# Eukl. Gyak 2010.02.02. (2 ZH lesz, kiadott feladatsorok)

1. Feladat
Illeszkedési axiómákból igazoljuk, hogy
(1) két egyenes párhuzamos, vagy pontosan egy pontban metszik egymást.
(2) a párhuzamosság ekvivalencia-reláció

2. Feladat
A P és Q pontokat e-partosnak nevezzük, ha
$\overline{PQ} \cap e = \emptyset$
(1) Igazoljuk, hogy az e-partosság ekvivalencia-reláció
(2) legfeljebb két ekvivalencia-osztálya van.
(3) ~~Pont~~ legalább két ekvivalencia-osztály van.

3. Feladat
Bizonyítsuk, hogy minden nyílt szakasznak van pontja.

4. Feladat
A sík bijektív, egyenestartó transzformációi tartják a párhuzamosságot. A egyenestartó és párhuzamosság tartó leképezések mikor bijektívek?

5. Feladat
Mi a helyzet, ha a 4. Feladatban csak egyenességtartást teszünk fel?

6. Feladat
Paralelogramma átlói metszik egymást

Eukl. Gyak. 2010.02.09.

1. Feladat
Igazoljuk, hogy ideális térben egy síkhoz hozzávéve a rá illeszkedő ideális pontokat, ezek egy ideális egyenesen vannak, ~~idea~~ és ~~id~~ a sík ideális egyenesét alkotják, mellyel a sík ideális síkká bővül.

2. Feladat
Ideális sík két egyenesének pontosan egy közös pontja van.

3. Feladat
Igazoljuk, hogy egy Desargues-síkban érvényes a nyitott könyv tétele! Igazoljuk, hogy a tér minden síkja Desargues-típusú!

4. Feladat
Minden paralelogramma átlói metszik egymást

5. Feladat
ABC háromszögben S a súlypont M a magasságpont. Számoljuk ki az $\overrightarrow{AS}$ vektort (és $\overrightarrow{AM}$) az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok-ból.

6. Feladat
Az ABC △ AB és BC oldalát P és Q $1:\lambda$ arányban osztja. Számoljuk ki az $AQ \cap CP = X$ pont ~~vek~~ $\overrightarrow{BX}$ vektorát és az ~~...~~ $AC \cap BX = M$ metszéspont $\overrightarrow{BM}$ vektorát.

7. Feladat* (Sylvester feladata)
Ha véges sok pont bármely párjának egyenesén van egy harmadik pontja is, akkor minden pontja ugyanazon egyenesre esik.

# Eukl. Gyak. 2010.02.16.

**1. Feladat**

Egy $PQRS$ paralelogramma átlóinak metszéspontja $O$. A $\varphi$ koordinátázásra ~~az O pont~~ $\varphi(O)=(0,0)$, $\varphi(P)=(1,0)$ és $\varphi(Q)=(0,1)$. A $\psi$ koordinátázásra $\psi(Q)=(0,0)$, $\psi(P)=(0,1)$ és $\psi(R)=(1,0)$. Írjuk fel a $\psi \circ \varphi^{-1}$ koordináta-transzformációt.

**2. Feladat**

Egy $ABC$ háromszög súlypontja $O$. Ha a $\varphi$ koordinátázásra $\varphi(O)=(0,0)$, $\varphi(A)=(0,1)$ és $\varphi(B)=(1,0)$, akkor mi lesz $\varphi(C)$?

**3. Feladat**

Az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ koord trafó affinitása és az $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ affinitása megegyezik?

**4. Feladat**

Milyen koordtrafó viszi az $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$ ponthármast a sorrend megtartásával a $(-1,1)$, $(-1,0)$, $(-2,1)$ ponthármasba?

**5. Feladat**

Adott egy háromszög. Van olyan koord-trafó, mely ennek ~~pont~~ csúcsait az oldalfelező pontokba szemben lévő viszi? Ha van milyen alakú?

**6. Feladat**

Bizonyítsuk be, hogy bármely négyszög oldalfelező pontjai paralelogrammát alkotnak!

**7. Feladat**

Egy konvex $P$ sokszög oldalfelező pontjaiból alkotott sokszöget $M(P)$-vel jelölve igazoljuk, hogy $\lambda^{\infty} M^{\infty}(P)$ egy szabályos sokszög affin képe ha $\lambda$ olyan, hogy $\lambda^{\infty} M^{\infty}(P)$ csúcsai nem tűnnek el.

# Eukl. Gyak. 2010. 02. 23.

## ~~1~~. Feladat
2 Egyenességet tartó leképezés a síkon csakkor kollineáció, ha tartja az osztóviszonyt és létezik három nem kollineáris pont, melyeket nem kollineáris pontokba visz.

## ~~2~~. Feladat
3 Igazoljuk a Pasch-axióma állítását koordináta-síkon.

## ~~3~~. Feladat
4 Igazoljuk a párhuzamos szelők tételét ~~ha~~ párhuzamos egyenesek metszésére.

## ~~4~~. Feladat
5 Bizonyítsuk be, hogy $\overrightarrow{(x,y)(u,v)} = \overrightarrow{(x',y')(u',v')}$ akkor és csak akkor, ha $(u-x, v-y) = (u'-x', v'-y')$.

## ~~5~~. Feladat
6 Koordináta-pontok egy halmazát hívjuk S-egyenesnek, ha valamely $y=(x+a)^2+b$ vagy $x=c$ egyenlet megoldáshalmaza. Igazoljuk, hogy az S-egyenesekre teljesülnek (1) az illeszkedési axiómák, (2) a rendezési axiómák (3) a folytonossági és ~~...~~ folytatási axiómák, valamint ~~az~~ (4) ez a sík izomorf a koordináta-síkkal.

## 7. Feladat
A PQR kollineáris pontok $(PQR) = \omega$ (affin) osztóviszonya ~~az~~ a ~~...~~ szám, melyre $\omega \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{PR}$. Igazoljuk, hogy minden O pontra $\overrightarrow{OR} = \frac{1}{\omega+1}\overrightarrow{OP} + \frac{\omega}{1+\omega}\overrightarrow{OQ}$ ha $\omega \neq -1$. Lehet ~~az~~ $\omega = -1$? Ábrázoljuk az osztóviszonyt az R függvényeként. Ábrázoljuk az osztóviszonyt a Q függvényeként.

# Eukl. Gyak. 2010.03.02.

## 1. Feladat

Ha egy metrikus affin $(S,d)$ téren a $\lim_{\lambda\to 0} d(O,P^\lambda)$ független az $O\neq P$ pontok választásától, akkor minden izometrikus transzformáció affinitás.

## 2. Feladat

A kollineációk nem változtatják az affin osztóviszonyt.

## 3. Feladat*

Egy metrika az affin síkon pontosan akkor Minkowski-féle, ha $|(POR)| = d(P,R)/d(O,R)$ minden kollineáris $POR$ ponthármasra.

(a) $d(X_O(\lambda,R), O) = |\lambda|\, d(O,R)$

(b) paralelogramma szemköztioldalai

## 4. Feladat

Igazoljuk, hogy 2 affin tükrözés szorzata affin forgás.

## 5. Feladat

Egy ABC △ oldalaira kifelé szabályos △-ek ~~re~~ vannak. Igazoljuk, hogy ezek középpontjai szabályos △-et alkotnak.

## 6. Feladat

Rajzoljuk fel a következő metrikák indikátrixát

(1) nagyvárosi metrika: $d((x,y),(z,t)) = |x-z|+|y-t|$

(2) köbös metrika: $= \sqrt[3]{|x-z|^3+|y-t|^3}$

~~(3)~~

## 7. Feladat

Miféle „távolságmérésnek" felelnek meg az a normaszerű függvény, melyet a következők határoznak meg.

(1) a $(0,1)$, $(-1,1)$, $(1,1)$ háromszög

(2) az $|y|\cdot|x| = 1$ hiperbolák

Eukl. Gyak 2010. 03. 09. ZH helyben

1. Definiálja az affin eltolást, tükrözést és forgatást!
2. A $(-1,1)$ pontból elindulva az x-tengely érintésével kell eljutnunk az $(5,2)$ pontba. a ~~[illegible]~~. Számoljuk ki a legrövidebb ilyen útvonalnak az x-tengellyel közös pontját!
3. Egy háromszög két csúcsa $(-1,0)$ és $(1,0)$, súlypontja pedig $(1/2, 1/2)$. Hol van a harmadik csúcsa?
4. Számoljuk ki azt az affin transzformációt, mely a $(0,0)$ $(2,2)$ $(0,2)$ pontokat a sorrend megtartásával az $(1,1)$ $(-1,-1)$ $(-1,0)$ pontokba viszi.
5. Számoljuk ki a $3x+4y=5$ és $1x+2y=0$ egyenesek metszéspontját!
6. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, mely átmegy az $(1,1)$ és $(7,9)$ pontokon!

# Eukl. Gyak. 2010. 03. 16.

1. Legyen az euklidészi síkon $\langle x, n\rangle = c$ egyenes, és $y \mapsto y + 2(c - \langle y, n\rangle)n$ egy leképezés. Igazoljuk, hogy ez a tükrözés.

2. Igazoljuk, hogy az $\varphi: x \mapsto x + 2(c - \langle x, n\rangle)\cdot n$ leképezés bármely rögzített $n$ egységvektor és $c$ valós szám esetén involúció, mely fixen hagyja a $c = \langle x, n\rangle$ egyenest!

3. Bizonyítsuk be, hogy $\varphi$ izometria!

4. Adottak a $e_1$, $e_2$ és $e_3$ egyenesek és rajtuk sorban a $P_1$, $P_2$ és $P_3$ pontok. Szerkesszünk olyan $e$ egyenest, melyre $d(P_1, e \cap e_1) = d(P_2, e \cap e_2) = d(P_3, e \cap e_3)$!

5. Két sík tükör helyzete olyan, hogy szorzatuk forgásának mátrixa $\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2n} & \sin\frac{\pi}{2n} \\ -\sin\frac{\pi}{2n} & \cos\frac{\pi}{2n} \end{pmatrix}$. Igazoljuk, hogy a tükrök metszetére merőleges síkban mozgó fény $2n$ tükröződés után eredeti haladási irányával ellentétes irányba verődik vissza!

6.* Szerkesszük meg egy háromszög legkisebb kerületű beírt háromszögét.

# Eukl. Gyak. 2010.03.23.

1. Adott négy, közös pontra illeszkedő egyenes és két szakasz. Szerkesszünk olyan paralelogrammát, melynek csúcsai a négy egyenesre esnek, oldalai pedig a két szakasszal egybevágók!
2. (Illeszkedési tétel) Bármely négyszög szemközti oldalpárjainak felezőpontjait valamint átlóinak felezőpontjait összekötő egyenesek közös pontra illeszkednek!
3. Ha egy hatszög szemközti oldalai párhuzamosak és egybevágóak, akkor (a szemközti csúcsait összekötő) átlói ~~egy~~ közös pontra illeszkednek.
4. Paralelogramma oldalaira kifelé rajzolt négyzetek középpontjai négyzetet alkotnak.
5. Adott egy paralelogramma egy oldala és ezen kívüli csúcsait tartalmazó egy-egy egyenes. Szerkesszük meg a paralelogrammát!
6. Adott négy egyenes és két ~~arány~~számú. Szerkesszünk olyan egyenest, mely úgy metszi a négy egyenest, hogy az általuk kivágott 3 szakasz hosszának arányai éppen a két aránnyal egyeznek meg.

Eukl. Gyak. 2010.03.30.

1.) Egy izometria akkor és csak akkor visz minden egyenest vele párhuzamos egyenesbe, ha eltolás vagy középpontos tükrözés.

2.) Határozzuk meg a merőlegességet tartó affinitásokat!

3.) Igazoljuk, hogy egy háromszög szögeinek összege az egyenesszög

4.) Legyen $\varphi_E$ és $\varphi_F$ egy-egy affin forgatás, melyek fixen hagyják az $E$ illetve $F$ pontot. Igazoljuk, hogy az $E$ pontból kiinduló $e_+$ és az $F$ pontból kiinduló ~~#~~ $f_+$ félegyenesekből képzett $(e_+, \varphi_E(e_+))$ valamint $(f_+, \varphi_F(f_+))$ kötött szögek akkor és csak akkor vannak $m$-relációban, ha az affin forgatásokban szereplő $\alpha_E$ és $\alpha_F$ paraméterek közti különbség $2\pi$ egészszámú többszöröse.

6.) Az $ABCD$ négyzetben a $P$ pontra ~~DCP~~ $DCP$ szabályos háromszög. Ekkor ~~PABA~~ $12 \cdot PAB\measuredangle =$ az egyenesszög.

mel. Gyak. 2010.04. ~~15~~. ~~28~~. 20.

1. Forgáscsoport elemeinek fixpontjai egybeesnek.
2. Véges forgáscsoport ciklikus és minden forgásának szöge $2k\pi/n$ alakú valamely $k, n \in \mathbb{N}$ számokra.
3. Ha izometriák egy véges csoportja tartalmaz tükrözéseket, akkor azok tengelyei mind átmennek egy közös ponton.
4. Szabályos n-szög szimmetriacsoportja 2n elemű.
5. Határozzuk meg a szabályos n-szög szimmetriacsoportjának pályáit.
6. A G síkizometriacsoport mellett a P pont pályája egy e egyenes korlátos része. Mi lehet a G csoport?

Eukl. Gyak. 2010. 04. 27.

(1) Egy hiperbola egyik ágának érintői az aszimptotákkal háromszögeket alkotnak. Hogyan változik ezen háromszögek területe, a különböző érintőket választva?

(2) Vegyük egy parabola három érintőjét és mindegyiken a másik kettővel vett metszetet valamint a parabolával vett érintési pontot. Bizonyítsuk be, hogy mindhárom ~~egyenesen~~ érintőn a középső pont ugyanazon arányban osztja a másik két pont szakaszát. Görbe-hosszak aránya!

(3) Igazoljuk, hogy bármely két ellipszishez létezik olyan affinitás, mely egymásba viszi őket.

(4) Bizonyítsuk be, hogy 5 pont meghatároz egy kúpszeletet, de négy nem.

(5) A P és Q pont azonos arányban osztja az ABC△ AB és BC oldalait mint az R pont a PQ szakaszt. Mi az ilyen R pontok halmaza?

(6) Milyen ellipszisek esetén lehetséges az, hogy az egyik fókuszból elindított fénysugár az ellipszisen való tükröződések után eredeti irányára merőleges irányból érkezzen vissza az adott fókuszba?

Eukl. Gyak. 2010. 05. 04. ZH helyben

1. Fogalmazza meg az ~~ix~~ síkizometriák fixpont-tételét!
2. Definiálja ~~a hasonló~~ két alakzat hasonlóságát és fogalmazza meg ennek kapcsolatát a homotéciákkal.
3. Igazolja, hogy egy eltolást megadó két középpontos tükrözés ~~két~~ fixpontjait egyazon eltolással elmozdítva, az eltolás nem változik meg!
4. Igazolja, hogy páros sok inverzió szorzata nem lehet egyenlő páratlan sok inverzió szorzatával!
5. Adott ~~egy~~ $a, b, c$ oldalakkal egy háromszög, ezekkel szemben rendre $\alpha, \beta, \gamma$ szögekkel. Számítsuk ki az

$$a(\sin\beta - \sin\gamma) + b(\sin\gamma - \sin\alpha) + c(\sin\alpha - \sin\beta)$$

összeget!
6. Igazoljuk, hogy egy háromszög belső szögfelezője átmegy a másik két csúcshoz tartozó külső szögfelezők metszéspontján!