

Euklidészi geometria Vizsgalap A.

Az első, “elméleti” részben a teendő:

- a megadott elméleti terület definícióinak és tételeinek pontos kimondása az egymásra épülésük sorrendjében, és
- a *dőlt betűvel* kiemelt tétel bizonyítása.

A második, “gyakorlati” részben a teendő a feladatok megoldása.

Az értékelés a vizsgáztató szubjektív, de legjobb tudása szerinti döntés eredménye, de

- az elméleti vizsgatétel 50%-a, vagy
- a gyakorlati feladatok 33%-a

alatti teljesítés esetén a többitől függetlenül a vizsga eredménye elégtelen.

A munkához rendelkezésre álló idő 55 perc.

Elmélet:

(a1) Eltolások és csoportjaik, az *eltolások szorzásának kommutativitása*

Gyakorlat:

- (a2) Az $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ vektor merőleges a $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$ vektorra, az $\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$ vektor pedig merőleges a $7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ vektorra. Mekkora az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok hajlásszöge?
- (a3) Milyen egyszerűbb transzformációval helyettesíthető a $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ és $(0, 1)$ csúcsokkal megadott négyzet 4 oldalegyenesére való tengelyes tükrözések szorzata, ha az y -tengelyre eső oldalával kezdve az óra járása szerinti sorrendben hajtjuk végre a tükrözéseket?
- (a4) Az ABC szabályos háromszög AC oldalának CE meghosszabbítására felrajzoljuk a CDE szabályos háromszöget, majd az AD szakasz felezőpontját M -el, a BE szakasz felezőpontját pedig P -vel jelöljük. Igazoljuk, hogy a CMP egy szabályos háromszög!

Euklidészi geometria Vizsgalap B.

Az első, “elméleti” részben a teendő:

- a megadott elméleti terület definícióinak és tételeinek pontos kimondása az egymásra épülésük sorrendjében, és
- a *dőlt betűvel* kiemelt tétel bizonyítása.

A második, “gyakorlati” részben a teendő a feladatok megoldása.

Az értékelés a vizsgáztató szubjektív, de legjobb tudása szerinti döntés eredménye, de

- az elméleti vizsgatétel 50%-a, vagy
- a gyakorlati feladatok 33%-a

alatti teljesítés esetén a többitől függetlenül a vizsga eredménye elégtelen.

A munkához rendelkezésre álló idő 55 perc.

Elmélet:

(b1) Homotéciák és hasonlóság, a *nem izometrikus homotéciák fixpontja*.

Gyakorlat:

- (b2) Az $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b}$ vektor merőleges a $4\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ vektorra, az $\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$ vektor pedig merőleges a $7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ vektorra. Mekkora az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok hajlásszöge?
- (b3) Egy negatív körüljárású ABC háromszög A , B és C csúcsa körül rendre 2α , 2β , 2γ szögű pozitív irányú forgatást végzünk. Mi lesz e három forgatás szorzata?
- (b4) Szerkesszünk háromszöget, ha ismerjük egyik oldalát, az oldallal szemközti szögét és az oldal egyik végpontjából induló súlyvonalat.

Euklidészi geometria Vizsgalap C.

Az első, “elméleti” részben a teendő:

- a megadott elméleti terület definícióinak és tételeinek pontos kimondása az egymásra épülésük sorrendjében, és
- a *dőlt betűvel* kiemelt tétel bizonyítása.

A második, “gyakorlati” részben a teendő a feladatok megoldása.

Az értékelés a vizsgáztató szubjektív, de legjobb tudása szerinti döntés eredménye, de

- az elméleti vizsgatétel 50%-a, vagy
- a gyakorlati feladatok 33%-a

alatti teljesítés esetén a többitől függetlenül a vizsga eredménye elégtelen.

A munkához rendelkezésre álló idő 55 perc.

Elmélet:

(c1) Forgások és csoportjaik, az *azonos középpontú forgások szorzásának kommutativitása*.

Gyakorlat:

(c2) Bontsuk fel a $(4, 0, -28)$ vektort a $(2, 1, -2)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges összetevőkre.

(c3) Egy negatív körüljárású ABC háromszög a , b és c oldalaira sorban tükrözéseket végzünk, majd ezt még egyszer elvégezzük. Mi lesz ezen hat tükrözés szorzata?

(c4) Írjunk egy adott ABC háromszögbe olyan háromszöget, melynek oldalai rendre párhuzamosak az adott l_1 , l_2 és l_3 egyenesekkel!

Euklidészi geometria Vizsgalap D.

Az első, “elméleti” részben a teendő:

- a megadott elméleti terület definícióinak és tételeinek pontos kimondása az egymásra épülésük sorrendjében, és
- a *dőlt betűvel* kiemelt tétel bizonyítása.

A második, “gyakorlati” részben a teendő a feladatok megoldása.

Az értékelés a vizsgáztató szubjektív, de legjobb tudása szerinti döntés eredménye, de

- az elméleti vizsgatétel 50%-a, vagy
- a gyakorlati feladatok 33%-a

alatti teljesítés esetén a többitől függetlenül a vizsga eredménye elégtelen.

A munkához rendelkezésre álló idő 55 perc.

Elmélet:

(d1) Inverzió, *inverzió szögtartása*.

Gyakorlat:

(d2) Bontsuk fel a $(18, 3, -18)$ vektort a $(1, 2, -1)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges összetevőkre.

(d3) Milyen egyszerűbb transzformációval helyettesíthető a $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, b) és $(0, b)$ csúcsokkal megadott téglalap 4 csúcsára való centrális tükrözések szorzata, ha az origóba eső csúcsával kezdve az óra járása szerinti sorrendben hajtjuk végre a tükrözéseket?

(d4) Írjunk az ABC háromszögbe olyan négyzetet, melynek két csúcsa az AB oldalra, további kettő csúcsából pedig egy-egy az AC és BC oldalakra esik!

Euklidészi geometria

További feladatok

- (T1) Milyen egyszerűbb transzformációval helyettesíthető egy négyzet 4 oldalegyenesére való tengelyes tükrözések szorzata (egymásutánja), ha az óra járása szerinti sorrendben hajtjuk végre a tükrözéseket?
- (T2) Bontsuk fel a $(7, 0, -28)$ vektort a $(2, 1, -2)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges összetevőkre.
- (T3) Tekintsük az $A_1A_2A_3$ és $B_1B_2B_3$ szabályos háromszögeket. Mutassuk meg, hogy az A_iB_i szakaszok F_i felezőpontjaiból alkotott $F_1F_2F_3$ háromszög is szabályos.
- (T4) Ismerjük egy ABC háromszög oldalaira kifelé rajzolt ABC_1 , BCA_1 , CAB_1 szabályos háromszögek A_1 , B_1 , C_1 csúcsát. Szerkesszük meg az ABC háromszöget!
- (T5) Egy ABC háromszög két oldalára kívülről az $ACPQ$ és az $BCRS$ négyzetet emeljük, melyek középpontja O_1 , illetve O_2 . Jelöljük az AB oldal felezőpontját F -fel. Bizonyítsuk be, hogy O_1O_2F háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, melynek derékszögű csúcsa F .
- (T6) Adott két nem párhuzamos egyenes, e és f továbbá egy P pont ($P \notin e, f$). Szerkesszünk olyan kört, amely érinti az egyeneseket és átmegy a P ponton!
- (T7) Írjunk egy adott ABC háromszögbe olyan háromszöget, melynek oldalai adott l_1 , l_2 és l_3 egyenessel párhuzamosak!
- (T8) Egy negatív körüljárású ABC háromszög A , B , C csúcsa körül rendre 2α , 2β , 2γ szögű pozitív irányú forgatást végzünk. Mi lesz e három forgatás szorzata?
- (T9) Adott a térben az O ponton átmenő páronként egymásra merőleges a , b , c egyenes. Az ezekre az egyenesekre vonatkozó tükrözéseket jelölje ϱ_a , ϱ_b , ϱ_c . Milyen transzformáció a $\varrho_a\varrho_b\varrho_c$ szorzat?
- (T10) Igazoljuk, hogy egy ABC szabályos háromszög köré írt k_0 körrel koncentrikus k kör tetszőleges P pontjára $PA^2 + PB^2 + PC^2 = \text{állandó}$.
- (T11) Egy $ABCD$ tetraéderben az AB és CD él merőleges egymásra. Ugyancsak merőleges egymásra az AC és BD él. Bizonyítsuk be, hogy az AD és BC él szintén merőleges egymásra!
- (T12) A $4\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $-\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon V' térfogata hányszorosa az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatának?
- (T13) Egy tetraéder négy oldallapjának súlypontjai: $(1, 2, 1)$, $(2, 3, 4)$, $(3, 1, 2)$, $(4, -1, 3)$. Határozzuk meg a tetraéder csúcspontjait!
- (T14) Számítsuk ki a $2x - 2y + z - 3 = 0$ és $6x + 2y - 3z - 5 = 0$ síkok alkotta szögeket felező síkok egyenleteit!
- (T15) Tükrözzük az $S : x + y - 3z = 0$ síkot a $P(6, 2, 1)$ pontra és írjuk fel az S' tükörkép egyenletét!
- (T16) Mutassuk meg, hogy egy négyszög akkor és csak akkor paralelogramma, ha mindkét átlója két egyenlő területű háromszögre bontja.

- (T17) Számítsuk ki az $8x + 19y - 4z + 21 = 0$ és $8x + 19y - 4z - 21 = 0$ párhuzamos síkok távolságát!
- (T18) Számítsuk ki a koordinátasíkok és a $3x + 6y + 2z - 18 = 0$ sík által határolt tetraéder origón átmenő magasságának hosszát!
- (T19) Egy konvex négyszögben keressük meg azt a pontot, melyre az oldalfelező pontoktól mért távolságok összege minimális.
- (T20) Szerkesszünk háromszöget a három magasságából!
- (T21) Számítsuk ki annak a tetraédernek a térfogatát, amelyet a koordinátasíkok és a $3x + 6y + 2z - 18 = 0$ sík határol!
- (T22) Bizonyítsuk be, hogy ha az $ABCD$ négyszögben az AC és BD átlók merőlegesek egymásra, akkor $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.
- (T23) Mekkora a koordinátaikkal megadott $\mathbf{a}(3, 4, 2)$, $\mathbf{b}(3, 1, 2)$ és $\mathbf{c}(2, 3, 1)$ helyvektorok által kifeszített tetraédernek az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ helyvektorok síkjára merőleges magassága?