen pontja, amely az A -ból S -t érintve a B -be vivő legrövidebb utat adja. Ez abból következik, hogy az S síknak minden P -től különböző Q pontja nem illeszkedik az AB' egyenesre, ennél fogva az AQB' háromszög nem elfajuló, s így két oldalának az összegére: $AQ + QB' > AB'$



1. ábra



2. ábra

Az A pontot tükrözve az S síkra, az A' tükörképet B-vel összekötő A'B az S síkot ugyanabban a P pontban metszi, mint az AB', és $AB' = A'B$, hiszen ezek az S síkra szimmetrikus szakaszok.

F.3.3. Adott a síkban egy e egyenes, és ennek különböző partjain egy-egy pont, az A és B. Az e egyenes melyik P pontjának az érintésével kell haladnunk A-ból a B-be, ha $|AP - BP|$ legnagyobb.

Az $|AP - BP|$ akkor a legnagyobb, ha A és B pontnak az e egyenesre vonatkozó B' tükörképe, illetve a P pont egy egyenesre esnek.

$$\text{Ekkor } |AP_o - BP_o| = |AP_o - B'P_o| = AP_o - B'P_o = AB'$$

APB' háromszögre alkalmazva a

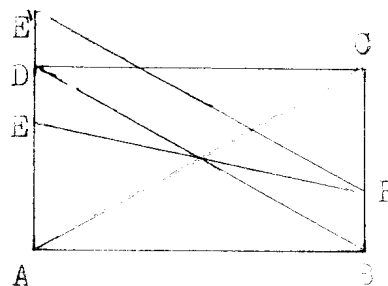
háromszög-egyenlőtlenség

$$AB' > |AP - B'P| = |AP - BP|$$

$$|AP_o - BP_o| > |AP - BP|$$

F.3.4. Egy téglalap átlóinak metszéspontján át fektessünk egy tetszőleges egyenest, ez a két szemköztí oldal az E, ill. F pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy E-től az egyik szomszédos oldalig és onnét F-be vezető út nagyobb vagy egyenlő mint a téglalap átlója.

Az E pontot tengelyesen tükrözve DC egyenesére kapjuk E' pontot. Előzőekből tudjuk, hogy E'F és a DC szakaszok metszéspontja megadja H pontot, amire $EH + HT$ minimális.

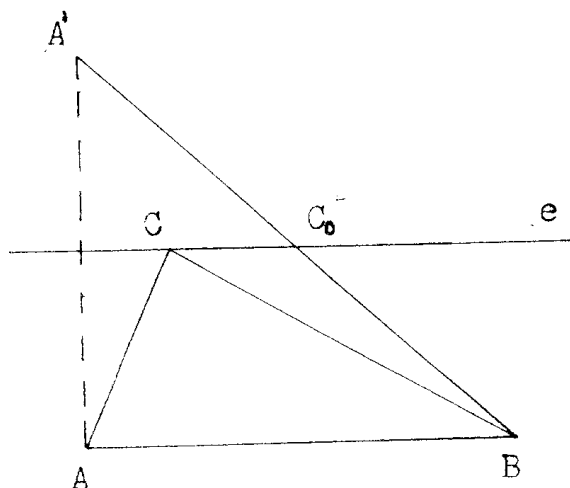


Ezek után azt kell belátni, hogy ez az átló hossza. A $BFED$ négyszög paralelogramma, mert $BF = ED = E'D$ és párhuzamosak. Tehát $E'F = BD$

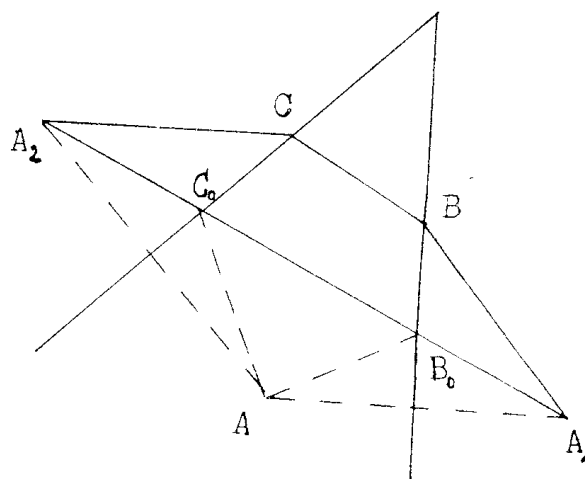
F.3.5. Adott alapú és magasságú háromszögek közül melyiknek a legkisebb a kerülete?

A feltételek szerint a háromszög C csúcsa az AB oldallal párhuzamos e egyenesen mozoghat, ahol $d_{e,AB} = m$. A háromszög kerülete nyilván akkor a legkisebb, amikor a $BC + CA$ összeg a legkisebb. CA -t az e egyenesre vonatkozó CA' tükörképével helyettesítve látjuk, hogy $BC + CA'$ akkor minimális, ha a BCA' töröttvonal szakasszá válik.

Jelölje az $A'B$ egyenesnek az e -vel való metszéspontját C_0 , ami a háromszög harmadik csúcsát adja. A tengelyes tükrözés tulajdonságai miatt az ABC_0 háromszög egyenlő szárú. Így az egyenlő alapú és magasságú háromszögek közül az egyenlő szárú háromszög kerülete a legkisebb.



F.3.5.



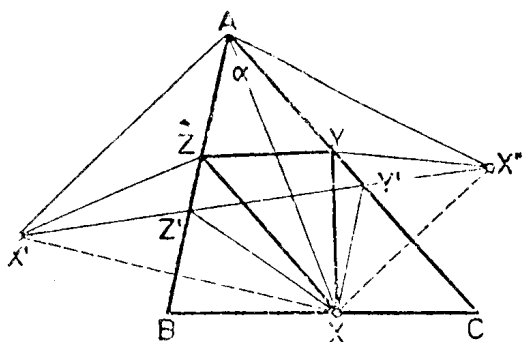
F.3.6.

F.3.6. Adott egy szög és az A pont. Melyik az a legkisebb kerületű háromszög, amelynek egyik csúcsa A -ban, másik két csúcsa a szög szárain van?

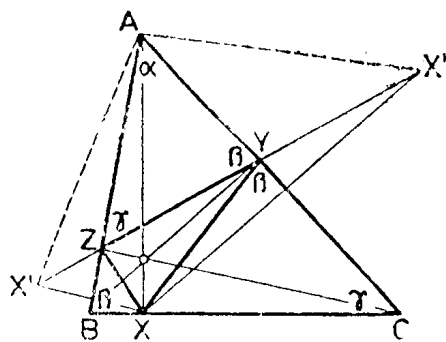
Legyen az A pontnak a szögszárakra vonatkozó tükörképe A_1 , illetve A_2 . A szögszárakon tetszőlegesen felvett B , C pontok által meghatározott ABC háromszög kerülete megegyezik az A_2BCA_1 töröttvonal hosszúságával. Ez változó P és C mellett akkor lesz legkisebb, ha az A_1 , B_1 , C , A_2 pontok egy egyenesbe esnek. A minimális kerületű AB_0C_0 háromszög B_0 és C_0 csúcspontját az A_1A_2 egyenes metszi ki az adott háromszög szárain.

F.3.7. Írjunk a hegyesszögű háromszögbe lehető legkisebb kerületű háromszöget. A beírást úgy kell érteni, hogy a beírt háromszög csúcsai az adott háromszög oldalainak belső pontjai.

Az ABC hegyesszögű háromszögbe írt XYZ háromszög csúcsai legyenek X(BC-n), Y(CA-n) és Z(AB-n) (1. ábra). X-nek az AB, ill. AC oldalakra vonatkozó tükörképe legyen X', ill. X". A tükrözés miatt $\angle X'AX'' = 2\angle BAC = 2\alpha < 180^\circ$, és a $\angle BAC < \angle X'AX''$ belsejében van, ezért X'X" metszi AB-t, ill. AC-t, bár hogyan is választjuk X-et. Az XYZ háromszög kerülete az $X'Z + ZY + YX''$ töröttvonal-hosszal egyenlő. Ha az X'X" egyenes AB-t Z'-ben, AC-t Y'-ben metszi, akkor rögzített X esetén az XY'Z' háromszög kerülete nem nagyobb az XYZ kerületénél. Rögzített X esetén tehát a fenti szerkesztés megadja az ABC háromszögbe írt legkisebb kerületű háromszöget.



1. ábra



2. ábra

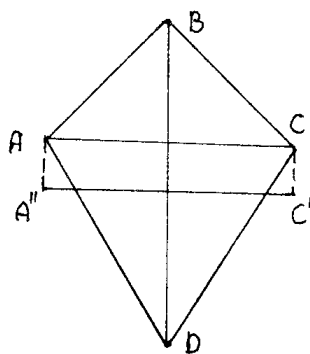
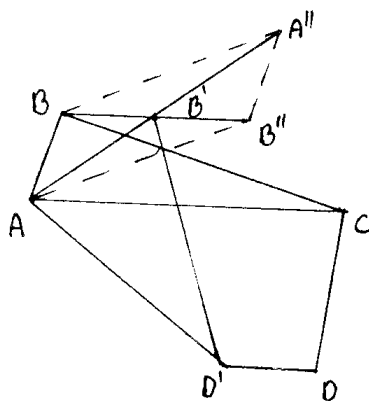
A feladat mostmár az, hogy az X-et úgy válasszuk meg, hogy a legkisebb kerületű beírt háromszög álljon elő. Ehhez figyeljük meg, hogy az X-hez tartozó legkisebb kerületű háromszög

kerülete az $X'AX''$ egyenlő szárú háromszög $X'X''$ alapjával egyenlő. Az $X'AX''$ háromszögek azonban mind hasonlóak, bárhol választjuk is X -et, hiszen szárszögük 2α -val egyenlő; $X'X''$ ezért akkor lesz minimális, ha az $X'AX''$ háromszög AX' szára is minimális. Viszont $AX' = AX$, ez akkor minimális, ha X az A -ból induló magasság talppontja. A BC oldal helyett más oldalból kiindulva arra az eredményre jutunk, hogy a minimális kerületű háromszög csúcsai a magasságok talppontjai, ez az **ún. talpponti háromszög**. (2. ábra)

A bizonyításnál kihasználtuk ABC hegyesszögű voltát, tompaszögű háromszögre a feladatnak nincs megoldása, bármely beírt háromszöghöz találunk nála kisebb kerületű beírt háromszöget.

F.3.8. Adott területű négyszögek közül melyik a legkisebb kerületű?

Tekintsünk egy tetszőleges $ABCD$ négyszöget és húzzuk meg az egyik átlóját, legyen ez AC .



Ismeretes, hogy ha a B és D csúcsokat az AC átlóval párhuzamos egyenes mentén eltoljuk, akkor a négyszög területe nem változik. Legyen B és D új helyzete B' és D'.

Először azt látjuk be, hogy az AB'CD' négyszög kerülete akkor a legkisebb, ha B' és D' az AC átló felező merőlegesén van, azaz ha a négyszög deltoid. Tükrözzük az A és B pontokat a B' pontra, képük rendre A'' és B'', ekkor

$$AB + BC = AB + BA'' > 2AB' = AB' + B'C.$$

Másodszor belátjuk, hogy az egyenlő területű deltoidok közül a rombusz kerülete a legkisebb. A bizonyítást az előzőhöz hasonlóan végezhetjük el arra a két csúcsra, amely nem a szimmetriatengelyen fekszik. Ezeket eltolva úgy, hogy a felezőmerőlegesre kerüljenek, a kerület ismét csökkenni fog.

Végül tekintsünk két egyenlő területű rombuszt és négyzetet. A négyzet oldala legyen a , a rombusz oldala b , a magassága m hosszúságú. Ekkor $t = b$, $m = a^2$. Kerületük $4a$, illetve $4b$. Mivel $b \geq m$, $b^2 \geq a^2$, $a, b > 0$, így $4b \geq 4a$ egyenlőtlenség csak akkor állhat fenn, ha $b = m$.

Ezek szerint az egyenlő területű négyszögek közül a négyzet kerülete a legkisebb.

F.3.9. A tükrözési elvet alkalmazva és felhasználva, hogy egyenlő területű n-szögek között a szá-

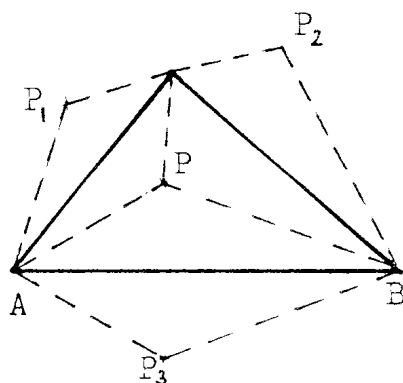
bármely n -szög a legkisebb kerületű, bizonyítsuk

be, hogy ha P a t területű ABC háromszög

belső pontja, akkor

$$PA + PB + PC \geq 2\sqrt{t\sqrt{3}}.$$

Figyeljük meg az ábrát. A P pontot az ABC háromszög oldalaira tükrözve az $AP_1CP_2BP_3$ hatszöget kapjuk, ennek területe $2t$, kerülete pedig $2(PA + PB + PC)$.



$2t$ területű hatszögek közül a szabályos hatszögnek van a legkisebb kerülete. Jelöljük ezt a kerületet L -lel. Ebben az esetben

$$2(PA + PB + PC) \geq L.$$

Ha kiszámítjuk a szabályos hatszög L kerületét területének, $2t$ -nek a segítségével, azt kapjuk, hogy

$$L = 4\sqrt{t\sqrt{3}}.$$

F.3.10.

Mutassuk meg, hogy az előbbi

egyenlőtlenségből következik, hogy

$$PA + PB + PC \geq 6r = 2(r + r + r).$$

Az adott t területű háromszögek közül a szabályos háromszögnek van a legnagyobb beírt köre. Jelölje ennek sugarát r_E , ekkor

$$r_E \geq r.$$

De a szabályos háromszög területe a beírt kör sugarával kifejezve:

$$t = 3\sqrt{3}r_E^2.$$

Ezért

$$PA + PB + PC \geq 2\sqrt{t\sqrt{3}} = 2\sqrt{3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}r_E^2} = 6r_E \geq 6r.$$

7.3.11. Legyen P az ABC háromszög tetszőleges belső pontja, továbbá P merőleges vetülete a BC , CA , AB oldalon rendre A_o , B_o , C_o . Bizonyítsuk be, hogy:

$$PA \cdot PB \cdot PC \geq (PA_o + PB_o)(PB_o + PC_o)(PC_o + PA_o)$$

Legyen az ABP háromszög AP -hez tartozó magassága BM_B , az APC háromszög AP -hez tartozó magassága pedig CM_C . Világos, hogy $BM_B + CM_C \leq BC$, ezért a két háromszög kétszeres területének összege nem nagyobb, mint $PA \cdot BC$, azaz

$$(1) \quad PA \cdot BC \geq AB \cdot PC_o + AC \cdot PB_o.$$

Jelölje P tükörképét a BAC szög felezőjére P' , a C_o és B_o pont tükörképét C'_o , illetve B'_o . Mivel az (1) állítás minden olyan P -re igaz, amely a BAC szögtartományban van, teljesülni fog P' -re is (még akkor is, ha esetleg P' az ABC háromszögnek nem belső pontja).

Ezért

$$P'A \cdot BC \geq AB \cdot P'B_o + AC \cdot P'C_o$$

A tükrözés miatt $P'A = PA$, $P'B_o = PB_o$, $P'C_o = PC_o$, így

$$(2) \quad PA \cdot BC \geq AB \cdot PB_o + AC \cdot PC_o$$

Összeadva az (1) és (2) egyenlőtlenségeket:

$$(3) \quad 2 \cdot PA \cdot BC \geq (AB + AC)(PC_o + PB_o).$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$(4) \quad 2 \cdot PB \cdot AC \geq (AB + BC)(PA_o + PC_o).$$

$$(5) \quad 2 \cdot PC \cdot AB \geq (AC + BC)(PA_o + PB_o)$$

A (3), (4) és (5) egyenlőtlenségeket összeszorozva:

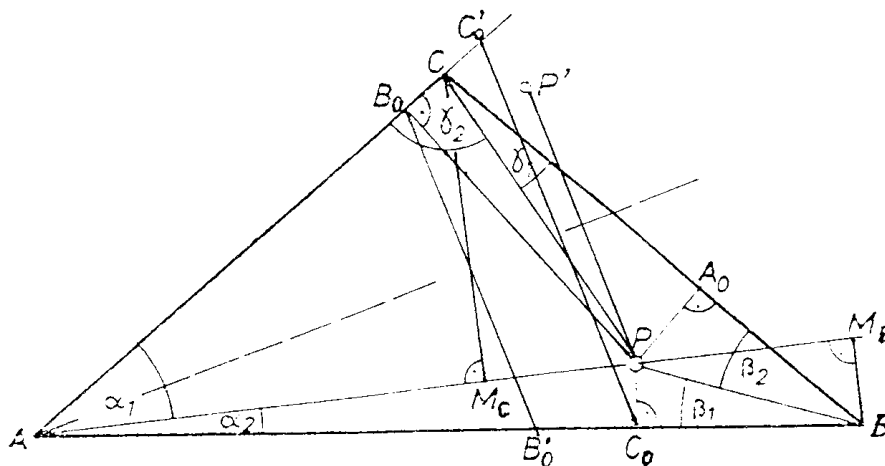
$$\begin{aligned} & 8 \cdot PA \cdot PB \cdot PC \cdot AB \cdot BC \cdot AC \geq \\ & \geq (AB + BC)(BC + CA)(CA + AB)(PC_o + PB_o)(PA_o + PC_o)(PA_o + PB_o) \end{aligned}$$

Felhasználjuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

Nyilván

$$AB + BC \geq 2 \cdot \sqrt{AB \cdot BC}, \quad BC + CA \geq 2 \cdot \sqrt{BC \cdot CA}, \quad CA + AB \geq 2 \sqrt{CA \cdot AB},$$

a jobb oldal első három tényezőjét eképpen becsülve, majd mindkét oldalt $8 \cdot AB \cdot BC \cdot CA$ -val osztva, előbbi egyenlőtlenségünkben éppen a feladat állítását kapjuk.



4. fejezet

A következőkben számok számtani, mértani, harmonikus és négyzetes közepét használjuk fel az egyenlőtlenségek megoldásánál.

Definíció: Az $a_1, a_2, \dots, a_n$ számok számtani közepe

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Definíció: Az $a_1, a_2, \dots, a_n$ nemnegatív számok mértani közepe

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

Definíció: Az $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitív számok harmonikus közepe

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

Definíció: Az $a_1, a_2, \dots, a_n$ nemnegatív számok négyzetes közepe

$$Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

Definíció: Az $a_1, a_2, \dots, a_n$ nemnegatív számok k -adik hatványközpének nevezzük azt a pozitív x számot, melyre

$$x^k = \frac{a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k}{n}$$

A Jensen tétel felhasználásával belátjuk ezen közepek közötti kapcsolatot, amely a következő

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq N_n$$

Számomra nagyon érdekes volt, hogyan lehet egy függvény-nyel kapcsolatos tételt az előző egyenlőtlenségek bizonyításánál felhasználni.

Jensen látta meg, hogy az egyenlőtlenségeknél és a szélsőérték feladatok elemi megoldásánál használt összefüggések lényege egyetlen általános tételben összefogható.

Ha a valós számok T (véges vagy végtelen) intervallumán értelmezett $f(x)$ függvényre bármely, T -hez tartozó x_1 és x_2 választásával teljesül

$$(1) \quad f(x_1) + f(x_2) \leq 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

akkor teljesül

$$(2) \quad f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$$

minden T -hez tartozó $x_1, x_2, \dots, x_n$ értékre.

Továbbá, ha az egyenlőség (1)-ben csak $x_1 = x_2$ mellett áll fenn, akkor (2)-ben is csak $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ mellett érvényes.

Az (1) feltételnek eleget tevő f függvény konkáv függvény.

Ha (1)-ben az ellenkező értelmű egyenlőtlenség igaz, konvex függvényről beszélünk. Ekkor (2)-ben is az ellenkező értelmű egyenlőtlenség teljesül. (Helyesebb a "Jensen-konkáv", "Jensen-konvex" elnevezés.)

Most rátérünk Jensen tételének bizonyítására. Módszerünk Cauchy-tól származik. Ő ezzel a meglepő gondolatmenettel bizonyította be a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget. Jensen éppen a módszer nagyfokú általánosítását vette észre.

1. A tételt először arra az esetre igazoljuk teljes indukcióval, amikor a tagok száma kettőnek hatványa.

Feltéve, hogy $n = k$ -ra az állítás igaz, bizonyítunk $n = 2k$ -re. A feltevés szerint

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k) \leq kf\left(\frac{1}{k}(x_1 + x_2 + \dots + x_k)\right),$$

$$f(x_{k+1}) + f(x_{k+2}) + \dots + f(x_{2k}) \leq kf\left(\frac{1}{k}(x_{k+1} + x_{k+2} + \dots + x_{2k})\right)$$

A fentieket összeadva, majd a jobb oldalon szereplő két tagra megint (1)-et felhasználva:

$$\begin{aligned} f(x_1) + \dots + f(x_k) + (f(x_{k+1}) + \dots + f(x_{2k})) &\leq \\ &\leq k \left[f\left(\frac{1}{k}(x_1 + \dots + x_k)\right) + f\left(\frac{1}{k}(x_{k+1} + \dots + x_{2k})\right) \right] \leq \\ &\leq k \left[2 \cdot f\left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k}(x_1 + \dots + x_k) + \frac{1}{k}(x_{k+1} + \dots + x_{2k}) \right) \right) \right] \\ &= 2k \cdot f\left(\frac{1}{2k}(x_1 + \dots + x_k + x_{k+1} + \dots + x_{2k})\right) \end{aligned}$$

Tehát k -ról $2k$ -ra az állítást igazoltuk. Mivel az (1) feltétel szerint az állítás 2 -re igaz, igaz 4 -re, 8 -ra, ..., 2 -nek minden hatványára.

2. Most megmutatjuk, hogy ha az állítás igaz $n = k + 1$ -re, akkor igaz $n = k$ -ra is. Feltesszük tehát, hogy

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{k+1}) + f(x_{k+1}) \leq (k+1)f\left(\frac{1}{k+1}\right)f\left(\frac{1}{k+1}(x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1})\right)$$

Legyen $x_{k+1} = \frac{1}{k}(x_1 + x_2 + \dots + x_k)$. Ezt behelyettesítve:

$$\begin{aligned} f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k) + f\left(\frac{1}{k}(x_1 + x_2 + \dots + x_k)\right) &\leq \\ &\leq (k+1)f\left(\frac{1}{k+1}\left(x_1 + \dots + x_k + \frac{1}{k}(x_1 + \dots + x_k)\right)\right) \\ &= (k+1)f\left(\frac{1}{k}(x_1 + x_2 + \dots + x_k)\right) \end{aligned}$$

Tehát

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k) \leq kf\left(\frac{1}{k}(x_1 + x_2 + \dots + x_k)\right).$$

Ezzel $k + 1$ -ről k -ra az állítást igazoltuk.

3. Tetszőleges n tagra most már így bizonyítanunk: Megkeressük 2-nek azt a legkisebb kitevőjű hatványát, mely n -nél nagyobb. Legyen az 2^m . Képezzük az alábbi 2^m darab tagot:

$$\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n), \dots, \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)}_{n \text{ darab}} \quad \underbrace{\hspace{15em}}_{2^m \text{ darab}}$$

Erre a 2^m darab számra az 1. rész szerint az állítás igaz, de akkor a 2. rész bizonyítása szerint igaz a $\frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$ számok fokozatos elhagyásával megmaradó tagokra,

végül az $x_1, x_2, \dots, x_n$ számokra is,. Az utóbbi lépéshez azt használtuk fel, hogy az $x_1, x_2, \dots, x_n$ számokhoz a számtani közepüket hozzávéve, az így kapott $n + 1$ szám számtani közepe ugyanaz marad. A két rész bizonyításának ez volt a fő ötlete.

Mostmár **belátjuk a közepek közötti egyenlőtlenséget.**

Alkalmazzuk a Jensen tételét a $\lg(x)$ függvényre. Mivel $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$, átrendezéssel adódik $(\frac{x_1 + x_2}{2})^2 \geq x_1 x_2$, amiből

$$2 \lg \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \lg x_1 + \lg x_2$$

Jensen tétele alapján

$$\lg x_1 + \lg x_2 + \dots + \lg x_n \leq n \lg \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right),$$

azaz

$$[4] \quad \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

sőt [5]-ben az egyenlőség csak $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ mellett áll fenn. **Ez a mértani és számtani közép közötti nevezetes egyenlőtlenség.**

Az x^2 függvény a $(0, \infty)$ tartományban konvex függvény, teljesül az

$$x_1^2 + x_2^2 \geq 2 \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2$$

Így

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq n \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^2$$

Szokásos írásforma:

$$(5) \quad \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

sőt (6)-ban az egyenlőség csak $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ mellett teljesül. **Ez a négyzetes közép és a számtani közép közötti nevezetes egyenlőtlenség.**

Harmonikus közép és mértani közép közötti egyenlőtlenséget a számtani és mértani közép közötti összefüggés felhasználásával bizonyítjuk.

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a_n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}}} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

Nézzünk néhány feladatot ezek alkalmazására. Háromszögekkel, négyszögekkel és testekkel kapcsolatosak a feladatok.

F.4.1. Felezzük valamely ABC háromszög C-nél levő belső szögét, és legyen D e szögfelező egyenes metszéspontja az AB oldallal. Mutassuk meg, hogy a szögfelező CD darabja rövidebb, mint a CA és CB oldalak mértani középarányosa!

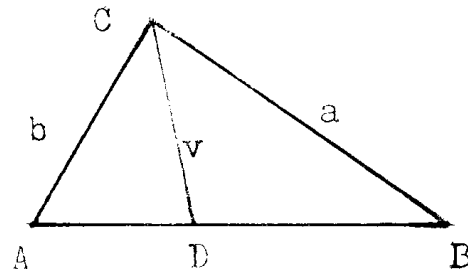
A háromszög területe egyenlő a részek területeinek összegével, tehát $ab \sin \gamma = av \sin \frac{\gamma}{2} + bv \sin \frac{\gamma}{2}$ felhasználva

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ összefüggést $\sin \gamma = 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$

$$2ab \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = (a+b) \cdot v \sin \frac{\gamma}{2}$$

$\sin \frac{\gamma}{2}$ nem lehet nulla, így

$$(1) \quad \frac{1}{v} \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$



Három pozitív számhoz, a -hoz, b -hez és v -hez akkor és csak akkor található olyan háromszög, amelyben két oldalnak mértékszáma a és b , a közbefogott szögfelezőé pedig v , ha (1)-ből $\frac{\gamma}{2}$ cosinusára az egynél kisebb értéket kapunk, vagyis ha

$$(2) \quad \frac{1}{v} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right),$$

A (2) jobb oldalát semmi esetre sem nagyobbítjuk, ha $\frac{1}{a}$ és $\frac{1}{b}$

számtani közepét a mértani középpel pótoljuk. Tehát bármely háromszögben

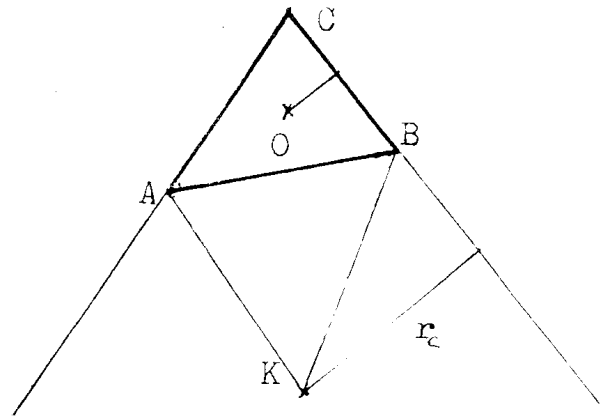
$$\frac{1}{v} > \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}},$$

azaz

$$(3) \quad v < \sqrt{ab}$$

F.4.2. Tekintsük az ABC háromszög oldalait érintő négy kör közül azt a kettőt, amelynek az AB oldalt A és B között érintik. Bizonyítsuk be, hogy e két kör sugarának mértani középáránya nem lehet nagyobb AB felnél!

Jelöljük mind a három oldalt
belülről érintő kör sugarát r -rel,
az AB oldalt belülről és a többi
két oldalt kívülről érintő kör su-
garát r_c -vel.



ABC háromszög területe
egyenlő, részek területének összegével.

$$[1] \quad t_{ABC} = \frac{1}{2}(rc + ra + rb) = \frac{a+b+c}{2} \cdot r = s \cdot r$$

$$t_{ABC} = t_{AKC} + t_{BKC} - t_{AKB}$$

$$[2] \quad t_{ABC} = \frac{1}{2}(br_c + ar_c - cr_c) = r_c \frac{b+a-c}{2} = r_c(s-c)$$

[1] és [2], valamint a Héron képlet felhasználásával

$$r = \frac{t}{s}, r_c = \frac{t}{s-c}$$

$$r \cdot r_c = \frac{t^2}{s(s-c)} = \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s(s-c)} = (s-a)(s-b)$$

$$\sqrt{r \cdot r_c} = \sqrt{(s-a)(s-b)} \leq \frac{(s-a)(s-b)}{2} = \frac{c}{2}$$

Gyököt vonva majd a számtani és mértani közép közötti
egyenlőtlenséget felhasználva, tehát igaz, hogy $r \cdot r_c \leq \frac{c^2}{4}$.

F.4.5. Egy háromszög magasságai m_a, m_b, m_c

*egy tetszőleges belső pontjának távol-
sága a megfelelő oldalaktól p_a, p_b, p_c .*

Bizonyítsuk be, hogy $m_a \cdot m_b \cdot m_c \geq 27 p_a \cdot p_b \cdot p_c$

Jelöljük az ABC háromszög területét t -vel, a BCP, ABP, CAP háromszögek területét pedig t_1 , t_2 , t_3 -mal. Vailágos, hogy $t_1 + t_2 + t_3 = t$. A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint

$$[1] \quad \left(\frac{t}{3}\right)^3 = \left(\frac{t_1 + t_2 + t_3}{3}\right)^3 \geq t_1 t_2 t_3$$

$$\text{Az } \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2} = t$$

$$\text{összefüggések alapján } t^3 = \frac{abc \cdot m_a \cdot m_b \cdot m_c}{8},$$

$$\text{Hasonlóan kapjuk, hogy } t_1 t_2 t_3 = \frac{abc \cdot p_a \cdot p_b \cdot p_c}{8}, \text{ hiszen pl. } t_1 = \frac{ap_a}{2}.$$

A két utóbbi összefüggés szerint [1] így alakul:

$$\frac{abc \cdot m_a \cdot m_b \cdot m_c}{8 \cdot 27} \geq \frac{abc \cdot p_a \cdot p_b \cdot p_c}{8}, \text{ amiből}$$

$$m_a m_b m_c \geq 27 \cdot p_a \cdot p_b \cdot p_c$$

Egyenlőség pontosan akkor lesz, ha [1]-ben egyenlőség áll fenn, tehát ha $t_1 = t_2 = t_3 = \frac{t}{3}$, azaz, ha P a háromszög súlypontja.

F.4.4. Mutassuk meg, hogy bármely háromszög-

ben teljesül

$$m_a \cdot m_b + m_b \cdot m_c + m_c \cdot m_a \leq \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Jelöljük a háromszög súlyvonalait s_a ; s_b ; s_c -vel

Tudjuk, hogy a súlyvonal nem kisebb, mint a megfelelő magasság-vonal, ezért:

$$(1) \quad m_a \cdot m_b + m_b \cdot m_c + m_c \cdot m_a \leq s_a \cdot s_b + s_b \cdot s_c + s_c \cdot s_a.$$

A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség szerint

$$(2) \quad s_a \cdot s_b + s_b \cdot s_c + s_c \cdot s_a \leq \frac{s_a^2 + s_b^2}{2} + \frac{s_b^2 + s_c^2}{2} + \frac{s_c^2 + s_a^2}{2} = s_a^2 + s_b^2 + s_c^2$$

A súlyvonalak négyzetét viszont kifejezhetjük a háromszög oldalaival

$$(3) \quad \begin{aligned} s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 &= \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) + (2a^2 + 2c^2 - b^2) + (2a^2 + 2b^2 - c^2) \\ s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 &= \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

Az (1), (2) és (3) képletek együtt éppen a bizonyítandó egyenlőtlenséget adják. Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a háromszög szabályos, mivel a magasságok megegyeznek a súlyvonalakkal, amik egyenlő hosszúak.

F.4.5. Bizonyítsuk e, hogy minden háromszögben

$$f_a f_b f_c \leq s \cdot t \leq s_a s_b s_c$$

Megmutatjuk, hogy minden háromszögben $f_c \leq \sqrt{s(s-c)} \leq s_c$, és pontosan akkor egyenlők, ha a C csúcsból induló oldalak egyenlőek.

$$0 < \cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \gamma}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{2ab}{2ab} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)},$$

ahol a négyzetgyök alatt $\cos \gamma$ -t a koszinusztétel szerint írtuk fel.

Tovább alakítva

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{(a+b)^2 - c^2}{ab}} = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{1}{ab}} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.$$

Az ismert $f_c = \frac{2ab}{a+b} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$ összefüggésbe helyettesítve kapjuk, hogy $f_c = \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \cdot \sqrt{s(s-c)}$. A számtani és mértani közép közti

egyenlőtlenség szerint az első tényező legfeljebb egy, így f_c valóban nem lehet nagyobb, mint $\sqrt{s(s-c)}$.

A C-ből induló súlyvonalra ugyancsak a koszinusztételből

$$s_c^2 = b^2 + \frac{c^2}{4} - 2b \frac{c}{2} \cdot \cos \alpha, \quad \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$s_c^2 = b^2 + \frac{c^2}{4} - 2b \frac{c}{2} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + a^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

$$s_c^2 \geq \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{c^2}{4} = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} = s(s-c)$$

Számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget használtuk fel, így egyenlőség pontosan $a = b$ esetén teljesül.

Hasonlóan adódik s_a , s_b -re is.

Összeszorozva az egyenlőtlenségeket

$$f_a \cdot f_b \cdot f_c \leq \sqrt{s(s-a) \cdot s(s-b) \cdot s(s-c)} \leq s_a \cdot s_b \cdot s_c$$

Héron képlet alkalmazásával

$$f_a \cdot f_b \cdot f_c \leq \sqrt{s^2 \cdot t} \leq s_a \cdot s_b \cdot s_c$$

F.4.6. Egy derékszögű háromszög befogóihoz tartozó súlyvonalak hossza s_a , illetve s_b , átfogója c .

Bizonyítsuk be, hogy $\frac{3}{2} \cdot c < s_a + s_b \leq \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot c$

Először a bal oldali egyenlőtlenséget igazoljuk. Az ábra ASB háromszögéből is lehet a háromszög-egyenlőtlenség szerint

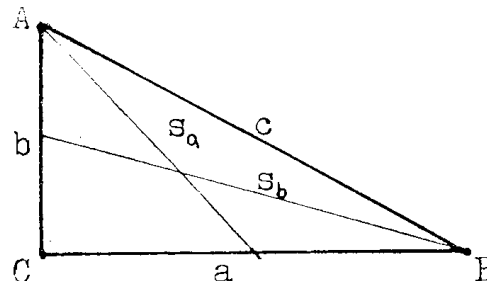
$$c < \frac{2}{3}s_a + \frac{2}{3}s_b, \text{ ezért } \frac{3}{2}c < s_a + s_b.$$

Az ACF $\frac{a^2}{4} + b^2 = s_a^2$, az ECB háromszögből pedig $\frac{b^2}{4} + a^2 = s_b^2$. E két egyenlőséget összeadva: $\frac{5}{4}(a^2 + b^2) = s_a^2 + s_b^2$, és mivel $a^2 + b^2 = c^2$, azért $\frac{5}{4} \cdot c^2 = s_a^2 + s_b^2$. Ezt így is írhatjuk:

$$(1) \quad \frac{\sqrt{10}}{4}c = \sqrt{\frac{s_a^2 + s_b^2}{2}}$$

$$(2) \quad \frac{s_a + s_b}{2} \leq \sqrt{\frac{s_a^2 + s_b^2}{2}}$$

$$(1) \text{ és } (2)\text{-ből következik } \frac{s_a + s_b}{2} \leq \frac{\sqrt{10}}{4}c$$



(2)-ben számtani és a négyzetes közép közötti összefüggést használtuk fel.

F.4.7. Bizonyítsuk be, hogy egy derékszögű háromszögben a derékszöghöz tartozó szögfelező és magasság hosszának összege legfeljebb akkora, mint az átfogó!

Az ABC háromszög területét kétféleképpen felírva kapjuk, hogy $\frac{a \cdot b}{2} = \frac{m \cdot c}{2}$, amiből

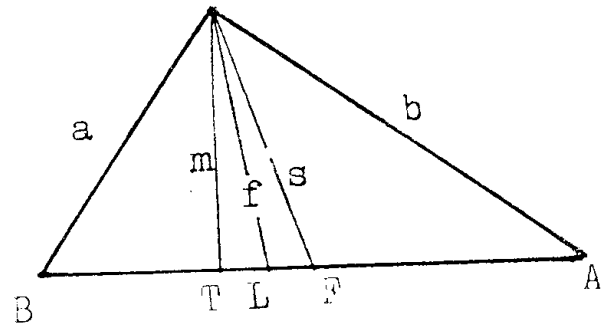
$$(1) \quad m = \frac{a \cdot b}{c}$$

Az ABC háromszög területét felírhatjuk úgy is, mint az ALC és a BLC háromszögek területeinek összegét:

$$(2) \quad \frac{a \cdot b}{2} = \frac{a \cdot f \cdot \sin 45^\circ}{2} + \frac{b \cdot f \cdot \sin 45^\circ}{2}$$

amiből

$$f = \frac{\sqrt{2} \cdot ab}{a+b}$$



Az a és b pozitív számok harmonikus, mértani, számtani és négyzetes közepei közti ismert egyenlőtlenségek szerint

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Ezeket az egyenlőtlenségeket és a Pitagorasz tételéből következő $c = \sqrt{a^2+b^2}$ összefüggést (1)-be és (2)-be beírva kapjuk, hogy

$$(3) \quad m = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}} \leq \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{\sqrt{2} \cdot \frac{a+b}{2}} = \frac{a+b}{2\sqrt{2}}$$

és

$$(4) \quad f = \frac{\sqrt{2}ab}{a+b} \leq \frac{\sqrt{2} \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{a+b} = \frac{a+b}{2\sqrt{2}}$$

[3] és [4] megfelelő oldalait összeadva:

$$m + f \leq \frac{a+b}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{2} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = c,$$

ami a bizonyítandó állítás.

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a = b$.

F.4.8. Egy téglalapot az ábrán vázolt módon kisebb téglalapra osztottunk. Ezek közül négybe beírtuk területének mérőszámát. Igazoljuk, hogy ekkor az eredeti téglalap területe legalább 90 egység.

	x	y	z
a	1		9
b		10	
c	3		

Jelölje a kis téglalapok oldalainak hosszát rendre a , b , c , illetve x , y , z . Ezek mindegyike pozitív. Segítségükkel felírva az ismert területeket:

$$ax = 1, \quad cx = 3, \quad by = 10, \quad az = 9.$$

$$a = \frac{1}{x}, \quad c = \frac{3}{x}, \quad b = \frac{10}{y}, \quad z = \frac{9}{a} = 9x$$

Írjuk fel ezután az eredeti téglalap területét:

$$T = (a+b+c)(x+y+z) = \left(\frac{1}{x} + \frac{10}{y} + \frac{3}{x}\right)(x+y+9x)$$

$$T = \left(\frac{4}{x} + \frac{10}{y}\right)(10x+y) = 40 + \frac{4y}{x} + \frac{100x}{y} + 10$$

A két ismeretlen mennyiség összegét a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséggel fogjuk becsülni.

$$\frac{4y}{x} + \frac{100x}{y} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{4y}{x} \cdot \frac{100x}{y}} = 2 \cdot \sqrt{400} = 2 \cdot 20 = 40.$$

Mindezek alapján tehát

$$T = 50 + \frac{4y}{x} + \frac{100x}{y} \geq 50 + 40 = 90,$$

amint állítottuk. Egyenlőség pedig akkor áll, ha

$$\frac{4y}{x} = \frac{100x}{y}, \text{ azaz } y = 5x.$$

F.4.9. Az $A_1, A_2 \dots A_n$ konvex hűrsokszög körülírt körének egy $-a$ csúcsoktól különböző $-pontja A$. Legyen $a_i = AA_i$ $[i = 1, 2, \dots n]$, és jelölje b_i az A pont és az $A_i A_{i+1}$ egyenes távolságát $[A_{n+1} = A_1]$.

Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq 2nR,$$

ahol R a körülírt kör sugara.

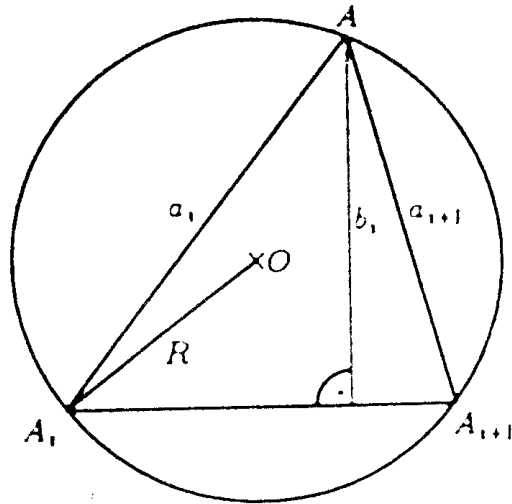
Használjuk az ábra jelöléseit. Az AA_iA_{i+1} háromszög oldalai: A_iA_{i+1} , a_i és a_{i+1} a körülírt kör középpontja O , az A_iA_{i+1} oldalhoz tartozó magasság b_i . A háromszög területét kétféleképpen fölírva:

$$\frac{a_i \cdot a_{i+1} \cdot A_iA_{i+1}}{4R} = \frac{A_iA_{i+1} \cdot b_i}{2}$$

amiből

$$\frac{a_i}{b_i} = \frac{2R}{a_{i+1}}$$

$$\frac{a_i^2}{b_i} = 2R \frac{a_i}{a_{i+1}}$$



Ezért a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint $\{a_{n+1} = a_1\}$

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} = 2R \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \right) \geq 2nR \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_1}} = 2nR.$$

Egyenlőség csak $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \dots = \frac{a_n}{a_1}$, azaz $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ esetben áll-

hatna fenn. Ezt azt jelentené, hogy A egybeesik O-val, ami lehetetlen. Így a feladat állításánál valamivel élesebb állítást igazoltunk, azt, hogy

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} > 2nR$$

F.4.10.

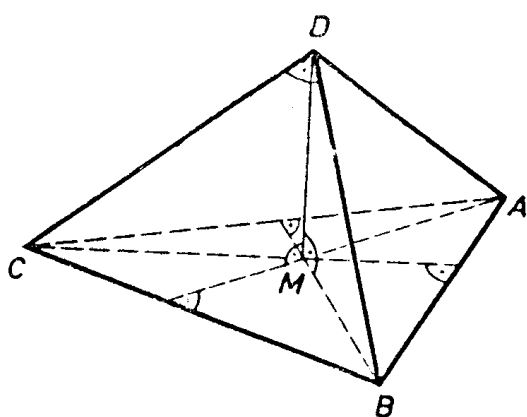
Az $ABCD$ tetraéderben a BDC szög derékszög. A D csúcsból az ABC síkra bocsátott merőleges talppontja egybeesik az ABC háromszög magaggápontjával. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

(1)

$$(AB + BC + CA)^2 \leq 6(AD^2 + BD^2 + CD^2).$$

Mely tetraéderek esetén érvényes itt az egyenlőségjel?

Érezzük, hogy az M magasságpontban az ABC háromszög síkjára állított merőlegesen a D pont helyzetét egyértelműen meghatározza az a feltétel, hogy a BDC szög derékszög. Olyan tetraédert kapunk, mint amikor a kocka egyik csúcsát egy síkkal levágjuk. Bebizonyítjuk, hogy az AD él merőleges a BCD síkra. Ehhez elegendő belátni, hogy $CD \perp AD$ (hiszen ugyanúgy látható be, hogy $BD \perp AD$).



Tudjuk, hogy $DM \perp ABC$, ezért $DM \perp AB$, továbbá $CM \perp AB$, mivel M magasságpont. Ez azt jelenti, hogy AB merőleges a CMD sík DM és CM egyenesére, ezért a sík minden egyenesére merőleges, tehát $CD \perp AB$.

De a feltétel szerint $CD \perp BD$, tehát CD merőleges az ABD sík

minden egyenesére, így $CD \perp AD$. Tehát a D-ből kifutó élek mind merőlegesek egymásra.

most Pitagorasz tételével [1] jobb oldalát könnyen átalakíthatjuk:

$$\begin{aligned} 6(AD^2 + BD^2 + CD^2) &= 3[(AD^2 + BD^2) + (BD^2 + CD^2) + (CD^2 + AD^2)] = \\ &= 3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 9 \frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{3} \end{aligned}$$

Ez pedig azt jelenti, hogy [1] ekvivalens a következő egyenlőséggel:

$$[2] \quad \frac{AB + BC + CA}{3} \leq \sqrt{\frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{3}}$$

Ez ismert állítás, a bal oldalon 3 szám számtani közepe, a jobb oldalon ezek négyzetes közepe áll.

[2]-ben az egyenlőség $AB = BC = CA$ mellett áll fenn, ekkor pedig a szomszédos lapok egybevágók, sőt $AD = BD = CD$.

F.4.11. *Az ABCD tetraéder D csúcsából kiinduló élek páronként merőlegesek.*

Az ABC lapnak a többivel való hajlásszöge α, β, γ . Igazoljuk, hogy

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \leq \frac{\sqrt{3}}{9} !$$

Legyen a tetraéder D csúcsa egy derékszögű koordináta-rendszer kezdőpontja az A, B, C csúcsok pedig illeszkedjenek az x, y, z tengelyekre. Legyen továbbá a tetraéder D csúcsából induló magasság talppontja T, a DT-re illeszkedő egységvektor $\mathbf{s}$. Használjuk az ábra további jelöléseit is. Ha az ABD és ABC lap hajlásszöge γ , akkor a CDT szög is γ , hiszen CD az ABD sík, DT pedig az ABC sík normálisa.

Hasonlóan kapjuk, hogy

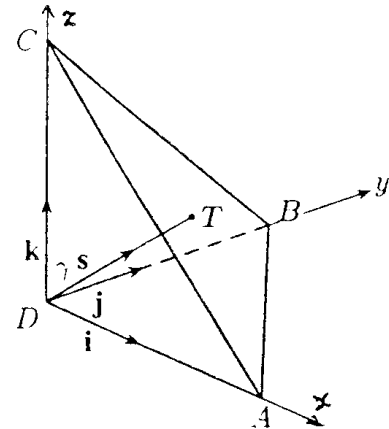
$$\angle ADT = \alpha$$

$$\angle BDT = \beta$$

$$\cos \alpha = [\mathbf{i} \mathbf{s}]$$

$$\cos \beta = [\mathbf{j} \mathbf{s}]$$

$$\cos \gamma = [\mathbf{k} \mathbf{s}]$$



Az $\mathbf{s}$ egységvektorának koordinátái $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, ezért $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. A mértani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenség szerint:

$$\sqrt[3]{\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma} \leq \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

amiből már következik a feladat állítása.

F.4.12. A 8 egység területű háromszögek közül melyiknek a legkisebb az átfogója?

Legyen a derékszögű háromszög átfogója c , egyik befogója a ,

így a másik befogó $8 - a - c$. A Pitagorasz-tétel szerint

$$c^2 = a^2 + (8 - a - c)^2, \text{ amelyből } c = \frac{a^2 - 8a + 32}{8 - a}.$$

Alakítsuk c -t a követ-kezőképpen:

$$c = \frac{(8-a)^2 + 8a - 32}{8-a} = \frac{(8-a)^2 + 8(a-8) + 32}{8-a} = 8-a + \frac{32}{8-a} - 8.$$

Mivel $8-a > 0$, a $8-a + \frac{32}{8-a}$ összeget a számtani és mértani

közép közötti egyenlőtlenség alapján becsülhetjük:

$$8-a + \frac{32}{8-a} \geq 2 \cdot \sqrt{(8-a) \cdot \frac{32}{8-a}} = 2\sqrt{32}$$

Ezért c pontosan akkor a legkisebb, ha $8-a = \frac{32}{8-a}$, tehát ha

$a = 8 - 4\sqrt{2}$. Ekkor $c = 8\sqrt{2} - 8$, és némi számolással adódik, hogy a másik befogó is $8 - 4\sqrt{2}$,

Az egyszerűbb számolás miatt vettük ezt az esetet, de általánosítható is a feladat, ezekre most nem térünk ki.

F.4.13. Mutassuk meg, hogy egy $1/2$ területű

háromszög kerülete legalább 3 egység!

A háromszög területét az ismert módon felírva

$$\frac{1}{2} = \frac{am_a}{2} = \frac{bm_b}{2} = \frac{cm_c}{2},$$

ahonnan

$$1 = \sqrt{am_a} = \sqrt{bm_b} = \sqrt{cm_c},$$

A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség szerint:

$$1 = \sqrt{am_a} \leq \frac{a + m_a}{2},$$

$$1 = \sqrt{bm_b} \leq \frac{b + m_b}{2},$$

$$1 = \sqrt{cm_c} \leq \frac{c + m_c}{2}$$

Ezeket összeadva és rendezve

$$[1] \quad 6 \leq (a + b + c) + (m_a + m_b + m_c)$$

adódik.

Mivel egy háromszög magassága nem lehet hosszabb a vele közös csúcsból induló oldalak egyikénél sem, ezért $a \geq m_b, b \geq m_c,$

$c \geq m_a$ azaz

$$[2] \quad a + b + c \geq m_a + m_b + m_c$$

Ekkor viszont [1] csak úgy teljesülhet, ha $a + b + c \geq 3$, ami pedig éppen a bizonyítandó állítás.

Megadunk egy másik megoldást is, ami Héron tételéből adódik.

$$[3] \quad \frac{1}{2} = t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség szerint:

$$[4] \quad (s-a)(s-b)(s-c) \leq \left(\frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{3} \right)^3 = \left(\frac{s}{3} \right)^3$$

Ezt egybevetve [3]-mal:

$$\frac{1}{2} \leq \sqrt{s \cdot \left(\frac{s}{3} \right)^3} = \frac{s^2}{\sqrt{27}} \quad \text{vagyis} \quad \frac{\sqrt{27}}{2} \leq s^2$$

és ez azt jelenti, hogy $2s \geq \sqrt{6\sqrt{3}} \geq 3$.

Egyenlőség akkor teljesül, ha $a = b = c$, vagyis szabályos háromszögről van szó.

Sejthető, hogy adott területű háromszögek közül a szabályos háromszög kerülete a legkisebb.

A következő feladat látszólag nem kapcsolódik a témához, de a bizonyított egyenlőtlenségből kiindulva, felhasználva a közepek közötti kapcsolatot érdekes összefüggéseket kapunk a háromszögekkel kapcsolatban.

F.4.14. Mutassuk meg, hogy tetszőleges háromszögben érvényes $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$ és az egyenlőség szabályos háromszög esetén teljesül.

Válasszunk most origóul a háromszög köré írt kör középpontját O . A súlypont $\vec{OS} = \mathbf{s}$ vektorát háromszorosára növelve az $\vec{OM} = \mathbf{m}$ vektort kapjuk. A kör O középpontjából a csúcsokba mutató vektorok $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$.

Megmutatjuk, hogy az AM, BM, CM egyenesek merőlegesek rendre a háromszög BC, CA, AB oldalegyenesére.

Azt akarjuk tehát bizonyítani, hogy pl. AM rajta van az A -ból induló magasságvonalon, vagyis $\vec{AM}$ és $\vec{BC}$ merőlegesek.

Mivel

$$\vec{OM} = \mathbf{m} = 3\mathbf{s} = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}$$

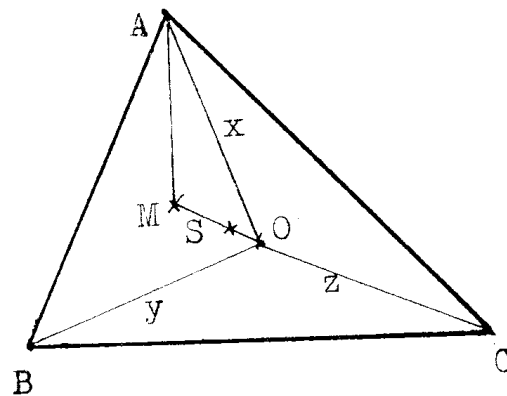
$$\vec{MA} = \vec{OA} - \vec{OM} = \mathbf{x} - \mathbf{m} = -\mathbf{y} - \mathbf{z}$$

$$\vec{BC} = \mathbf{z} - \mathbf{y}$$

$$\vec{MA} \cdot \vec{BC} = (-\mathbf{y} - \mathbf{z})(\mathbf{z} - \mathbf{y}) = \mathbf{y}^2 - \mathbf{z}^2 = 0,$$

hiszen $|\mathbf{y}| = |\mathbf{z}|$,

így $\vec{AM}$ és $\vec{BC}$ merőlegesek.



Mivel hasonlóan bizonyítható, hogy $\vec{BM}$ és $\vec{CM}$ is merőlegesek a megfelelő szemközti oldalra, így következik, hogy a három magasságvonal egy M pontban metszi egymást. Eredményünk azt is jelenti, hogy a **háromszög köréírt körének O középpontja, S súlypontja és m magasságpontja egy egyenesen vannak (Euler egyenes)** Eulerről van elnevezve a következő egyszerű összefüggés $d^2 = R^2 - 2rR$, ahol a d a köréírt kör O középpontjának és a beírt kör K középpontjának távolsága. Ennek bizonyítására nem térünk ki.

Előző ábránál maradva

$$|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}| = |\mathbf{z}| = R, \quad |\mathbf{y} - \mathbf{z}| = a, \quad a^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{z})^2 = |\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{z}|^2 - 2\mathbf{y}\mathbf{z}$$

ebből

$$2\mathbf{y}\mathbf{z} = 2R^2 - a^2, \quad 2\mathbf{x}\mathbf{z} = 2R^2 - b^2, \quad 2\mathbf{x}\mathbf{y} = 2R^2 - c^2$$

ezért

$$\mathbf{m}^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z})^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{z}|^2 + 2\mathbf{x}\mathbf{y} + 2\mathbf{x}\mathbf{z} + 2\mathbf{y}\mathbf{z}$$

$$\mathbf{m}^2 = 3R^2 + 6R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \text{ és}$$

mivel $\mathbf{m}^2 \geq 0$

$$(1) \quad a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$$

Az egyenlőség csak szabályos háromszög esetén teljesül, amikor O, S, M egy pontba esik.

F.4.15. Mutassuk meg, hogy azonos $2s$ kerületű háromszögek területei között a szabályos háromszög területe a legnagyobb, a maximum $\frac{s^2}{3\sqrt{3}}$.

Ez a Héron képletéből a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján azonnal következik.

$$(1) \quad t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \leq s \left(\frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{3} \right)^3 = \frac{1}{27} s^4$$

az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $(s-a) = (s-b) = (s-c)$, azaz $a = b = c$.

Felhasználva (1) és $t = rs$ kapjuk, hogy

$$rs = t \leq \frac{s^2}{3\sqrt{3}}$$

$$(2) \quad r \leq \frac{s}{3\sqrt{3}}$$

Adott kerületű háromszögek közül a szabályos háromszögbe írt kör sugara a legnagyobb.

A négyzetes és számtani közép közötti egyenlőtlenségből és

(2)-ből következik

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3 \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^2 = \frac{4s^2}{3} \geq 36r^2$$

Felhasználva az előbb levezetett

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$$

kapjuk

$$4r^2 \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \leq R^2$$

$2r \leq R$, ami a sugáregyenlőtlenség, vagyis bármely háromszög körülírt kör sugara legalább akkora, mint a beírt kör sugarának a kétszerese.

F.4.16. Adott R sugarú körbe írt háromszögek közül melyik háromszögnek legnagyobb a kerülete?

Felhasználva [1] és a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget

$$\frac{2s}{3} = \frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \leq \sqrt{\frac{9R^2}{3}} = R\sqrt{3}$$

tehát

$$[2] \quad 2s = a+b+c \leq 3\sqrt{3}R$$

Ez azt jelenti, hogy az adott R sugarú körbe írt háromszögek közül a szabályos háromszög kerülete a legnagyobb.

Ha [2]-t az
$$R \geq \frac{2s}{3\sqrt{3}}$$

alakban írjuk, egyenlőség $a = b = c$ esetben teljesül, így adott kerületű háromszögek közül a szabályos háromszög köré írt kör sugara a legkisebb.

Alkalmazva most a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget háromszög kerületére és a (2) felhasználva kapjuk

$$abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{3\sqrt{3}R}{3}\right)^3 = 3\sqrt{3}R^3$$

Mivel $abc = 4tR$, ezért

$$t \leq \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$$

és egyenlőség csak szabályos háromszögnél áll fenn, ez azt jelenti, hogy egy adott körbe írt háromszögek közül a szabályos háromszög területe a legnagyobb, vagy más megfogalmazásban: adott területű háromszögek közül a szabályos háromszög köréírt köre a legkisebb sugarú.

F.4.17. Adott az ABC háromszög. Két játékos a következő játékot játsza: az első játékos kiválaszt egy P pontot a háromszög AB oldalán, a második egy Q pontot a BC oldalon, majd az első játékos egy R pontot az AC oldalon. Az első játékosnak az a célja, hogy PQR háromszög a lehető legnagyobb területű legyen, a másodiknak az a célja, hogy PQR háromszög a lehető legkisebb területű legyen. Mi a legnagyobb terület, amit az első játékos biztosan el tud érni?

Először belátjuk, hogy az első játékos el tudja érni, az ABC háromszög t területének a negyedrészt. Válassza P-t az AB, R-t az AC oldal felezőpontjának, ekkor $PR = \frac{1}{2} BC$, és Q választásától függetlenül $m_q = \frac{1}{2} m_a$, azaz $t_{PQR} = \frac{1}{4} t_{ABC}$.

Másodszor belátjuk, hogy a második játékos el tudja érni, hogy a PQR háromszög területe ne legyen nagyobb $\frac{1}{4} t$ -nél.

Játsszon úgy, hogy $PQ \parallel AC$ legyen (pl. ha $P = B$, akkor $Q = B$), ekkor $PQB \triangleq ACB \triangle$, így $PQ = AC$ bevezetésével

$$t_{PQR} = \frac{k \cdot AC \cdot m_b (1-k)}{2}$$

Innen a számtani és a mértani közép közti összefüggés alapján

$$t_{PQR} = \frac{AC \cdot m_b}{2} \cdot k \cdot (1-k) \leq t_{ABC} \cdot \frac{1}{4}.$$

Így az elérhető legnagyobb terület az ABC háromszög területének az $\frac{1}{4}$ része.

F.4.18. Egy adott körbe írt téglalapot nyolcszöggé egészítünk ki, melynek négy csúcsa megegyezik a téglalap csúcsaival, a további négy pedig a téglalap oldalfelező merőlegeseinek és a körnek a metszéspontja. hogyan kell megválasztanunk a téglalapot ahhoz, hogy a nyolcszög és a téglalap területének aránya minimális legyen?

Válasszuk a kör sugarát egységnyiinek és legyen a szóban forgó BDFH téglalap oldalainak hossza $2a$, illetve $2b$ ($0 < a, b < 2$). A téglalap területe ekkor $4ab$. Ha O a kör középpontja, akkor a nyolcszög területe az OFGH, OHAB ABCD és ODEF deltoidok területének összege. Egy deltoid az átlói szorzatának a fele, a fenti deltoidok területe így rendre

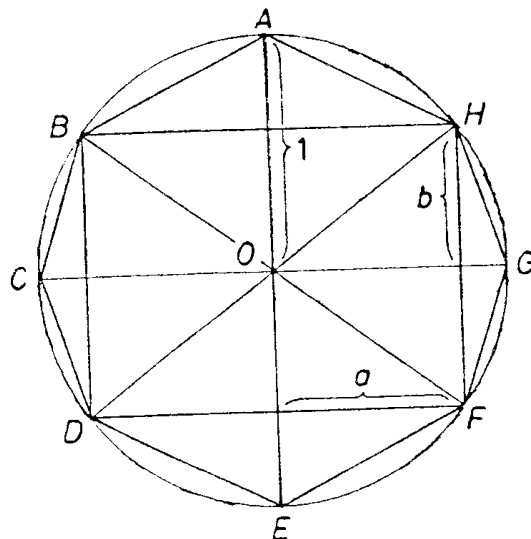
$$\frac{1}{2} \cdot 2b \cdot 1, \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 1, \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot 1, \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 1$$

és ebből a nyolcszög területe $2a + 2b$. A két idom területének aránya tehát

$$\frac{2a + 2b}{4ab} = \frac{a + b}{2a}$$

Mivel a és b pozitív, az $\frac{a+b}{2ab}$ kifejezés akkor minimális, amikor reciproka, $\frac{2ab}{a+b}$ maximális.

Ez utóbbi éppen az a és b számok harmonikus közepe, ami nem lehet nagyobb a két szám négyzetes közepénél, $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ -nél, és egyenlő is csak akkor lehet vele, ha $a = b$. Mivel azonban esetünkben Pitagorasz tétele



szerint $a^2 + b^2 = 1^2 = 1$,

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Így $\frac{2ab}{a+b}$ akkor maximális, ha $a = b$, és ekkor értéke $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ezért a

nyolcszög és a téglalap területének aránya akkor minimális, ha $a = b$, vagyis ha a téglalap négyzet (a nyolcszög pedig szabályos), s a minimum értéke $\sqrt{2}$.

F.4.19. Adott kerületű négyszögek közül szeretnénk a maximális területűt kiválasztani. Feltehetjük, hogy a négyszög konvex, mert ellenkező esetben két oldalának a külső átlóra való tükrözésével olyan konvex sokszor nyerhető, amelynek a területe nagyobb az eredetinél, kerülete viszont változatlan.

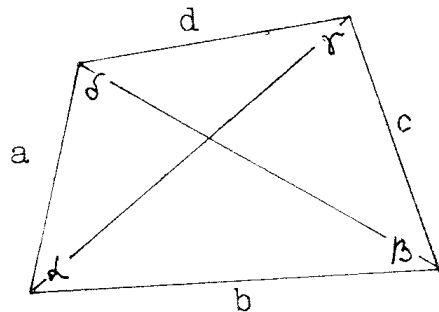
Legyenek a négyszög oldalai a, b, c, d , szögei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, a szögek és az oldalak sorrendje az ábrán látható. A négyszög területének a kétszeresét kapjuk, ha az átlók által lemetezett háromszögek területeit összeadjuk:

$$4t = \frac{1}{2}(ab \sin \alpha + bc \sin \beta + cd \sin \gamma + da \sin \delta)$$

Mivel $\sin x \leq 1$,

$$4t \leq ab + bc + cd + da = (a+c)(b+d),$$

és egyenlőség akkor állhat fenn, ha valamennyi szög derékszög, azaz a négyszög téglalap.



Alkalmazzuk most az $a + c, b + d$ számokra a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy

$$4t \leq (a+c)(b+d) \leq \left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2,$$

$$t \leq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2,$$

és az egyenlőség csakis olyan téglalapra állhat fenn, amelynél $a + c = b + d$, vagyis a szemköztí oldalak összege egyenlő, vagyis négyzet esetén.

Tehát adott kerületű négyszögek közül a négyzet a legnagyobb területű.

Olyan szélsőérték számítási feladatoknál, ahol a tényezők pozitívak és összegük állandó, alkalmazzuk a számtani és a mértani közép közti összefüggést, miszerint a mértani közép nem nagyobb a számtani középnél, vagyis a tényezők szorzata akkor maximális, ha megegyeznek a tényezők.

Tekintsünk néhány térgeometriai feladatot.

F.4.20. Adott egy egyenes körkúp alapkörének a sugara és a magassága. Írjunk a kúpba maximális térfogatú hengert. Határozzuk meg ezen henger alapkörének a sugarát és magasságát! Mekkora lesz a maximális térfogat,

$V_{\text{henger}} = r^2 \pi m$, ábra alapján az AFC és ADE háromszögek

hasonlóságából következik, hogy

$$\frac{m}{M} = \frac{R-r}{R}; m = \frac{M}{R}(R-r), (0 < R, 0 < m < M)$$

$V_{\text{henger}} = \frac{M}{R} r^2 (R-r) \pi$. Mivel $V_{\text{henger}} > 0$, ezért maximumát ugyanott

veszi fel, ahol az $\frac{1}{4\pi} \cdot V_{\text{henger}}$ függvény. Ez utóbbi maximum helyét

az $\frac{r}{2} + \frac{r}{2} + (R-r) = R = \text{állandó}$ miatt a számtani és a mértani közép

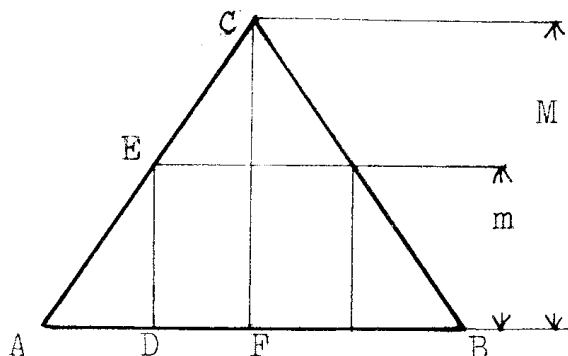
közti összefüggése alapján $\frac{r}{2} = R-r$ esetén kapjuk meg, és

ekkor

$$r = \frac{2}{3}R,$$

$$m = \frac{M}{3},$$

$$V_{\max} = \frac{4R^2 \pi M}{27}$$



F.4.21.

Egyenes körkúpba egységnyi sugarú

érintőgömböt szerkesztünk. Mekkora a

kúp csúcsszöge, ha a gömb a kúpból

maximális térfogatot foglal el, és hányad

része ez a kúp térfogatának?

A kúp csúcsszöge legyen 2α , alapkörének sugarát jelöljük

r -rel, a kúp magassága legyen m . Tudjuk $m > 2$, $r > 1$. A kúp

térfogata $V_k = \frac{1}{3}r^2\pi m$, a beírt gömb térfogata $V_g = \frac{4}{3}\pi R^3$. A gömb és

a kúp térfogatának az aránya $\frac{V_g}{V_k} = \frac{4}{r^2 m}$

Az m és r közti kapcsolat kifejezhető BFC és ODC hasonló

háromszögekből $\frac{m}{r} = \frac{\sqrt{r^2 + m^2} - r}{R}$, mivel $R = 1$

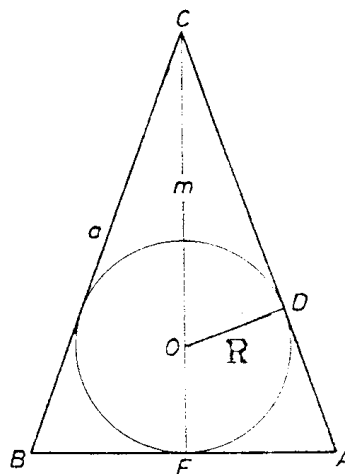
$$\left(\frac{m}{r} + r\right)^2 = r^2 + m^2$$

$$\frac{m^2}{r^2} + 2m + r^2 = r^2 + m^2$$

$$m^2 + 2mr^2 + r^4 = r^4 + m^2 r^2$$

$$m + 2r^2 = mr^2$$

$$r^2 = \frac{m}{m-2}.$$



Ezt beírva a térfogat arányokba. $\frac{V_g}{V_k} = m \frac{4(m-2)}{m^2} = 2 \cdot \frac{2}{m} \left(1 - \frac{2}{m}\right).$

Olyan szorzatot állítottunk elő, amelynek tényezői pozitívak és összegük állandó $\frac{2}{m} + (1 - \frac{2}{m}) = 1$

A számtani és a mértani közép közti összefüggés szerint maximum akkor van, ha $\frac{2}{m} = 1 - \frac{2}{m}$, azaz ha $m = 4, r = \sqrt{2}$, az arány maximuma $\frac{1}{2}$. Adódik $\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{m} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Így $\alpha = 19^\circ 28'$, azaz $2\alpha = 38^\circ 56'$ lesz a kúp nyílásszöge.

F.4.22. Egységnyi sugarú gömb köré forgáskúpot írunk. Legalább mekkora a kúp felszíne?

A feladat természetéből következik, hogy $m > 2$ és $FA = r > 1$. A Pitagorasz-tétel szerint $a = \sqrt{m^2 + r^2}$, az ACF és OCD háromszögek hasonlósága alapján pedig $a : r = (m - 1) : 1$, ahonnan a szokásos módon

$$(1) \quad a = r(m - 1)$$

Ezért

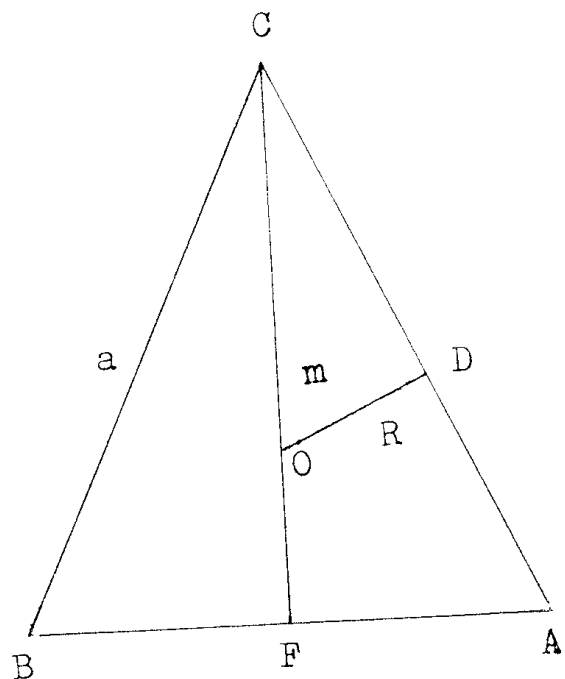
$$\begin{aligned} \sqrt{m^2 + r^2} &= (m - 1)r, \\ m^2 + r^2 &= (m^2 - 2m + 1)r^2, \\ m(m \cdot r^2 - m - 2r^2) &= 0. \end{aligned}$$

Mivel $m > 0$,

$$(2) \quad m \cdot r^2 - m - 2r^2 = 0, \text{ vagyis } m = \frac{2r^2}{r^2 - 1} (r > 1).$$

(1) és (2) alapján

$$(3) \quad a = r \cdot \left(\frac{2r^2}{r^2 - 1} - 1 \right) = \frac{r^3 + r}{r^2 - 1}$$



Ismeretes, hogy a kúp felszíne $A = r \cdot \pi(r+a)$, amiből [3] felhasználásával

$$A = r \cdot \pi \cdot \left(r + \frac{r^3 + r}{r^2 - 1} \right) = 2\pi \frac{r^4}{r^2 - 1}$$

"A" minimumának meghatározásához elegendő $\frac{r^4}{r^2 - 1}$ minimumát meghatározni, az $r > 1$ feltétel mellett.

Mivel $\frac{r^4}{r^2 - 1} = \frac{1}{\frac{r^2 - 1}{r^4}}$, ezért "A" akkor minimális, ha $\frac{r^2 - 1}{r^4}$ maximális.

$\frac{r^2 - 1}{r^4} = \frac{r^2 - 1}{r^2} \cdot \frac{1}{r^2}$, ahol a tényezők pozitívak és összegük

$\frac{r^2 - 1}{r^2} + \frac{1}{r^2} = 1$, így a számtani és mértani közép közti összefüggés szerint maximuma akkor van, ha $\frac{r^2 - 1}{r^2} = \frac{1}{r^2}$, azaz $r^2 = 2$. mivel $r > 1$, így $r = \sqrt{2}$, a maximális érték $\frac{1}{4}$, amiből a kúp felszínének minimuma 8π

A következő feladatokban A Jensen-egyenlőtlenséget használjuk fel. Az első példában az az érdekes, hogy a skatulya-elv alkalmazásával szoktuk megoldani az ilyen jellegű problémákat. Ezt a bizonyítást azonban nem tudnánk felhasználni akkor, ha az adott pontok száma legfeljebb 32.

F.4.23. Bizonyítsuk be, hogy egy 8 cm oldalú négyzet belsejében tetszés szerint elhelyezett 33 pont közül mindig kiválasztható 3 pont úgy, hogy az általuk meghatározott háromszög területe nem nagyobb 2 cm²-nél!

Jelöljük s -sel a négyzetben elhelyezett pontok számát, és ezek konvex burka legyen k -szög, melynek oldalai $a_1, a_2 \dots a_k$, szögei $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_k$ (a_i, a_{i+1} oldalak szögei α_i). Tegyük fel, hogy bármely 3 pont által meghatározott háromszög területe 2-nél nagyobb. Ennek felhasználásával felső becslést adunk k -ra.

Közismert, hogy ha egy sokszög a belsejében tartalmaz egy konvex sokszöget, akkor az utóbbi kerülete a kisebb. Mivel a négyzet kerülete 32, így

$$(1) \quad 32 \geq a_1 + a_2 + \dots + a_k$$

A konvex burok bármely három szomszédos csúcsa egy háromszöget határoznak meg, amelynek területe - feltevéssünk szerint - 2-nél nagyobb. Ezért

$$(2) \quad \frac{1}{2} a_i a_{i+1} \sin \alpha_i > 2,$$

$$[i = k \text{ esetén } a_{i+1} = a_1]$$

Felhasználva a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget

$$\frac{a_i + a_{i+1}}{2} \geq \sqrt{a_i a_{i+1}} > \sqrt{\frac{4}{\sin \alpha_i}}$$

innen pedig

$$a_i + a_{i+1} > \frac{4}{\sqrt{\sin \alpha_i}}$$

[Itt használtuk, hogy $\sin \alpha_i \neq 0$, hiszen $\sin \alpha_i = 0$ mellett van elfajuló, azaz 0 területű háromszög is.] Összegezve ezt $i = 1, 2 \dots k$ -ra:

$$(3) \quad 2(a_1 + \dots + a_k) > 4 \left(\frac{1}{\sqrt{\sin \alpha_1}} + \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha_k}} \right)$$

A jobb oldal további becsléséhez felhasználjuk a Jensen-egyenlőtlenséget.

Tekintsük az $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ függvényt a $[0; \pi]$ intervallumban.

Könnyen igazolható, hogy f itt konvex, így a Jensen-egyenlőtlenséget alkalmazva

$$f\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k}{k}\right) \leq \frac{f(\alpha_1) + \dots + f(\alpha_k)}{k}$$

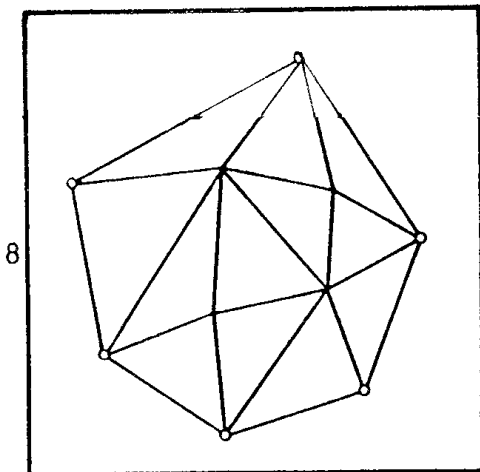
vagyis

$$\frac{k}{\sqrt{\sin \frac{(k-2)\pi}{k}}} \leq \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha_1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha_k}}$$

Ezt [3]-ban felhasználva

$$2(\alpha_1 + \dots + \alpha_k) > \frac{4k}{\sqrt{\sin \frac{(k-2)\pi}{k}}} = \frac{4k}{\sqrt{\sin \frac{2\pi}{k}}}$$

Így [1] szerint



$$64 > \frac{4k}{\sqrt{\sin \frac{2\pi}{k}}}$$

Ha $k \geq 3$, akkor a kapott egyenlőtlenség jobb oldala szigorúan monoton nő, és ha $k = 12$, akkor már nagyobb, mint 64.

Eszerint $k \leq 11$, azaz, ha egy 8 oldalú négyzetben adott pontok közül bármely három általmeghatározott háromszög területe nagyobb, mint 2, akkor a pontok konvex burka legfeljebb 11-oldalú sokszög lehet.

Osszuk fel ezután az adott pontok konvex burkát háromszögekre úgy, hogy a felosztásban résztvevő háromszögek mindegyikének csúcsai az adott pontok közül valók legyenek, és semelyik háromszög ne tartalmazzon a belsejében további megadott pontot.

Jelölje N az így keletkező háromszögek számát. E háromszögek szögeinek összege, πN , egyenlő a konvex burok szögeinek és a belső pontok körüli teljesszögek összegével, azaz

$$[4] \quad \pi N = \pi(k-2) + (s-k) \cdot 2\pi, \text{ ahonnan}$$

$$N = 2s - k - 2 \quad (s \text{ a pontok száma volt})$$

Feltevésünk szerint a felosztásban szereplő háromszögek mindegyike 2 egységnél nagyobb területű, másfelől területük összege a konvex burok területe nyilván kisebb a négyzet területénél, ami 64.

Így $2N < 64$, azaz $N \leq 31$. [4]-et és a k -ra kapott eredményt felhasználva

$$31 \geq 2s - k - 2 \geq 2s - 11 - 2 = 2s - 13, \text{ azaz } 22 \geq s.$$

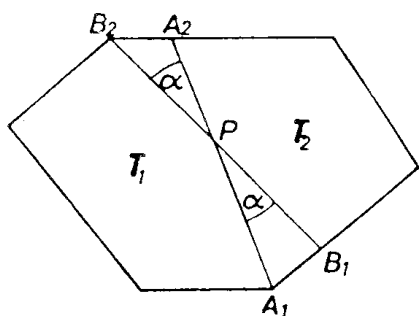
Ezzel igazoljuk, hogy ha a háromszögek mindegyike 2-nél nagyobb területű, akkor az adott pontok száma legfeljebb 22.

F.4.24. Húzzuk meg egy konvex sokszög mindegyik csúcsán át azt az egyenest, amelyik a sokszöget két egyenlő területű részre vágja. Bizonyítsuk be, hogy ha minden ilyen egyenesnek a sokszögbe eső szakasza legfeljebb

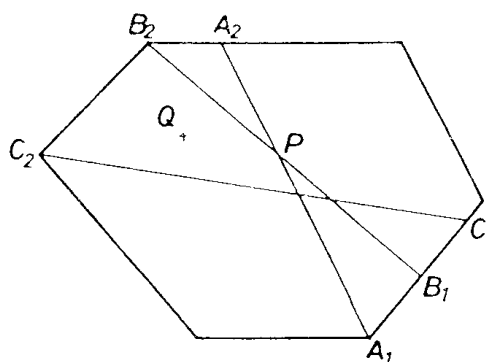
egységnyi hosszúságú, akkor a sokszög területé kisebb, mint $\pi/4$.

Húzzuk meg az összes, a sokszög valamely csúcsán áthaladó és a területet felező szakaszt. Nyilvánvaló, hogy közülük bármely kettő metszi egymást a sokszög belsejében. Ellenkező esetben ugyanis az általuk és a sokszög határa által közrefogott síkidom területe nulla kell, hogy legyen (hiszen területfelezőkről van szó).

Két ilyen területfelező szakaszt akkor nevezünk szomszédosnak, ha megfelelő végpontjaik szomszédosak a sokszög kerületén.



1. ábra



2. ábra

Legyenek ilyenek pl. az A_1A_2 és B_1B_2 szakaszok. Ez nyilván azt is jelenti, hogy A_1 és B_1 (illetve A_2 és B_2) között a sokszögnek nincs csúcsa - éppen a szomszédosság miatt. Ha az A_1A_2 és B_1B_2 szakaszok metszéspontja P , az A_1PB_1 szög pedig α , akkor belátjuk, hogy

$$T_{A_1PB_1} + T_{A_2PB_2} \leq \frac{1}{4} \cdot \sin \alpha$$

Vegyük észre először, hogy $T_{A_1PB_1} = T_{A_2PB_2}$, ez az A_1A_2 és B_1B_2 szakaszok területfelező tulajdonságából következik, amint ezt az ábra szemlélteti:

$$T_{A_1PB_1} = \frac{T}{2} - T_2, \quad T_{A_2PB_2} = \frac{T}{2} - T_1 \quad \text{és} \quad T_1 = T_2.$$

Ezek szerint.

$$\frac{A_1P \cdot PB_1 \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{A_2P \cdot PB_2 \cdot \sin \alpha}{2}$$

Innen $A_1P \cdot PB_1 = A_2P \cdot PB_2$. A feladat feltétele szerint $A_1P + PA_2 \leq 1$ és hasonló $B_1P + PB_2 \leq 1$. Mivel itt pozitív (nemnegatív) értékekről van szó, használhatjuk a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget:

$$\frac{A_1P + PA_2}{2} \geq \sqrt{A_1P \cdot PA_2} \text{ és } \frac{B_1P + PB_2}{2} \geq \sqrt{B_1P \cdot PB_2}$$

$$\frac{1}{4} \geq A_1P \cdot PA_2 \text{ és } \frac{1}{4} \geq B_1P \cdot PB_2$$

Összeszorzás és rendezés után:

$$\frac{1}{16} \geq (A_1P \cdot PB_1)(A_2P \cdot PB_2) = (A_1P \cdot PB_1)^2$$

azaz

$$\frac{1}{4} \geq A_1P \cdot PB_1$$

Innen pedig

$$[1] \quad T_{A_1PB_1} + T_{A_2PB_2} = \frac{1}{2} \sin \alpha (A_1P \cdot PB_1 + A_2P \cdot PB_2) \leq \frac{1}{4} \sin \alpha$$

Ezután megmutatjuk, hogy az oly módon definiált háromszögek, mint az A_1PB_1 és A_2PB_2 , lefedik az egész sokszöget.

Legyen a sokszög egyik belső pontja Q . Vizsgáljuk először azt, hogy Q az A_1A_2 területfelező melyik oldalán van. Majd ezen az oldalon maradva induljunk tovább A_1 -ből a sokszög kerületén, amíg egy újabb területfelező szakasz egyik végpontjához nem érünk. Most is abba az irányba menjünk tovább, amelyik oldalra Q esik. Látható, hogy így Q beszorítható két szomszédos területfelező "közé", tehát valóban lefedi valamelyik kívánt alakú háromszög.

Becsüljük most az (1) segítségével az ilyen háromszögek területének összegét:

$$(2) \quad T_{\text{sokszög}} \leq \sum T_{\text{háromszögek}} \leq \frac{1}{4}(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n).$$

Fontos észrevétel, hogy itt $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \pi$ (hiszen ez úgy is felfogható, hogy az A_1A_2 egyenest α_1 , majd $\alpha_2 \dots \alpha_n$ szögekkel forgatom el, s végül az A_2A_1 -hez jutok.)

Mivel a szinuszfüggvény a $[0, \pi]$ intervallumon konkáv, használhatjuk a Jensen-egyenlőtlenséget:

$$\frac{\sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_n}{n} \leq \sin\left(\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n}\right) = \sin \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{n}$$

Az utolsó lépésnél kihasználtuk a pozitív x -ekre (és a $\frac{\pi}{n}$ ilyen) teljesülő, ismert $\sin x < x$ egyenlőtlenséget. Innen:

$$\frac{1}{4}(\sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_n) < \frac{\pi}{4}$$

Ez pedig (2)-vel összevetve épp a bizonyítandó állítást adja.

5. fejezet

Ebben a fejezetben **Erdős Pál**-ra **emlékezünk**, aki 1996. október 21-én hunyt el. Matematikai lapokban többször találkozhattunk kitűzött feladataival, megselytett állításaival. Egyik legnevezetesebb az Erdős-Mordell-egyenlőtlenség, aminek egy - a témához kapcsolódó - bizonyítását adjuk meg.

Az **Erdős-Mordell-tétel** alkalmazásával, egyes feladatoknak újabb bizonyítását kaphatták, valamint új állításokat láthattak be segítségével. Ezek közül nézzünk meg néhányat a tétel bizonyítása után.

F.5.1. Ha egy háromszög belső P pontjának a csúcsoktól mért távolsága rendre u, v, w , az oldalegyenesektől mért távolságai viszont x, y, z , akkor

$$(1) \quad u + v + w \geq 2(x + y + z)$$

és az egyenlőség csakis abban az esetben teljesül, ha P egy szabályos háromszög középpontja.

Ha a háromszög γ szögét a és b hosszúságú oldalak fogják közre, és f a γ szögfelezője, akkor

$$(2) \quad f \leq \sqrt{ab} \cos \frac{\gamma}{2},$$

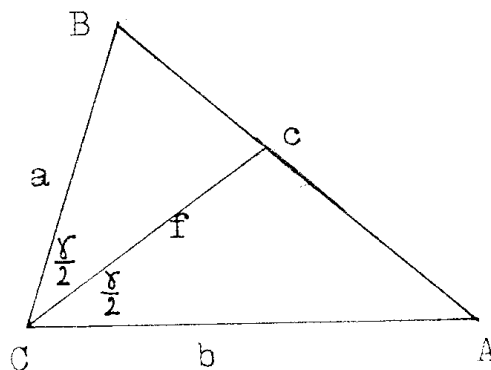
és egyenlőség csak $a = b$ esetben áll fenn.

A szögfelező ugyanis a háromszöget két háromszögre vágja szét, ezek területének összege a háromszög területével egyenlő:

$$\frac{1}{2}af \sin \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}bf \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = ab \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$\text{ebből } f = \frac{2ab}{a+b} \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$$



Harmonikus és a mértani közép közötti összefüggést felhasználva kapjuk az állítást.

Legyen most már P az ABC háromszög egy belső pontja, vezessük be a

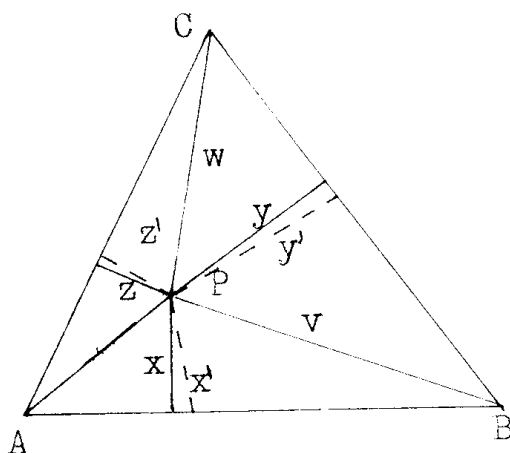
$$PA = u, PB = v, PC = w$$

ABP, BCP, CAP háromszögek

P-nél lévő szögei rendre

$2\delta, 2\varphi, 2\omega$ és e szögek felezői

rendre x', y', z'



A [2] miatt $x' \leq \sqrt{uv} \cos \delta, y' \leq \sqrt{vw} \cos \varphi, z' \leq \sqrt{wu} \cos \omega$, és ezért

$$2(x' + y' + z') \leq 2\sqrt{uv} \cos \delta + 2\sqrt{vw} \cos \varphi + 2\sqrt{wu} \cos \omega. \quad \delta + \varphi + \omega = \pi, \omega = \pi - (\delta + \varphi).$$

Vegyük észre, hogy ha P-nek az AB, BC, CA oldalegyenesektől mért távolsága rendre x, y, z , akkor nyilván $x \leq x', y \leq y', z \leq z'$ és így $x + y + z \leq x' + y' + z'$, ezért bizonyításához elegendő megmutatnunk, hogy

$$2\sqrt{uv} \cos \delta + 2\sqrt{vw} \cos \varphi - 2\sqrt{wu} \cos(\delta + \varphi) \leq u + v + w,$$

ez viszont azért igaz, mert

$$u + v + w - 2\sqrt{uv} \cos \delta - 2\sqrt{vw} \cos \varphi + 2\sqrt{wu} \cos \delta \cos \varphi - 2\sqrt{wu} \sin \delta \sin \varphi =$$

$$= (\sqrt{u} \sin \delta - \sqrt{w} \sin \varphi)^2 + (\sqrt{v} - \sqrt{u} \cos \delta - \sqrt{w} \cos \varphi)^2 \geq 0.$$

Az egyenlőségek csak akkor állhatnak, ha $u = v = w$, ez a P a háromszög köré írt kör középpontja, viszont a legutóbbi egyenlőtlenségben csak akkor érvényes az egyenlőségjel, ha a zárójelen belül mindkét esetben 0 áll; az első zárójel esetén ez csak a $\delta = \varphi$ esetben lehetséges; a másodikban pedig akkor, ha

$$1 = \cos \delta + \cos \varphi = 2 \cos \varphi, \text{ azaz } \cos \varphi = \frac{1}{2};$$

ebből $2\varphi = 2\delta = 120^\circ$, ami éppen azt jelenti, hogy a háromszög szabályos.

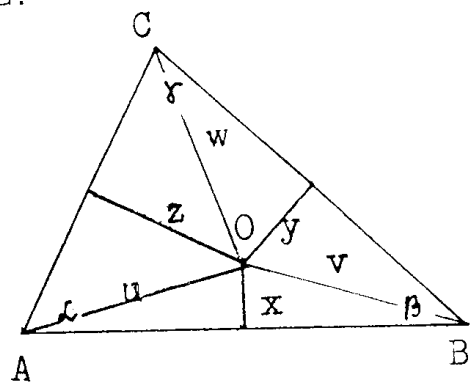
F.5.2. Mutassuk meg, hogy hegyesszögű háromszög esetén $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}$ egyenlőtlenség teljesül.

Az Erdős-Mordell-tételben szereplő P legyen a hegyesszögű háromszög köré írt kör középpontja.

Ekkor $u = v = w = R$

$$x = R \cos \gamma \quad y = R \cos \alpha \quad z = R \cos \beta$$

Középponti és kerületi szög közötti összefüggést használtuk fel.



[1]-be behelyettesítve az előzőeket $R + R + R \geq 2R(\cos \gamma + \cos \alpha + \cos \beta)$,

$$\frac{3}{2} \geq \cos \gamma + \cos \alpha + \cos \beta$$

F.5.3. Bizonyítsuk be, hogy minden háromszögben igaz $f_a + f_b + f_c \geq 9r$.

Az Erdős-Mordell egyenlőtlenségben szereplő háromszög P belső pontja legyen a háromszögbe beírt kör középpontja.

Ekkor a tétel alapján

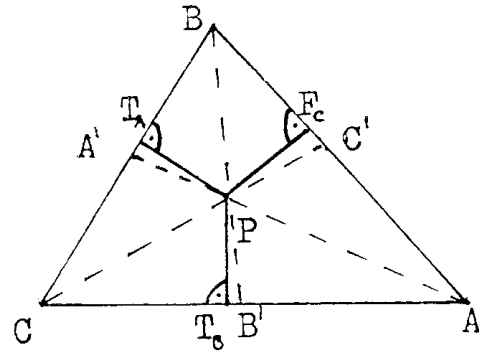
$$PA + PB + PC \geq 2(PA' + PB' + PC')$$

$$PA + PB + PC \geq 6r$$

A PA' ; PB' ; PC' szakaszok

mindegyike legalább r , ezért

$$f_a + f_b + f_c = PA + PA' + PB + PB' + PC + PC' \geq 9r$$



F.5.4. Adott O középpontú k kör.

Bizonyítsuk be, hogy a kört érintő

ABC háromszög közül a szabályos

háromszögben minimális az

$OA^2 + OB^2 + OC^2$ összeg.

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 = (OA + OB + OC)^2 - 2(OA \cdot OB + OB \cdot OC + OC \cdot OA)$$

A második tagot mértani és négyzetes közép közötti összefüggés felhasználásával becsüljük.

$$[1] \quad OA \cdot OB + OB \cdot OC + OC \cdot OA \leq \frac{OA^2 + OB^2}{2} + \frac{OB^2 + OC^2}{2} + \frac{OC^2 + OA^2}{2} = OA^2 + OB^2 + OC^2$$

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 \geq (OA + OB + OC)^2 - 2(OA^2 + OB^2 + OC^2)$$

$$\begin{aligned}
 &3(OA^2 + OB^2 + OC^2) \geq (OA + OB + OC)^2 \\
 (2) \quad &3(OA^2 + OB^2 + OC^2) \geq (6r)^2 \\
 &OA^2 + OB^2 + OC^2 \geq 12r^2
 \end{aligned}$$

Alkalmaztuk (2)-ben Erdős -Mordell-egyenlőtlenséget, amiben az egyenlőség szabályos háromszög esetén teljesül (1)-ben az egyenlőség $OA = OB = OC$ esetén áll fenn, ami azt jelenti, hogy szabályos háromszög középpontjára minimális az $OA^2 + OB^2 + OC^2$ összeg.

IRODALOMJEGYZÉK

1. Gimes Györgyné:

Középiskolai matematikai versenyek 1985-1987.

Tankönyvkiadó, Bp. 1989

2. Molnár Emil:

Matematikai versenyfeladatok gyűjteménye

1947-1970. Tankönyvkiadó, Bp. 1989

3. Reiman István:

A geometria és határterületei

Gondolat, Bp. 1986

4. Kántor Sándorné - Sümegi László:

Elemi matematika I.

Kossuth Lajos TE Debrecen, 1986

5. Nicholas D. Kazarinoff:

Geometriai egyenlőtlenségek

Gondolat, Bp. 1980

6. Reiman István:

Fejezetek az elemi geometriából

Tankönyvkiadó, Bp. 1987