

Euklidészi geometria

Vizsgalap A.

Az első, “elméleti” részben a teendő:

- a megadott elméleti terület definícióinak és tételeinek pontos kimondása az egymásra épülésük sorrendjében, és
- a *dőlt betűvel* kiemelt tétel bizonyítása.

A második, “gyakorlati” részben a teendő a feladatok megoldása *indoklással*.

A munkához rendelkezésre álló idő 55 perc, kizárólag a nyomtatott feladatlapon, vagy a vizsgáztató által adott papíron végezhető. Másmilyen papíron beadott munka érvénytelen.

Az értékelés a vizsgáztató szubjektív, de legjobb tudása szerinti döntés eredményeként %-ban megadott szám.

Elmélet:

(a1) Forgások és csoportjaik, az *azonos középpontú forgások szorzásának kommutativitása*.

Gyakorlat:

(a2) Az illeszkedési axiómák alapján mutassuk meg, hogy az affin síkon minden egyenesen ugyanannyi pont van.

(a3) Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely a $3x + 2y = 2$ egyenesnek a $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ mátrixú dilatació szerinti képe!

(a4) Az $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ vektor merőleges a $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$ vektorra, az $\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$ vektor pedig merőleges a $7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ vektorra. Mekkora az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok hajlásszöge?

(a5) Egy pozitív körüljárású ABC háromszög A , B és C csúcsa körül rendre 2α , 2β , 2γ szögű negatív irányú forgatást végzünk. Mi lesz e három forgatás szorzata?

Euklidészi geometria

Vizsgalap B.

Az első, “elméleti” részben a teendő:

- a megadott elméleti terület definícióinak és tételeinek pontos kimondása az egymásra épülésük sorrendjében, és
- a *dőlt betűvel* kiemelt tétel bizonyítása.

A második, “gyakorlati” részben a teendő a feladatok megoldása *indoklással*.

A munkához rendelkezésre álló idő 55 perc, kizárólag a nyomtatott feladatlapon, vagy a vizsgáztató által adott papíron végezhető. Másmilyen papíron beadott munka érvénytelen.

Az értékelés a vizsgáztató szubjektív, de legjobb tudása szerinti döntés eredményeként %-ban megadott szám.

Elmélet:

(b1) Eltolások és csoportjaik, az *eltolások szorzásának kommutativitása*

Gyakorlat:

(b2) Az illeszkedési axiómák alapján mutassuk meg, hogy az affin síkon minden ponton ugyanannyi egyenes megy át!

(b3) Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely az $x + 3y = 3$ egyenesnek a $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ mátrixú dilatació szerinti képe!

(b4) Az $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b}$ vektor merőleges a $4\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ vektorra, az $\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$ vektor pedig merőleges a $7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ vektorra. Mekkora az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok hajlásszöge?

(b5) Milyen egyszerűbb transzformációval helyettesíthető a $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ és $(0, 1)$ csúcsokkal megadott négyzet négy oldalegyenesére való tengelyes tükrözések szorzata, ha az első síknegyedbe eső oldala egyenesével kezdve az óra járásával ellentétes sorrendben hajtjuk végre a tükrözéseket?

Euklidészi geometria Vizsgalap C.

Az első, “elméleti” részben a teendő:

- a megadott elméleti terület definícióinak és tételeinek pontos kimondása az egymásra épülésük sorrendjében, és
- a *dőlt betűvel* kiemelt tétel bizonyítása.

A második, “gyakorlati” részben a teendő a feladatok megoldása *indoklással*.

A munkához rendelkezésre álló idő 55 perc, kizárólag a nyomtatott feladatlapon, vagy a vizsgáztató által adott papíron végezhető. Másmilyen papíron beadott munka érvénytelen.

Az értékelés a vizsgáztató szubjektív, de legjobb tudása szerinti döntés eredményeként %-ban megadott szám.

Elmélet:

(c1) Izometriák és egybevágóságok, *fixpont-tétel kettő fixpont esetén*.

Gyakorlat:

(c2) Legyen az affin síkban az ABC háromszög esetén $(ABP) = (ACQ) = 1$.

- Mutassuk meg, hogy a BQ és CP szakaszok metszik egymást egy M pontban!
- Határozzuk meg a (BQM) és (CPM) osztóviszonyok értékét!

(c3) Bontsuk fel a $(4, 1, -8)$ vektort a $(0, 1, 2)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges összetevőkre.

(c4) Egy koordinátázásban az α és β nyírások mátrixai rendre $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Mi a β fix egyenesének egyenlete ezen koordinátázásban?
- Mi a mátrixa, és milyen típusú transzformáció a $\alpha\beta$ szorzatleképezés?

(c5) A $A = (1, -2)$ pontot először az $x - y = -3$, utána az $x + y = 0$ egyenletű egyenesre tükrözzük. Mik lesznek az eredményül kapott pont koordinátái?

Euklidészi geometria

Vizsgalap D.

Az első, “elméleti” részben a teendő:

- a megadott elméleti terület definícióinak és tételeinek pontos kimondása az egymásra épülésük sorrendjében, és
- a *dőlt betűvel* kiemelt tétel bizonyítása.

A második, “gyakorlati” részben a teendő a feladatok megoldása *indoklással*.

A munkához rendelkezésre álló idő 55 perc, kizárólag a nyomtatott feladatlapon, vagy a vizsgáztató által adott papíron végezhető. Másmilyen papíron beadott munka érvénytelen.

Az értékelés a vizsgáztató szubjektív, de legjobb tudása szerinti döntés eredményeként %-ban megadott szám.

Elmélet:

(d1) Homotéciák és hasonlóság, a *nem izometrikus homotéciák fixpontja*.

Gyakorlat:

(d2) Legyen az affin síkban az ABC háromszög esetén $(ABP) = (ACQ) = -3$.

- Mutassuk meg, hogy a BQ és CP szakaszok metszik egymást egy M pontban!
- Határozzuk meg a (BQM) és (CPM) osztóviszonyok értékét!

(d3) Bontsuk fel a $(9, 1, -7)$ vektort a $(1, 2, -1)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges összetevőkre.

(d4) Egy koordinátázásban az α és β nyírások mátrixai rendre $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Mi az α fix egyenesének egyenlete ezen koordinátázásban?
- Mi a mátrixa, és milyen típusú transzformáció a $\beta\alpha$ szorzatleképezés?

(d5) A $A = (-2, 3)$ pontot először az $x - y = 0$, utána az $x + y = 2$ egyenletű egyenesre tükrözzük. Mik lesznek az eredményül kapott pont koordinátái?

Euklidészi geometria

További gyakorló feladatok

- (Tf1) Az illeszkedési axiómák alapján mutassuk meg, hogy az affin síkon minden egyenesen ugyanannyi pont van.
- (Tf2) Igaz-e, hogy az affin sík minden egyenesén végtelen sok pont van? Miért?
- (Tf3) Az illeszkedési axiómák alapján mutassuk meg, hogy az affin síkon minden ponton ugyanannyi egyenes megy át!
- (Tf4) Igaz-e, hogy az affin sík minden pontján ugyanannyi egyenes megy át?
- (Tf5) Az illeszkedési axiómák alapján mutassuk meg, hogy egy ponton át ugyanannyi egyenes megy át, ahány pont egy egyenesre illeszkedik!
- (Tf6) Mutassuk meg, hogy az affin síkon az egyenesek párhuzamossága ekvivalenciareláció!
- (Tf7) Mutassuk meg, hogy az affin síkon egy a egyenest metsző l egyenes metszi az a -val párhuzamos b egyenest is!
- (Tf8) Miért igaz, hogy az affin síkon minden egyenesen kívül is van pont?
- (Tf9) Fogalmazzuk meg a nyitott könyv tételének tagadását!
- (Tf10) Adott a különböző A és B pont. Határozzuk meg az AB egyenes A , illetve B kezdőpontú félegyenesének metszeteit!
- (Tf11) Adott a különböző A és B pont. Határozzuk meg az affin sík A , illetve B kezdőpontú félegyenesének metszeteit!
- (Tf12) Mutassuk meg, hogy egy affin szabályos hatszög átellenes csúcsait összekötő átlói egy ponton mennek keresztül!
- (Tf13) Mutassuk meg, hogy egy affin szabályos nyolcszög átellenes csúcsait összekötő átlói egy ponton mennek keresztül!
- (Tf14) Mutassuk meg, hogy egy affin szabályos $2n$ -szög átellenes csúcsait összekötő átlói egy ponton mennek keresztül!
- (Tf15) Ha az α sík a γ síkot az a egyenesben metszi, a β sík a γ síkot a b egyenesben metszi, akkor lehet-e kitérő az a és a b egyenes?
- (Tf16) Ha három különböző síknak van egy közös egyenese, akkor mit mondhatunk a mindhárom síkot metsző negyedik síknak az előző három síkkal való metszészonalairól?
- (Tf17) Ha három különböző síknak van egy közös pontja, akkor mit mondhatunk a mindhárom síkot metsző negyedik síknak az előző három síkkal való metszészonalairól?

- (Tf18) Ha három különböző síknak egyetlen közös pontja van, akkor mit mondhatunk a mindhárom síkot metsző negyedik síknak az előző három síkkal való metszésvonalairól?
- (Tf19) Ha három különböző, páronként nem párhuzamos síknak van egy közös egyenese, akkor mit mondhatunk a mindhárom síkot metsző negyedik síknak az előző három síkkal való metszésvonalairól?
- (Tf20) Ha három különböző, páronként nem párhuzamos síknak nincsen közös pontja, akkor mit mondhatunk a mindhárom síkot metsző negyedik síknak az előző három síkkal való metszésvonalairól?
- (Tf21) Ha három különböző, páronként nem párhuzamos síknak nincsen közös egyenese, akkor mit mondhatunk a mindhárom síkot metsző negyedik síknak az előző három síkkal való metszésvonalairól?
- (Tf22) Lehet-e két kitérő egyenesre párhuzamos síkpárt illeszteni?
- (Tf23) Egy síkban vannak-e ugyanazon egyenest metsző, egymással párhuzamos egyenesek?
- (Tf24) Melyik igaz a következő állítások közül?
 (a) Tetszőleges három páronként kitérő egyenesre illeszthető egy-egy sík úgy, hogy azok párhuzamosak.
 (b) Van három olyan páronként kitérő egyenes, amelyekre illeszthető egy-egy sík úgy, hogy azok párhuzamosak.
- (Tf25) Legyenek az affin síkban az $ABCD$ paralelogramma oldalain P és Q olyan pontok, amelyekre $(ABP) = (ADQ) = 1$. Legyen AC és PQ metszéspontja M . Mennyi lesz a (PQM) osztóviszony?
- (Tf26) Legyenek az affin síkban az $ABCD$ paralelogramma oldalain P és Q olyan pontok, amelyekre $(ABP) = (ADQ) = \alpha$. Legyen AC és PQ metszéspontja M . Mennyi lesz a (PQM) osztóviszony?
- (Tf27) Legyenek az affin síkban az $ABCD$ paralelogramma oldalain P és Q olyan pontok, amelyekre $(ABP) = \alpha$, $(ADQ) = \beta$. Legyen AC és PQ metszéspontja M . Mennyi lesz a (PQM) osztóviszony?
- (Tf28) Legyenek az affin síkban az $ABCD$ paralelogramma oldalain P és Q olyan pontok, amelyekre $(ABP) = (ADQ) = 1$. Legyen AC és PQ metszéspontja M . Mennyi lesz az (ACM) osztóviszony?
- (Tf29) Legyenek az affin síkban az $ABCD$ paralelogramma oldalain P és Q olyan pontok, amelyekre $(ABP) = (ADQ) = \alpha$. Legyen AC és PQ metszéspontja M . Mennyi lesz az (ACM) osztóviszony?
- (Tf30) Legyenek az affin síkban az $ABCD$ paralelogramma oldalain P és Q olyan pontok, amelyekre $(ABP) = \alpha$, $(ADQ) = \beta$. Legyen AC és PQ metszéspontja M . Mennyi lesz az (ACM) osztóviszony?
- (Tf31) Legyen az affin síkban az ABC háromszög esetén $(ABP) = 2$, $(ACQ) = 2$.
 (a) Mutassuk meg, hogy a BQ és CP szakaszok metszik egymást egy M pontban!
 (b) Határozzuk meg a (BQM) és (CPM) osztóviszonyok értékét!
- (Tf32) Legyen az affin síkban az ABC háromszög esetén $(ABP) = \lambda > 0$, $(ACQ) = \mu > 0$.
 (a) Mutassuk meg, hogy a BQ és CP szakaszok metszik egymást egy M pontban!
 (b) Határozzuk meg a (BQM) és (CPM) osztóviszonyok értékét!

(c) Adjunk megoldást arra az esetre, amikor $\alpha = \beta!$

- (Tf33) Írjuk fel annak az koordinátaegyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $(3, -3)$ ponton, és párhuzamos a $4x + 4y = 7$ egyenletű koordinátaegyenessel!
- (Tf34) Írjuk fel annak az koordinátaegyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $(3, 3)$ ponton, és párhuzamos a $2x - 2y = 7$ egyenletű koordinátaegyenessel!
- (Tf35) Írjuk fel annak az koordinátaegyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $(-2, 4)$ ponton, és párhuzamos a $6x - 2y = 4$ egyenletű koordinátaegyenessel!
- (Tf36) Izomorf-e az affin síkon a P kezdőpontú helyvektorok tere és a Q kezdőpontú helyvektorok tere?
- (Tf37) Megadható-e izomorfizmus a az affin síkon a P kezdőpontú helyvektorok tere és a Q kezdőpontú helyvektorok tere között?
- (Tf38) Van-e közös pontja a következő egyenletekkel rendelkező három koordinátaegyenesnek:
 $x + y = 1$, $2y - y = 3$, $-x + 3y = -2$?
- (Tf39) Van-e közös pontja a következő egyenletekkel rendelkező három koordinátaegyenesnek:
 $-x + y = 1$, $2x - 3y = 3$, $-x + 3y = -2$?
- (Tf40) Van-e közös pontja a következő egyenletekkel rendelkező három koordinátaegyenesnek:
 $2x + y = 1$, $2x + 3y = 3$, $-x + 3y = 1$?
- (Tf41) Izomorf-e az S affin sík S_0 helyvektor tere és az $\mathbf{R}^2$ vektortér?
- (Tf42) Izomorf-e az S affin sík S_0 helyvektor tere és az $\mathbf{R}^2$ vektortér?
- (Tf43) Tükrözzük a $4x - 3y = 10$ egyenletű egyenesre a $(2; 2)$ pontot!
- (Tf44) Egy téglalap alakú ország királya az ország belsejében lévő fővárosából elindulva a szomszédos országok királyaival határtalálkozáson tárgyal, egyiktől a szomszédos másikhoz haladva, majd hazatér. Hová kell megszervezni a találkozót, hogy a királynak a legkevesebbet kelljen utazni?
- (Tf45) Két nyírás mátrixa $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Mi lesz a két nyírás szorzata?
- (Tf46) Izomorf-e az S affin sík S_0 helyvektor tere és az $\mathbf{R}^2$ vektortér?
- (Tf47) Tükrözzük a $4x - 3y = 10$ egyenletű egyenesre a $(3; 3)$ pontot!
- (Tf48) Tükrözzük a $3x + 4y = 5$ egyenletű egyenesre a $(3; 3)$ pontot!
- (Tf49) Tükrözzük az $x = 5$ egyenletű egyenesre az $x - 3y = 2$ egyenest!

- (Tf50) Tükrözzük az $y = -2$ egyenletű egyenesre a $2x - 3y = 4$ egyenest!
- (Tf51) Egy téglalap alakú ország királya az ország belsejében lévő fővárosából elindulva a szomszédos országok királyaival határtalálkozáson tárgyal, egyiktől a szomszédos másikhoz haladva, majd hazatér. Hová kell megszervezni a találkozót, hogy a királynak a legkevesebbet kelljen utazni?
- (Tf52) Egy téglalap alakú biliárdasztalon van egy fehér és egy piros golyó.
- A feladat az, hogy az asztal négy szomszédos oldalán egymás után visszaverődve végül eltaláljuk a piros golyót. Milyen irányban kell ellökni a fehér golyót?
 - Ha a piros golyó helyzete rögzített, határozzuk meg azokat a pontjait az asztalnak, ahonnan a fehér golyót elindítva a feladat megoldható!
- (Tf53) Egy téglalap alakú biliárdasztalon van egy fehér és egy piros golyó.
- A feladat az, hogy először az asztal két hosszabb, majd a két rövidebb oldalán egymás után visszaverődve végül eltaláljuk a piros golyót. Milyen irányban kell ellökni a fehér golyót?
 - Ha a fehér golyó helyzete rögzített, határozzuk meg azokat a pontjait az asztalnak, ahova a piros golyót letéve a feladat megoldható!
- (Tf54) Két nyírás mátrixa $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Mi lesz a két nyírás szorzata?
- (Tf55) Két nyírás mátrixa $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Mi lesz a két nyírás szorzata?
- (Tf56) Két nyírás mátrixa $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$. Mi lesz a két nyírás szorzata?
- (Tf57) Két nyírás mátrixa $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mi lesz a két nyírás szorzata?
- (Tf58) Van-e invariáns egyenese egy nyírásnak?
- (Tf59) Van-e invariáns egyenese egy origót fixen hagyó nyírásnak?
- (Tf60) Adjuk meg az összes olyan nyírást, amelynek van invariáns egyenese!
- (Tf61) Mi lesz egy dilatáció és egy középpontos tükrözés szorzata?
- (Tf62) Konjugáljunk egy dilatációt egy középpontos tükrözéssel! Mi lesz az eredmény?
- (Tf63) Konjugáljunk egy középpontos tükrözést egy dilatációval! Mi lesz az eredmény?
- (Tf64) Mit nevezünk involúciónak?
- (Tf65) Mit nevezünk involutorikus leképezésnek?
- (Tf66) Igaz-e, hogy az affin síkon az involúciók csoportot alkotnak?

- (Tf67) Mutassuk meg, hogy ha két involúció szorzata független a sorrendjüktől, akkor a szorzat is involúció!
- (Tf68) Legyen A az a egyenes pontja. Milyen leképezés lesz a $\tau_a\tau_A$ szorzat?
- (Tf69) Adottak egy e egyenes és rajta a C pont. Mi lesz a τ_C és τ_e tükrözések $\tau_e\tau_C$ szorzata?
- (Tf70) Adottak az affin síkon egy a egyenes és egy A pont. Mi lesz a rájuk vonatkozó tükrözések $\tau_A\tau_a$ szorzata?
- (Tf71) Adottak az affin síkon egy a egyenes és egy A pont. Mi lesz a rájuk vonatkozó tükrözések $\tau_a\tau_A$ szorzata?
- (Tf72) Adottak az affin síkon egy a egyenes és egy A pont. Mikor lesz a rájuk vonatkozó tükrözésekre $\tau_A\tau_a = \tau_a\tau_A$?
- (Tf73) Tükrözzük az $O(0,0)$ és $A(1,1)$ pontokon átmenő egyenest az $x + y = 3$ egyenletű e egyenesre, és adjuk meg az egyenletét!
- (Tf74) Tükrözzük az $A(-1,1)$ és $B(1,-1)$ pontokon átmenő egyenest az $x - y = 2$ egyenletű e egyenesre, és adjuk meg az egyenletét!
- (Tf75) Az $A(2,3)$ pontot először az $x - y = 2$, utána a $2x + 2y = 8$ egyenletű egyenesre tükrözzük. Adjuk meg a végül kapott pontot!
- (Tf76) Az $A(-1,3)$ pontot először az $-x - 2y = 4$, utána a $4x - 2y = 8$ egyenletű egyenesre tükrözzük. Adjuk meg a végül kapott pontot!
- (Tf77) Az $A(1,3)$ pontot először az $x - y = 0$, utána az $x - y = 8$ egyenletű egyenesre tükrözzük. Adjuk meg a végül kapott pontot!
- (Tf78) Az $A(3,0)$ pontot először az $x + y = 0$, utána az $x + y = 6$ egyenletű egyenesre tükrözzük. Adjuk meg a végül kapott pontot!
- (Tf79) Az $5x + 2y = 4$ egyenletű egyenest először az $2x - 5y = 0$, utána az $2x - 5y = 8$ egyenletű egyenesre tükrözzük. Adjuk meg a végül kapott egyenest!
- (Tf80) Az $x + 4y = 4$ egyenletű egyenest először az $4x - y = 0$, utána az $4x - y = 5$ egyenletű egyenesre tükrözzük. Adjuk meg a végül kapott egyenest!
- (Tf81) Legyen a és b két egyenes az euklidészi síkon, C rajtuk kívül egy pont. Határozzuk meg az e egyenest, melynek az a -val és b -vel való metszéspontjai által meghatározott szakaszt C felezi!
- (Tf82) Legyen k_1 és k_2 két kör az euklidészi síkon, C rajtuk kívül egy pont. Határozzuk meg az e egyenest, melynek az k_1 -gyel és k_2 -vel való metszéspontjai által meghatározott szakaszt C felezi!

Euklidészi geometria

További elméleti kérdések

- (Te1) Affin sík axiómái, *nyitott könyv tétele Desargues-síkon*.
- (Te2) Kötött és szabad vektorok, a *párhuzamos szelők tétele*.
- (Te3) Helyvektorok és koordinátázás, az *egyeneselek egyenlete*.
- (Te4) Minkowski-metrikák, norma és Euklidészi metrika, *Pitagorasz tétele*.
- (Te5) Izometriák és egybevágóságok, *fixpont-tétel kettő fixpont esetén*.
- (Te6) Forgások és csoportjaik, az *azonos középpontú forgások szorzásának kommutativitása*.
- (Te7) Eltolások és csoportjaik, az *eltolások szorzásának kommutativitása*.
- (Te8) Homotéciák és hasonlóság, a *nem izometrikus homotéciák fixpontja*.
- (Te9) Kötött és szabad szögek, *forgás-szög*.
- (Te10) Másodrendű görbék és a kúp szeletei, *állandó távolságösszegű pontok halmaza ellipszis*.
- (Te11) Terület- és térfogat, *Bolyai Farkas tétele*.
- (Te12) Terület- és térfogatformák, vektoriális szorzat, *kifejtési tétel*.