

JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR
GEOMETRIA TANSZÉK

Szakdolgozat

„AZ ISTENI ARÁNY”

Készítette: Kovács Attila
V. évf.
matematika

Konzulens: Dr. Kurusa Árpád

Szeged, 1998.

1. Bevezetés

Az arany metszés volt az az isteni arány, amely hosszú időn át lázban tartotta a matematikusokat és a művészeket egyaránt.

De mi is ez a sajátos és kitüntetett rangú arány? Az arany metszés, egy mennyiség két részre osztása úgy, hogy a kisebbik résznek a nagyobbikhoz való aránya megegyezik a nagyobb résznek az egész mennyiséghez való arányával.

Szakdolgozatomban szeretném bemutatni ennek a misztikussá vált aránypárnak a történetét, sorsának fontosabb állomásait az ókortól napjainkig.

Azért, hogy teljesebb, sokoldalúbb képet kapjunk az $a : b = b : (a + b)$ aránypárról, bemutatok egy több kutató által is elvégzett kísérletet. A vizsgálódás eredményeiből az arany metszés és a szépség, az esztétikusság kapcsolatára vonatkozó, néhány érdekes következtetést tudtam levonni.

De mire jó ez a titokzatos arany metszés? Bizonyos szerkesztések kizárólag az arany metszés segítségével végezhetők el. Ezek közül szeretnék néhány szerkesztést kiemelni és elkészíteni a dolgozatomban, természetesen a teljesség igénye nélkül.

Végül a geometriától eltávolodva az arany metszésnek a Fibonacci - sorozattal való kapcsolatát szeretném bemutatni.

A fentiekben felvetődött kérdések megválaszolását és a felmerülő gondolatok kifejtését tartottam fontosnak ahhoz, hogy a dolgozatom rövid áttekintést nyújtson az arany metszésről.

2. Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Tartalomjegyzék	4
3. Történeti áttekintés	5
4. Az aranymetszés esztétikája	12
4.1. A téglalapokkal végzett kísérlet elemzése	16
4.2. A háromszögekkel végzett kísérlet elemzése	18
5. Aranymetszés a szerkesztésekben	19
5.1. Egy adott α szakasz aranymetszetének megszerkesztése (a legismertebb módszer) ..	20
5.2. Egy adott α szakasz aranymetszetének megszerkesztése (Euklidész módszere)	22
5.3. Egy adott α szakasz aranymetszetének megszerkesztése (kevésbé ismert módszer) ..	23
5.4. A teljes szakasz szerkesztése az aranymetszés nagyobbik szeletéből	26
5.5. Szabályos tíszög szerkesztése	30
5.5.1. Szabályos tíszög szerkesztése adott r sugarú körbe	30
5.5.2. Adott α oldalú szabályos tíszög szerkesztése	30
5.6. Szabályos ötszög szerkesztése	31
5.6.1. Szabályos ötszög szerkesztése adott r sugarú körbe	33
5.6.2. Adott α oldalú szabályos ötszög szerkesztése	35
5.7. Szabályos csillagötszög (pentagram) szerkesztése	36
5.8. Csigavonal szerkesztése	39
6. A Fibonacci - sorozat és az aranymetszés	40
7. Befejezés	50
8. Szakirodalom	51

3. Történeti áttekintés

Az aranymetszés történeti áttekintéséhez legelőször is az ókori Kelet népeinek kultúrájához kell visszaforgatnunk a történelem kerekét.

Az ókori *mezopotámiai* matematikusok ugyan nem foglalkoztak általánosítva az arányok elméletével, de már a Kr. e. IV. évezredben ismertek és írásjegyként használtak egy csillagötszöghöz hasonló ábrát. Az építészetben is csupán egyetlen példát találunk, - amely a Fibonacci – sor előlegezése is lehetne – a perszeopoliszi Adapana csarnok keleti homlokzatának lépcsőit tagolták szélességben 18, 30, 48, 30, 18 perszeopoliszi láb szerint.

Indiában edénydíszként alkalmazták a pentagramhoz hasonló rajzot.

A *zsidó* kultúrában is megjelent a csillagötszög alakú Salamon – csillag.

Egyiptomban ugyanígy megjelenik a Kr. e. II. évezredben az ötsugarú csillag pl. Séthi sírjának mennyezetén. A régi Egyiptomi Birodalom piramisainak (Kr. e. III. sz. , IV. din.) mérésekor kiderült, hogy olyan törvényszerűségek mutathatók ki, amelyek megfelelnek az ötszög osztásnak. A gízai Kheopsz - piramisnak $\alpha = 51^{\circ}50' - 51^{\circ}52'$ közti dőlésszöge van. Ennek a szögnek a cosinusa 0,618, tehát igen közel áll az aranymetszéshez. Egy szudáni piramist pedig a Kr. e. I. században a 36, 72, 72 fokos aranyháromszög szerint terveztek meg, azonban kétkedésre ad okot az, hogy az egyiptomi mértan hagyatékaiban sehol sem említik az aranymetszés elméletét.

Itáliában is fellelhetünk példákat a kör 5-ös osztásának elterjedtségére: két pentagramot láthatunk egy etruszk vázán.

A Kr. e. II. évezred végén, a *görögöknél*, néhány műkénéi ivóedényen megjelenik a kör 5-ös osztása, mint díszítő elem. Szép rajzát látjuk a csillagötszögnek egy fekete alakos amphorán, az egyik harcos pajzsán, valószínűleg, rontást hárító szimbólumnak rajzolták.

Az ókori görög építészeti emlékek között is számos példát találunk az aranymetszéshez közeli arányok alkalmazására. A görög építészet remekművén az athéni Parthenonon is felfedezhetjük ezeket az arányokat, így az épület hossza és szélessége, szélessége és magassága között.

A harmóniára és a természet közelségére törekvő ókori görög szobrászok körében kedvelt volt az emberi test ábrázolása. Említhetnénk *Leókharsész* Belvederei Apollón szobrát, amelyen a köldök a teljes testet az aranymetszés arányában osztja.

A fent említett ábrázolások, díszítések, építmények készítőiről a fennmaradt írásos emlékek alapján állíthatjuk, hogy nem ismerték az aranymetszés matematikai hátterét. Valószínűleg az arányosságra és a harmóniára való törekvés vezette őket ezeknek az arányoknak az alkalmazásához.

Az elsők, akik a csillagötszög arányait vizsgálták és definiálták, a pitagoreusok voltak. A pentagram kiemelkedő szerepet játszott a pitagoreusok filozófiájában, mert azt misztikus jelképnek tartották. Minden bizonnyal ők voltak az első és legalaposabb ismerői korukban az aranymetszés törvényének. Joggal feltételezhető, hogy ismerték egy szakasz aranymetszetének megszerkesztését, hiszen a szabályos ötszöghöz ily módon juthattak.

Hippaszosz (Kr. e. 450 körül), a pitagoreus iskola egyik képviselője felfedezte és bebizonyította, hogy a szabályos ötszög oldala és átlója összemérhetetlen, azaz mérőszámaik irracionális viszonyban vannak. Bizonyára ez lett a kiindulópontja az irracionális mennyiségek felfedezésének. Az irracionális viszony felfedezése annyira megdöbbenetett a pitagoreusokat, hogy sokáig titokban tartották. Amikor Hippaszosz mégis nyilvánosságra hozta, kizárták a szövetségből.

Platón (Kr. e. 429-348), az ókori Görögország egyik legnagyobb filozófusa a világ teremtésére alkalmazta az aranymetszés törvényét. Az idealista filozófus szerint az istenek a földet tűzből, vízből, levegőből teremtették, még pedig úgy, hogy amint a tűz aránylik a levegőhöz, úgy aránylik a levegő a vízhez, és ugyanúgy viszonyul a víz a földhöz.

Az addigi eredményeket *Euklidész* (Kr. e. 300 k.) foglalta össze „*Elemek*” című munkájában. A II. könyvének 11. tételében találkozunk a „szélső és közbülső arány” (azaz az aranymetszés) szerinti tagolással: „Osszunk úgy ketté egy adott szakaszt, hogy a teljes szakasz és az egyik rész által közrefogott téglalap egyenlő legyen a másik részre emelt négyzettel!” Ezt a II.6. tétel alkalmazásával oldotta meg Euklidész. A IV. 10. tételében a 72, 72, 36 fokos háromszög szerkesztési módját tárgyalja Euklidész, amelyhez a „szélső és közbülső arány” szerinti szakasztagolás az eszköz. Majd bebizonyítja, hogy ha e háromszög 72 °-os szögeinek szögfelezőit meghúzzuk, akkor szabályos ötszöget nyerünk. VI. könyvében megadja a „folytonos arány” definícióját : „Azt mondjuk egy szakasról, hogy folytonos arányban van felosztva, ha a nagyobb szelet úgy aránylik a kisebbhez, mint a teljes szakasz a nagyobb szelethez.” Ugyanebben a könyvben, a 30. tételben mutatja be egy szakasznak „folytonos arányban” való fölosztását. Euklidész XIII. könyvében részletesen foglalkozik a „folytonos arányban” való osztásokkal, a 8. tételben pedig megmutatja, hogy a szabályos ötszög átlói az aranymetszés szabályai szerint osztják egymást. Euklidész és kortársai már tudtak szerkeszteni tíszöget, tizenötszöget, sőt ismerték az öt szabályos testet is.

A következő évszázadokban *Hüpsziklész*, *Papposz*, *Proklosz*, *Ptolemaiosz* és *Héron* munkássága érdemel említést, illetve a Kr. u. I. században tevékenykedő geraszai *Nikomakhosz* foglalkozott behatóan a számarányokkal. Tíz számaránytípust fogalmazott meg, ebből a tizedik így néz ki: $\frac{c-a}{c-b} = \frac{b}{a}$, ahol c a legnagyobb, b a középső, a pedig a

legkisebb mennyiség, és $a + b = c$ összefüggés áll fenn. Ezt szokták az aranymetszéssel és a Fibonacci - sorozattal összekapcsolni. Valóban, ha pl. 13, 8, 5 számhármast tekintjük, akkor hasonlít az aranymetszés összefüggéséhez, de semmi több nem mondható el róla.

Azután hosszú ideig az aranymetszéssel kapcsolatban semmi új megállapítás nem történik, talán kicsit feledésbe is merül. Ebben az időszakban a matematika az araboknál élte virágkorát, és az ő közvetítésükkel jutott el az antik-görög matematika Európába. Euklidész művének, az „Elemek”- nek, három arab fordítása jelent meg a IX. században. Sok, a matematika tudománya számára igen fontos eredmény fűződik a nevükhöz, de az aranymetszéssel behatóbban, sajnos, nem foglalkoztak.

Algírban sajátította el a matematikát *Leonardo Pisano* (1170-1240), ismertebb nevén *Fibonacci*, aki nemcsak az arab nyelvet tanulta meg kitűnően, hanem az arab kultúra és tudományos ismeretek iránt is nagy érdeklődést mutatott. A híres matematikus nagyra becsülte *Al-Hvarizmi* – az első arab algebrakönyv írójának, a matematika kiemelkedő képviselőjének - műveit, amelyekből nagyon sokat tanult. Fibonacci több arab művet is lefordított, s így ezek az eredmények fennmaradhattak az európai matematika számára. Összegyűjtött ismereteit „Könyv az abakuszról” c. művében tette közzé.

Fibonaccit, a legtöbb matematikával foglalkozó ember a nyulak szaporodásával kapcsolatos feladatáról ismeri, amelynek megoldásaként kapott 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... számsorozat a Fibonacci – sorozat nevet viseli. Ennek a sorozatnak sok olyan tulajdonsága van, amely felkeltette a későbbi matematikusok érdeklődését is, így például többen vizsgálták az aranymetszés és a Fibonacci – sorozat kapcsolatát is, amelyről dolgozatomban 5. fejezetében fogok részletesebben szólni.

Az aranymetszéssel ellentétben a pentagramnak, mint szimbólumnak ezekben a századokban is folyamatosan megmaradt az alkalmazása. A csillagötszög közelítő szerkesztése fellelhető a XIII. századi *Honnecourt* vázlatfüzetében is, amelyből az is kiderül, hogy a pentagramot és a szabályos ötszöget egyáltalán nem tekintette különlegesnek, ezzel is megpróbálta eloszlatni a két alakzat körül kialakult misztikus elképzeléseket. Mindenképpen meg kell említenünk még *Campanus* nevét is, aki egy arab változat alapján elkészítette az „Elemek” latin fordítását.

A XV. sz. végéig azonban a matematika lendülete ismét megtorpant. Természetesen a tudósok ekkor is tanulmányozták Fibonacci és Campanus műveit. Ebben az időben azonban különösen a mértan iránti érdeklődés nőtt meg, főként azért, mert a festészet középpontjába a perspektíva került.

Luca Pacioli (kb. 1145 – 1517) itáliai matematikus munkásságában fogalmazódott meg a legerőteljesebben a matematika és a festészet kapcsolata. Szoros barátságot kötött *Leonardo da Vincivel*, ezt bizonyítja az is, hogy az „Isteni Arányról” szóló kéziratához Leonardo rajzolta az illusztrációt. E munkája 3 részből áll. Az első részben az „Elemek” – nek a „szélső és közbülső arány” – ra vonatkozó tételeit magyarázza Pacioli. A második rész építészeti tárgyú, míg a harmadik részben az öt platóni testről szóló fordítása olvasható. Pacioli annyira csodálta a „szélső és közbülső arány” szépségét, hogy megfelelőnek találta rá az „isteni arány” elnevezést. Luca Paciolit a maga korában inkább szövegkiadónak és humanista népszerűsítőnek tartották, mintsem matematikusnak.

Kepler (1571- 1630) volt az első, aki felfigyelt a Fibonacci – sorozat és az „isteni metszet” összekapcsolhatóságára. „Az égi testek csodálatos arányosságáról szóló világrajzi misztérium” című művében magasztalta a „sectio divina” – t, amit a geometria drágakövének nevezett.

A XVII. – XVIII. századtól háttérbe szorultak az arányelméleti módszerek. Így aztán nagy érdeklődést keltett *Zeisingnek* a XIX. század közepén megjelent könyve, amelyben kifejtette, hogy az élő szervezetek növekedési arányaiban az aranymetszés fellelhető. Ekkor láttak napvilágot olyan tanulmányok is, amelyekben aranymetszés szerinti templomtervezést mutattak ki a görögöknél.

Gustav *Fechner*, egy német pszichológus végzett egy igen érdekes optikai kísérletet 1876 – ban, amelyben azt vizsgálta, hogy a kísérletben résztvevő személyek bizonyos téglalapok közül melyiket találják a legtetszetősebbnek. Eredményei szerint azt a téglalapot választották a legtöbben, amelyen a szélesség és a magasság aránya $21:34$, vagyis aranymetszéshez nagyon közel áll. Ezt többen alátámasztották hasonló kísérleteikkel, de többen cáfolták is.

Az aranymetszés reneszánsza a művészetekben a XIX. sz. – ra tehető. Ekkor több tanulmány, vélemény jelent meg ezzel a témával kapcsolatban. Valószínűleg a ma használatos aranymetszés elnevezést a XIX. században kapta ez az aránypár. A nevét a középkori „*regula aurea*” és a *Kepler* által használt „*sectio divina*” kifejezések összeolvadásából kapta.

Ebben az időben jelenik meg az aranymetszés a festésetelméletben is. Több tanulmány jelenik meg különböző festők műveivel kapcsolatban, amelyekben az aranymetszés arányait vélik felfedezni. Többek között *Seurat*, *Cézanne*, *Mondrian* képeinek egy részén találtak rá ezekre az arányokra.

Ugyanitt meg kell említenünk *Csontvárynak*, A magányos cédrus c. képét (1.ábra). Németh Lajos szerint a képen látható cédrusfa a kép vízszintes síkját aranymetszés szerint tagolja. Valószínűleg a festő ösztönösen választotta ezt az arányozást a feszültség kifejezésére. De *Csontvárynak* több festményén is az aranymetszés arányait vélték felismerni (pl. *Zarándoklás*, és a *Tengerparti lovaglás*) .



1. ábra

Csontváry Kosztka Tivadar: A magányos cédrus

Nemcsak a festészetben, hanem egyéb művészeti ágakban is megtalálhatjuk ezeket az arányokat.

Az építészetben *Le Corbusier* az aranymetszés klasszikusa. Az emberi test felépítéséből következtetett ennek az arányozásnak a tökéletességére, amikor úgy látta, hogy a felnagyított karú ember alakját a köldök felezi, a testrészek arányát viszont aranymetszés szerinti sorba lehet rendezni. Ezzel az aránysorral formálta meg a szobabelsőket és a bútorokat is.

Hiába alkotta meg rendszerét *Le Corbusier*, az esztéták között is terjedőben a kétely az aranymetszés abszolutizálásával szemben. Ennek a „tökéletes arány” – nak a történetét áttekintve megállapíthatjuk, hogy bár sokan kételkedtek ennek az aránynak a „természetfeletti” mivoltában, mégis az évszázadok folyamán mindig egyfajta misztikusság övezte, ami még manapság is kutatásra készíti a matematikusokat.

4. Az aranymetszés esztétikája

Mint már az előző fejezetben említettem, a XIX. században kezdődtek el a különböző optikai kísérletek az aranymetszéssel kapcsolatban. Ezek abból álltak, hogy bizonyos síkidomokat az aranymetszés arányaiban formáltak meg, és arra voltak kíváncsiak, hogy ezek közül melyik az, amelyik a legtetszetősebb a szemnek.

Az első ilyen jellegű kísérlet Fechner nevéhez fűződik, amelyet a XIX. sz. közepén végzett el. Választásos módszere a következő volt: téglalapokat mutatott a kísérleti személyeknek, hogy válasszák ki a legtetszetősebbet. Majd ezt a lapot elvette és addig ismételte meg a kísérletet amíg csak egyetlen lap maradt. Így megtudta azt, hogy melyiket választották legtöbbször az első menetben illetve azt is, hogy melyik téglalapot értékelte a legmagasabb helyre a válogatók összessége. A következő oldalarányú téglalapok közül lehetett választani: 1:1, 5:6, 4:5, 3:4, 20:29, 2:3, 21:34, 13:23, 1:2, 2:5. Eredményei azt mutatták, hogy azt a téglalapot választották a legtöbbször, amely oldalainak aránya 21:34 (0.617647), vagyis a választható téglalapok közül az oldalainak aránya a legközelebb áll az aranymetszéshez. A kísérletben résztvevő személyeknek közel 36%-a választotta ezt a téglalapot, de a többség mindenképpen az ehhez legközelebb álló, így pl. 2:3 vagy 13:23 arányokat tartották a legszebbnek, míg a legkevesebben az 5:6, 4:5 és 2:5 arányokat választották.

Fechnernek több követője is volt a XX. században, így pl. Lalo, Thorndike, Tunstall vizsgálatainál is az aranymetszéses téglalap mutatkozott a legkedveltebbnek. Azonban érdekes módon más kutatók kísérletei cáfolták ezeket az eredményeket. Ide sorolhatjuk Davis, Weber és Thomson eredményeit. Legerősebben Godkewitsch bírálta ezeknek a kísérleteknek az értékét. Ő másképpen hajtotta végre kísérleteit. Három

különböző négyszögsorozatot állított össze, és így tette a választók elé. Arra a következtetésre jutott, hogy nincsen általánosan tetsző téglalap.

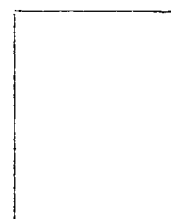
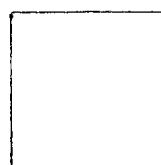
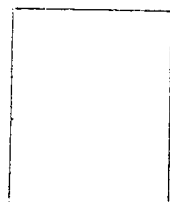
1970 - ben Berlyne végzett egy érdekes kísérletet. Két különböző kultúrájú népet, japánokat és kanadaiakat választott ki. Mindkét országban, 18 éves vidéki lányokból álló csoporttal végrehajtotta a téglalapos kísérletet. Eredményei szerint, a japánok annál tetszetősebbnek ítélték meg egy téglalapot, minél közelebb állt a négyzethez, szemben a kanadaiakkal, ahol az arany metszéshez közeli arányú téglalapokat preferálták.

Amint látszik, a kutatók kísérleti eredményei nagyon eltérőek, nehéz bármiféle következtetést levonni belőlük. Erről nincsenek bebizonyított tételek, cáfolhatatlan megállapítások.

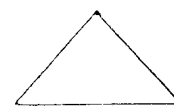
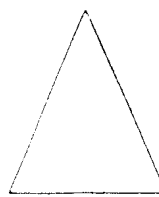
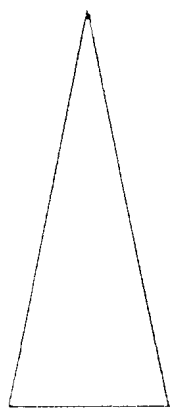
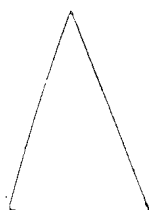
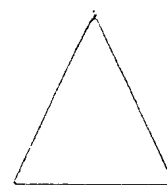
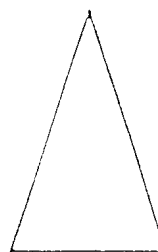
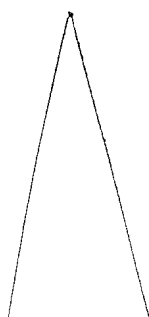
Nagyon felkeltették az kíváncsiságomat ezek a kutatások, ezért úgy gondoltam, hogy én is elvégzek egy ilyen kísérletet. Összesen 163 főt vontam bele a kísérletbe, még hozzá három különböző korosztályban. Az egyik csoportba a 11-14 évesek tartoznak, a második csoport 18 évesekből áll, míg a felnőttek alkotják az utolsó vizsgált csoportot. Természetesen összevonva is vizsgáltam a kísérleti eredményeket.

A kísérlet lényege a következő: egy lapra (2.ábra) felrajzoltam 8 db különböző oldalarányú téglalapot illetve egyenlő szárú háromszöget úgy, hogy közülük egy - a 8:13 oldalarányú - az arany metszés arányával majdnem megegyező. A feladat az volt, hogy válasszák ki a legjobban tetsző téglalapot és háromszöget, tehát egyszeri választást alkalmaztam. Az eredmények az alábbi grafikonokon láthatók. A grafikonokon az oldalak aránya szerint csökkenő sorrendbe vannak rendezve a téglalapok illetve a háromszögek, ellentétben a választási lapon szereplőkkel, ahol keverve helyezkednek el.

1. Írjon X - et a legjobban tetsző téglalap alá !



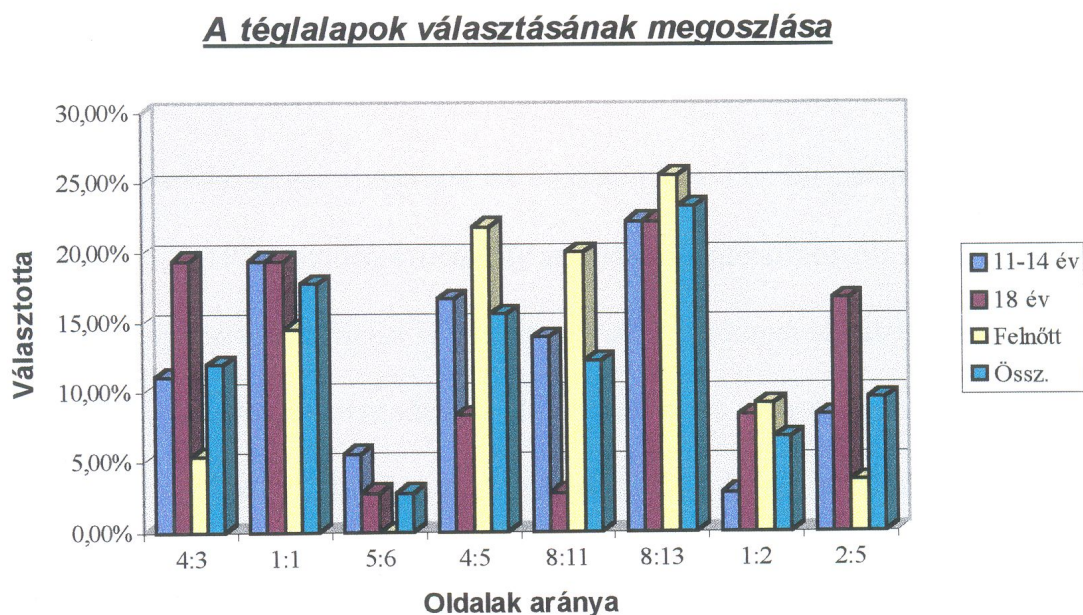
2. Írjon X - et a legjobban tetsző háromszög alá !



2. ábra

4.1. A téglalapokkal végzett kísérlet elemzése

A téglalapok választását elemezve elmondhatjuk, hogy elég nagy a szórás a különböző oldalarányosságú téglalapokra leadott szavazatok alapján.



3. ábra

Az átlagot tekintve a 8:13 oldalarányú téglalap mintegy 23% - os tetszéssel áll az első helyen, ami tulajdonképpen Fechner kutatási eredményeit látszik igazolni. Az érdekes az, hogy az arany metszéshez viszonylag közeli oldalarányú téglalapokat (8:11, 1:2) csak a megkérdezettek 20% - a választotta. A négyzetet, vagyis a szabályos téglalapot minden hatodik megkérdezett választotta, ami egyáltalán nem meglepő, hiszen a négyzet valamiféle harmóniát, biztonságot sugall a legtöbb ember számára.

Mindenképpen érdemes azt megvizsgálni, hogy vajon miért olyan nagy az eltérés a közel megegyező oldalarányú - 5:6 és 4:5 - téglalapok tetszése között, hiszen az emberi szem számára szinte megkülönböztethetetlenek. Véleményem szerint a téglalapok tetszését az elrendezésük is befolyásolja, valószínűleg ennek is ez lehet az oka. Ha megnézzük a választási rajzon való elhelyezkedésüket, akkor észrevehetjük, hogy a 4:5 oldalarányú téglalap két eléggé különböző formájú, míg az 5:6 oldalarányú téglalap az arany metszéshez legközelebb álló téglalap mellett található, így az utóbbi kevésbé tűnhet „szépnek”.

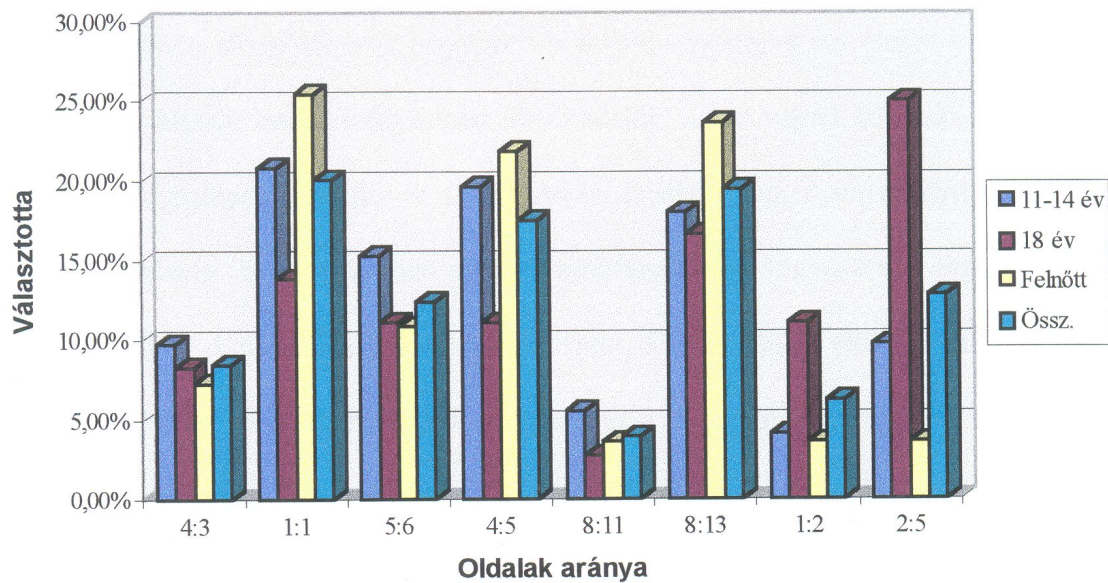
Ha korosztályonként vizsgáljuk az eredményt, akkor megállapíthatjuk, hogy a 8:13 oldalarányú téglalap minden korosztály számára a legtetszetősebb volt, felnőtteknél pedig, ez az arány elérte a 25% -ot is. Három olyan oldalarányú téglalap volt (4:5, 8:11, 8:13), amely nagy tetszésnek örvendett az idősebb korosztály körében. A pszichológusok bizonyára érdekes következtetéseket vonhatnának le a 18 évesek tetszési eredményeiből, amely mutatja, hogy a többiekhez képest feltűnően nagy arányban választották a legkisebb és a legnagyobb oldalarányú téglalapokat.

A fentiek alapján feltételezhetjük - és nem állíthatjuk -, hogy az arany metszés arányai esztétikailag is kellemesnek tűnnek az emberi szemnek, legalábbis a téglalapok esetében, számomra ez derült ki a kísérletből.

4.2. A háromszögekkel végzett kísérlet elemzése

A háromszögeket tekintve egészen más a helyzet.

A háromszögek választásának megoszlása



4. ábra

Összességében tekintve az első helyre szabályos háromszög került, míg a 8:13 oldalarányú egyenlő szárú háromszöget a második helyre sorolták a kísérleti személyek. Tulajdonképpen három olyan háromszög van, amely a szavazatoknak közel egyforma százalékát kapta meg, a szabályos háromszög, a 4:5 és a 8:13 oldalarányú háromszögek. Meglepő, hogy milyen kevesen választották az arany metszéshez viszonylag közeli 8:11 és 1:2 oldalarányú háromszögeket. Ennek oka az is lehetett, hogy mindkét háromszög a sorban az első helyen szerepelt.

Egyetlen kiugró eset van, a 18 éveseknél kimagaslóan a legtöbben választották a 2:5 oldalarányú egyenlő szárú háromszöget, hasonlóképpen mint az ugyanilyen arányú téglalapot.

A két grafikont egybevetve megfigyelhetjük, hogy az 5:6 és 8:11 oldalarányú téglalapok és háromszögek választása között milyen nagy a különbség. Ezeknél az alakzatoknál közel 10% eltérés figyelhető meg; az 5:6 aránynál a háromszöget, míg a 8:11 aránynál a téglalapot választották többen. Ha megnézzük a lapon való elhelyezkedésüket, akkor kiderül, hogy az 5:6 arányú téglalap a sor elején található, míg az ugyanilyen arányú háromszög éppen ellenkezőleg, a sor végén helyezkedik el. Ha a 8:11 arányú téglalapot nézzük, ez a sor végén található, az ilyen arányú háromszög viszont a sor elején van. Ez minden esetben megfigyelhető, vagyis a sor elején található alakzatokat jóval kevesebben választották, mint a sor végén elhelyezkedőket. Még nagyobb az eltérés, ha a sor belső két alakzatát és a szélső alakzatát hasonlítjuk össze a választás szempontjából. Az első vagy utolsó háromszögek és téglalapok közül egyik tetszése sem éri el a 7% - ot, viszont ha a belsőket vizsgáljuk meg, akkor szembetűnő, hogy ezek mindegyikére legalább 10% - a jutott a szavazatoknak.

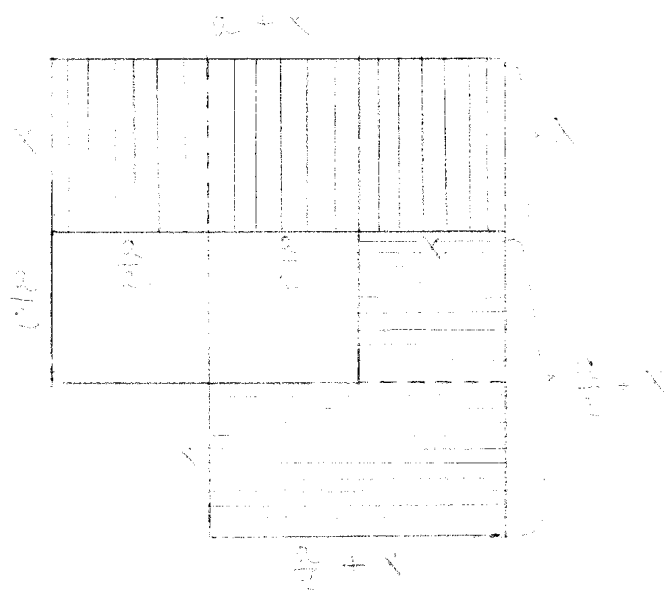
Mindezeket összevetve úgy tűnik, hogy az arany metszéshez közeli oldalosztás, ha nem is a legtetszetősebb, de mindenképpen a „legszebbek” között van, azonban ugyanezt elmondhatjuk a négyzetről és a szabályos háromszögről is. Úgy tűnik, hogy nem csak ez befolyásolta a kísérleti személyeket, hanem az is, hogy az illető alakzat a sor melyik részén helyezkedik el. Ha ez a két feltétel, a belső elhelyezkedés és az arany metszéshez közeli arány vagy a szabályosság egy téglalapnál vagy egy háromszögnél egyszerre teljesül, akkor nagy valószínűséggel az a téglalap vagy háromszög lesz a legtetszetősebb, illetve bizonyosan az elsők között lesz.

5. Aranymetszés a szerkesztésekben

Ahogy már a történeti áttekintésben is említettem, a pitagoreusok jelképe a pentagram vagy más néven a csillagötszög volt. Valószínűleg ezen fedezték fel az aranymetszésnek elnevezett aránypárt. Ugyanis a pentagram egyik oldalát az öt metsző másik oldal olyan arányban osztja, hogy a kisebbik rész úgy aránylik a nagyobbik részhez, amint a nagyobbik rész aránylik az egész oldalhoz. Ahhoz tehát, hogy a csillagötszöget meg tudják szerkeszteni, előbb egy adott a szakasz aranymetszetét kellett megszerkeszteniük.

5.1. Egy adott a szakasz aranymetszetének megszerkesztése (a legismertebb módszer)

Az aránypár szerint: $x^2 = a(a - x)$, ebből pedig $a^2 = x(a + x)$. Szerkeszteni kell tehát az adott a szakaszhoz olyan $(a + x)$ és x távolság, amelyeknek szorzata a^2 és különbsége a . Tekintsük az alábbi ábrán látható rajzot:



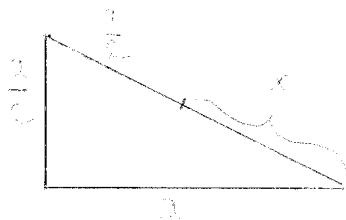
5. ábra

Az $(a+x)x$ szorzatot két négyzet különbségeként állították elő. A fenti ábrán látható vízszintesen vonalkázott terület akkora, mint a függőlegesen bevonalkázott, hiszen a függőlegesen vonalkázott téglalap területe: $(a+x)x$, míg a vízszintesen vonalkázott alakzat területe $\left(\frac{a}{2}+x\right)x+\frac{a}{2}x$, ami az előzővel egyezik meg. A vízszintesen vonalkázott alakzat területét más formában felírva kapjuk:

$$(a+x)x = \left(\frac{a}{2}+x\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Az eredeti arány pár értelmében az $(a+x)x$ -nek a^2 -tel kell egyenlőnek lennie, vagyis fenn kell állnia a következőnek: $a^2 = \left(\frac{a}{2}+x\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ vagy $a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}+x\right)^2$. Két szám négyzetének összege egyenlő egy harmadik szám négyzetével.

Ha derékszögű háromszögre vonatkoztatjuk ezt az összefüggést, akkor ennek a háromszögnek egyik befogója a , másik befogója $\frac{a}{2}$. Ezt a háromszöget megszerkesztve megkapjuk az átfogónak az $\frac{a}{2}+x$ szakaszt, és ebből levonva az $\frac{a}{2}$ szakaszt a keresett x szakaszt nyerjük (6. ábra).



6. ábra

Ma is ezt az eljárást használjuk egy adott szakasz aranymetszetének megszerkesztéséhez, Euklidész azonban nem teljesen így hajtotta végre a szerkesztést.

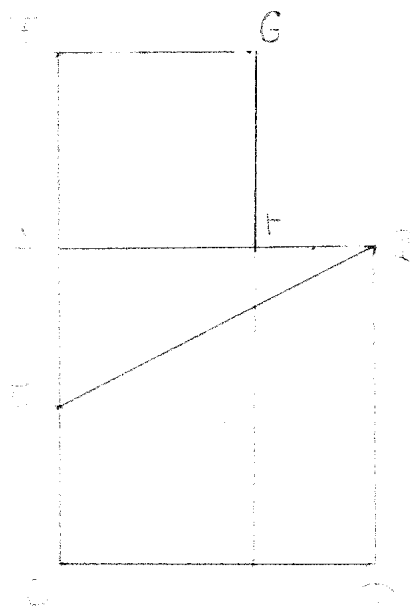
Az Elemek c. művének II.11. tételében írja le Euklidész egy szakasz aranymetszetének megszerkesztését :

5.2. Egy adott a szakasz aranymetszetének megszerkesztése (Euklidész módszere)

”Osszunk úgy ketté egy adott szakaszt, hogy a teljes és az egyik rész által közrefogott téglalap egyenlő legyen a másik részre emelt négyzettel!”

Euklidész így oldotta meg a problémát: Legyen adott az AB szakasz. Emeljünk az AB oldalra négyzetet ($ABCD$)! Legyen E az AC felezőpontja, és húzzuk meg BE - t. Hosszabbítsuk meg AC - t az F pontig, ahol $EF = EB$. Szerkesszünk AF oldallal négyzetet az AB oldalra($AFGH$), majd hosszabbítsuk meg GH - t K - ig.

Állítás: H úgy osztja ketté AB - t, hogy AB és BH által közrefogott téglalap egyenlő az AH oldalú négyzettel.



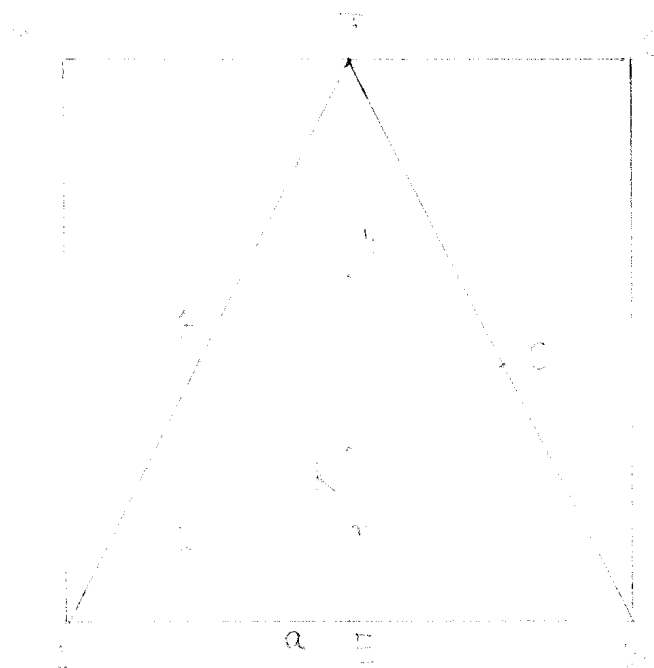
7. ábra

Az eljárás helyességét az előzőhöz hasonlóan bizonyította. A pitagoreusok egyébként nagyon sok algebrai egyenlet oldottak meg a területillesztés segítségével, amelyet az előbbi bizonyításnál is alkalmaztak.

5.3. Egy adott a szakasz aranymetszetének megszerkesztése (kevésbé ismert módszer)

Egy, talán kevesek számára ismert szerkesztés a következő :

Legyen adott az AB szakasz, melynek hossza a . Szerkesszünk négyzetet az AB szakasz fölé ($ABCD$), majd jelölje az AB felezőpontját E , CD felezőpontját F . Rajzoljuk bele a négyzetbe az ABF egyenlő szárú háromszöget, ezután szerkesszük meg a háromszögbe írható kört (k). A beírható körnek az EF szakasszal alkotott metszéspontját jelöljük H - val, a háromszöggel vett érintési pontjai pedig legyenek G és J , a kör középpontját K , sugarát r jelölje. Ekkor a kör átmérője (d) az a oldalnak aranymetszéssel kapott nagyobbik szelete. (8. ábra)



8. ábra

Az a szakasznak az átmérő (d) az aranymetszéssel kapott nagyobbik szelete, ha

fennáll a következő egyenlőség : $\frac{d}{a} = \frac{a-d}{d}$. Az egyenletet átalakítva kapjuk, hogy

$$d^2 = a^2 - ad ,$$

majd az egyenlet jobb oldalát 0 - ra redukálva és átrendezve :

$$d^2 + ad - a^2 = 0 .$$

Megoldóképlettel megoldva a d - ben másodfokú egyenletet, megkapjuk a

lehetséges megoldásokat : $d_{1,2} = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}$,

amiből

$$d_1 = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2} \text{ illetve } d_2 = \frac{a(-\sqrt{5}-1)}{2} .$$

A két megoldás közül az utóbbi negatív, mivel $a > 0$, ezért csak az első megoldás lehetséges. Tehát az aranymetszés során keletkezett nagyobbik szelet és a teljes szakasz aránya :

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} .$$

A fenti ábrát vizsgálva megállapíthatjuk, hogy EBF és FKG háromszögek hasonlóak, mert mindkettő derékszögű és van egy közös szögük. Az EBF háromszög

átfogója : $EF^2 + EB^2 = BF^2$, azaz $a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = BF^2$.

Ebből kapjuk az átfogóra, hogy

$$BF = a \frac{\sqrt{5}}{2} .$$

Az EBF és FKG háromszögek hasonlósága miatt

$$BF : EB = FK : KG ,$$

azaz

$$\frac{a\sqrt{5}}{2} : \frac{a}{2} = (a-r) : r,$$

majd az egyenletet átrendezve

$$r\sqrt{5} = a - r.$$

Bal oldalon kifejezve r -t és mindkét oldalt kettővel szorozva,

$$2r = \frac{2a}{\sqrt{5}+1},$$

és mivel $2r = d$, ezért mindkét oldalt a -val elosztva, majd a nevezőt gyöktelenítve,

kapjuk, hogy

$$\frac{d}{a} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ez pedig pontosan a keresett összefüggés.

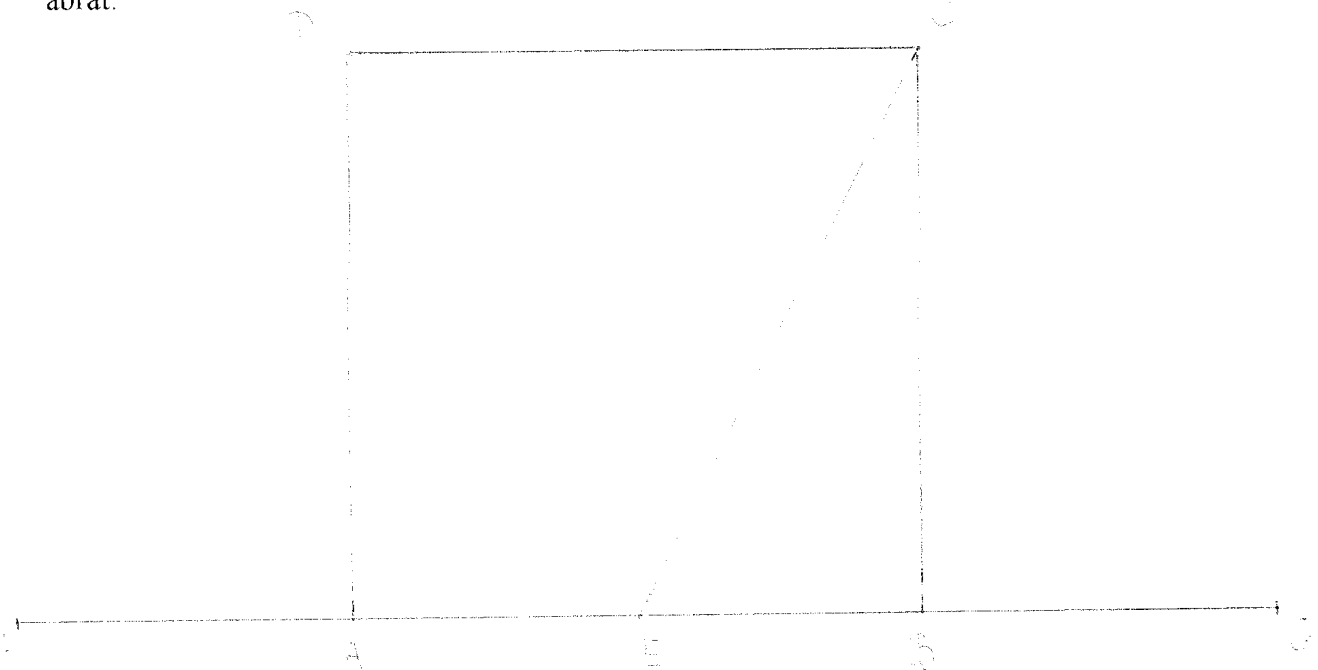
Amint láttuk tetszőleges szakasz aranymetszetét többféleképpen is meg lehet szerkeszteni. De vajon hogyan lehet egy adott szakaszból, mint az aranymetszés nagyobb szeletéből megszerkeszteni a teljes szakaszt?

A hasonlóság alkalmazásával bármely szakaszból, legyen ez az aranymetszés kisebb vagy nagyobb szelete, megszerkeszthető az egész szakasz. Szeretnék bemutatni egy kevésbé ismert eljárást arra, hogy hogyan lehet a nagyobb szeletből megszerkeszteni a teljes szakaszt, bár ezt az eljárást *Eudoxos* (Kr.e. 408 - 355) már ismerte.

5.4. A teljes szakasz szerkesztése az aranymetszés nagyobbik szeletéből

Legyen adott az AB szakasz (b). Szerkesztendő az a szakasz úgy, hogy $(a+b):b = b:a$ egyenlőség fennálljon.

Emeljünk az AB oldalra az $ABCD$ négyzetet. Jelöljük E - vel az AB oldal felezőpontját, majd húzzuk meg az EC szakaszt. Rajzoljuk meg az E középpontú EC sugarú kört, amelynek az AB oldalegyenessel vett metszéspontjait jelölje F illetve G . Ekkor a BG és AF a keresett a szakasszal egyezik meg. A megoldáshoz tekintsük a 9. ábrát.



9. ábra

Pitagorasz - tételét az EBC derékszögű háromszögre felírva kapjuk, hogy

$$CE^2 = EB^2 + BC^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2,$$

amiből

$$CE = \frac{b\sqrt{5}}{2}.$$

Így

$$BG = \frac{b\sqrt{5}}{2} - \frac{b}{2} = \frac{b(\sqrt{5}-1)}{2}.$$

Jelöljük a BG szakaszt a - val, majd a keresett arány bal oldalát felírva

$$(a+b):b = \left(b + \frac{b(\sqrt{5}-1)}{2}\right):b = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

míg a jobb oldal

$$b:a = b:\frac{b\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

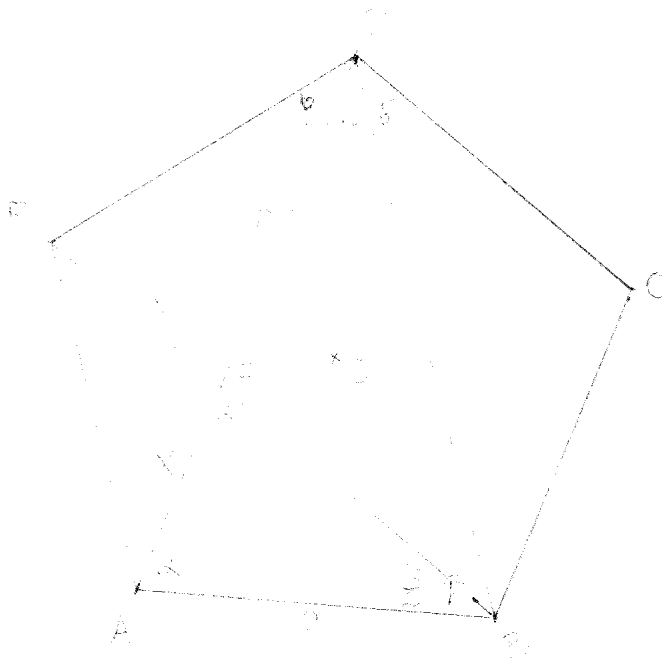
vagyis valóban teljesül, hogy $(a+b):b = b:a$.

A továbbiakban olyan alakzatok szerkesztésével szeretnék foglalkozni, amelyeket az aranymetszés segítségével tudunk megszerkeszteni. Ilyenek többek között a szabályos ötszög, a szabályos tíszög, a csillagötszög vagy a csigavonal. A szerkesztések előtt azonban tegyünk egy kis kitérőt.

A pitagoreusok nevéhez fűződik az irracionális viszony felfedezése. Valószínűleg azt vették először észre, hogy a négyzet oldala és átlója összemérhetetlen, vagyis nincs olyan szakasz amellyel mindkettő mérhető. Az egyik pitagoreus, Hipaszosz vette észre, hogy a szabályos ötszög oldala és átlója szintén összemérhetetlenek. Ennek a bizonyítására most nem térnék ki, csak a két szakasz (oldal és átló) arányának meghatározására, ami a szerkesztésnél kulcsfontosságú szerepet játszik.

Tekintsük tehát az alábbi rajzot (10. ábra). Legyen $ABCDE$ ötszög, k a körülírható köre és O a kör középpontja.

Legyen az ötszög oldala a , átlója pedig b . Jelöljük az átlók metszésével keletkezett szakaszok közül a nagyobbikat x - szel.



10. ábra

Válasszuk ki az ABD egyenlő szárú háromszöget! Mivel $\varphi = \gamma = \delta$, hiszen egyenlő húrokhoz tartozó kerületi szögek, ezért $\gamma = \frac{108^\circ}{3} = 36^\circ$. Ezért $\alpha = \beta = 72^\circ$. BF jelölje a β szögfelezőjét. Az ABF és a BFD egyenlő szárú háromszögek, ezért $AB = BF = FD = a$. Az ABD és AFB háromszögek hasonlóságából következik, hogy

$$x : a = a : (a + x),$$

vagyis az x - szel jelölt szakasz pontosan az ötszög oldalának nagyobbik aranymetszete, vagy másképpen fogalmazva az ötszög oldala az átló aranymetszetének nagyobbik szelete.

Egy másik fontos megállapítás a szabályos tízszöggel kapcsolatos tétel:

TÉTEL. A szabályos tízszög oldala annak az aranymetszésnek a kisebbik szelete, amelynek nagyobbik szelete a köré írható kör sugara.

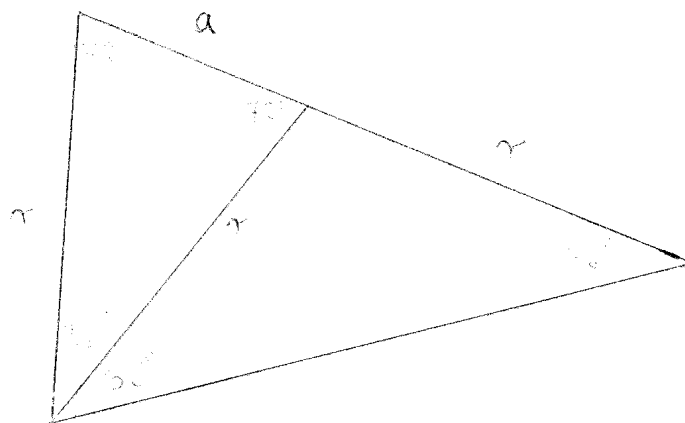
Bizonyítás. Tekintsük az r sugarú körbe írt a oldalú szabályos tízszög egy oldala és végpontjaihoz vezető sugarak által határolt háromszöget. Ennek a háromszögnek a szögei $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$, mert a középpontnál a teljes szög tizede található, és a háromszög egyenlő szárú. A háromszög a oldalát hosszabbítsuk meg r hosszúsággal, és az így kapott végpontot kössük össze a kör középpontjával (11. ábra).

Az eredeti háromszöget egy újabb egyenlő szárú háromszöggel egészítettük ki, aminek az alapján 36° - os szögek fekszenek, ugyanis a szárszög külső szöge 72° - os. A két háromszög együttesen egy $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$ - os háromszöget alkot, tehát az eredetivel hasonló.

A hasonlóságból az oldalak arányát felírva

$$a : r = r : (a + r)$$

kifejezést kapjuk, ami a tétel helyességét mondja ki.



11. ábra

Ezek után rátérhetünk a szabályos ötszög és tíszög szerkesztésére.

5.5. Szabályos tíszög szerkesztése

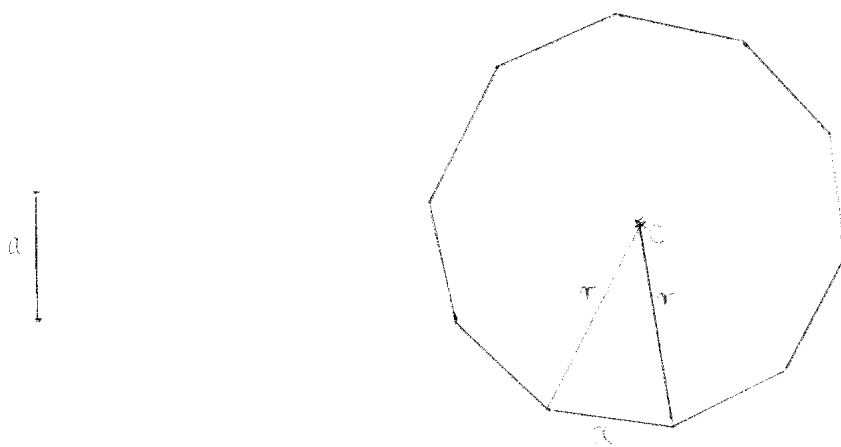
5.5.1. Szabályos tíszög szerkesztése adott r sugarú körbe

Legyen adott a kör sugara. Az 4.4. fejezetben leírtak szerint és az előző tétel értelmében szerkeszthető a körbe írható szabályos tíszög oldala.

5.5.2. Adott a oldalú szabályos tíszög szerkesztése

Legyen adott a szabályos tíszög oldala (a). Szerkesszük meg a szabályos tíszöget. A szerkesztés menete a következő:

1. Szerkesztendő a köré írható kör sugara (r) az 4.4. fejezetben leírtak szerint és a hasonlóság alkalmazásával
2. Az a, r, r oldalú egyenlő szárú háromszög szerkesztése
3. A köré írható kör megrajzolása, majd a tíszög csúcsainak megszerkesztése (12. ábra)



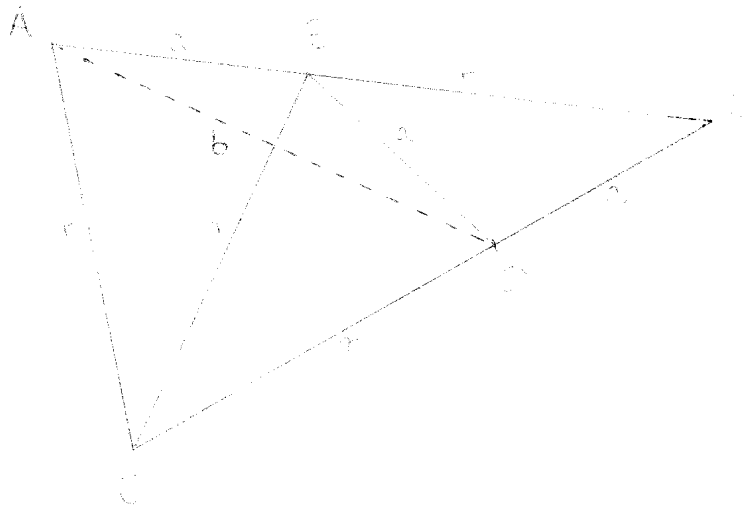
12. ábra

5.6. Szabályos ötszög szerkesztése

A szabályos ötszög, a szabályos tíszög szerkesztésének ismeretében könnyen szerkeszthető az alábbi tétel alkalmazásával .

TÉTEL. A kör sugarával és a körbe írt szabályos tíszög oldalával mint befogókkal szerkesztett derékszögű háromszög átfogója a körbe írt szabályos ötszög oldala.

Bizonyítás. Tekintsünk az előző tétel bizonyításánál használt ábrát ismét (13. ábra).



13. ábra

Tükrözzük az eredeti OAB háromszöget az OB oldalára, és legyen A tükörképe D pont. A tükrözés miatt $BD = a$ és $OD = r$. Mivel az OAC háromszög egyenlő szárú, $OC = a + r$ és $DC = a$. Az $AD = b$ távolság az r sugarú körbe írt szabályos ötszög oldala, mert az AOD szög 72° . Az A pontnak a D középpontú, a sugarú körre vonatkozó hatványa

$$b^2 - a^2 = a(a + r).$$

Az előző tétel alapján viszont

$$b^2 - a^2 = r^2,$$

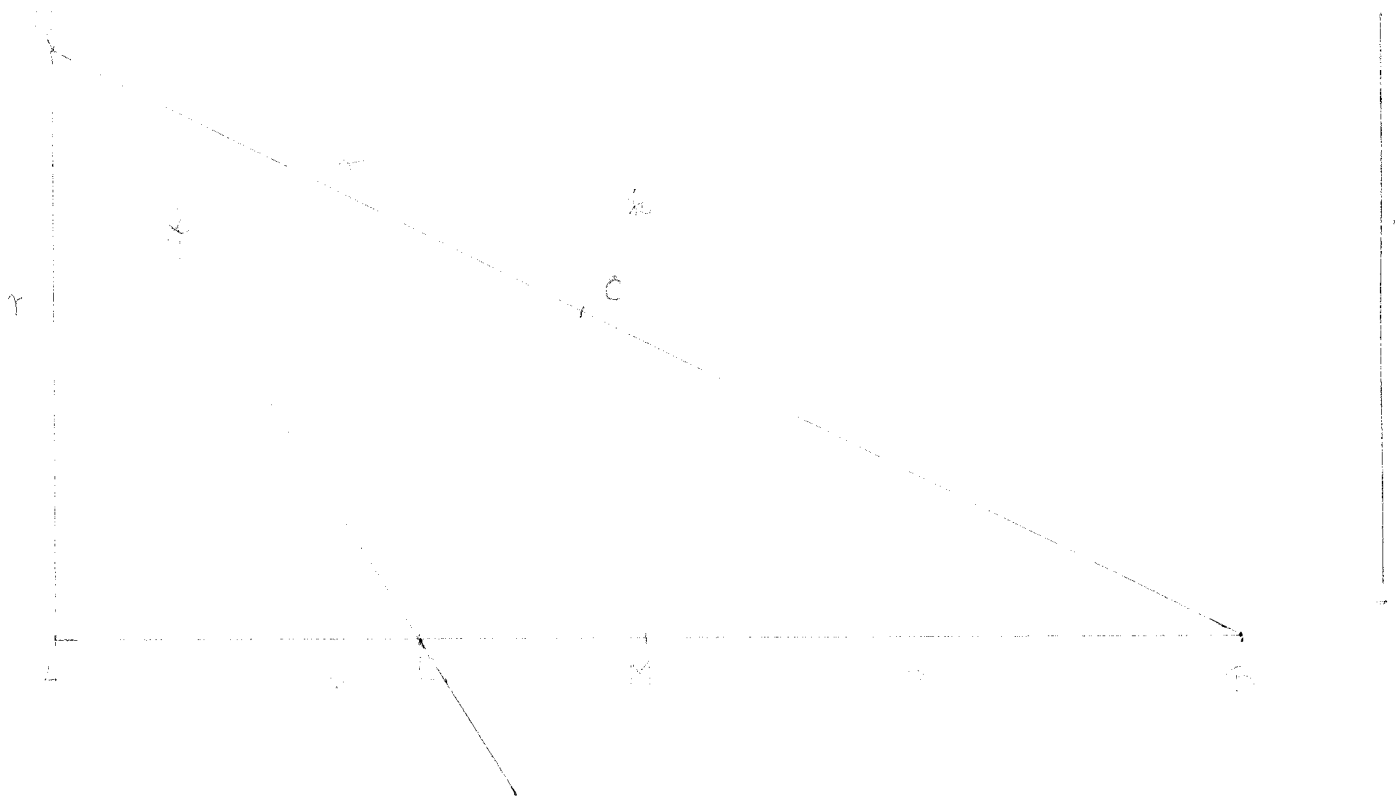
ami a bizonyítandó állítással azonos.

5.6.1. Szabályos ötszög szerkesztése adott r sugarú körbe

Legyen adott r , a kör sugara. Szerkesztendő az r sugarú körbe írható szabályos ötszög.

A szerkesztés menete a következő:

1. Szerkesszünk r és $2r$ befogójú derékszögű háromszöget (OAB), ahol $OA = r$ és $AB = 2r$.
2. Szerkesszük meg az O csúcsánál lévő szög szögfelezőjét (f), és $f \cap AB = E$.
3. Rajzoljuk meg az O középpontú, r sugarú kört (k), és legyen $k \cap OB = C$.
4. Jelölje M az AB szakasz felezőpontját (14. ábra).



14. ábra

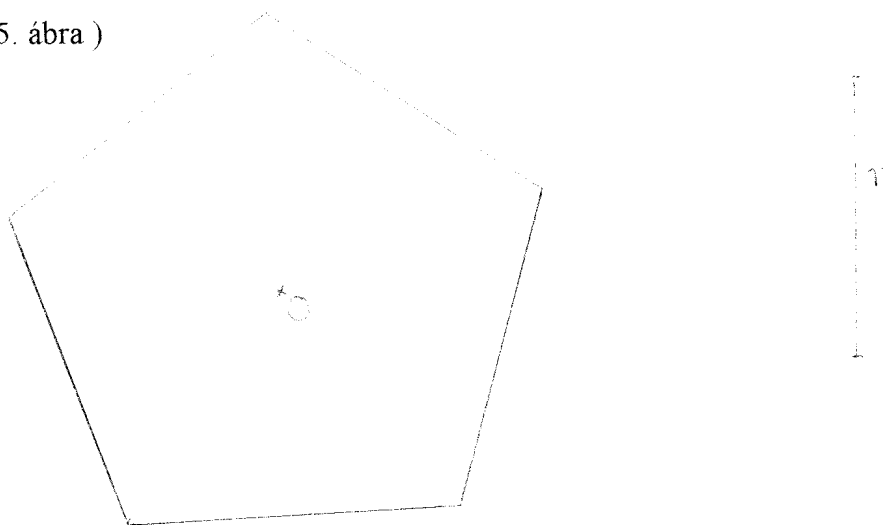
Állítás: az OE szakasz az r sugarú körbe írható szabályos ötszög oldala.

A bizonyítást az előző tétel felhasználásával bizonyíthatjuk be. A derékszögű háromszög OB átfogója $r\sqrt{5}$. Mivel az OC szakasz hossza r , ezért a BC szakasz hossza $r(\sqrt{5}-1)$. Az f szögfelező a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja, ezért az AB oldalt $\sqrt{5}+1$ részre felosztva, egy egységnek a hossza : $\frac{2r}{\sqrt{5}+1}$. Így az AE szakasz hossza $\frac{2r}{\sqrt{5}+1}$, azaz $\frac{r(\sqrt{5}-1)}{2}$, míg az EB szakasz hossza $\frac{r\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{2}$.

Tekintsük az $AE : AM$ arányt:

$$AE : AM = \frac{r\sqrt{5}-1}{2} : r = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

ami azt jelenti, hogy az AE szakasz a r sugarú aranymetszetének nagyobbik szelete, vagyis az r sugarú körbe írható szabályos tízszög oldala. Tekintve az AEO derékszögű háromszöget, az AO befogó a kör sugara, az AE befogó a körbe írható szabályos tízszög oldala, így az előző tétel értelmében az átfogó, vagyis az OE szakasz, a beírható szabályos ötszög oldala. Ezzel az állításunkat beláttuk, és a szabályos ötszög megszerkeszthető (15. ábra)



15 .ábra

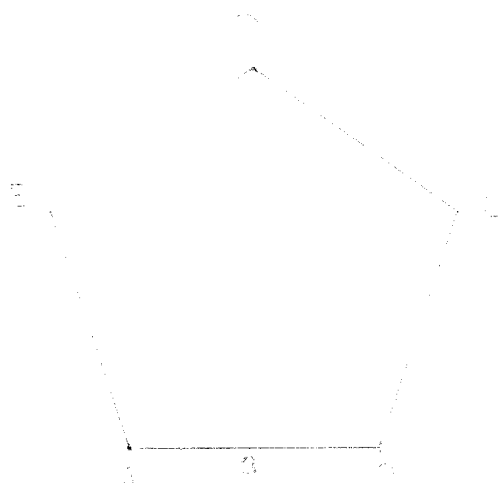
5.6.2. Adott a oldalú szabályos ötszög szerkesztése

Legyen adott a szabályos ötszög a oldala. Szerkesztendő a szabályos ötszög.

Ahogy az előzőekben láttuk, a szabályos ötszög oldala és átlója úgy aránylik egymáshoz, mint az aranymetszés nagyobbik szelete az egész szakaszhhoz. Ezt felhasználva könnyen szerkeszthető a szabályos ötszög.

A szerkesztés menete a következő:

1. Az adott a oldalra szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, amelynek alapja úgy aránylik a száraihoz, mint az aranymetszés nagyobbik szelete az egész szakaszhhoz. Ezt az 4.4. fejezetben bemutatott szerkesztéssel elvégezhetjük. Az így kapott háromszöget jelöljük ABD - vel.
2. A B és a D csúcsból a távolsággal körívezve, a körívek metszéspontja adja a szabályos ötszög C csúcsát.
3. Ugyanezt elvégezve az A és D csúcsokból kapjuk az E csúcsot és egyúttal a szabályos ötszöget is (16. ábra).

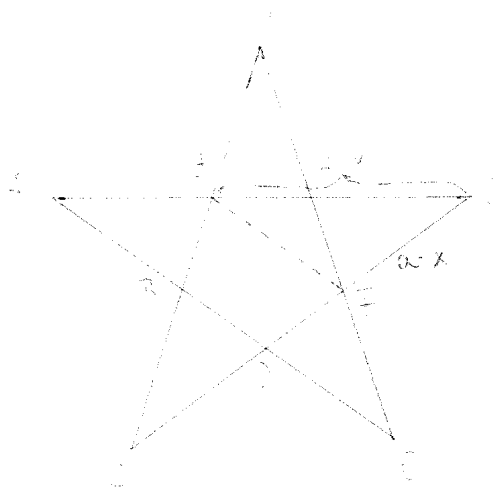


16. ábra

5.7. Szabályos csillagötszög (pentagram) szerkesztése

Ahogy a korábbiakban említettem, a pentagram nagyon közkedvelt jelkép illetve szimbólum volt már az ókorban is. Nagyon sokat foglalkoztak vele a matematikusok, mindenképpen első helyen kell említeni a pitagoreusokat, akik jelképként választották a pentagramot. A csillagötszöget a szabályos ötszög átlóinak megrajzolásával kapjuk.

Megszerkesztéséhez a pitagoreusok felhasználhatták azt a körülményt, hogy az öt szakasz mindegyike aranymetszés szerint osztja fel azt a kettőt, amelyiket metszi. Hogy ez miért van így, azonnal kitűnik az ADG és FGJ háromszögek hasonlóságából (17. ábra).



17. ábra

A megfelelő arányokat felírva kapjuk, hogy

$$FG : GJ = DG : AG.$$

Vezessük be a következő jelöléseket: $AG = a$, $GJ = x$, ekkor $DG = x$, $FG = a - x$.

Ekkor felírva az előző összefüggést,

$$(a - x) : x = x : a$$

kifejezést kapjuk, ami pontosan az a szakasz aranymetszés szerinti felosztásának arányaival egyezik meg.

A csillagötszög szerkesztésénél két típusú feladatot különböztethetünk meg.

a) Az egyik, amikor egy adott sugarú körbe kell pentagramot szerkeszteni. Ezt egyszerűen úgy oldhatjuk meg, hogy megszerkesztjük a körbe írható szabályos ötszöget, majd ennek az átlóit megrajzolva kapjuk a keresett csillagötszöget.

b) A másik típus az, amikor adott a oldalú pentagramot kell szerkeszteni.

Ennek megszerkesztése a következő lépésekből áll:

1. Vegyük fel az adott a szakaszt, melynek végpontjait jelölje A és D .
2. Valamelyik módszerrel szerkesszük meg az a szakasz aranymetszetének nagyobbik szeletét. Jelöljük ezt a szakaszt x - szel.
3. Szerkesszük meg azt az egyenlőszárú háromszöget, melynek oldalai a , x , x . Legyen ez AFD háromszög.
4. Húzzuk meg az AF és BF félegyeneseket, majd mérjük fel az a távolságot az A pontból kiindulva az AF félegyenésre, így megkapjuk a C pontot. Ugyanígy mérjük fel az a távolságot a D pontból kiindulva a DF félegyenésre megkapva a B pontot.
5. A D és a C pontokból a távolsággal körívezve az AD szakasz irányába, a körívek metszéspontjaként kapjuk az E pontot.
6. Az A , B , C , D , E pontok közül a nem szomszédosakat összekötve kapjuk meg a keresett csillagötszöget (18. ábra).



18. ábra

5.8. Csigavonal szerkesztése

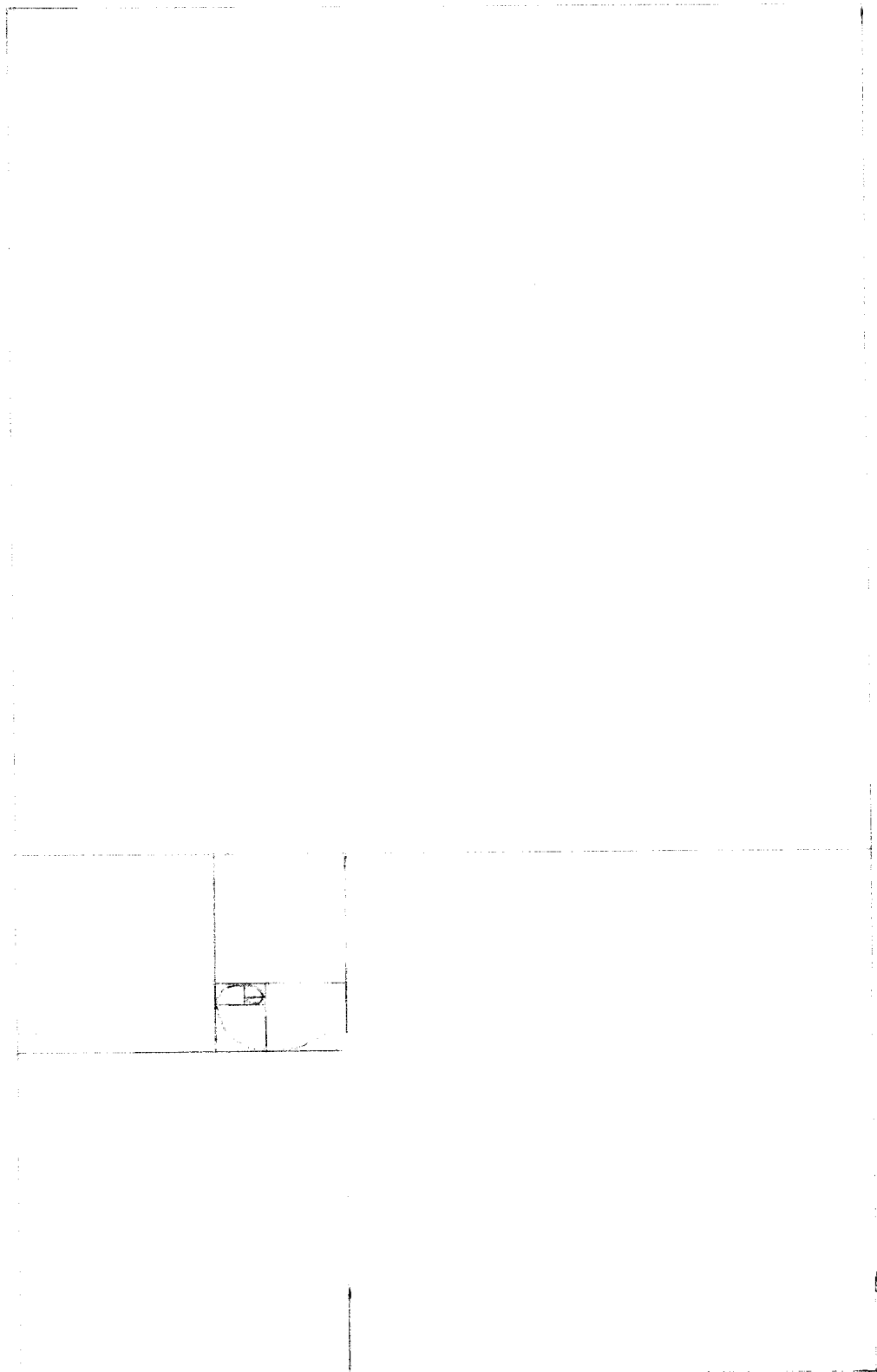
Ez a szerkesztés annyiban különbözik az előző fejezetekben megismert szerkesztésektől, hogy ezt a problémát bonyolultsága miatt csak az újkori geometriában tudták megoldani.

A feladat tulajdonképpen az, hogy hogyan szerkesszünk olyan csigavonalat, amelynek a szelvényei mindig $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ arányban nőnek.

Az eljárás a következő:

Induljunk ki egy négyzetből, majd az aranymetszés alkalmazásával illesszünk hozzá egy téglalapot, amelynek az oldalaránya $\frac{\sqrt{5}+1}{2} : 1$. Az eredeti négyzet és ez a kis téglalap együtt egy nagyobb téglalapot képez, amelynek oldalai szintén az aranymetszés arányai szerint tagoltak. Válasszuk most ennek a téglalapnak a hosszabb oldalát egy újabb négyzet oldalának, majd szerkesszük meg ezt a négyzetet. Ezt az eljárást folytatva négyzetek és téglalapok hálózatát nyerjük, ahol minden téglalap oldalának aránya $\frac{\sqrt{5}+1}{2} : 1$, azaz az aranymetszés arányaival egyezik meg.

Kössük össze az egyre nagyobbodó négyzetek két - két szemközti csúcsát folyamatos körívvel, amely körívnek sugara az adott négyzet oldalával egyezik meg. Ezáltal megkapjuk a kívánt csigavonalat és azt a szabályos terebélyesedő spirált, amelynek minden szelvénye $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ - ször lesz szélesebb az előzőnél (19. ábra)



19. ábra

6. A Fibonacci - sorozat és az aranymetszés

Fibonacci - sorozatnak nevezzük a 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... számsorozatot. Általánosságban a képzési szabálya: az n - edik tag az $(n-1)$ - edik és az $(n-2)$ - edik tag összege, vagyis $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

A Fibonacci - sorozat tagjai meglepő módon nagyon sok helyen előfordulnak. Találkozhatunk vele a természetben is, a növények növekedésével kapcsolatban vagy az állatvilágban, az állatok felépítésénél. Említhetném Rudolf Engel - Hardt nevét, aki 60 különböző tölgyfa 500 levelét vizsgálta meg. Arra az eredményre jutott, hogy a megvizsgált levelek számának a felénél a szélesség és a hosszúság aránya 5:8, illetve a levél legszélesebb metszete a levél hosszát 3:5 arányban tagolja. Az összes többi levélnél az eltérés nem éri el a 4 mm - t.

A művészetek több területén is előfordul, így Bartók számos művénel találkozhatunk a Fibonacci - sorozat szerinti komponálással.

Például a „Zene húros-, ütőhangszerekre és celestára” c. mű I. tétele 89 ütemből áll. Csúcspontja egy 55 ütemes első és egy 34 ütemes második részre osztja a zeneművet. Az első rész szintén felbomlik egy 34 és egy 21 ütemes részre, míg a második rész egy 13 és egy 21 ütemes részre tagolódik.

De ennél sokkal fontosabb a Fibonacci - sorozat matematikai tulajdonságait megvizsgálni. Mindjárt az elején tisztázni kell egy fogalmat, a Fibonacci - típusú sorozat fogalmát. Akkor mondjuk egy sorozatról, hogy Fibonacci - típusú, ha a képzési szabálya $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, de az első két tagját megváltoztatjuk.

Vizsgáljuk meg, hogy egy Fibonacci - típusú sorozat lehet - e számtani vagy mértani sorozat.

1. Lehet - e számtani sorozat egy Fibonacci - típusú sorozat?

Ha egy számtani sorozat első eleme a_1 , különbsége $d \Rightarrow$

$$a_{n-1} = a_1 + (n-2)d$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{n+1} = a_1 + nd$$

Ha ez egyúttal Fibonacci - típusú is, akkor teljesül az is, hogy

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} = 2a_1 + (2n-3)d$$

Tehát teljesülnie kell az

$$a_1 + nd = 2a_1 + (2n-3)d$$

összefüggésnek minden n - re. Ezt átalakítva kapjuk, hogy

$$(3-n)d = a_1.$$

Ez csak akkor lehet, ha $a_1 = 0$ és $d = 0$, vagyis ez egy csupa 0 - ból álló sorozat, ami értelmetlen.

2. Lehet - e mértani sorozat egy Fibonacci - típusú sorozat?

Jelöljük az első elemet a - val, a hányadost q - val. Ekkor az előzőhöz hasonlóan

$$a_{n-1} = aq^{n-2}$$

$$a_n = aq^{n-1}$$

$$a_{n+1} = aq^n$$

és teljesülnie kell az

$$aq^n = aq^{n-1} + aq^{n-2} \text{ összefüggésnek is.}$$

Ekkor aq^{n-2} - vel osztva mindkét oldalt, kapjuk

$$q^2 = q + 1$$

$$q^2 - q - 1 = 0.$$

Ezt megoldva

$$q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Tehát tetszőleges a illetve b esetén létezik olyan Fibonacci - típusú sorozat, amely egyben mértani sorozat is.

$$\text{Ha } q = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow a; \quad a\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right); \quad a\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2, \dots \text{ és}$$

$$\text{ha } q = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \Rightarrow b; \quad b\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right); \quad b\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2, \dots \text{ akkor mindkettő sorozat Fibonacci -}$$

típusú és mértani sorozat is egyben.

Állítsuk elő a Fibonacci - sorozatot két ilyen sorozat összegeként, vagyis úgy,

$$\text{hogy az (1) } a + b = 0 \text{ és a (2) } a\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + b\frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1 \text{ egyenletek egyszerre}$$

teljesüljenek.

(1) -ből $a = -b$, ezt beírva a (2) - be, kapjuk hogy

$$b\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} + b\frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1$$

$$\frac{-b - \sqrt{5}b + b - \sqrt{5}b}{2} = 1$$

$$b = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Így } f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Vizsgáljuk meg az $\left\{ \frac{f_{n+1}}{f_n} \right\}_n$ sorozat határértékét, ha $n \rightarrow \infty$!

Az előzőek szerint

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \text{ és } f_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right],$$

$$\text{így } \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n}.$$

Ha $n \rightarrow \infty$, akkor $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n \rightarrow 0$, mert $\left| \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right| < 1$.

Ezért $\left\{ \frac{f_{n+1}}{f_n} \right\}_n \rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ha $n \rightarrow \infty$.

Ez a szám pedig egy olyan aranymetszésnek a teljes szakasza, amelynek a nagyobbik szelete az 1 egység hosszúságú szakasz. Ha kiindulunk a $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ -ből, mint az

1 egységnyi szakasz nagyobbik aranymetszetéből, akkor ha $a_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ és $a_2 = 1$,

teljesül, hogy $a_1 + a_2 = a_1 q$, ahol $q = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Tetszőleges n - re pedig igaz, hogy a

$$a_n + a_{n+1} = a_1 q^n.$$

Az aranymetszések sorozata tehát, egy speciális sorozat, mert egyszerre Fibonacci - típusú és mértani sorozat is.

Az aranymetszés és a Fibonacci - sorozat kapcsolatához azonban más úton is eljuthatunk. Ehhez vezessünk be néhány új fogalmat.

A legfontosabb a lánc tört meghatározása. Kiindulásképpen válasszuk az $\frac{a}{b}$

törtet, ahol a és b relatív prímszámok. Ha $a > b$, akkor az osztást elvégezve kapjuk, hogy

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{r_1}{b}, \text{ ahol } q_1 \text{ és } r_1 \text{ pozitív egész számok és } r_1 < b.$$

Ha most az $\frac{r_1}{b}$ tört számlálóját és nevezőjét r_1 - gyel osztjuk, akkor :

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}}.$$

Ha $\frac{b}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1}$, ahol a q_2 és r_2 pozitív egész számok és $r_2 < r_1$, akkor:

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{r_2}{r_1}}.$$

Az $\frac{r_2}{r_1}$ tört számlálóját és nevezőjét r_2 - vel osztva, és tekintve, hogy

$$\frac{r_1}{r_2} = q_3 + \frac{r_3}{r_2}, \text{ ahol } q_3 \text{ és } r_3 \text{ pozitív egész számok, és } r_3 < r_2, \text{ kapjuk, hogy :}$$

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{r_3}{r_2}}}.$$

Ha ezt az eljárást tovább folytatjuk, nyerjük az $\frac{a}{b}$ tört lánc tört alakját. Ha ez az eljárás

véget ér, akkor véges lánc törtet kapunk. Racionális számok átalakítása esetén, mindig ilyen lánc törthöz jutunk.

A $\sqrt{a}$ irracionális szám is átalakítható lánc törtté. Legyen $\sqrt{a}$ értéke a b és $b + 1$ természetes számok között.

Legyen $\sqrt{a} = b + x$, ahol $0 < x < 1$, x irracionális.

$$a = (b + x)^2 = b^2 + 2bx + x^2$$

$$a - b^2 = x(2b + x).$$

Jelöljük $a - b^2$ -et d -vel, ekkor

$$d = x(2b + x)$$

és

$$x = \frac{d}{2b + x}.$$

Az előzőek szerint $\sqrt{a} = b + x = b + \frac{d}{2b + x}$.

Helyettesítsük x helyébe ismételt az $x = \frac{d}{2b + x}$ kifejezést, ekkor a

$$\sqrt{a} = b + \frac{d}{2b + \frac{d}{2b + \frac{d}{2b + \frac{d}{2b + \dots}}}}$$

végtelen lánc törtet kapjuk. A d -vel való egyszerűsítések után a lánc tört a következő alakot veszi fel:

$$\sqrt{a} = b + \frac{1}{\frac{2b}{d} + \frac{1}{2b + \frac{1}{\frac{2b}{d} + \frac{1}{2b + \frac{1}{\frac{2b}{d} + \dots}}}}}$$

Ez a lánc tört alkalmas arra, hogy a $\sqrt{a}$ közelítő törtjeit meghatározhassuk.

Vizsgáljuk meg a $\sqrt{5}$ lánc törtjét!

Mivel $2 < \sqrt{5} < 3$, ezért $d = 5 - 4 = 1$, és $2b = 4$.

Így tehát:

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \dots}}}}}$$

ezért $\sqrt{5}$ közelítő törtjei:

$$2, \frac{9}{4}, \frac{38}{17}, \frac{161}{72}, \frac{682}{305}, \dots$$

Az egymást követő közelítő törtek felváltva kisebbek vagy nagyobbak a teljes törtnél, a $\sqrt{5}$ - nél ezért $\sqrt{5}$ értéke mindig két szomszédos közelítő tört között van, pl.

$$\frac{682}{305} < \sqrt{5} < \frac{161}{72}.$$

A közelítő érték hibája kisebb lesz a két tört különbségénél, vagyis

$$\frac{161}{72} - \frac{682}{305} = \frac{1}{72 \cdot 305} < \frac{1}{70 \cdot 300} = \frac{1}{21\,000} - \text{nél.}$$

A $\sqrt{5}$ lánc törtjének segítségével határozzuk meg a $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ - nek, vagyis az

aranymetszés arányszámának lánc törtjét.

Az előzőekben leírtak szerint

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \dots}}}}$$

Ebből

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \dots}}}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8 + \frac{1}{4 + \frac{1}{8 + \frac{1}{4 + \dots}}}}$$

Tehát ennek a végtelen lánc törtnek a közelítő törtjei:

$$\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{21}{34}, \frac{89}{144}, \frac{377}{610}, \dots$$

A közelítő törték ezen sorozata a Fibonacci - féle hányadossorozat egyik részsorozata, mégpedig az

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \frac{55}{89}, \frac{89}{144}, \frac{142}{234}, \frac{233}{377}, \frac{377}{610}, \dots$$

sorozatnak a második, ötödik, nyolcadik, általában $(2 + 3k)$ - adik elemei alkotják a részsorozatot.

Ha pedig egy sorozat konvergens, akkor a határértéke megegyezik minden egyes részsorozatának a határértékével. Tehát ebben az esetben:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Végül vessünk egy pillantást a hányadossorozat elemeinek lánc tört alakjára:

$$\frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{1}{\frac{f_n + f_{n-1}}{f_n}} = \frac{1}{1 + \frac{f_{n-1}}{f_n}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{f_{n-1} + f_{n-2}}{f_{n-1}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}}}} = \dots = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{f_1}}}}}}}}$$

Tehát:

$$\frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}}}$$

Az $\frac{f_n}{f_{n+1}}$ lánc törtjének közelítő törtjei rendre a sorozat elemeit szolgáltatják.

Az aranymetszésnek ezek a tulajdonságai még misztikusabbá teszik ezt az arányt a kutatók számára.

7. Befejezés

Úgy érzem, dolgozatommal sikerült elérnem azt a célt, hogy az aranymetszésről és alkalmazásának területeiről rövid, lényegre törő összefoglalást adjak.

Bár ez a téma szinte kimeríthetetlen, és rengeteg példát említhettem volna a festészet, a zene, az építészet és a többi művészeti ág köréből, de a szakdolgozat kerete erre nem ad lehetőséget. Ezért igyekeztem a legérdekesebb és a legismertebb alkotásokat kiemelni és az aranymetszéssel való kapcsolatát bemutatni.

Talán bemutathattam volna a dolgozatomban az aranymetszéssel kapcsolatos szembenálló álláspontokat: azokat, amelyek szerint valóban isteni, örök ez az arány, és mindenben felfedezhető; és azokat a véleményeket, amelyek szerint mindez erőltetett és mondvacsinált. Azért nem említettem ezeket az ellentétes nézeteket, mert nem tudok olyan bizonyítékot vagy ismérvet felmutatni, amely eldönthetné ezt a régóta fennálló vitát.

Úgy gondolom, hogy ebben a kérdésben senki sem hivatott a vita eldöntésére. Mindenki csak saját, szubjektív gondolatait tolmácsolhatja.

A szakdolgozat elkészítésének ideje alatt, a szakirodalom tanulmányozása és az említett kísérlet elemzése után az aranymetszéssel kapcsolatos állásfoglalásom a következő:

Úgy vélem, hogy az aranymetszés a természetben is létező, harmóniát és szépséget sugárzó arány. Azok a festészeti, zenei, irodalmi alkotások és szerkesztések, amelyekben - akár tudatosan, akár tudatlanul, de megérzéssel - megtalálható ez az isteni arány, szebbé, harmonikusabbá válnak, és közelebb kerülnek azoknak az embereknek a lelkéhez, akik csodálják őket.

8. Szakirodalom

1. CSIBRA ISTVÁN - SZERDAHELYI ISTVÁN : Esztétikai abc
Kossuth Könyvkiadó, Bp., 1977.
2. EUKLIDÉSZ : Elemek
Gondolat, Bp., 1983.
3. FALUS RÓBERT : Az arany metszés legendája
Magvető Kiadó, Bp., 1982.
4. FALUS RÓBERT : Görög harmónia
Gondolat, Bp., 1980.
5. GERŐCS LÁSZLÓ: A Fibonacci - sorozat általánosítása
Tankönyvkiadó, Bp., 1988.
6. HAGENMAIER, OTTO : Der goldene Schnitt
Heidelberg, 1963.
7. HAJÓS GYÖRGY : Bevezetés a geometriába
Tankönyvkiadó, Bp., 1991.
8. JUSKEVICS, A. P. : A középkori matematika története
Gondolat, Bp., 1982.
9. KINDER, HERMANN - HILGEMAN, WERNER : Világtörténelem SH - atlasz
Springer Hungarica, Bp., 1992.
10. LÉVÁRDI LÁSZLÓ - SAIN MÁRTON : A ráció üzenetei
Typotex, Bp., 1993.
11. SAIN MÁRTON: A Fibonacci - sorozattól lánc törtekkel az arany metszésig
in. A lánc törtektől a számítógépig. Élő matematika 3.
Tankönyvkiadó, Bp., 1975.
12. SAIN MÁRTON : Matematikatörténeti abc
Tankönyvkiadó, Bp., 1977.
13. SAIN MÁRTON : Nincs királyi út
Gondolat, Bp., 1986.
14. SZABÓ IMRE : Ötszög és piramis
Bp., 1993.
15. TÖRÖK JUDIT : Fibonacci - sorozat
Tankönyvkiadó, Bp., 1984.
16. WAERDEN, B. L. VAN DER : Egy tudomány ébredése
Gondolat, Bp., 1977.