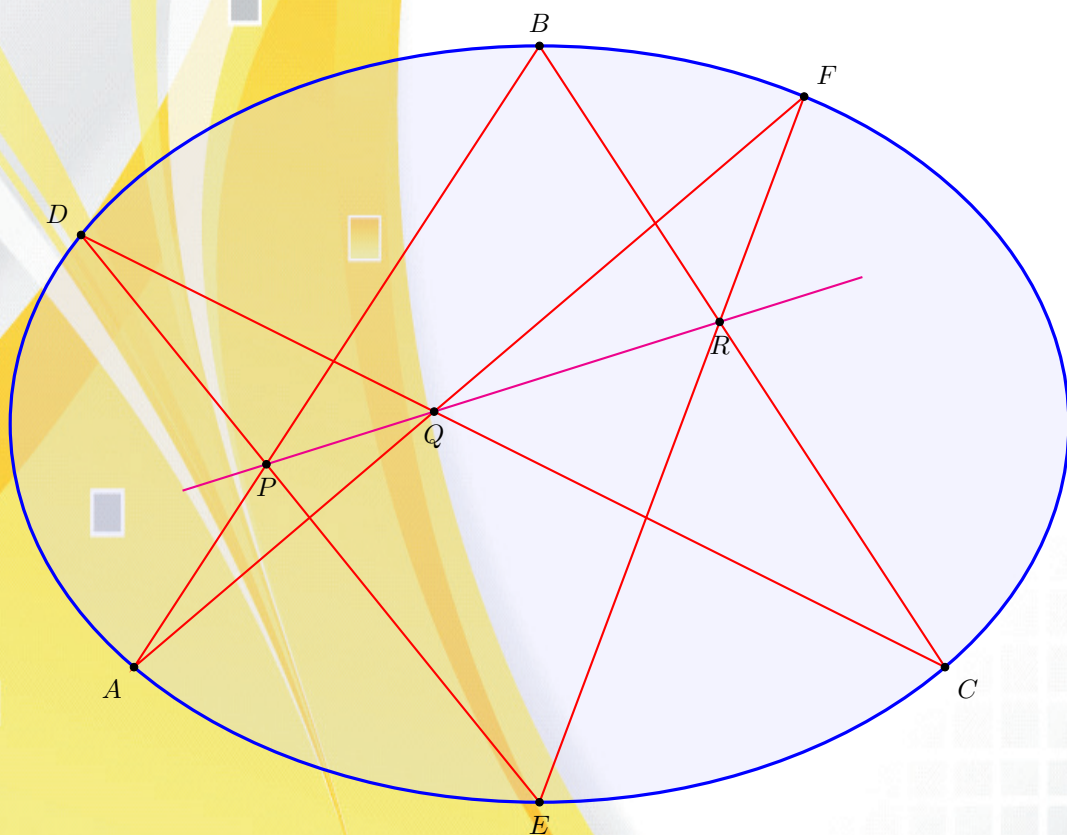


Kurusa Árpád

Nem euklidészi geometriák



Kurusa Árpád

Nem euklidészi geometriák

A címlapon egy ellipszisbe írt hatszög és szemközti oldalpárjainak a Pascal tétel miatt kollineáris metszéspontjai láthatók.

Ez a könyv a Polygonnál hasonló címen megjelent könyv frissített és elektronizált verziója.

Ez a dokumentum

- nem köztulajdon,
- kizárólag személyes használatra tölthető le,
- másolása, sokszorosítása és terjesztése tilos,
- bemutatása, előadása vagy felhasználása más műhöz kizárólag jelen dokumentum pontos megnevezésével (szerző, cím, megjelenés éve) és a publikáció oldalra mutató url (nem a közvetlen letöltési link) megadásával engedélyezett,
- semmilyen módon sem módosítható, nem készíthető belőle se átdolgozás, se származékos mű, és
- nem használható fel kereskedelmi célra.



Előszó

Ez a könyv a 2009-ben ugyancsak „Nemeuklidészi geometriák” címmel a Polygon Kiadó Jegyzettár sorozatában megjelent könyv új kivitelű verziója.

Az új kivitel több szempontból is jelentős előrelépés, hiszen a korábbi T_EX-rendszer felváltása a L^AT_EX-rendszerre többek között lehetővé teszi, hogy a tartalom fejlesztése jóval könnyebb legyen, és ennek követése is könnyebbé válik az igen pontos verziószámozás megjelenése miatt.

Az idő előrehaladtával remélhetőleg a tartalom is fejlődést fog mutatni, amely tekintetben az első lépés rengeteg ismert hiba korrigálása volt, néhány ponton pedig javult a prezentáció és a logikai felépítés is.

A 2021. augusztus 10-ei verzió létrejöttében alapvető szerepet játszott a SARS-CoV-2 vírus miatt 2021-ben is tartó COVID-19 világjárvány elfojtására alkalmazott közösségi távolságtartás.

Szeged, 2021. október 15.

dr. Kurusa Árpád

Eredeti előszó

Habár az euklidészi geometriát már több mint kétezer éve ismerik a matematikusok, és Euklidész axiómái „kiállták az idő próbáját”, nem volt még egy olyan fontos és nehéz kérdése a matematikának azóta sem, mint amit éppen Euklidész párhuzamossági axiómája indukált.

A párhuzamossági axiómát rögtön azután sokan vitatták, ahogy Euklidész beemelte axiómarendszerébe. A kételkedők arra hivatkoztak, hogy ez az axióma tapasztalatilag még közelítőleg sem ellenőrizhető, hiszen ehhez a metszéspont *hiányának* végtelen hosszan való ellenőrzésére lenne szükség, de voltak olyanok is, akik úgy vélték, hogy ez az axióma bizonyítható kell legyen Euklidész többi axiómájából kiindulva.

Majd’ kétezer év bizonyítási kísérletei után a XIX. században Bolyai János (1802-1860), majd N. I. Lobacsevszkij (1792-1856) és részben F. Gauss (1777-1855) is igazolta, hogy a párhuzamossági axióma független a többi euklidészi axiómától. Vizsgálataik közben mind a három „felfedező” a hiperbolikus geometriát találta.

E könyv célja, hogy a maga természetes módján vezesse be a legegyszerűbb nemeuklidészi geometriákat az affín illetve euklidészi geometriát már ismerő egyetemi hallgatók számára. Az euklidészi geometriában előbb a gömböt vizsgálva fedezünk fel nemeuklidészi jelenségeket, aztán annak absztrakcióján térképezzük fel a projektív geometriát (valójában csak a projektív síkot vizsgálva), majd ennek a háromszög-egyenlőtlenséget kielégítő metrizálásait vizsgálva, a többi között megtaláljuk a hiperbolikus geometria realitását is.

Mindhárom nemeuklidészi geometriában részletesen megvizsgáljuk a háromszög szögeinek és oldalainak mértékei közötti trigonometriai összefüggéseket. Ilyen összefüggés a metrizálás feltételeként szabott háromszög-egyenlőtlenség mellett a koszinusz- és a szinusztétel, valamint az euklidészi esetben kiemelkedően fontos összefüggés a háromszög szögeinek összegéről. A trigonometriai összefüggések lényegi ismérve, hogy függetlenek a háromszög helyétől és helyzetétől, így egy trigonometriai összefüggés akkor és csak akkor érvényes valamely háromszögre, ha *minden* ugyanolyan oldalhosszakkal és szögmértékekkel rendelkező háromszögre is teljesül. Mivel koszinusz- és szinusztétel mindegyik klasszikus (euklidészi, elliptikus, hiperbolikus) geometriában van, minden ilyen geometriában értelmes dolog egybevágóságról, egybevágósági transzformációkról beszélni, melyek mindig az izometriákkal egyeznek meg. Ugyanakkor a koszinusztétel konkrét alakja azt mutatja, hogy a hasonlóság kizárólag az euklidészi geometriában használható fogalom, hiszen a másik két geo-

metriában egy háromszög szögeinek mértékei meghatározzák az oldalak hosszait is.

A trigonometriai összefüggéseket használva a klasszikus nemeuklidészi geometriákban — megkezdett utunkat mintegy visszafelé járva — megtaláljuk az euklidészi geometriát a „végtelen sugarú” gömbfelületen és Bolyai-síkon is. Ebből egyrészt következik, hogy hétköznapi tapasztalatainknak egyik geometria sem mond ellent, hiszen tapasztalási méreteinkhez képest a világ mérete gyakorlatilag végtelen, másrészt logikai értelemben bebizonyosodik, hogy az euklidészi, az elliptikus vagy akár a hiperbolikus geometria ellentmondásmentességének elfogadása a többi klasszikus geometria ellentmondásmentességét is implikálja, vagyis nincs logikai sorrend ezen geometriák között.

E könyv nem más, mint a címével megegyező egyetemi előadásaim egyfajta rendezettebb lejegyzetelése időnként jóval részletesebben, a végén pedig jelentősen kibővítve, mégis a többi bevezető egyetemi tárgytól való viszonylagos függetlenség tantervi igényének kiszolgálására, és a minél szélesebb olvasóközönség elérése érdekében, a magasabb matematikai ismeretek felhasználása helyett gyakran konkrét számolásokkal, vagy akár kisebb kerülőutak alkalmazásával. Voltaképpen ugyanezen indokok vezettek arra is, hogy a könyv csak a kétdimenziós nem euklidészi geometriákat vizsgálja, de úgy gondolom ez nagyon is kifizetődő abban a tekintetben, hogy emiatt minden nemeuklidészi jelenség konkrét, jól ismert geometriai objektumokon mutatkozik meg.

E jegyzet elkészültéhez nagyban hozzájárult 2007 őszének néhány szorgalmas és türelmes matematika tanári szakirányos BSc hallgatója, akiknek jegyzet iránti olthatatlan vágya komoly motivációt biztosított számomra. Köszönöm Horváth Erika segítségét az anyag egy részének gépelésében, Levente fiam segítőkészségét néhány itt szereplő ábra megrajzolásában, valamint feleségem és lányom támogató türelmét.

Szeged, 2009. március 10.

dr. Kurusa Árpád

Tartalomjegyzék

Előszó	i
Tartalomjegyzék	v
1. Gömbi geometria	1
1.1. Metrika	3
1.2. Izometrikus transzformációk	5
1.3. Trigonometria	6
1.4. Felszínmérés	8
1.5. A „végtelen sugarú” félgömbfelület geometriája	11
2. Projektív sík	15
2.1. Homogén koordináták, kettősviszony és dualitás	17
2.2. Elválasztás	25
2.3. Egyenesek közti projektivitások	29
2.4. A sík projektivitásai és kollineációi	34
2.5. Kollineációk	37
2.6. Perspektív kollineációk	41
2.7. Korrelációk és polaritások	52
2.8. Hiperbolikus polaritások határhalmazai	59
2.9. Kúpszeletek	64
2.10. Sugársorok közti projektivitások	67
2.11. Kúpszeleteket helyben hagyó transzformációk	73
3. Projektív sík metrizálásai	81
3.1. Invariáns metrikák egyeneseken	81
3.2. Elliptikus metrizálás	84
3.3. Parabolikus metrizálás	89
3.4. Hiperbolikus metrizálás	102

4. Bolyai-sík	107
4.1. Hiperbolikus izometriák és egybevágóságok	109
4.2. Modellek	111
4.3. Trigonometria	119
4.4. Területmérés	123
4.5. A „végtelen sugarú” Bolyai-sík geometriája	129
5. Projektív terek, axiomatika és koordinátázás	133
5.1. Projektív sík axiomatizálása és koordinátázása	133
5.2. Projektív terek és homogén koordináták	152
5.3. A Klein-megfeleltetés	164
F. Függelék	169
F.1. Geometriák és csoportok	169
F.2. Geometriák és metrikák	173
F.3. Törtlineáris leképezések	176
F.4. Az algebra néhány alapfogalma	183
F.5. Valós mátrixokról	186
F.6. Egyebek	188
Irodalomjegyzék	191
Jelölések és konvenciók	193
Név- és tárgymutató	195
Tennivalók	200

1

Gömbi geometria

A gömbfelületen két pont között a legrövidebb út éppen a főkörök mentén vezet, így a gömbi geometriában a főkörök játsszák azt a szerepet, amit az egyenesek az euklidészi geometriában. Jelentős eltérést okoz azonban, hogy a gömbfelületen bármely két különböző főkör pontosan kettő pontban metszi egymást.

Tekintsünk egy r sugarú gömbfelületet az origó körül. Ennek minden pontját egyértelműen meghatározza az origóból oda mutató r normájú (hely) vektor, ezért a továbbiakban a gömbfelület minden pontját a felé mutató r normájú helyvektorral reprezentáljuk.

Minden irányított főkört az origón átmenő síkja metsz ki a gömbfelületből, így egyértelműen megadható az origóban a síkjára állított, a főkör irányával pozitív irányítást adó, vagyis a jobbkézsabálynak megfelelő r hosszúságú normális (hely)vektorral (a síkra merőleges r hosszú vektorok), ezért a továbbiakban minden irányított főkört az origóban a síkjára állított r hosszúságú, a főkör irányával pozitív irányítást adó merőleges helyvektorral reprezentálunk.

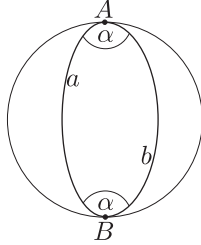
Reprezentációnk alapján egy A pont akkor és csak akkor esik egy e főkörre, ha $\langle e, A \rangle = 0$. Az A és B pontokra illeszkedő főkör $\pm r \frac{A \times B}{|A \times B|}$, az e és f főkörök két metszéspontja pedig $\pm r \frac{e \times f}{|e \times f|}$. Egymással szemköztes vagy átellenes pontoknak hívjuk azon pontokat, melyeket összekötő húr átmérő, vagyis átmegy az origón. Az A pont szemköztes pontja tehát a $-A$ pont.

A gömbfelület két pontjának gömbi távolságán az egyetlen kettejükre illeszkedő főkör két köríve közül a rövidebbik ívhosszát értjük, vagyis az r sugarú gömbfelület A és B pontjának gömbi távolságát a az A és B pontokat átellenes pontjaikkal összekötő egyenesek α szögének r -szerese adja, melyre ezért teljesül a $d(A, B) = r\alpha = r \cdot \arccos(\langle A, B \rangle / r^2)$ formula. A szemköztes pontok gömbi távolsága így $r\pi$, a gömbön mérhető legnagyobb gömbi távolság.

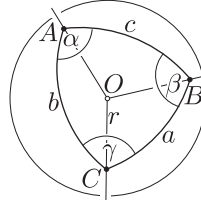
Két főkör (metszés)szögén valamely metszéspontjukban vett érintőik által bezárt szöget értjük. Ez nyilván ugyanaz, mint a főköröket a gömbfelületből kimetsző síkok szöge, ami az e és f főkörökre nyilván $\arccos(\langle e, f \rangle / r^2)$.

Ha két fél főkör végpontjai egybeesnek, akkor azt mondjuk, hogy az A, B végpontjaik és az a, b fél főkörök *kétszöget* alkotnak. Az A és B pontokat a kétszög csúcsának, az a és b fél főköröket a kétszög oldalainak, végül a két főkör metszésszögét

a kétszög nyílászögének nevezzük. A kétszög belsejéhez tartozónak mondunk minden olyan pontot, amelyen áthaladó bármely főkör a kétszög oldalait úgy metszi, hogy a pont a két metszéspont főkörének rövidebbik ívére illeszkedik.



1. ábra



2. ábra

Tekintsünk egy ABC háromszöget. Ennek a , b és c oldalai a csúcspárokra illeszkedő, rendre az A, B, C csúcsokat nem tartalmazó főkörök rövidebb ívei. Az ABC háromszög α , β valamint γ szögei rendre az A, B, C csúcsokat kimetsző oldalpárok (főkörpárok) által bezárt szög, vagy 0, ha egy oldalpár elemei egybeesnek.

Az a oldal főköre síkjának normálisa $\frac{B \times C}{|B \times C|}$, hossza pedig $a = r \cdot \arccos \langle B, C \rangle / r^2$. (Ahogy általában elfogadott, az oldal és hossza jelölésében mi sem teszünk különbséget.)

Az ABC háromszög oldalaihoz tartozó főköröket reprezentáló vektorok által a gömbfelületen kiszúrt

$$\hat{a} = r \frac{B \times C}{|B \times C|}, \quad \hat{b} = r \frac{C \times A}{|C \times A|} \quad \text{és} \quad \hat{c} = r \frac{A \times B}{|A \times B|}$$

pontok által meghatározott háromszöget az ABC háromszög polárisának vagy polárháromszögének vagy poláris háromszögének nevezzük.

Tétel. A polárháromszög polárháromszöge az eredeti háromszög. A polárháromszög minden oldalának hossza az eredeti háromszög megfelelő szögét kiegészítő szög r -szere.

Bizonyítás. A definíciót és a kifejtési tételt alkalmazva a polárháromszög $\hat{b}$ és $\hat{c}$ csúcsához tartozó $\hat{A}$ oldalára

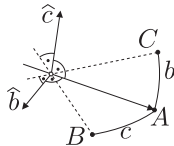
$$\hat{A} = r \frac{\hat{b} \times \hat{c}}{|\hat{b} \times \hat{c}|} = r \frac{(C \times A) \times (A \times B)}{|(C \times A) \times (A \times B)|} = r \frac{\langle C \times A, B \rangle A - \langle C \times A, A \rangle B}{|\langle C \times A, B \rangle A - \langle C \times A, A \rangle B|} = A,$$

ívhosszára pedig

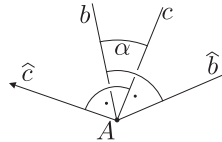
$$\cos \left(\frac{d(\hat{b}, \hat{c})}{r} \right) = \frac{\langle \hat{b}, \hat{c} \rangle}{r^2} = \left\langle \frac{C \times A}{|C \times A|}, \frac{A \times B}{|A \times B|} \right\rangle = - \left\langle \frac{A \times C}{|A \times C|}, \frac{A \times B}{|A \times B|} \right\rangle = -\cos \alpha$$

adódik, ami bizonyítja a tételt. ■

A tétel állításait számolás nélkül is igazolhatjuk. Az első állítás abból következik, hogy a polárháromszög csúcsait az eredeti háromszög oldalaira merőleges egyenesek szúrják ki, ezért a polárháromszög minden oldalának síkja merőleges az eredeti háromszög azon csúcsának megfelelő egyenesre, mely a polárháromszög oldalán a polárháromszög két csúcsát kiszűrő mindkét oldalon rajta van. A második állítás belátásához először vegyük észre, hogy a polárháromszög csúcsai kijelölik a rájuk merőleges origón átmenő síkok és ezekben lévő főkörök pozitív irányítását, amelyek viszont meghatározzák az ABC háromszög egy körüljárását. Eszerint az A, C és B, A vektorpárok a c és b oldalak síkjában pozitív irányítású bázisok.



1. ábra



2. ábra

Ez alapján elegendő a síkok irányítatlan szögét és a síkokra merőleges egyenesek irányítatlan szögeit összefüggésbe hoznunk. Ha a b, c oldalak síkjainak irányítatlan metszésszöge α , akkor $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, így az ezekre merőleges egyenesek $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \pm \alpha = \pi \pm \alpha$ irányítatlan szöget zárnak be. Mivel $\pi - \alpha \leq \pi/2 \leq \pi + \alpha$, a két sík irányítatlan metszésszöge $\pi - \alpha$, ami a tétel második állítása.

Jegyezzük meg, hogy tételünk második állítása miatt $\sin(d(\hat{c}, \hat{b})/r) = \sin \alpha$ is teljesül.

1.1. Metrika

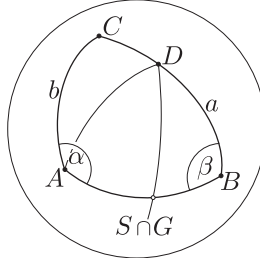
A gömbi távolság *metrikát* ad a gömbön, hiszen nem negatív, pontosan akkor 0, ha a két pont egybeesik, és az alábbiak szerint a háromszög-egyenlőtlenség is teljesül.

Tétel. *Egyenlőszárú gömbháromszög alapon fekvő szögei egyenlőek. Általános háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög található.*

Bizonyítás. Tekintsük az a és b oldalt az ABC háromszögben. Vegyük az AB euklidészi szakasz felező merőleges $\mathcal{S}$ síkját. Ez az $\mathcal{S}$ sík nyilván átmegy a gömb középpontján és A tükörképe $\mathcal{S}$ -re a B .

Mivel a gömbi távolság szigorúan monoton növekvő a két ponthoz tartozó húr euklidészi hosszának függvényében, a gömbfelületen pontosan az $\mathcal{S}$ pontjai azok, melyek egyenlő gömbi távolságra vannak az A és B pontoktól. Ha a C pont az $\mathcal{S}$ síkra esik, akkor a gömbfelület $\mathcal{S}$ síkra vonatkozó szimmetriája igazolja a tétel első állítását.

Ha a C pont nincs az $\mathcal{S}$ síkon, akkor a b vagy az a oldal egyike, mondjuk az a metszeni fogja az $\mathcal{S}$ síkot valamely D pontban, miközben a másik, a b szakasz nem metszi azt. Ebből következik, hogy az AC húr rövidebb mint a BC húr.



6. ábra

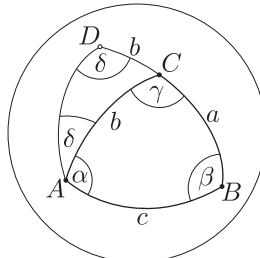
Mivel az ívhossz és húrhossz szigorúan monoton növekvő kapcsolatban van, ebből $b < a$ adódik. Másfelől az ADB egyenlőszárú háromszög, amiért az első állítás szerint a DAB gömbi szög megegyezik a β szöggel. Mivel a DA főkörív kettévágja az α szöveget, ez éppen a $\beta < \alpha$ egyenlőtlenségre vezet. ■

Elfajulónak nevezünk egy gömbi háromszöget, ha csúcsai ugyanazon főkörre illeszkednek.

Háromszög-egyenlőtlenség. *Nem elfajuló gömbi háromszög oldalainak gömbi hosszára $a + b > c$.*

Bizonyítás. Mivel egy oldal gömbi hossza legfeljebb $r\pi$ lehet, az állítás nyilván teljesül, ha $a + b > r\pi$.

Legyen tehát $a + b \leq r\pi$ és a BC főkörívet hosszabítsuk meg a C ponton túl addig, hogy a D végpontja éppen b gömbi távolságra legyen a C ponttól.



7. ábra

Ekkor $d(B, D) \leq r\pi$ és a DCA háromszög egyenlőszárú, így ebben a D és A pontnál ugyanaz a δ szög található. Előbbi tételünk szerint $\delta < \delta + \alpha$ miatt $c \leq a + b$ következik, ahol egyenlőség esetén $\delta = \delta + \alpha$ miatt $\alpha = 0$ teljesül, ami a bizonyítást teljessé teszi. ■

1.2. Izometrikus transzformációk

A gömbfelület egy gömbfelületre való leképezését (*gömbi izometriának* hívjuk, ha tartja a gömbi távolságot. Az alábbiakban többször is felhasználjuk azt a tételt [Kurusa: Euklidészi geometria], mely szerint egybevágó térbeli pontthalmazokhoz létezik olyan térizometria, mely egyiket a másikba viszi, és ez egyértelmű, ha az egyik pontthalmaz tartalmaz négy általános helyzetű pontot.

Lemma. *Minden gömbi izometria egy olyan térizometria megszorítása a gömbfelületre, mely fixen hagyja a gömb középpontját.*

Bizonyítás. Mivel a gömbfelület minden pontpárjának euklidészi és gömbi távolsága bijektíven meghatározza egymást, egy gömbi ι izometriát tekinthetünk a gömbfelület egybevágóságának az euklidészi térben.

Míthogy a gömbfelületen van négy általános helyzetű pont, a gömbfelület egybevágóságához egyértelműen létezik olyan $\hat{\iota}$ térizometria, melynek megszorítása a $\mathcal{G}$ gömbfelületre megegyezik annak egybevágóságával, vagyis $\iota = \hat{\iota}|_{\mathcal{G}}$.

Tekintve, hogy a gömb középpontja az egyetlen olyan pont, mely a gömbfelület minden pontjától azonos távolságra van, és ezt a távolságot az $\hat{\iota}$ térizometria nem változtatja meg, az $\hat{\iota}$ térizometria a gömb középpontját a gömb középpontjába viszi. ■

Tétel. *Minden gömbi izometriának van fixpontja.*

Bizonyítás. Tekintsük az O középpontú $\mathcal{G}$ gömbfelület tetszőleges ι gömbi izometriáját. Előbbi lemmánk szerint egyértelműen létezik olyan $\hat{\iota}$ térizometria, melyre $\iota = \hat{\iota}|_{\mathcal{G}}$, és $\hat{\iota}(O) = O$.

Az euklidészi térizometriák fixpont-tétele [Kurusa: Euklidészi geometria] alapján $\bar{\iota}$ az identitás, vagy az O ponton átmenő valamely síkra, vagy két ilyen síkra, vagy három ilyen síkra vonatkozó tükrözés szorzata. Mind a négy esetben (identitás, tükrözés, forgatás illetve forgatva tükrözés) van legalább egy olyan egyenes, a $\bar{\iota}$ térizometria tengelye, melynek minden pontja fix. Ennek az egyenesnek a metszete a $\mathcal{G}$ gömbfelülettel az ι gömbi izometriának fixpontja. ■

Fixpont-tétel. *Legyen ι egy izometria az O középpontú $\mathcal{G}$ gömbfelületen.*

- (1) *Ha ι három nem egy főkörre eső pontot fixen hagy, akkor identitás.*
- (2) *Ha ι fixen hagyja a gömbfelület $P_1 \neq P_2$ pontjait, akkor $\iota = \text{id}$, vagy $\iota = \tau_S|_{\mathcal{G}}$, az OP_1P_2 pontok S síkjára vonatkozó tükrözés.*
- (3) *Ha ι fixen hagyja a gömbfelület P pontját, akkor $\iota = \text{id}$, vagy $\iota = \tau_{S_2}$, ahol a tükrözés S_2 síkja tartalmazza az O és P pontokat, vagy $\iota = \tau_{S_2}\tau_{S_1}$, ahol $S_1 \neq S_2$ és mindkét sík tartalmazza az O és P pontokat.*

Bizonyítás. Lemmánk szerint egyértelműen létezik olyan $\hat{\iota}$ térizometria, melyre $\iota = \hat{\iota}|_{\mathcal{G}}$, és $\hat{\iota}(O) = O$.

Az (1) esetben $\hat{\iota}$ négy, a (2) esetben három, a (3) esetben pedig kettő általános helyzetű fixponttal rendelkezik. A térbeli izometriák fixpont-tétele [Kurusa: Euklidészi geometria] alapján mindhárom esetben következik az állítás. A részletes következtetés az olvasóra marad. ■

Vegyük észre, hogy a bizonyítás közben az is kiderült, hogy a gömbfelület izometriái az identitás, főkére tükrözés, átmérő körüli forgatás és forgatva tükrözés típusaiba sorolhatók.

A gömbfelület valamely $\mathcal{A}$ részhalmazának egy gömbfelület valamely $\mathcal{B}$ részhalmazára való leképezését (gömbi) egybevágóságnak hívjuk, ha bijektív és az $\mathcal{A}$ részhalmaz pontjai közötti gömbi távolságokat tartja.

Tétel. Az O középpontú $\mathcal{G}$ gömbfelületen adott $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ halmazok akkor és csak akkor gömbi egybevágók, ha létezik a gömbfelület olyan ι izometriája, melyre $\iota(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.

Bizonyítás. Ha $\iota(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$, akkor az $\iota|_{\mathcal{A}}$ egybevágóság az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ halmazok között.

Ha $\varepsilon: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ bijektív gömbi távolságot tartó leképezés, akkor ε az euklidészi térben is az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ halmazok egybevágósága, hiszen a gömbfelület minden pontpárjának euklidészi és gömbi távolsága bijektíven meghatározza egymást.

A gömb O középpontja a $\mathcal{G}$ gömbfelület minden pontjától azonos távolságra van, így az $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{O\}$ és $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{O\}$ halmazok is egybevágóak az euklidészi térben az $\varepsilon': \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{B}'$ egybevágósággal, melyre $\varepsilon'(O) = O$ az $\mathcal{A}'$ többi, $P \in \mathcal{A}$ pontjában pedig $\varepsilon'(P) = \varepsilon(P)$.

Eszerint van olyan $\hat{\iota}$ térizometria, melyre $\hat{\iota}|_{\mathcal{A}'} = \varepsilon'$. Ekkor $\hat{\iota}|_{\mathcal{A}'}(O) = \varepsilon'(O) = O$, vagyis O az $\hat{\iota}$ térizometria fixpontja, és így az $\iota = \hat{\iota}|_{\mathcal{G}}$ gömbi izometria bizonyítja az állítást, hiszen minden $P \in \mathcal{A}$ pontban $\iota(P) = \hat{\iota}|_{\mathcal{G}}(P) = \hat{\iota}|_{\mathcal{A}'}(P) = \varepsilon'(P) = \varepsilon(P)$. ■

1.3. Trigonometria

Koszinusztétel oldalra. Ha egy gömbi háromszög oldalait és szögeit a szokásos módon a, b, c és α, β, γ jelöli, akkor

$$\cos \frac{c}{r} = \cos \frac{a}{r} \cos \frac{b}{r} + \sin \frac{a}{r} \sin \frac{b}{r} \cos \gamma,$$

ahol r a gömb sugara.

Bizonyítás. A vegyszorzat és a kifejtési tétel felhasználásával a

$$\begin{aligned}\cos \gamma &= \left\langle \frac{C \times A}{|C \times A|}, \frac{C \times B}{|C \times B|} \right\rangle = \frac{\langle C, A, C \times B \rangle}{|C \times A| \cdot |C \times B|} = \frac{\langle C, A \times (C \times B) \rangle}{r^2 \sin \frac{d(C,A)}{r} \cdot r^2 \sin \frac{d(C,B)}{r}} \\ &= \frac{\langle C, \langle A, B \rangle C - \langle A, C \rangle B \rangle}{r^2 \sin(b/r) r^2 \sin(a/r)} = \frac{\langle \frac{1}{r} A, \frac{1}{r} B \rangle \langle \frac{1}{r} C, \frac{1}{r} C \rangle - \langle \frac{1}{r} A, \frac{1}{r} C \rangle \langle \frac{1}{r} C, \frac{1}{r} B \rangle}{\sin(b/r) \sin(a/r)} \\ &= \frac{\cos(c/r) - \cos(b/r) \cos(a/r)}{\sin(b/r) \sin(a/r)}\end{aligned}$$

levezetés igazolja az állítást. ■

Szinusztétel. Ha egy gömbi háromszög oldalait és szögeit a szokásos módon a, b, c és α, β, γ jelöli, akkor

$$\sin \frac{a}{r} : \sin \frac{b}{r} : \sin \frac{c}{r} = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma,$$

ahol r a gömb sugara.

Bizonyítás. Ismét a vegyszorzat és a kifejtési tétel miatt

$$\sin \gamma = \left| \frac{C \times A}{|C \times A|} \times \frac{C \times B}{|C \times B|} \right| = \frac{|\langle C \times A, B \rangle C - \langle C \times A, C \rangle B|}{r^4 \sin(b/r) \sin(a/r)} = \frac{(\frac{1}{r} C, \frac{1}{r} A, \frac{1}{r} B)}{\sin(b/r) \sin(a/r)},$$

adódik, amiből

$$\begin{aligned}\sin \gamma \sin \frac{a}{r} \sin \frac{b}{r} &= \left(\frac{1}{r} C, \frac{1}{r} A, \frac{1}{r} B \right) = \left(\frac{1}{r} A, \frac{1}{r} B, \frac{1}{r} C \right) = \sin \alpha \sin \frac{b}{r} \sin \frac{c}{r} \\ &= \left(\frac{1}{r} B, \frac{1}{r} C, \frac{1}{r} A \right) = \sin \beta \sin \frac{c}{r} \sin \frac{a}{r}\end{aligned}$$

igazolja az állítást. ■

A szinusztételt a polárháromszögekre alkalmazva nem adódik új eredmény, azonban a koszinusztétel alkalmazása a polárháromszögre új összefüggéshez vezet.

Koszinusztétel szögre. Ha egy gömbi háromszög oldalait és szögeit a szokásos módon a, b, c és α, β, γ jelöli, akkor

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \frac{c}{r},$$

ahol r a gömb sugara.

Bizonyítás. Elég arra gondolni, hogy a polárháromszög oldalainak hossza az eredeti háromszög megfelelő kiegészítő szögeivel és a sugárral arányos. ■

Következmény. Az azonos szögekkel rendelkező háromszögek oldalainak hossza is megegyezik.

Fontos figyelni rá, hogy e következmény gömbfelületen kizárja a homotéciák, illetve hasonlóságok létezését.

Tétel. *A C csúcsánál derékszögű háromszögben érvényesek a következők.*

$$\text{Pitagorasz-tétel: } \cos \frac{c}{r} = \cos \frac{a}{r} \cos \frac{b}{r};$$

$$\text{Befogó tétel: } \operatorname{tg} \frac{b}{r} = \operatorname{tg} \frac{c}{r} \cos \alpha.$$

Bizonyítás. A Pitagorasz-tétel a koszinusztétel egyszerű alkalmazása.

A befogótétel azonnal következik, ha a gömb középpontjából a háromszöget a háromszög A csúcsában a gömböt érintő síkba vetítjük, ugyanis a kivetített háromszög derékszögű lesz, aminek az átfogója $r \operatorname{tg} \frac{c}{r}$, mellette lévő befogója $r \operatorname{tg} \frac{b}{r}$ és ezek közötti szöge α . ■

1.4. Felszínmérés

A terület, vagyis a gömbfelület felszíne mérésének bevezetéséhez az euklidészi sík esetében bevált eljárást alkalmazzuk, azzal az eltéréssel, hogy most előre tudjuk, hogy az egész ponthalmaz területe a gömb teljes felszínmértékével egyenlő.

Egy gömbi sokszöget konvexnek nevezünk, ha a minden pontját a középponttal összekötő zárt szakaszok uniója a térben konvex halmazt ad. A gömbi konvex sokszög számunkra legfontosabb tulajdonsága az, hogy bármely két pontjával együtt az azokat összekötő főkör rövidebbik ívét is tartalmazza.

Definíció. Az r sugarú $\mathcal{G}$ gömbfelület konvex sokszögei $\mathfrak{P}$ halmazának valamely $f: \mathfrak{P} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezését *felszínmérésnek* nevezzük, ha

- (1) $f \geq 0$,
- (2) $f(\mathcal{P}) = 0$ akkor és csak akkor, ha a $\mathcal{P}$ sokszög üres,
- (3) $f(\mathcal{P}_1) + f(\mathcal{P}_2) = f(\mathcal{P}_{12})$, ha a $\mathcal{P}_{12}$ gömbi sokszöget egy főkör a $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ gömbi sokszögre vágja,
- (4) $f \circ \iota = f$ minden ι gömbi izometriára, és
- (5) $f(\mathcal{G}) = \Phi := 4r^2\pi$.

▲

Tétel. *Létezik felszínmérés, ez egyértelmű és az α, β, γ szögekkel rendelkező háromszöghöz az $(\alpha + \beta + \gamma - \pi) \frac{\Phi}{4\pi}$ értéket rendeli.*

Bizonyítás. *Unicitás.* Nyilván minden gömbi sokszög gömbi háromszögekre vágható főkörökkel, így az unicitáshoz elegendő igazolni a tétel formuláját a háromszögekre.

Legyen Φ_α az α nyílásszögű gömbi kétszög felszíne. Az (1) és (3) miatt Φ_α szigorúan monoton növekvő a $[0, 2\pi)$ intervallumon. A (3), (4) és (5) miatt pedig

nyilván $\Phi_{2\pi/n} = \frac{2\pi/n}{2\pi} \Phi$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ezért a (3) és (4) miatt $\Phi_{\frac{m}{n}2\pi} = \frac{m}{n} \Phi$, ahol $m, n \in \mathbb{N}$.

Ezek szerint tetszőleges racionális $r_k^- < \alpha < r_k^+$ sorozatokra $r_k^- \Phi = \Phi_{r_k^-} \leq \Phi_\alpha \leq \Phi_{r_k^+} = r_k^+ \Phi$, amiért $r_k^- \nearrow \alpha \searrow r_k^+$ esetben $\Phi_\alpha = \frac{\alpha}{2\pi} \Phi$.

Legyenek A', B' és C' az A, B és C pontok átellenes pontjai, vagyis amelyek rendre az A, B és C pontokkal átmérőt alkotnak.

Egy ABC háromszög oldalai a háromszög minden csúcsában pontosan négy kétszöget alkotnak. Ezek közül kettő olyan, amely sem az ABC , se az $A'B'C'$ háromszöget nem tartalmazza, pontosan egy olyan, mely az ABC háromszöget tartalmazza, a negyedik pedig olyan, hogy az az $A'B'C'$ háromszöget tartalmazza. Ez a négy kétszög együtt éppen lefedi a gömbfelületet.

A háromszög által meghatározott háromszor négy kétszög közül azok, amelyek legalább az egyik háromszöget tartalmazzák, együtt lefedik a gömbfelületet, az ABC és az $A'B'C'$ háromszöget pedig három-háromszor is. Figyelembevéve, hogy $A'B'C'$ az ABC origóra vett tükörképe, ebből

$$\Phi = 2\Phi_\alpha + 2\Phi_\beta + 2\Phi_\gamma - 4f(ABC\triangle)$$

adódik, amiből éppen az állításban szereplő formula következik.

Egzisztencia. A felszínmérés létezésének igazolásához definiáljuk az f függvényt egy gömbi n -szögre azzal, hogy az n -szög egy C csúcsát a többi csúccsal összekötő főkörök — ezek az „átlók” — mentén háromszögekre bontjuk az n -szöget, aztán ezekre a háromszögekre kiszámítjuk az $(\alpha + \beta + \gamma - \pi) \frac{\Phi}{4\pi}$ értékeket és képezzük ezen értékek összegét.

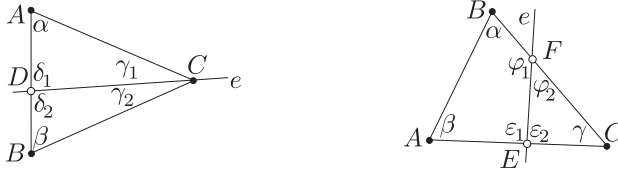
Mivel a felbontásban szereplő háromszögek csúcsai a sokszög csúcsaiba esnek, és a C csúcsban éppen eggyel több háromszög csúcsa van, mint ahány átló indul onnan, ezen értékek összege $\sum_i \alpha_i - (n-2)\pi$, ahol α_i az n -szög i -edik csúcsában lévő belső szög. Ez az érték láthatólag független a felbontástól, így elég látnunk, hogy az

$$f(A_1 A_2 \dots A_n) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i - (n-2)\pi \right) \frac{\Phi}{4\pi}$$

függvény eleget tesz a felületmérésre kirótt öt követelménynek.

Az (1), (2) és (5) feltételeket az így definiált f függvény nyilvánvalóan teljesíti.

Ha egy főkör kettévág egy sokszöget, akkor kettévágja a sokszögnek az f konsturálásában szereplő felbontás háromszögeit is, ezért a (3) tulajdonságot elegendő háromszögekre igazolni.



10. ábra

Ha egy háromszöget a C csúcán áthaladó főkör vág ketté, akkor

$$\begin{aligned} f(ACD) + f(CBD) &= (\alpha + \gamma_1 + \delta_1 - \pi) \frac{\Phi}{4\pi} + (\beta + \gamma_2 + \delta_2 - \pi) \frac{\Phi}{4\pi} \\ &= (\alpha + \beta + \gamma - \pi) \frac{\Phi}{4\pi} = f(ABC). \end{aligned}$$

Ha a háromszöget kettészelő főkör nem illeszkedik a csúcsok egyikére sem, akkor metszi két — mondjuk az a és b — oldalát, amiért

$$\begin{aligned} f(ABFE) + f(EFC) &= (\alpha + \beta + \varphi_1 + \varepsilon_1 - 2\pi) \frac{\Phi}{4\pi} + (\varepsilon_2 + \varphi_2 + \gamma - \pi) \frac{\Phi}{4\pi} \\ &= (\alpha + \beta + \gamma - \pi) \frac{\Phi}{4\pi} = f(ABC). \end{aligned}$$

Ezek a formulák igazolják, hogy az f függvény teljesíti a (3) követelményt.

A (4) tulajdonság belátásához elég arra gondolni, hogy bármely $\mathcal{P}$ sokszög ι izometria melletti $\mathcal{P}'$ képét a $\mathcal{P}$ felbontásának ι melletti képe háromszögekre bontja, és a gömbi izometriák az oldalra vonatkozó koszinusztétel szerint nem változtatják meg a szögeket, így nem változtatják meg a háromszögek felszínét sem, amiért a két sokszög szögei és felszíne megegyezik. ■

Következmény. Nem elfajuló gömbi háromszög $\delta = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ szögdefektusa pozitív.

A szögdefektusra, vagy ami ugyanaz, a gömbi háromszögek felszínére érvényes összefüggések közül csak érdekességekpen, bizonyítás nélkül közlünk kettőt.

Tétel. Ha egy gömbi háromszög oldalait és szögeit a szokásos módon a, b, c és α, β, γ , szögdefektusát δ , fél kerületét pedig s jelöli, akkor

$$(1) \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{\operatorname{tg}(a/r) \operatorname{tg}(b/r) \sin \gamma}{1 - \operatorname{tg}(a/r) \operatorname{tg}(b/r) \cos \gamma},$$

$$(2) \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{\sqrt{\sin \frac{s}{r} \sin \frac{s-a}{r} \sin \frac{s-b}{r} \sin \frac{s-c}{r}}}{\cos(a/r) \cos(b/r) \cos(c/r)},$$

ahol r a gömb sugara.

Mindkét formulát a gömbi trigonometria formulái és a szögfüggvények ismert összefüggései segítségével bizonyíthatja az érdeklődő olvasó.

A (2) formulát szokás gömbi *Héron-képletnek* is nevezni.

1.5. A „végtelen sugarú” félgömbfelület geometriája

A most következők jól mutatják, hogy hétköznapi tapasztalataink miért támasztják alá az euklidészi geometria törvényeit, egyben lehetséges magyarázatul is szolgálnak Euklidész párhuzamossági axiómájának megjelenésére.

Tétel. *A „végtelen sugarú” nyílt félgömbön a főköröket véve egyenesnek egy euklidészi síkot kapunk.*

Bizonyítás. Tekintsük az $\mathbb{R}^3$ térben a szokásos (x, y, z) koordináta-rendszert, és a $(0, 0, r)$ középpontú r sugarú $\mathcal{G}_r$ gömbnek a $z < r$ feltérbe eső nyílt $\mathcal{G}_r^-$ félgömbjét.

A $\mathcal{G}_r^-$ félgömböt a gömb középpontjából kivetítve a $z = 0$ síkra, egy bijektív, főkört egyenesbe vivő Ψ_r leképezést kapunk (a részletes megfontolások az olvasóra maradnak), tehát a nyílt $\mathcal{G}_r^-$ félgömb a főkörökkel affin síkot alkot.

Paraméterezzük a $\mathcal{G}_r^-$ félgömb pontjait úgy, hogy egy P pontjához hozzárendeljük annak gömbi p távolságát a gömb $(0, 0, 0)$ koordinátájú déli sarkától, valamint azt az irányított $-\pi < \xi \leq \pi$ szöget, mellyel a z -tengely körül elforgatva az $y = 0, x \geq 0$ félsíkot, a P pontot tartalmazó síkot kapunk. Világos, hogy a $P \mapsto (\xi, p)_{\mathcal{G}_r}$ hozzárendelés bijektív.

A $z = 0$ síkon tekintsük azt a polárkoordináta-rendszert, melyben egy Q ponthoz hozzárendeljük q távolságát a $(0, 0, 0)$ origótól, valamint azt az irányított $-\pi < \psi \leq \pi$ szöget, mellyel az origó körül elforgatva az x tengely pozitív félegyenesét, a Q pontot tartalmazó egyenest kapunk. Világos, hogy a $Q \mapsto (\psi, q)_S$ hozzárendelés bijektív.

A derékszögű háromszög befogói közti kapcsolat adja, hogy $\Psi_r: (\xi, p)_{\mathcal{G}_r} \mapsto (\xi, r \operatorname{tg}(p/r))_S$, ami azt jelenti, hogy ugyanazon $(\xi, p)_{\mathcal{G}_r}$ gömbi pont ugyan mozog a sugár változásával, de mivel $\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi_r((\xi, p)_{\mathcal{G}_r}) = (\xi, p)_S$, minden pont a koordinátája által meghatározott ponthoz tart, vagyis a „végtelen sugarú” nyílt $\mathcal{G}_\infty^-$ félgömb pontjainak koordinátái egybeesnek a sík pontjainak koordinátaival.

Most igazoljuk, hogy a sugárral mozgó pontok egyenesének határhelyzete is egyenes.

A $\mathcal{G}_r^-$ félgömb minden $(\xi, p)_{\mathcal{G}_r}$ koordinátájú pontjához, ahol $p \neq 0$, pontosan egy olyan főkör van, melynek ez a pontja rendelkezik a legkisebb z -koordinátával. A $z = 0$ sík minden $(\psi, q)_S$ koordinátájú pontjához, ahol $q \neq 0$, pontosan egy olyan egyenes van, melynek ez az origóhoz legközelebbi pontja. Ezekkel koordinátázva a

főkörök és egyenesek halmazát, azt kapjuk, hogy $\Psi_r: (\xi, p)_{\mathcal{G}_r} \mapsto (\xi, r \operatorname{tg}(p/r))_S$ a főkörök és egyenesek között is, amely $p = 0$ esetén is érvényes, ha ilyenkor az origón átmenő, a ξ irányára merőleges főkört illetve egyenest rendeljük a koordinátához. Mivel $r \nearrow \infty$ esetén $r \operatorname{tg}(p/r) \searrow p$, ebből következik, hogy az egyenesekre is érvényes a $\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi_r((\xi, p)_{\mathcal{G}_r}) = (\xi, p)_S$ összefüggés.

Ezzel be is bizonyítottuk, hogy a „végtelen sugarú” nyílt $\mathcal{G}_\infty^-$ félgömb egy affin sík. A tétel bizonyításához a metrikát kell még megvizsgálni.

A $\mathcal{G}_r$ gömbön jelölje d_r a metrikát. Ekkor két pont távolságát a $c_r = d_r((\xi, a)_{\mathcal{G}_r}, (\xi', b)_{\mathcal{G}_r})$ szám adja, ahol $\max(a, b) \leq r\pi/2$. Legyen $\gamma = \xi' - \xi$. Ekkor a koszinusztétel szerint

$$\cos \frac{c_r}{r} = \cos \frac{a}{r} \cos \frac{b}{r} + \sin \frac{a}{r} \sin \frac{b}{r} \cos \gamma,$$

amiből

$$1 - 2 \sin^2 \frac{c_r}{2r} = \left(1 - 2 \sin^2 \frac{a}{2r}\right) \left(1 - 2 \sin^2 \frac{b}{2r}\right) + \sin \frac{a}{r} \sin \frac{b}{r} \cos \gamma$$

és így

$$2 \sin^2 \frac{c_r}{2r} + 4 \sin^2 \frac{a}{2r} \sin^2 \frac{b}{2r} = 2 \sin^2 \frac{a}{2r} + 2 \sin^2 \frac{b}{2r} - \sin \frac{a}{r} \sin \frac{b}{r} \cos \gamma,$$

következik. Mindkét oldalt elosztva az $1/(2r)^2$ számmal a

$$\begin{aligned} 2c_r^2 \left(\frac{\sin(c_r/2r)}{c_r/2r} \right)^2 + 4 \frac{a^2 b^2}{4r^2} \left(\frac{\sin(a/2r)}{a/2r} \right)^2 \left(\frac{\sin(b/2r)}{b/2r} \right)^2 \\ = 2a^2 \left(\frac{\sin(a/2r)}{a/2r} \right)^2 + 2b^2 \left(\frac{\sin(b/2r)}{b/2r} \right)^2 - 4ab \frac{\sin(a/r)}{a/r} \frac{\sin(b/r)}{b/r} \cos \gamma \end{aligned}$$

egyenlőséghez jutunk. A gömbi háromszög-egyenlőtlenség miatt $c_r \leq a + b$, így $r \rightarrow \infty$ esetén $a/r \rightarrow 0$, $b/r \rightarrow 0$ és $c_r/r \rightarrow 0$, amiért

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sin(a/r)}{a/r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sin(b/r)}{b/r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sin(c_r/r)}{c_r/r} = 1.$$

Ezeket alkalmazva egyenletünkben az $r \rightarrow \infty$ határértékre azt kapjuk, hogy

$$2a^2 + 2b^2 - 4ab \cos \gamma = 2 \left(\lim_{r \rightarrow \infty} c_r \right)^2,$$

ami a $z = 0$ síkban érvényes koszinusztétel.

Eszerint a „végtelen sugarú” nyílt $\mathcal{G}_\infty^-$ félgömbben mérhető távolságok egybeesnek a $z = 0$ síkon mérhető távolságokkal, amivel a bizonyítást befejeztük. ■

Bár tételünknek nyilvánvaló következménye, hogy a „végtelen sugarú” nyílt $\mathcal{G}_{\infty}^{-}$ félgömbön az euklidészi trigonometria érvényes, azért nem érdektelen megvizsgálni, mivé alakulnak a gömbi trigonometriai összefüggéseink a „végtelen sugarú” nyílt félgömbön.

Rögzítsük az $a, b, c > 0$ valós számokat úgy, hogy a a legnagyobb és $b + c > a$. Ekkor minden $r > a/\pi$ sugarú gömbfelületen szerkeszthető a, b, c oldalakkal rendelkező háromszög, csak fel kell venni egy a hosszúságú főkörív két végpontjában egy b és egy c gömbi sugarú gömbi kört, és venni ezek metszéspontját.

Tétel. *Legyenek az r sugarú gömbön a, b, c oldalhosszakkal bíró háromszög szögei $\alpha(r)$, $\beta(r)$ és $\gamma(r)$. Ekkor léteznek a $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r)$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \beta(r)$ és $\lim_{r \rightarrow \infty} \gamma(r)$ határértékek, és rendre megegyeznek az a, b, c oldalhosszakkal rendelkező euklidészi háromszög α, β, γ szögeivel.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy a, b, c oldalhosszú háromszöget az r sugarú gömbön. Világos, hogy $a/r \rightarrow 0$ amennyiben $r \rightarrow \infty$, ezért

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sin(a/r)}{a/r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sin(b/r)}{b/r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sin(c/r)}{c/r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Az oldalakra vonatkozó koszinusztétel szerint

$$\begin{aligned} \cos \gamma(r) &= \frac{\cos \frac{c}{r} - \cos \frac{a}{r} \cos \frac{b}{r}}{\sin \frac{a}{r} \sin \frac{b}{r}} = \frac{\cos^2 \frac{c}{r} - \cos^2 \frac{a}{r} \cos^2 \frac{b}{r}}{\cos \frac{c}{r} + \cos \frac{a}{r} \cos \frac{b}{r}} \cdot \frac{(r/a)(r/b)}{\frac{\sin(a/r)}{a/r} \frac{\sin(b/r)}{b/r}} \\ &= \frac{(1 - \frac{c^2}{r^2} \frac{\sin^2(c/r)}{(c/r)^2}) - (1 - \frac{a^2}{r^2} \frac{\sin^2(a/r)}{(a/r)^2})(1 - \frac{b^2}{r^2} \frac{\sin^2(b/r)}{(b/r)^2})}{\cos(c/r) + \cos(a/r) \cos(b/r)} \cdot \frac{(r/a)(r/b)}{\frac{\sin(a/r)}{a/r} \frac{\sin(b/r)}{b/r}} \\ &= \frac{-\frac{c^2}{r^2} \frac{\sin^2(c/r)}{(c/r)^2} + \frac{b^2}{r^2} \frac{\sin^2(b/r)}{(b/r)^2} + \frac{a^2}{r^2} \frac{\sin^2(a/r)}{(a/r)^2} - \frac{a^2 b^2}{r^4} \frac{\sin^2(a/r)}{(a/r)^2} \frac{\sin^2(b/r)}{(b/r)^2}}{\cos(c/r) + \cos(a/r) \cos(b/r)} \times \\ &\quad \times \frac{(r/a)(r/b)}{\frac{\sin(a/r)}{a/r} \frac{\sin(b/r)}{b/r}} \\ &\rightarrow \frac{-c^2 + b^2 + a^2}{2ab}, \quad (r \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy az $\alpha(r)$, $\beta(r)$ és $\gamma(r)$ függvényeknek van határértékük, és ezek a határértékek éppen az euklidészi síkon a, b és c oldalhosszúsággal megrajzolt háromszög szögei. ■

A gömbi szinusztétel a „végtelen sugarú” gömbön az euklidészi szinusztétellel alakul, mert

$$\frac{\sin \alpha(r)}{\sin \beta(r)} = \frac{\sin(a/r)}{\sin(b/r)} = \frac{\frac{\sin(a/r)}{a/r}}{\frac{\sin(b/r)}{b/r}} \cdot \frac{a}{b} \rightarrow \frac{a}{b}, \quad (r \rightarrow \infty),$$

a szögekre vonatkozó gömbi koszinusztétel pedig az euklidészi háromszögek szögösszegét adja, hiszen

$$\begin{aligned}\cos \gamma(r) + \cos(\alpha(r) + \beta(r)) &= \cos \gamma(r) + \cos \alpha(r) \cos \beta(r) - \sin \alpha(r) \sin \beta(r) \\ &= \sin \alpha(r) \sin \beta(r) \left(\cos \frac{c}{r} - 1 \right) \rightarrow 0, \quad (r \rightarrow \infty).\end{aligned}$$

amiért $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) + \lim_{r \rightarrow \infty} \beta(r) + \lim_{r \rightarrow \infty} \gamma(r) = \pi$.

2

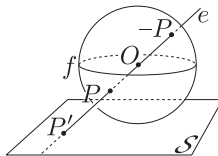
Projektív sík

A gömbi geometria legszembetűnőbb szerkezeti eltérése az euklidészitól az, hogy a főkörök mindig két pontban metszik egymást, miközben a síkbeli egyenesek legfeljebb egy pontban. Emme duplikálódás elkerülésére alkotjuk a $\mathbb{P}^2$ projektív síkot.

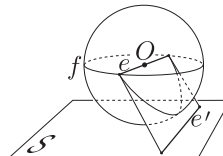
A gömbfelület pontjainak halmazán a szemköztesség (két pont szemköztes, ha összekötő egyenesük illeszkedik a gömb középpontjára) ekvivalencia-reláció. Ennek osztályai alkotják a $\mathbb{P}^2$ projektív sík pontjait, vagyis a $\mathbb{P}^2$ projektív sík minden pontja a gömbfelület két átellenes pontjának halmaza, mely természetes módon megadható a gömb egy átmérőjével, vagy egy origón átmenő egyenessel, vagy egy ilyen egyenes bármely irányvektorával. Ez utóbbi megadási módokat a projektív pont reprezentációinak fogjuk nevezni, és eme reprezentációkat nagy szabadsággal akkor és úgy fogjuk alkalmazni, ahogy éppen természetesebb kifejezni a mondandót.

A $\mathbb{P}^2$ projektív sík egyeneseit olyan projektív pontok halmazaként értelmezzük, melyek uniója egy főkör a gömbfelületen. Ez azt jelenti, hogy a projektív egyenesek természetes módon megadhatók a gömbfelület egy főkörével, vagy egy origón átmenő síkkal, vagy egy ilyen sík bármely normális vektorával. Ez utóbbi megadási módokat a projektív egyenes reprezentációinak fogjuk nevezni, és akkor és úgy fogjuk alkalmazni őket, ahogy éppen természetesebb kifejezni a mondandót.

Amennyiben egy origóra nem illeszkedő $\mathcal{S}$ sík minden pontjához hozzárendeljük a pontot az origóval összekötő egyenes által reprezentált projektív pontot, az $\mathcal{S}$ sík pontthalmazának a $\mathbb{P}^2$ projektív sík pontthalmazába való injektív beleképezését nyerjük, mely ráadásul a sík minden egyenesét abba a projektív egyenesbe képezi, melynek főkörét az egyenes és az origó közös síkja metszi ki a gömbfelületből.



1. ábra



2. ábra

Figyeljük meg, hogy az $\mathcal{S}$ sík párhuzamos e és g egyenesre olyan $\hat{e}$ és $\hat{g}$ főkörökbe képeződik, melyek metszéspontjaira illeszkedő egyenes párhuzamos az e és g egyenesekkel.

Eszerint az $\mathcal{S}$ affin síknak a projektív síkba való iménti leképezése a párhuzamossági osztályokat (ezeket az affin sík végtelen távoli pontjainak is hívjuk) az $\mathcal{S}$ síkkal párhuzamos s főkör által reprezentált projektív egyenes pontjaiba viszi, vagyis az affin sík végtelen távoli egyenessel való kiegészítése (mely az affin sík esetében a Desargues-tulajdonság vizsgálatánál játszott fontos szerepet) projektív síkká teszi az affin síkot.

A projektív sík bármely két egyenese pontosan egy pontban metszi egymást, hiszen a hozzájuk tartozó főkörök két, egymással szemközti pontban metszik egymást.

Két projektív pontra pontosan egy projektív egyenes illeszkedik, mert pontosan egy origón átmenő $\mathcal{S}$ sík illeszkedik e két projektív pontot reprezentáló, egymást az origóban metsző egyenesre, és az $\mathcal{S}$ sík által reprezentált projektív egyenes illeszkedik a két projektív pontra.

Rögzítsük egy O középpontú gömb $\mathcal{G}$ felületét, egy $\mathcal{S}$ síkot, a $\mathcal{G}$ ezzel párhuzamos s főkört, az O ponton átmenő egyenesek $\mathcal{E}_O$ halmazát és jelölje végül $\mathcal{S}^i$ a párhuzamossági osztályokkal (ideális pontokkal) kiegészített $\mathcal{S}$ síkot. Az alábbi leképezéseket említettük eddig:

$\gamma: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{P}^2$, ahol $\gamma(P) = \{-P, P\}$;

$\pi: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathcal{E}_O$, ahol $\pi(\{-P, P\})$ a PO egyenes;

$\sigma: \mathcal{S}^i \rightarrow \mathbb{P}^2$, ahol $\sigma(X) = \pi^{-1}(OX)$, ha $X \in \mathcal{S}$ nem ideális pont, ha pedig X ideális pont (vagyis $\mathcal{S}$ egy párhuzamossági osztálya), akkor az a $\sigma(X) = \{-P, P\} \in \mathbb{P}^2$ projektív pont, melyre a $-PP$ egyenes párhuzamos X egyeneseivel;

$\epsilon: \mathcal{S}^i \rightarrow \mathcal{E}_O$, ahol $\epsilon(X)$ az XO egyenes, ha $X \in \mathcal{S}$ nem ideális pont, ha pedig X ideális pont (vagyis $\mathcal{S}$ egy párhuzamossági osztálya), akkor az O origón átmenő azon egyenes, mely X egyeneseivel párhuzamos.

A fentiek alapján

γ nem injektív, viszont szürjektív és $\gamma(P) = \gamma(Q)$ akkor és csak akkor, ha P és Q átellenes pontok,

π bijektív,

σ egyenestartó és bijektív, ugyanakkor $\sigma|_{\mathcal{S}}$ nem szürjektív, de injektív és egyenestartó,

ϵ bijektív, ugyanakkor $\epsilon|_{\mathcal{S}}$ nem szürjektív, de injektív, és $\epsilon = \sigma \circ \pi$.

Tekintsünk az $\mathcal{S}$ síkon egy φ affinitást. Legyen $\bar{\varphi}$ az ideális elemekkel kiegészített $\mathcal{S}^i$ síkon az a leképezés, mely a közös pontokon megegyezik a φ affinitással, az ideális pontokat viszont abba az ideális pontba viszi, amely párhuzamossági osztályba viszi φ a neki megfelelő párhuzamossági osztály egyeneseit (mivel az affinitások tartják a párhuzamosságot, ez egyértelmű). Defináljuk a $\hat{\varphi}: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$

leképezést úgy, hogy $\hat{\varphi} = \sigma \circ \bar{\varphi} \circ \sigma^{-1}$. Ez egy bijektív egyenestartó leképezés a $\mathbb{P}^2$ projektív síkon, mert σ és $\bar{\varphi}$ is bijektív és egyenestartó.

Három pontra azt mondjuk, hogy *kollineárisak*, ha egy egyenesre esnek. A projektív sík azon leképezéseit, melyek kollineáris pontokat kollineáris pontokba visznek, *egyenestartónak* nevezünk. Azon leképezéseket, melyek pontosan akkor visznek három pontot kollineáris ponthármasba, ha a pontok kollineárisak, *egyenességtartónak* nevezzük. A bijektív egyenességet tartó leképezéseket *kollineációknak*, azon kollineációkat pedig, melyeknek van invariáns egyenese *affin kollineációknak* nevezzük.

A fentebb definiált $\hat{\varphi}$ leképezés affin kollineáció, mert az $\mathcal{S}$ síkkal párhuzamos főkör által reprezentált projektív egyenes projektív pontjait ugyanezen egyenesen hagyja, hiszen $\bar{\varphi}$ az $\mathcal{S}^i$ ideális elemeit ideális elemekbe viszi.

Minden $\hat{\psi}$ affin kollineáció az invariáns egyenesük főkörének síkjával párhuzamos síkon az $\varphi = \sigma^{-1} \circ \hat{\psi} \circ \sigma|_{\mathcal{S}}$ affinitást határozza meg.

Felmerül a kérdés, hogy van-e a projektív síknak olyan kollineációja, mely nem affinitásból származik.

2.1. Homogén koordináták, kettősvizony és dualitás

Tekintve, hogy $\mathbb{P}^2$ kanonikus bijektív kapcsolatban van az origón átmenő egyenesekkel, kézenfekvő, hogy $\mathbb{P}^2$ elemeit a pontjaihoz tartozó egyenesek irányvektoraival paraméterezzük. Egy egyenesnek végtelen sok, egymással arányos irányvektora van, a nullvektor viszont egyetlen egyenesnek sem irányvektora.

Az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorokra azt mondjuk, hogy arányosak, ha létezik $\lambda \neq 0$, melyre $\lambda \mathbf{u} = \mathbf{v}$, és ekkor az $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$ jelölést használjuk. Nyilvánvaló, hogy az $\sim$ reláció ekvivalencia-reláció. Ennek osztályai az $[\mathbf{u}] = \{\lambda \mathbf{u} : \lambda \neq 0\}$ vektorhalmazok. Nyilván $[\vec{OO}] = \{\vec{OO}\}$, vagyis ez az egyetlen egyelemű ekvivalencia-osztály. Az $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ esetben az $[\mathbf{u}]$ osztályokat *homogén koordinátáknak* nevezzük, halmazukat $[\mathbb{R}^3]$ jelöli.

Rögzítve egy $\{\mathbf{w}_x, \mathbf{w}_y, \mathbf{w}_z\}$ bázist az $\mathbb{R}^3$ vektortérben, az arra végzett bázisbontás együtthatói is meghatározzák a vektort, és $[\mathbf{u}] = [\mathbf{v}]$ akkor és csak akkor, ha $(x_u, y_u, z_u) \sim (x_v, y_v, z_v)$, ahol $\mathbf{u} = x_u \mathbf{w}_x + y_u \mathbf{w}_y + z_u \mathbf{w}_z$ és $\mathbf{v} = x_v \mathbf{w}_x + y_v \mathbf{w}_y + z_v \mathbf{w}_z$ ezért, ha adott egy bázis, és abban az $\mathbf{u}$ együtthatói x, y és z , akkor élni fogunk az $[(x, y, z)] := [\mathbf{u}]$ és $[x, y, z] := [\mathbf{u}]$ jelölésekkel.

A nyilván bijektív $\chi: \mathbb{P}^2 \rightarrow [\mathbb{R}^3]$ leképezést, ahol $\chi(\{-P, P\}) = [\vec{OP}]$ homogén-koordinátázásnak nevezzük. Az írás egyszerűsítése érdekében gyakran fogjuk alkalmazni a $[P] := [\vec{OP}]$ és $[-P, P] := [\vec{OP}]$ jelöléseket is.

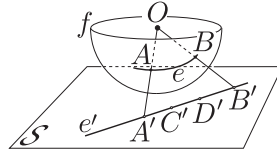
Ha adottak az közös projektív egyenesre illeszkedő, vagyis kollineáris $A, B, C \in \mathbb{P}^2$ pontok, akkor az ezeket reprezentáló egyeneseket nem az origóban metsző bármely

$\mathcal{S}$ sík esetén a kimetszett $A', B', C' \in \mathcal{S}$ pontok kollineárisak és meghatároznak egy $\omega_C = (A'B'C')$ osztóviszonyt, ami függ $\mathcal{S}$ választásától.

Az alábbi lemma csak a következő definíciót készíti elő, de jegyezzük meg, hogy ez valójában a később bemutatásra kerülő *Papposz-tétel* euklidészi megfelelője.

Lemma. *Legyenek a különböző $A, B, C, D \in \mathbb{P}^2$ pontok kollineárisak, és válasszunk egy tetszőleges $\mathcal{S}$ nem origón átmenő síkot, mely rendre az $A', B', C', D' \in \mathcal{S}$ pontokban metszi az OA, OB, OC és OD egyeneseket. Legyen $\omega_C = (A'B'C')$ és $\omega_D = (A'B'D')$. Ekkor az $\omega_C : \omega_D$ arány nem függ az $\mathcal{S}$ sík választásától.*

Bizonyítás. Először vegyük észre, hogy bármely kollineáris $A, B, C, D \in \mathbb{P}^2$ pontok választása esetén vannak e pontokat reprezentáló mindegyik egyenest metsző síkok, ugyanis az OA és OB egyeneseken választva egy-egy X és Y pontot, majd tekintve az összes, ezek egyenesére illeszkedő síkot, azt látjuk, hogy ezek közül legfeljebb kettő párhuzamos az OC és OD egyenesekkel.



30. ábra

Legyenek tehát az OA, OB, OC és OD egyenesekből valamely az origóra nem illeszkedő sík által kimetszett pontok rendre A', B', C', D' és ezek osztóviszonyai $\omega_C = (A'B'C')$ és $\omega_D = (A'B'D')$, továbbá egy origón nem átmenő sík messe ezen egyeneseket rendre az A'', B'', C'', D'' pontokban, és ezek osztóviszonyai legyenek $\omega'_C = (A''B''C'')$ és $\omega'_D = (A''B''D'')$.

Mivel közös origón átmenő egyenesekre illeszkednek, vannak olyan τ_A, τ_B, τ_C és τ_D nem nulla valós számok, hogy $\overrightarrow{OA''} = \tau_A \overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB''} = \tau_B \overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OC''} = \tau_C \overrightarrow{OC'}$ és $\overrightarrow{OD''} = \tau_D \overrightarrow{OD'}$.

Mivel az OA, OB, OC és OD egyenesek egyetlen közös pontja az origó és a metsző síkok egyike sem megy át az origón, egyik osztóviszony sem 0, amiért

$$\begin{aligned} (\omega_C + 1) \overrightarrow{OC''} &= (\omega_C + 1) \tau_C \overrightarrow{OC'} = \tau_C (\overrightarrow{OA'} + \omega_C \overrightarrow{OB'}) = \frac{\tau_C}{\tau_A} \overrightarrow{OA''} + \frac{\tau_C \omega_C}{\tau_B} \overrightarrow{OB''}, \\ (\omega'_D + 1) \overrightarrow{OD''} &= (\omega'_D + 1) \tau_D \overrightarrow{OD'} = \tau_D (\overrightarrow{OA'} + \omega_D \overrightarrow{OB'}) = \frac{\tau_D}{\tau_A} \overrightarrow{OA''} + \frac{\tau_D \omega_D}{\tau_B} \overrightarrow{OB''}. \end{aligned}$$

Eszerint

$$\frac{\omega'_C}{\omega'_D} = \left(\frac{\tau_C \omega_C}{\tau_B} : \frac{\tau_C}{\tau_A} \right) / \left(\frac{\tau_D \omega_D}{\tau_B} : \frac{\tau_D}{\tau_A} \right) = \frac{\omega_C}{\omega_D},$$

ami igazolja állításunkat. ■

Legyenek az $A, B, C, D \in \mathbb{P}^2$ pontok kollineárisak és $A \neq B$. Ekkor az $\overrightarrow{OA'} \in [A]$ és $\overrightarrow{OB'} \in [B]$ vektorok függetlenek, ezért léteznek olyan $\lambda_C, \mu_C, \lambda_D, \mu_D \in \mathbb{R}$ valós számok, melyekre $\lambda_C \overrightarrow{OA'} + \mu_C \overrightarrow{OB'} \in [C]$ és $\lambda_D \overrightarrow{OA'} + \mu_D \overrightarrow{OB'} \in [D]$ teljesül.

Definíció. *Kettőviszonynak* nevezzük a projektív egyenesek rendezett, *nem csupa egybeeső pontból* álló pontnégyeseinek halmazán értelmezett $(ABCD) \mapsto \mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ leképezést, melyre

(1) $A \neq B$ esetén

$$(ABCD) := \begin{cases} \frac{\mu_C}{\lambda_C} : \frac{\mu_D}{\lambda_D}, & \text{ha } \lambda_C, \lambda_D, \mu_C, \mu_D \neq 0, \\ 1, & \text{ha } \lambda_D = \lambda_C = 0, \text{ vagy } \mu_D = \mu_C = 0 \\ 0, & \text{ha } \lambda_C \neq 0 = \lambda_D, \text{ vagy } \mu_D \neq 0 = \mu_C = 0 \\ \infty & \text{ha } \lambda_C = 0 \neq \lambda_D \text{ vagy } \mu_D = 0 \neq \mu_C, \end{cases}$$

- ahol a $\lambda_C, \mu_C, \lambda_D, \mu_D \in \mathbb{R}$ valós számokra $\lambda_C \overrightarrow{OA'} + \mu_C \overrightarrow{OB'} \in [C]$ és $\lambda_D \overrightarrow{OA'} + \mu_D \overrightarrow{OB'} \in [D]$ teljesül valamely $\overrightarrow{OA'} \in [A]$ és $\overrightarrow{OB'} \in [B]$ nem nullvektorokra;
- (2) $A = B$ és $C \neq D$ esetén $(ABCD) := (CDAB)$;
- (3) $A = B$ és $C = D$ esetén $(ABCD) := 1 - (ACBD)$.

Egy leképezést *projektivitásnak*, vagy projektív leképezésnek hívunk, ha tartja a kettőviszonyt. ▲

Használni fogjuk az $([A][B][C][D]) := (ABCD)$ és $(\overrightarrow{OA'}\overrightarrow{OB'}\overrightarrow{OC'}\overrightarrow{OD'}) := ([A][B][C][D])$ jelöléseket is.

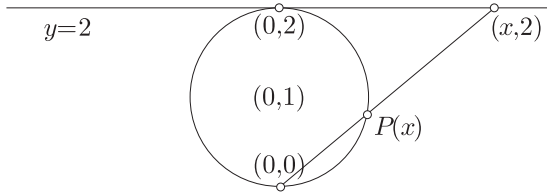
Az (1) definiáló formulából következik, hogy a kettőviszony függ a benne szereplő projektív pontok sorrendjétől, továbbá $A \neq B$ esetén

$$(ABCD) := \begin{cases} \frac{\mu_C}{\lambda_C} : \frac{\mu_D}{\lambda_D}, & \text{ha } A, B, C, D \text{ különbözőek,} \\ 1, & \text{ha } D = C \\ 0, & \text{ha } C \neq B = D, \text{ vagy } D \neq A = C \\ \infty & \text{ha } C = B \neq D, \text{ vagy } D = A \neq C. \end{cases}$$

Eszerint definíciónkból következik, hogy $(ABCD) = 1$ akkor és csak akkor, ha $A \neq B$ és $C = D$, vagy $A = B$ és $C \neq D$, $(ABCD) = 0$ kizárólag $A \neq C$ és $B = D$, vagy $A = C$ és $B \neq D$ esetén, valamint $(ABCD) = \infty$ pontosan $A \neq D$ és $B = C$, vagy $A = D$ és $B \neq C$ esetén teljesül.

Az $\mathbb{R}_\infty$ halmaz bijektív kapcsolatba hozható a körrel a következő módon: reprezentáljuk a valós számokat a síkon az $y = 2$ egyenes pontjaival, és vegyük ezen

pontokon át az origóra illeszkedő egyenesek metszetét az $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ körrel.

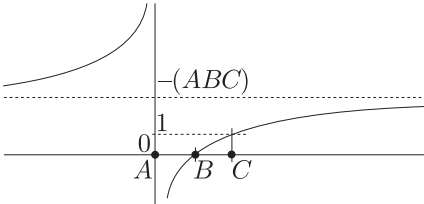


36. ábra

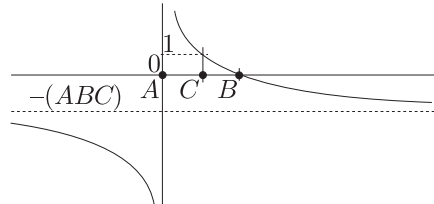
A kapott $x \mapsto (x, 2) \mapsto P(x) = (\frac{4x}{x^2+4}, \frac{8}{x^2+4})$ leképezés nyilván bijektív a valós számok és a $(0, 0)$ ponttól megfosztott körvonal között, ugyanakkor $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = (0, 0)$ miatt a $P(\infty) = (0, 0)$ kiegészítéssel bijektív a körvonal és az $\mathbb{R}_\infty$ halmaz között.

Ez lehetővé teszi a $d(x, y) = \angle((0, 1)P(x), (0, 1)P(y))$ metrika megadását az $\mathbb{R}_\infty$ halmazon, melyet a továbbiakban mindig ezzel a metrikával ellátva vizsgálunk.

Tétel. Ha A, B és C különböző rögzített pontjai egy e projektív egyenesnek, akkor az $X \mapsto (ABCX)$ leképezés egy folytonos $e \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ bijekció.



33. ábra



34. ábra

Bizonyítás. Legyen $(ABCX) = \frac{\mu_C}{\lambda_C} : \frac{\mu_X}{\lambda_X}$, ahol $\lambda_C \overrightarrow{OA'} + \mu_C \overrightarrow{OB'} \in [C]$, $\lambda_X \overrightarrow{OA'} + \mu_X \overrightarrow{OB'} \in [X]$, és $\overrightarrow{OA'} \in [A]$, $\overrightarrow{OB'} \in [B]$, valamint $\lambda_C, \mu_C, \lambda_X, \mu_X \in \mathbb{R}$.

Az injektivitás igazolásához tegyük fel, hogy $(ABCX) = (ABCY)$. Ekkor $\frac{\mu_Y}{\lambda_Y} = \frac{\mu_X}{\lambda_X}$ és $\lambda_X \overrightarrow{OA'} + \mu_X \overrightarrow{OB'} = \kappa_X \overrightarrow{OX'}$, valamint $\lambda_Y \overrightarrow{OA'} + \mu_Y \overrightarrow{OB'} = \kappa_Y \overrightarrow{OY'}$ valamely $\overrightarrow{OX'} \in [X]$, $\overrightarrow{OY'} \in [Y]$ és $\kappa_X, \kappa_Y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén.

Ha $\kappa = \frac{\mu_Y}{\mu_X} = \frac{\lambda_Y}{\lambda_X}$, akkor $\kappa \kappa_X \overrightarrow{OX} = \kappa_Y \overrightarrow{OY}$ adódik, amiért $[\overrightarrow{OX}] = [\overrightarrow{OY}]$.

A szürjektivitás igazolásához legyen $\kappa \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, amelyhez olyan X pontot keresünk az AB projektív egyenesen, melyre $\kappa = (ABCX)$. Ha $\kappa \notin \{\infty, 0\}$, akkor $[\frac{\mu_C}{\kappa} \overrightarrow{OB'} + \lambda_C \overrightarrow{OA'}]$ ilyen. Ha $\kappa = 0$, akkor $[B]$ ilyen, ha $\kappa = \infty$, akkor $[A]$ ilyen.

A leképezés folytonossága nyilvánvaló, hiszen $(ABCX) = \frac{\mu_C}{\lambda_C} : \frac{\mu_X}{\lambda_X}$ folytonosan változik az X projektív pontot meghatározó μ_X/λ_X osztóviszony függvényében. ■

Tételünk értelmében a projektív egyenes homotóp (folytonosan bijektív) képe $\mathbb{R}_\infty$, melyről a tétel előtt láttuk, hogy a kör homotóp képe. Tehát a projektív egyenes homotóp a körrel.

Terjesszük ki a valós számok összeadását és szorzását az $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ halmazra olyan módon, hogy minden $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ esetén

$$x \pm \infty := \infty \quad \text{és} \quad x \cdot \infty := \begin{cases} 1 & \text{ha } x = 0, \\ \infty & \text{ha } x \neq 0, \end{cases}$$

legyen. Ez a kiterjesztés nyilván folytonos a $0 \cdot \infty = 1$ szorzat esetét kivéve. A továbbiakban a kettősvizonyokkal végzett művelet esetén mindig e kiterjesztés értelmében számolunk.

Tétel. *A kettősvizony teljesíti az*

- (1) $(ABCD)(ABDC) = 1$,
- (2) $(ABCD) = (CDAB)$,
- (3) $(ABCD) + (ACBD) = 1$, és
- (4) $D \notin \{A, B\}$ esetén $(ABCD)(ABDE) = (ABCE)$,

azonosságokat.

Bizonyítás. A kettősvizony és szorzásának valamint összeadásának folytonossága miatt az (1) és (4) formulákban esetleg előforduló $0 \cdot \infty = 1$ szorzat esetét kivéve elegendő formuláinkat különböző A, B, C, D és E projektív pontokra bizonyítani, hiszen egyezőség esetén a pontokat „kicsit” elmozdítva, majd tartva velük az eredeti pontokba, a folytonosság miatt az eredeti pontokra is teljesülnie kell az adott formulának.

Az (1) és (4) formulában a $0 \cdot \infty$ és $\infty \cdot 0$ szorzat lehetőségét kell megvizsgálnunk.

Az (1) formulával kezdjük. Ha $(ABCD) = 0$, akkor $C \neq B = D$, vagy $D \neq A = C$, amiért $(ABDC) = \infty$, így teljesül az állítás. Ha $(ABCD) = \infty$, akkor $C = B \neq D$, vagy $D = A \neq C$, amiért $(ABDC) = 0$, vagyis teljesül az állítás.

A (4) formulával folytatjuk. Ha $(ABCD) = 0$, akkor $C \neq B = D$, vagy $D \neq A = C$, továbbá $(ABDE) = \infty$ miatt $D = B \neq E$, vagy $E = A \neq D$. Így a $D \notin \{A, B\}$ feltétel miatt a $0 \cdot \infty$ szorzat kizárólag a $D \neq A = C = E$ esetben jöhet létre, amikor viszont $(ABCE) = 1$, vagyis teljesül az állítás. Ha $(ABCD) = \infty$, akkor $C = B \neq D$, vagy $D = A \neq C$, továbbá $(ABDE) = 0$ miatt $D \neq B = E$, vagy $E \neq A = D$. Így a $D \notin \{A, B\}$ feltétel miatt a $\infty \cdot 0$ szorzat kizárólag a $D \neq B = C = E$ esetben jöhet létre, amikor viszont $(ABCE) = 1$, vagyis teljesül az állítás.

Innentől feltételezzük, hogy a kollineáris A, B, C, D és E projektív pontok különbözőek. Emiatt nyilván léteznek olyan $\lambda_C, \mu_C, \lambda_D, \mu_D$ és λ_E, μ_E nem nulla

valós számok, melyekre $\lambda_C \overrightarrow{OA'} + \mu_C \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OC'}$, $\lambda_D \overrightarrow{OA'} + \mu_D \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OD'}$ és $\lambda_E \overrightarrow{OA'} + \mu_E \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OE'}$, ahol $\overrightarrow{OA'} \in [A]$, $\overrightarrow{OB'} \in [B]$, $\overrightarrow{OC'} \in [C]$, $\overrightarrow{OD'} \in [D]$ és $\overrightarrow{OE'} \in [E]$. Ekkor persze a

$$(*) \quad \begin{aligned} (\lambda_C \mu_D - \lambda_D \mu_C) \overrightarrow{OA'} &= \mu_D \overrightarrow{OC'} - \mu_C \overrightarrow{OD'}, \\ (\lambda_D \mu_C - \lambda_C \mu_D) \overrightarrow{OB'} &= \lambda_D \overrightarrow{OC'} - \lambda_C \overrightarrow{OD'} \end{aligned}$$

egyenlőségek is teljesülnek.

A (4) azonosságot az

$$(ABCD)(ABDE) = \left(\frac{\mu_C}{\lambda_C} : \frac{\mu_D}{\lambda_D} \right) \cdot \left(\frac{\mu_D}{\lambda_D} : \frac{\mu_E}{\lambda_E} \right) = \left(\frac{\mu_C}{\lambda_C} : \frac{\mu_E}{\lambda_E} \right) = (ABCE)$$

egyenlet igazolja.

A (4) azonosság $E = C$ esete éppen az (1) azonosságot szolgáltatja.

A (2) formulához vegyük észre, hogy (*) szerint

$$(CDAB) = \frac{-\mu_C}{\mu_D} : \frac{-\lambda_C}{\lambda_D} = \frac{\mu_C}{\lambda_C} : \frac{\mu_D}{\lambda_D} = (ABCD).$$

A (3) azonosságot a (*) alapján világos $\mu_C \lambda_D \overrightarrow{OA'} + \mu_D (\overrightarrow{OC'} - \lambda_C \overrightarrow{OA'}) = \mu_C \overrightarrow{OD'}$ egyenlőségből az

$$\begin{aligned} (ABCD) + (ACBD) &= \left(\frac{\mu_C}{\lambda_C} : \frac{\mu_D}{\lambda_D} \right) + \left(\frac{1}{-\lambda_C} : \frac{\mu_D}{\mu_C \lambda_D - \lambda_C \mu_D} \right) \\ &= \left(\frac{\mu_C}{\lambda_C} : \frac{\mu_D}{\lambda_D} \right) - \left(\frac{\mu_C \lambda_D - \lambda_C \mu_D}{\lambda_C} : \frac{\mu_D}{1} \right) \\ &= \left(\frac{\mu_C}{\lambda_C} : \frac{\mu_D}{\lambda_D} \right) - \left(\frac{\mu_C \lambda_D}{\lambda_C} : \frac{\mu_D}{1} \right) + 1 = 1 \end{aligned}$$

levezetés igazolja. ■

Tétel. Bármely $I \in \{(-\infty, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, \infty)\}$ intervallumhoz és bármely négy különböző kollineáris P_1, P_2, P_3 és P_4 ponthoz létezik az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmaz olyan σ permutációja, hogy $(P_{\sigma 1} P_{\sigma 2} P_{\sigma 3} P_{\sigma 4}) \in I$.

Bizonyítás. Legyen $I_{-1} = (-\infty, -1)$, $I_{-0} = (-1, 0)$, $I_{+0} = (0, 1)$ és $I_{+1} = (1, \infty)$. Lépésenként igazoljuk, hogy bármelyik intervallumból egy megfelelően választott permutáció a következő intervallumba viszi a kettősviszony értékét.

$I_{+1} \Rightarrow I_{+0}$. Ha $1 < (P_1 P_2 P_3 P_4)$, akkor $0 < (P_1 P_2 P_4 P_3) = 1/(P_1 P_2 P_3 P_4) < 1$.

$I_{+0} \Rightarrow I_{-0}$. Ha $0 < (P_1 P_2 P_3 P_4) < 1$, akkor $(P_1 P_4 P_2 P_3) = 1 - (P_1 P_2 P_4 P_3) = 1 - 1/(P_1 P_2 P_3 P_4) < 0$, amiért $-1 < (P_1 P_4 P_2 P_3) < 0$ vagy $(P_1 P_4 P_2 P_3) < -1$. Előbbi

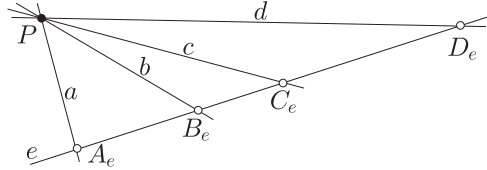
esetben készen vagyunk, utóbbi esetben pedig $-1 < (P_1 P_4 P_3 P_2) = 1 / (P_1 P_4 P_2 P_3) < 0$ igazolja ezt a lépést.

$I_{-0} \Rightarrow I_{-1}$. Ha $-1 < (P_1 P_2 P_3 P_4) < 0$, akkor $(P_1 P_2 P_4 P_3) = 1 / (P_1 P_2 P_4 P_3) < -1$ bizonyítja állításunk.

$I_{-1} \Rightarrow I_{+1}$. Ha $(P_1 P_2 P_3 P_4) < -1$, akkor $(P_1 P_3 P_2 P_4) = 1 - (P_1 P_2 P_3 P_4) > 2$ igazolja az állítást. ■

A projektív geometria egyik kulcsfontosságú összefüggése Papposz tétele, melyet euklidészi esetben már igazoltunk.

Papposz tétele. Legyen adott egy P pont és egy rá nem illeszkedő e egyenes a projektív síkban. Ha a P pontra illeszkedő, nem mind megegyező a, b, c, d projektív egyenesek az $A_e = a \cap e$, $B_e = b \cap e$, $C_e = c \cap e$ és $D_e = d \cap e$ pontokban metszik az e egyenest, akkor az $(A_e B_e C_e D_e)$ kettősvizony független az e egyenes választásától.



65. ábra

Bizonyítás. Az a, b, c, d, e egyenesekhez tartozó főkörök síkjainak normálisai legyenek az $\mathbf{n}_a, \mathbf{n}_b, \mathbf{n}_c, \mathbf{n}_d$ és $\mathbf{n}_e$ egységvektorok. Mivel az a, b, c, d egyenesek mind illeszkednek a P pontra, az $\mathbf{n}_a, \mathbf{n}_b, \mathbf{n}_c$ és $\mathbf{n}_d$ vektorok mind merőlegesek a $\overrightarrow{OP}$ vektorra, amiért egy ugyanerre merőleges $\mathcal{S}$ síkba esnek.

Ha, mondjuk $\mathbf{n}_a \neq \mathbf{n}_b$, akkor ezek bázist alkotnak a $\mathcal{S}$ vektorai között, amiért vannak olyan λ_c, μ_c és λ_d, μ_d valós számok, hogy $\lambda_c \mathbf{n}_a + \mu_c \mathbf{n}_b = \mathbf{n}_c$ és $\lambda_d \mathbf{n}_a + \mu_d \mathbf{n}_b = \mathbf{n}_d$, amiből pedig

$$\begin{aligned} \lambda_c (\mathbf{n}_a \times \mathbf{n}_e) + \mu_c (\mathbf{n}_b \times \mathbf{n}_e) &= \mathbf{n}_c \times \mathbf{n}_e, \\ \lambda_d (\mathbf{n}_a \times \mathbf{n}_e) + \mu_d (\mathbf{n}_b \times \mathbf{n}_e) &= \mathbf{n}_d \times \mathbf{n}_e \end{aligned}$$

következik, amiért $([\mathbf{n}_a \times \mathbf{n}_e] [\mathbf{n}_b \times \mathbf{n}_e] [\mathbf{n}_c \times \mathbf{n}_e] [\mathbf{n}_d \times \mathbf{n}_e]) = ([\mathbf{n}_a] [\mathbf{n}_b] [\mathbf{n}_c] [\mathbf{n}_d])$.

Másfelől $\mathbf{n}_a \times \mathbf{n}_e \in [A_e]$, $\mathbf{n}_b \times \mathbf{n}_e \in [B_e]$, $\mathbf{n}_c \times \mathbf{n}_e \in [C_e]$ és $\mathbf{n}_d \times \mathbf{n}_e \in [D_e]$, amiért $(A_e B_e C_e D_e) = ([\mathbf{n}_a \times \mathbf{n}_e] [\mathbf{n}_b \times \mathbf{n}_e] [\mathbf{n}_c \times \mathbf{n}_e] [\mathbf{n}_d \times \mathbf{n}_e]) = ([\mathbf{n}_a] [\mathbf{n}_b] [\mathbf{n}_c] [\mathbf{n}_d])$, ami nem függ az e egyenes választásától. ■

A közös pontra illeszkedő egyenesek halmazát *sugársornak* nevezzük, melyet egy P pont esetében $\check{P} = \{e : P \in e\}$ jelöl. Hasonló elnevezés a *pontsor*, melyen a közös egyenesre eső pontok halmazát értjük.

Definíció. Egy sugársor a, b, c, d egyenesnégyeséhez a Papposz-tétel szerint egyértelműen rendelhető valós számot az egyenesek $(abcd)$ *kettősvizonyának* hívjuk. ▲

Jegyezzük meg, hogy Papposz tétele szerint a projektív sík minden projektív leképezése tartja az egyenesek kettősvizonyát is.

Az e projektív egyenesre illeszkedő E pontokra felírhatjuk az $\langle [E], \mathbf{n}_e \rangle = 0$ egyenletet, ahol $\mathbf{n}_e$ a projektív egyeneshez tartozó főkör síkjának normálisa. Ez az egyenlet pontosan akkor teljesül, ha $\langle [E], [\mathbf{n}_e] \rangle = 0$, ami lehetővé teszi, hogy az egyenesekhez is homogén koordinátákat rendeljünk.

Definíció. Az e projektív egyenes $[e]$ homogén koordinátáján az $[\mathbf{n}_e]$ homogén koordinátát értjük, ahol $\mathbf{n}_e$ az e főköre síkjának normálisa. ▲

Tétel. Az E, F, G, H pontokra és e, f, g, h egyenesekre

- (0) $E \in e \Leftrightarrow \langle [E], [e] \rangle = 0$;
- (1) $[EF] = [E] \times [F]$;
- (2) $(EFGH) = ([E][F][G][H])$;
- (3) $[e \cap f] = [e] \times [f]$;
- (4) $(efgh) = ([e][f][g][h])$.

A bizonyításhoz elegendő arra gondolni, hogy az egyenes homogén koordinátájának definíciójából következő (0) állítás alapján $\langle [EF], [E] \rangle = \langle [EF], [F] \rangle = 0$ és $\langle [e \cap f], [e] \rangle = \langle [e \cap f], [f] \rangle = 0$, ami az (1) és (3) állításokat igazolja, míg a (2) és (4) állítás a definíció és Papposz-tételének következménye (konkrétan a bizonyítás utolsó formulájából adódik).

Jegyezzük meg, hogy (4) következtében az egyenesek kettősvizonya is folytonosan függ a változóitól.

Figyeljük meg, hogy tételünkben a pont és egyenes illeszkedése és a pontok közös egyenesre, az egyenesek közös pontra illeszkedése, valamint a pont- és egyenesnégyesek kettősvizonya teljes szimmetriát mutat az egyenes és pont fogalmak cseréjével szemben, vagyis teljesül a következő állítás.

Dualitási tétel. A projektív sík minden, csak a pont, egyenes, illeszkedés és kettősvizony fogalmakat használó állítása pontosan akkor teljesül, ha ugyanaz teljesül a pont és egyenes szavak felcserélésével is.

Definíció. A projektív síknak a tételben megfogalmazott tulajdonságát, *dualitásnak* nevezzük. ▲

A dualitás az affin síkon nem teljesül, hiszen ott két egyenes nem feltétlen metszi egymást, de két pontnak mindig van közös egyenese. A gömbön sem teljesül

a dualitás, hiszen ott meg két különböző főkör mindig két pontban metszi egymást, de két különböző, nem átellenes pontra mindig pontosan egy főkör illeszkedik.

A dualitás lehetővé teszi, hogy egy érvényes állítást „dualizálva”, vagyis a pont és egyenes szavakat következetesen felcserélve benne, újabb érvényes állítást nyerjünk. Ha a dualizálással kapott eredmény megegyezik az eredetivel, akkor önduális állításról beszélünk. Erre Papposz tétele is példa, amit alábbi megfogalmazása jól mutat.

Papposz tétele. *Legyen adott egy sugársor és egy rá nem illeszkedő pontsor a projektív síkban. A sugársor minden eleméhez a pontsornak arra illeszkedő elemét rendelő hozzárendelés a sugársor és a pontsor közötti bijektív leképezés, mely tartja a kettősvizonyt.*

A dualizálás közben nagyon hasznos az egyenes helyett a pontsorra, az egyenesek metszete helyett a közös pontra való illeszkedésre, a pontok egyenese helyett a közös egyenesre való illeszkedésre átfogalmazni a tételt.

2.2. Elválasztás

Kollineáris rendezett pontnégyest *elválasztónak* mondunk, ha a kettősvizonyuk negatív. Az elválasztás nyilván nem független a pontok sorrendjétől, hiszen $(ABCD) < 0$ esetén $(ACBD) > 1$. Azt mondjuk, hogy az A, B pontok elválasztják a C, D pontokat, ha $(ABCD) < 0$.

Harmonikusnak mondunk egy kollineáris rendezett pontnégyest, ha kettősvizonyuk -1 . Ugyanezt néha *harmonikus elválasztásként* említjük, vagy azt is mondjuk, hogy az A, B pontok harmonikusan választják el a C, D pontokat, $(ABCD) = -1$ esetén.

Jegyezzük meg, hogy a kettősvizony argumentumaitól való bijektív függése azt is jelenti, hogy bármely különböző pontokból álló A, B, X kollineáris ponthármashoz pontosan egy olyan Y pont van, melyet az A, B pontpár harmonikusan választ el az X ponttól, vagyis amelyre $(ABXY) = -1$ teljesül.

A projektív sík pontjainak egy halmazát *általános helyzetűnek* nevezzük, ha nincs a halmazban három közös egyenesre illeszkedő pont. A projektív sík egyeneseinek egy halmazát *általános helyzetűnek* nevezzük, ha nincs a halmazban három közös pontra illeszkedő egyenes.

Négy általános helyzetű egyenes rendezett halmazát *négyszögoldalnak*, négy általános helyzetű pont rendezett halmazát pedig *négyszögnek* hívunk. A négyszög oldal egyeneseit oldalaknak, a négyszög pontjait csúcsoknak nevezzük. Négyszögnél az

egymás mellé rendezett pontokat és az elsőt az utolsóval összekötő egyeneseket oldalaknak, a négyszoldal egymás mellé rendezett egyenseinek és az elsőnek az utolsóval vett metszéspontjait csúcsoknak nevezzük.

Négy pont, és ugyanígy négy egyenes eszerint éppen hat különböző négyszöget illetve négyszoldalt határoz meg.

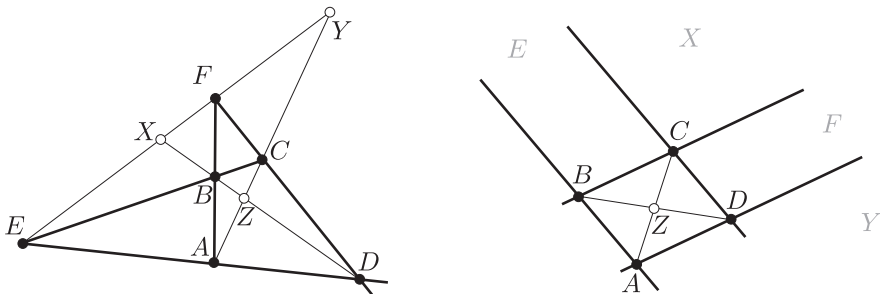
Definíció. Egy négyszoldal illetve négyszög által meghatározott *teljes négyszoldalról*, illetve *teljes négyszögről* beszélünk, ha a már adott csúcsok és oldalak halmazát kibővítjük az oldalak páronkénti metszeteivel, melyeket ilyenkor csúcsoknak nevezünk, a közös oldalra nem illeszkedő csúcsokat szemköztes csúcsoknak, a szemköztes csúcsokra illeszkedő egyeneseket átlóknak, ezek metszeteit pedig átlós pontoknak mondjuk. ▲

Definíciónk értelmében egy teljes négyszög illetve teljes négyszoldal csúcshalmaza illetve egyeneshalmaza nem függ az adott négyszög illetve négyszoldal elemeinek rendezésétől, azonban a metszéspontok illetve egyenesek „átlóspont” vagy „csúcs” kategóriába sorolása, valamint a csúcsokat összekötő egyenesek „átló” vagy „oldal” kategóriába sorolása közvetlenül függ a négyszögben vagy négyszoldalban megadott sorrendtől.

Tétel. *A teljes négyszoldal*

- (1) *átlós pontjai nem esnek egy egyenesre,*
- (2) *az átlókon a csúcsok harmonikusan választják el az átlós pontokat.*

Bizonyítás. Az első állítással kezdjük. Legyenek a teljes négyszög csúcsai A, B, C, D, E és F , átlós pontjai $X = BD \cap EF$, $Y = EF \cap AC$ és $Z = AC \cap BD$.



105. ábra

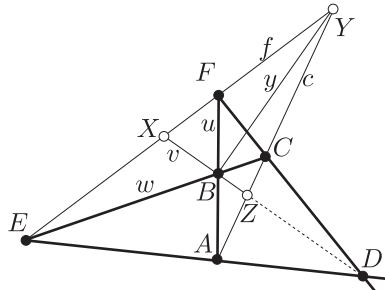
Vegyük ennek azon affin síkbeli képét, mely párhuzamos az EF átlónak megfelelő főkör síkjával. Ekkor az EF egyenes ebben az affin síkban a végtelen távoli egyenes lesz, vagyis $BC \parallel AD$ és $BA \parallel CD$ teljesül, tehát $ABCD$ paralelogramma. E

paralelogramma átlói természetesen metszik egymást, vagyis a Z pont nincs az EF végtelen távoli egyenesen, mely megegyezik az XY egyenessel.

A második állításhoz elég igazolni, hogy $(EFXY) = -1$. Ehhez csak azt kell észrevenni, hogy Papposz tételét a B pontra alkalmazva $(EFXY) = (CAZY)$, a D pontra alkalmazva pedig $(EFXY) = (ACZY)$ adódik, amiért $(EFXY)^2 = (CAZY)(ACZY) = 1$. Minthogy $E \neq F$ és $X \neq Y$, $(EFXY) \neq 1$, amiért $(EFXY) = -1$. Ezzel a bizonyítást befejeztük. ■

Tétel. Ha egy közös B ponton átmenő négy egyenes harmonikusan választja el egymást, akkor bármelyikén kiválasztva egy $Y \neq B$ pontot és azon át mind a négy adottól különböző két egyenest, pontosan egy olyan teljes négyoldal van, melynek mind a két új egyenes átlója, a B pont csúcsa, az Y átlós pontja, a közös B pontra illeszkedő négy adott egyenes közül pedig kettő oldal, egy átló, a negyedik pedig BY .

Bizonyítás. Legyen $(uvw) = -1$ a B pontra illeszkedő u, v, w és y egyenesekre, és válasszuk az $Y \neq B$ pontot az y egyenesen, azon át pedig az f és c egyeneseket.



110. ábra

Legyen $F = u \cap f$, $A = u \cap c$, $X = v \cap f$, $Z = v \cap c$, $E = w \cap f$ és $C = w \cap c$. Ekkor Papposz tétele és $(uvw) = -1$ miatt $(EFXY) = -1$ és $(ACZY) = -1$.

Azt kell igazolnunk, hogy az FC , EA és $v = XZ$ egyenesek egy közös pontra illeszkednek. Legyen $D = EA \cap FC$.

Papposz tétele szerint az XD egyenes olyan Z' pontban metszi az c egyenest, melyre $(ACZ'Y) = (EFXY) = -1$. A kettősviszony bijektivitásából $Z = Z'$ adódik, ami éppen a bizonyítandó. ■

Közös harmonikus elválasztó tétele. Legyen C, D és E, F az e egyenes két különböző pontokból álló pontpárja.

A C, D és E, F pontpárokhoz akkor és csak akkor létezik mindkettőt egyszerre harmonikusan elválasztó A, B pontpár, ha $(CDEF) > 0$.

Ha van a C, D és E, F pontpárokat egyszerre harmonikusan elválasztó A, B pontpár, akkor

$$(CDEF) = (ADEF)^2 \quad \text{és} \quad \sqrt{(CDEF)} = |\tanh \ln \sqrt{|(ABDF)|}|.$$

Bizonyítás. Ha az A, B pontpár harmonikusan választja el a C, D és E, F pontpárokat is, akkor az A, B, C, D, E és F pontokra $(ABCD) = -1$ és $(ABEF) = -1$, amiből

$$\begin{aligned} (CDEF) &= (CAEF)(ADEF) = (CAEB)(CABF) \cdot (ADEB)(ADBF) \\ &= (1 - (CEAB)) \frac{1}{1 - (CFAB)} \cdot \frac{1}{1 - (ABDE)} (1 - (ABDF)) \\ &= \frac{1 + (ABDC)(CEAB)}{1 + (DCAB)(CFAB)} \cdot \frac{1 - (ABDF)}{1 - (ABDE)} = \frac{1 + (ABDE)}{1 + (ABDF)} \cdot \frac{1 - (ABDF)}{1 - (ABDE)} \\ &= \frac{1 - (ABEF)(ABDE)}{1 + (ABDF)} \cdot \frac{1 - (ABDF)}{1 + (ABEF)(ABDE)} = \left(\frac{1 - (ABDF)}{1 + (ABDF)} \right)^2 \\ &= \left(\frac{(ABDF)}{1 + (ABDE)(ABEF)} \right)^2 = \left(\frac{(ABDF)}{(ADBE)} \right)^2 = (ADEF)^2 > 0, \end{aligned}$$

ami bizonyítja az első állítás „akkor” részét és az első formulát. A második formulát a levezetés utolsó sorában található $(CDEF) = \left(\frac{1 - (ABDF)}{1 + (ABDF)} \right)^2$ összefüggésből kapjuk.

$$\begin{aligned} \sqrt{(CDEF)} &= \frac{|1 - (ABDF)|}{|1 + (ABDF)|} = \frac{|\sqrt{(ABDF)}^{-1} - \sqrt{(ABDF)}|/2}{|\sqrt{(ABDF)}^{-1} + \sqrt{(ABDF)}|/2} \\ &= \frac{|\sinh \ln \sqrt{(ABDF)}|}{|\cosh \ln \sqrt{(ABDF)}|} = |\tanh \ln \sqrt{(ABDF)}|. \end{aligned}$$

Az első állítás „csak akkor” állításához a fentiek szerint elég $(CDEF) > 0$ esetén megfelelő A, B pontpárt találni. Legyen $A \in e$ az a pont, melyre $(CDAF) = \sqrt{(CDEF)}$. Ekkor létezik egy olyan B pont, és ez egyértelmű, melyre $(CDAB) = -1$. Legyen F' az a pont, melyre $(ABEF') = -1$. Iménti formulánk alapján ekkor $(CDEF') = (CDEA)^2$, miközben feltételeinkből $(CDEA)\sqrt{(CDEF)} = (CDEA)(CDAF) = (CDEF)$ miatt $(CDEA)^2 = (CDEF)$ adódik. Eszerint $(CDEF) = (CDEA)^2 = (CDEF')$, vagyis $F = F'$, ami azt jelenti, hogy A, B az E, F pontpárt is harmonikusan választja el. ■

Tekintsünk egy e egyenest és rögzítsük két különböző A és B pontját. Az $X, Y \in e \setminus \{A, B\}$ pontokat *szomszédosnak* mondjuk, ha $(ABXY) > 0$, és ezt $X \overset{AB}{\approx} Y$ jelöli.

Tétel. A szomszédosság ekvivalencia-reláció pontosan kettő ekvivalencia-osztállyal.

Bizonyítás. A szomszédosság

- reflexív, mert $(F_1 F_2 X X) = 1$,
- szimmetrikus, mert $(F_1 F_2 X Y)(F_1 F_2 Y X) = 1$, és
- tranzitív, mert $(F_1 F_2 X Z) = (F_1 F_2 X Y)(F_1 F_2 Y Z)$,

tehát ekvivalencia-reláció.

Rögzítsünk egy tetszőleges $P_0 \in e \setminus \{A, B\}$ pontot és legyen $N_0 \in e$ olyan, hogy $(ABP_0 N_0) = -1$, valamint $e_{AB}^+ = \{P : P \stackrel{AB}{\sim} P_0\}$ és $e_{AB}^- = \{N : N \stackrel{AB}{\sim} N_0\}$. Ha $X \in e_{AB}^+ \cap e_{AB}^-$, akkor $(ABP_0 X) > 0$ és $(ABX N_0) > 0$ miatt $(ABP_0 N_0) = (ABP_0 X)(ABX N_0) > 0$ ellentmondáshoz jutnánk, ezért $e_{AB}^+ \cap e_{AB}^- = \emptyset$. Ha lenne olyan $X \in e$ pont, melyre $X \notin e_{AB}^+ \cup e_{AB}^-$, akkor $(ABP_0 X) < 0$ és $(ABX N_0) < 0$ miatt $(ABP_0 N_0) = (ABP_0 X)(ABX N_0) > 0$ ellentmondásra vezetne. ■

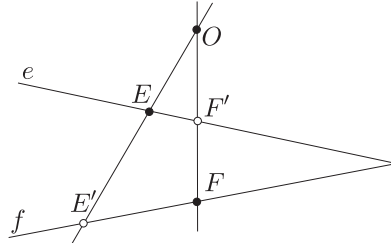
Az $e = AB$ egyes ekvivalencia-osztályait a továbbiakban e_{AB}^+ és e_{AB}^- jelöli. A dualitás miatt ugyanígy vezetjük be az ugyanazon $\check{P}$ sugársorhoz tartozó x, y egyenesek $e, f \in \check{P}$ egyenesekre vonatkozó szomszédosságát, melyet $x \stackrel{ef}{\sim} y$ jelöl. A $\check{P}$ egyenesének szomszédosság szerinti ekvivalencia-osztályait a továbbiakban $\check{P}_{ef}^+$ és $\check{P}_{ef}^-$ jelöli. Ez egyben azt is jelenti, hogy az e és f egyenesek két részre osztják a projektív síkot aszerint, hogy egy adott X pontra $XP \in \check{P}_{ef}^+$ vagy $XP \in \check{P}_{ef}^-$ teljesül. Ezeket a halmazokat $\mathbb{P}_{ef}^+$ és $\mathbb{P}_{ef}^-$ jelöli, és *projektív félsíkoknak* nevezzük őket. Papposz tétele értelmében két különböző pont akkor és csak akkor tartozik ugyanazon félsíkhöz, ha $(XYEF) > 0$, ahol $E = XY \cap e$ és $F = XY \cap f$.

2.3. Egyenesek közti projektivitások

Papposz tétele szerint egy $\check{P}$ sugársor két projektív leképezést is létrehoz két nem a sugársorhoz tartozó e és f egyenes között, melyek

- (1) $\pi_{Oef} : e \rightarrow f$, ahol $\pi_{Oef}(E) = EO \cap f = E'$, illetve
- (2) $\pi_{Ofe} : f \rightarrow e$, ahol $\pi_{Ofe}(F) = FO \cap e = F'$.

Ezek egymás inverzei és egyenesek (pontsorok) közötti *perspektivitásnak* hívjuk őket.



70. ábra

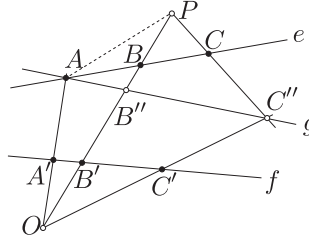
Projektivitások alaptétele. Legyenek az A, B, C pontok az e egyenesen, az $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ pontok az f egyenesen. Ekkor pontosan egy olyan $\pi: e \rightarrow f$ projektivitás létezik, melyre $\hat{A} = \pi(A)$, $\hat{B} = \pi(B)$ és $\hat{C} = \pi(C)$.

Bizonyítás. Az unicitás a kettősviszony bijektivitásából következik.

Ha $e = f$, akkor vegyünk egy tetszőleges Q pontot ezen egyenesen kívül, és válasszunk egy tetszőleges h egyenest, mely nem esik egybe az f egyenessel és nem illeszkedik a Q pontra sem. Legyen $A' = \pi_{Qfh}(\hat{A})$, $B' = \pi_{Qfh}(\hat{B})$ és $C' = \pi_{Qfh}(\hat{C})$.

Ha $e \neq f$, akkor legyen $A' = \hat{A}$, $B' = \hat{B}$ és $C' = \hat{C}$, $h = f$ és Q ezen kívüli tetszőleges pont.

Vegyünk most egy g egyenest az A ponton keresztül és legyen valamely $O \notin e \cup h \cup g$ pontra $A'' = \pi_{Ohg}(A') = A$; $B'' = \pi_{Ohg}(B')$ és $C'' = \pi_{Ohg}(C')$. Legyen $P = BB'' \cap CC''$.



12. ábra

Ekkor a π_{Pge} perspektivitásra $A = \pi_{Pge}(A'')$, $B = \pi_{Pge}(B'')$ és $C = \pi_{Pge}(C'')$, ezért a $\pi = \pi_{Qhf} \circ \pi_{Ohg} \circ \pi_{Peg}$ éppen a kívánt tulajdonságú projektivitás. ■

Tétel. Az e és e' egyenesek közti $\pi: e \rightarrow e'$ projektivitás akkor és csak akkor perspektivitás, ha az $e \cap e'$ metszéspont fix, vagyis $\pi(e \cap e') = e \cap e'$.

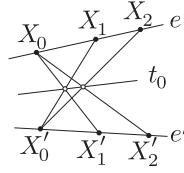
Bizonyítás. Ha π perspektivitás, akkor az $e \cap e'$ metszéspont nyilván fix.

Ha az $E_0 = e \cap e' = E'_0$ pont fix, vagyis $\pi(E_0) = E_0$, és az ettől és egymástól különböző $E_1, E_2 \in e$ pontokra $\pi(E_1) = E'_1$ és $\pi(E_2) = E'_2$, továbbá $P = E_1E'_1 \cap E_2E'_2$, akkor a $\pi_{Pee'}$ perspektivitásra $\pi_{Pee'}(E_0) = \pi(E_0)$, $\pi_{Pee'}(E_1) = \pi(E_1)$ és $\pi_{Pee'}(E_2) = \pi(E_2)$. Mivel $\pi_{Pee'}$ és π is projektivitás az e és e' egyenesek között, a projektivitások alaptétele igazolja az állítást. ■

Tétel. Az e és e' egyenesek közti minden $\pi: e \rightarrow e'$ projektivitás esetén a $t = \{X\pi(Y) \cap \pi(X)Y : X, Y \in e\}$ halmaz egy egyenes.

Bizonyítás. Legyenek X_0, X_1 és X_2 különböző pontok az e egyenesen, és legyen $X'_0 = \pi(X_0)$, $X'_1 = \pi(X_1)$ és $X'_2 = \pi(X_2)$, valamint t_0 az $X_0X'_1 \cap X'_0X_1$ és $X_0X'_2 \cap$

X'_0X_2 pontokra illeszkedő egyenes.



8. ábra

A $\pi_{X_0t_0e'}$ és $\pi_{X'_0et_0}$ perspektivitásokból összetett $\pi_{X_0t_0e'} \circ \pi_{X'_0et_0}$ projektivitás az X_0, X_1 és X_2 pontokat nyilván rendre az X'_0, X'_1 és X'_2 pontokba viszi. Ebből a projektivitások alaptétele miatt $\pi(Y) = \pi_{X_0t_0e'}(\pi_{X'_0et_0}(Y))$ adódik, amiért

$$X_0\pi(Y) \cap t_0 = \pi_{X_0t_0e'}^{-1}(\pi(Y)) = \pi_{X'_0et_0}(Y) = X'_0Y \cap t_0,$$

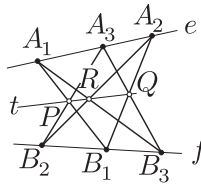
vagyis $t_0 = \{X_0\pi(Y) \cap X'_0Y : Y \in e\} = t$, ahogy állítottuk. ■

A t egyenes akkor és csak akkor megy át az $e \cap e'$ ponton, ha $e \cap e'$ fixpontja a π projektivitásnak, vagyis π perspektivitás a két egyenes közt. A t egyenest a *projektivitás tengelyének* nevezzük.

Eredményünk értelmében két különböző egyenes közti projektivitás legfeljebb kettő perspektivitás szorzata, egy egyenes önmagára vett projektivitása pedig legfeljebb három perspektivitás szorzata, hiszen egy perspektivitás kell ahhoz, hogy a képpontokat másik egyenesre vigyük.

Pappos–Pascal-tétel. *Legyenek az $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ hatszög A_1, A_2, A_3 csúcsai kollineárisak. Ekkor az $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ hatszög szemköztes oldalainak metszéspontjai akkor és csak akkor kollineárisak, ha a B_1, B_2, B_3 ponthármas kollineáris.*

Bizonyítás. Az „akkor” állítás bizonyításához a B_1, B_2, B_3 ponthármas kollineárisát iménti tételünkkel használjuk. Defináljuk a $\pi: e \rightarrow f$ projektivitást azzal, hogy $\pi(A_1) = B_2$, $\pi(A_2) = B_3$ és $\pi(A_3) = B_1$, és legyen t ezen projektivitás tengelye.



90. ábra

Előbbi tételünk szerint ekkor $A_1B_1 \cap B_2A_3 = A_1\pi(A_3) \cap \pi(A_1)A_3 \in t$, $B_1A_2 \cap A_3B_3 = \pi(A_3)A_2 \cap A_3\pi(A_2) \in t$ és $A_2B_2 \cap B_3A_1 = A_2\pi(A_1) \cap \pi(A_2)A_1 \in t$, ami igazolja az „akkor” állítást.

A „csak akkor” állítás bizonyításához tegyük fel, hogy a szemköztes oldalak $A_1B_1 \cap B_2A_3 = P$, $B_1A_2 \cap A_3B_3 = Q$ és $A_2B_2 \cap B_3A_1 = R$ metszéspontjai valamely t egyenesre esnek. Ekkor az $A_1PA_3QA_2R$ hatszögre alkalmazva az „akkor” állítást, kapjuk, hogy a $B_1 = A_1P \cap QA_2$, $B_2 = RA_2 \cap A_3P$ és $B_3 = A_3Q \cap RA_1$ pontok kollineárisak.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

Egy egyenest önmagára képező π projektivitást n -ed rendűnek nevezünk, ha $\pi^n = \text{id}$, de $i < n$ esetén $\pi^i \neq \text{id}$. Például a kollineáris A, B, C ponthármason a $\pi: A \mapsto B, B \mapsto C, C \mapsto A$ feltétellel megadott projektivitás rendje három, a $\pi: A \mapsto B, B \mapsto A, C \mapsto C$ projektivitás pedig másodrendű. A másodrendű projektivitasokat *involutív projektivitásnak* vagy egyszerűen *involúciónak* hívjuk.

Tétel. (1) Ha egy egyenes önmagára vett nem identikus π projektivítására $\pi^2(E) = E \neq \pi(E)$ teljesül valamely $E \in e$ pontban, akkor π involutív.
 (2) Ha egy egyenes involutív projektivításának létezik fixpontja, akkor pontosan egy további fixpontja is van.
 (3) Ha egy egyenes involutív projektivításának két fixpontja van, akkor azok minden pontot harmonikusan választanak el a képétől.

Bizonyítás. (1) Minden $X \in e$ pont esetén

$$\begin{aligned} (E\pi(E)X\pi(X)) &= (\pi(E)\pi^2(E)\pi(X)\pi^2(X)) = (\pi(E)E\pi(X)\pi^2(X)) \\ &= (E\pi(E)\pi^2(X)\pi(X)), \end{aligned}$$

amiért minden $X \in e$ pontra $X = \pi^2(X)$, vagyis π involutív.

(2) Legyen F_1 a $\pi: e \rightarrow e$ projektivitás fixpontja. Vegyünk egy tetszőleges $E_1 \neq F_1$ pontot az e egyenesen. Ha $\pi(E_1) = E_1$, akkor készen vagyunk. Ha $\pi(E_1) \neq E_1$, akkor legyen $F_2 \in e$ az a pont, melyre $(F_1F_2E_1\pi(E_1)) = -1$. Erre alkalmazva a π involutív projektivitást a $-1 = (\pi(F_1)\pi(F_2)\pi(E_1)\pi^2(E_1)) = (F_1\pi(F_2)\pi(E_1)E_1) = (\pi(F_2)F_1E_1\pi(E_1)) = (F_1\pi(F_2)E_1\pi(E_1))$ egyenlőség adódik. Ebből $\pi(F_2) = F_2$ következik, miközben $F_1 \neq F_2$, hiszen $(F_1F_2E_1\pi(E_1)) = -1$. Több fixpont nem fordulhat elő, mert π nem identikus, viszont a projektivitasok alaptétele szerint három fixpontja csak az identikus projektivitásnak van.

(3) Tekintsük most az $F_1 \neq F_2$ fixpontokat és egy tetszőleges E pontot az e egyenesen. Ekkor

$$(F_1F_2E\pi(E)) = (\pi(F_1)\pi(F_2)\pi(E)\pi^2(E)) = (F_1F_2\pi(E)E) = 1/(F_1F_2E\pi(E)),$$

amiért $(F_1F_2E\pi(E))^2 \equiv 1$. Mivel π nem identikus és (így) pontosan kettő fixpontja van, $E \neq \pi(E)$, amiből $(F_1F_2E\pi(E)) = -1$ adódik. ■

Egy e egyenes involutív projektivítását rendre *elliptikusnak*, *parabolikusnak* illetve *hiperbolikusnak* hívjuk, ha 0, 1 vagy 2 fixpontja van.

Tétel. *Egy e egyenes involutív projektivitása nem lehet parabolikus, és*

- (a) *pontosan akkor elliptikus, ha*
 - (a.0) *nincs fixpontja, vagy*
 - (a.1) *léteznek olyan $E_1 \neq E_2 \in e$ pontok, hogy $(E_1\pi(E_1)E_2\pi(E_2)) < 0$;*
 - (a.2) *minden $E_1 \neq E_2 \in e$ pontpárra $(E_1\pi(E_1)E_2\pi(E_2)) < 0$;*
- (b) *pontosan akkor hiperbolikus, ha*
 - (b.0) *van fixpontja, vagy*
 - (b.1) *léteznek olyan $E_1 \neq E_2 \in e$ pontok, hogy $(E_1\pi(E_1)E_2\pi(E_2)) > 0$;*
 - (b.2) *minden $E_1 \neq E_2 \in e$ pontpárra $(E_1\pi(E_1)E_2\pi(E_2)) > 0$.*

Bizonyítás. Az első állítás előbbi tételünk (2) állításának megfogalmazása, az (a.0) állítás maga a definíció, (b.0) pedig ezek nyilvánvaló következménye.

A (b) feltételezése esetén π hiperbolikus, tehát van két fixpontja: F_1 és F_2 . Ekkor minden E_1 és E_2 pontra $(F_1F_2E_1\pi(E_1)) = -1$ és $(F_1F_2E_2\pi(E_2)) = -1$, amiből a harmonikus elválasztások kettősvizonyára már láttuk, hogy $(E_1\pi(E_1)E_2\pi(E_2)) = (F_1\pi(E_1)E_2\pi(E_2))^2 > 0$ következik, ha $E_1 \neq E_2$. Eszerint (b.2), és így (b.1) is teljesül.

Tegyük most fel, hogy (b.1) teljesül, vagyis léteznek olyan $E_1 \neq E_2 \in e$ pontok, hogy $(E_1E_2\pi(E_1)\pi(E_2)) > 0$. Legyen $X \in e$ az a pont, melyre $(E_1\pi(E_1)X\pi(E_2)) = \sqrt{(E_1\pi(E_1)E_2\pi(E_2))}$. Ekkor

$$\begin{aligned} (E_1\pi(E_1)E_2X)\sqrt{(E_1\pi(E_1)E_2\pi(E_2))} &= (E_1\pi(E_1)E_2X)(E_1\pi(E_1)X\pi(E_2)) \\ &= (E_1\pi(E_1)E_2\pi(E_2)) \end{aligned}$$

miatt

$$\begin{aligned} (E_1\pi(E_1)E_2X) &= \sqrt{(E_1\pi(E_1)E_2\pi(E_2))} = (E_1\pi(E_1)X\pi(E_2)) \\ &= (\pi(E_1)\pi^2(E_1)\pi(X)\pi^2(E_2)) = (\pi(E_1)E_1\pi(X)E_2) \\ &= (E_1\pi(E_1)E_2\pi(X)), \end{aligned}$$

vagyis $X = \pi(X)$ egy fix pont, tehát π hiperbolikus, vagyis (b) teljesül, és így (b.2) is.

Az (a) feltételezése esetén π elliptikus, így nem hiperbolikus, amiért (b.1) és (b.2) sem teljesül, tehát rendre (a.2) és (a.1) következik.

Tegyük most fel, hogy (a.1) teljesül, vagyis léteznek olyan $E_1 \neq E_2 \in e$ pontok, hogy $(E_1E_2\pi(E_1)\pi(E_2)) < 0$. Eszerint (b.2) nem teljesül, amiért π nem hiperbolikus, tehát elliptikus, amiből (a.2) is következik. ■

A hiperbolikus esetben a (b.1) bizonyítása közben meghatározott X fixpont mellett a másik fixpont is lényegében ugyanúgy meghatározható, mert az az $Y \in e$

pont, melyre $(E_1\pi(E_1)Y\pi(E_2)) = -\sqrt{(E_1\pi(E_1)E_2\pi(E_2))}$ szintén fixpont, hiszen

$$\begin{aligned} - (E_1\pi(E_1)E_2Y)\sqrt{(E_1\pi(E_1)E_2\pi(E_2))} &= (E_1\pi(E_1)E_2Y)(E_1\pi(E_1)Y\pi(E_2)) \\ &= (E_1\pi(E_1)E_2\pi(E_2)) \end{aligned}$$

miatt

$$\begin{aligned} - (E_1\pi(E_1)E_2Y) &= \sqrt{(E_1\pi(E_1)E_2\pi(E_2))} = -(E_1\pi(E_1)Y\pi(E_2)) \\ &= -(\pi(E_1)\pi^2(E_1)\pi(Y)\pi^2(E_2)) = -(\pi(E_1)E_1\pi(Y)E_2) \\ &= -(E_1\pi(E_1)E_2\pi(Y)), \end{aligned}$$

és $X \neq Y$, mert $X = Y$ esetén a

$$(E_1\pi(E_1)E_2\pi(E_2)) = (E_1\pi(E_1)E_2Y)(E_1\pi(E_1)X\pi(E_2)) = -(E_1\pi(E_1)E_2\pi(E_2)),$$

vagyis az $(E_1\pi(E_1)E_2\pi(E_2)) = 0$ ellentmondás adódna.

Jegyezzük meg azt is, hogy az e egyenes π hiperbolikus projektivitásának F_1 és F_2 fixpontjai által kijelölt két szomszédsági ekvivalencia-osztályt a π bijektíven egymásba képezi, mert ha $N_0 \in e_{F_1F_2}^-$, akkor a $P_0 := \pi(N_0)$ pontra $(F_1F_2N_0P_0) = (F_1F_2N_0\pi(N_0)) = -1$, vagyis $P_0 \in e_{F_1F_2}^+$ teljesül, amiért tetszőleges $N \in e_{F_1F_2}^-$ esetén $0 < (F_1F_2N_0N) = (\pi(F_1)\pi(F_2)\pi(N_0)\pi(N)) = (F_1F_2P_0\pi(N))$, vagyis $\pi(N) \in e_{F_1F_2}^+$, továbbá ugyanígy bizonyíthatóan tetszőleges $P \in e_{F_1F_2}^+$ esetén $\pi(P) \in e_{F_1F_2}^-$.

2.4. A sík projektivitásai és kollineációi

Amennyiben négy kollineáris projektív pontnak valamely $\mathcal{S}$ síkon közösleges pontok felelnek meg, akkor kettősviszonyuk a megfelelő síkbeli ponjaik osztóviszonyainak arányával egyenlő, ami azt sejteti, hogy az affin kollineációk tartják a kettősviszonyt (azon pontok kettősviszonyáról, melyek a síkkal párhuzamos főkörre esnek, ez a gondolat nem ad közvetlen információt).

Tétel. *A projektív sík minden π projektív transzformációja projektív kollineáció.*

Bizonyítás. A $\pi: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ projektivitás egyenestartó is, hiszen a kettősviszony csak a kollineáris pontnégyesek halmazán definiált, ezért elég látnunk, hogy bijektív.

Eszerint π bármely e egyenesre vett π_e megszorítása bijektív, hiszen véve az e egyenesen az A, B, C különböző pontokat, azt látjuk, hogy $k(X) = (ABCX) = (\pi(A)\pi(B)\pi(C)\pi(X))$ bijektív módon függ az X ponttól, és $\pi(X)$ is bijektív módon függ a $\pi(e)$ egyenesen adott $k(X)$ kettősviszonytól.

Papposz tétele értelmében ez azt is jelenti, hogy π a közös P pontra illeszkedő egyenesek sugársorát is bijektív módon rendeli a $\pi(P)$ pontra illeszkedő egyenesek sugársorához.

A π egyenestartó projektivitás injektív, hiszen rögzítve egy P pontot, valamely A és B pontok $\pi(A)$ és $\pi(B)$ képeinek egybeeséséből következik, hogy $\pi(P)$, $\pi(A)$ és $\pi(B)$ kollineáris, amiért a sugársorokon igazolt bijektivitás miatt a P , A és B pontok is kollineárisak, amiből viszont a bármely egyenesen igazolt bijektivitás miatt A és B egybeesése következik.

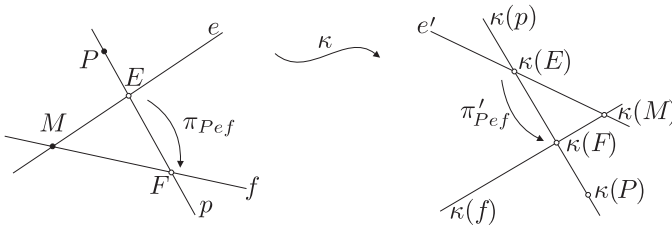
A π egyenestartó projektivitás szürjektív, hiszen rögzítve egy P pontot, bármely X' pont rajta van az $x' = X'\pi(P)$ egyenesen, amiért a sugársorokon igazolt bijektivitás miatt van olyan x egyenes a P ponton át, melyre $\pi(x) = x'$, amiből viszont a bármely egyenesen igazolt bijektivitás miatt van olyan X pont az x egyenesen, melynek képe éppen X' .

Tehát π bijektív. ■

Jegyezzük meg, hogy a projektív sík projektív transzformációi folytonosak is, mert a közös pontra illeszkedő egyenesek halmaza kompakt (zárt és korlátos), és π éppúgy folytonos ezen, mint magukon az egyeneseken.

Tétel. *Ha a projektív sík κ transzformációja egyenestartó és tartja a kettősviszonyt valamely e egyenes és annak $e' = \kappa(e)$ képe között, akkor κ projektív kollineáció.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges $f \neq e$ egyenest és egy P pontot, ami az e , f egyenesek egyikén sincs rajta.



67. ábra

A feltétel szerint a $\kappa(P)$ pont nem esik az $e' = \kappa(e)$ és $f' = \kappa(f)$ egyenesek egyikére se, és $f' \neq f$. A κ egyenestartása miatt az $F = \pi_{Pef}(E)$ pont képe a $\kappa(EP) \cap \kappa(f)$ pont, vagyis $\kappa(F) = \pi_{\kappa(P)e'f'}(\kappa(E))$.

Mivel a $\kappa|_e$ projektív, bijektív is, amiért az e' egyenes minden pontja $\kappa(E)$ alakú valamely egyértelmű $E \in e$ pontra, így iménti formulánkból $\kappa|_{f'} = \pi_{\kappa(P)e'f'} \circ \kappa|_e \circ \pi_{Pef}^{-1}$ következik. Mivel $\kappa|_e$ és a $\pi_{\kappa(P)e'f'}$, valamint π_{Pef} perspektivitások is projektívek, kapjuk, hogy $\kappa|_{f'}$ is projektív.

Tehát κ egy projektivitás, amiből előbbi tételünk adja a bizonyítandót. ■

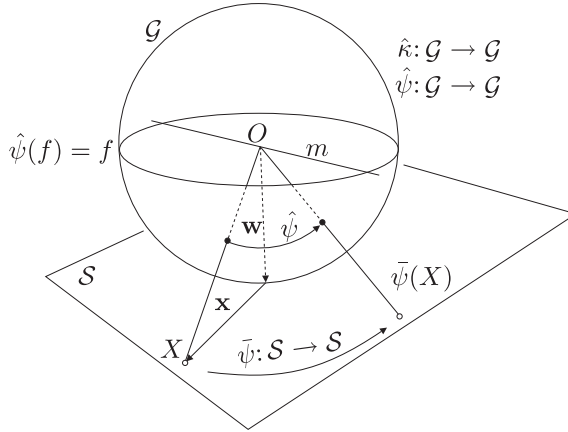
Mivel a kollineációk a teljes négyszögeket teljes négyszögekbe viszik, őrzik a harmonikus elválasztást is, vagyis tartják a -1 értékű kettősviszonyt. A kettősviszonyra érvényes algebrai azonosságok alapján ebből már következik, hogy a kollineációk minden r racionális kettősviszonyú pontnégyest ugyanezen r kettősviszonyban lévő pontnégyesbe visznek. Ha a kollineáció folytonos, akkor ebből már következik, hogy tartja a kettősviszonyt, vagyis projektív.

Staudt tétele. *A projektív sík kollineációi projektívek.*

Bizonyítás. Legyen κ egy kollineáció a projektív síkon. Ez a gömbön egy főkört főkörbe vivő, bijektív, szemköztességet tartó $\hat{\kappa}$ leképezésként jelenik meg.

Legyen f egy főkör és az m egyenes a $\hat{\kappa}(f)$ és f főkörök síkjainak metszete. Ezen síkok által bezárt szög legyen α . Ekkor $\hat{\psi} = \varphi_{m, -\alpha} \circ \hat{\kappa}$ — ahol $\varphi_{m, -\alpha}$ az m tengely körüli $-\alpha$ szögű forgatás — olyan a főköröket és a szemköztességet tartó bijektív transzformációja a gömbnek, melyre $\hat{\psi}(f) = f$, vagyis az f főkör invariáns.

Legyen ψ a projektív sík azon transzformációja, melynek a gömbön $\hat{\psi}$ felel meg, és legyen $\mathcal{S}$ a gömböt érintő, az f főkör síkjával párhuzamos sík.



5. ábra

Definiáljuk ezen a

$$\bar{\psi}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} \quad \bar{\psi}(X) := \hat{\psi}\left(\frac{\mathbf{x} + \mathbf{w}}{|\mathbf{x} - \mathbf{w}|}\right) \cdot \frac{1}{\langle \mathbf{w}, \hat{\psi}\left(\frac{\mathbf{x} + \mathbf{w}}{|\mathbf{x} + \mathbf{w}|}\right) \rangle}$$

transzformációt, ahol $\mathbf{w}$ a gömb középpontjából az $\mathcal{S}$ érintési pontjába mutató vektor, $\mathbf{x}$ pedig az érintési pontból az $\mathcal{S}$ sík X pontjába mutató vektor.

Ekkor $\bar{\psi}$ affinitás az $\mathcal{S}$ síkon, hiszen bijektív és egyenestartó, amiért tartja az osztóviszonyt. Eszerint ψ tartja a kettősviszonyt olyan pontnégyeseken, amelyek nem tartalmaznak pontot az f főkörrel.

Eredményünket Paposz tételével kombinálva azt kapjuk, hogy ψ minden sugáron tartja a kettősviszonyt, hiszen bármely közös pontra illeszkedő négy egyeneshez van olyan egyenes, mely mind a négyet az f főkörre nem illeszkedő pontban metszi. Ebből azonnal következik, hogy ψ tartja a kettősviszonyt minden egyenesen, hiszen minden e egyenes pontsora és bármely, az e egyenesen kívüli E pont sugársora között bijektív és kettősviszonytartó kapcsolat van. ■

E szakasz első eredménye és Staudt tétele alapján teljesül a következő.

Projektív geometria alaptétele. *A projektív sík kollineációi és projektivitásai meg egyeznek.*

2.5. Kollineációk

Kollineációk mátrix-reprezentációs tétele. *Minden κ kollineációhoz létezik olyan konstans szorzó erejéig egyértelmű $\mathbf{L}$ nem elfajuló lineáris transzformáció, melynek $\mathbf{M}$ mátrixára $[\kappa(P)] = [\mathbf{L}(P)] = [P]\mathbf{M}$ minden P pont esetén.*

Bizonyítás. Legyen κ egy kollineáció a projektív síkon és a Staudt-féle jelölést követve legyen $\kappa = \varphi_{m,\alpha} \circ \psi$, ahol ψ egy projektivitás, $\bar{\psi}$ affinitás és a $\hat{\psi} = \varphi_{m,\alpha} \circ \hat{\kappa}$ gömbi leképezés rendelkezik egy f invariáns főkörrel.

Legyen $\mathbf{v}$ egységnyi vektor az m tengelyen, $\mathbf{u}$ egységnyi vektor erre merőleges az f kör síkjában, $\mathbf{w}$ pedig egészítse ki e két vektort ortonormált bázissá. Koordinátázzuk az $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ ortonormált bázis szerint.

Mint hogy $\bar{\psi}$ egy affinitás az $\mathcal{S}$ síkon, az $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ bázishoz rendelt koordinátázásban

$$\bar{\psi}(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{pmatrix} + (x_0, y_0)$$

teljesül valamely ψ_{ij} ($i, j = 1, 2$) és x_0, y_0 valós számokra, ahol $\det \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{pmatrix} \neq 0$. Világos, hogy $\bar{\psi}$ a $z = 1$, vagyis az $\mathcal{S}$ síkra vett megszorítása a tér

$$\tilde{\psi}(x, y, z) = (x, y, z) \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & 0 \\ \psi_{21} & \psi_{22} & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix}$$

lineáris transzformációjának.

Ha $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ és $z \neq 0$, akkor nyilván

$$\hat{\psi}(x, y, z) = \frac{\tilde{\psi}(x/z, y/z, 1)}{|\tilde{\psi}(x/z, y/z, 1)|} = \frac{\tilde{\psi}(x, y, z)}{|\tilde{\psi}(x, y, z)|}.$$

Mint hogy ψ projektivitás, $\hat{\psi}$ folytonos, így utóbbi egyenlőség minden $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ koordináta mellett érvényes. Eszerint $\hat{\kappa} = \varphi_{m,\alpha} \circ \hat{\psi}$ miatt ilyen koordinátára

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}(x, y, z)| \cdot \hat{\kappa}(x, y, z) &= (x, y, z) \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & 0 \\ \psi_{21} & \psi_{22} & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= (x, y, z) \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \cos \alpha & \psi_{12} \sin \alpha \\ \psi_{21} & \psi_{22} \cos \alpha & \psi_{22} \sin \alpha \\ x_0 & y_0 \cos \alpha - \sin \alpha & y_0 \sin \alpha + \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= (x, y, z) \mathbf{M}, \end{aligned}$$

ami homogén koordinátákban azt jelenti, hogy

$$\kappa([x, y, z]) = \left[\hat{\kappa} \left(\frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \right] = [(x, y, z) \mathbf{M}] (= : [x, y, z] \mathbf{M}).$$

Világos, hogy $\mathbf{M}$ nem elfajuló mátrix, mert a κ kollineáció nem nulla vektorokhoz nem nulla vektorokat rendel, ezért az $\mathbf{M}$ mátrix által meghatározott $\mathbf{L}$ lineáris leképezés az, aminek létét a tétel állítja.

Ha az $\mathbf{M}'$ mátrix által reprezentált $\mathbf{L}'$ lineáris leképezésre is $\kappa([x, y, z]) = [(x, y, z) \mathbf{M}']$ teljesül, akkor a homogén koordináták egybeesése miatt minden $\mathbf{u}$ vektorhoz létezik olyan $\lambda_{\mathbf{u}} \neq 0$ valós szám, melyre $\mathbf{u} \mathbf{L}' = \lambda_{\mathbf{u}} \mathbf{u} \mathbf{L}$. Ekkor az $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}' \mathbf{L}^{-1}$ lineáris leképezésre és tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vektorokra

$$\lambda_{\mathbf{u}+\mathbf{v}} \mathbf{u} + \lambda_{\mathbf{u}+\mathbf{v}} \mathbf{v} = \lambda_{\mathbf{u}+\mathbf{v}} (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \mathbf{L}_0 = \mathbf{u} \mathbf{L}_0 + \mathbf{v} \mathbf{L}_0 = \lambda_{\mathbf{u}} \mathbf{u} + \lambda_{\mathbf{v}} \mathbf{v}$$

teljesül, így ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ függetlenek, akkor $\lambda_{\mathbf{v}} = \lambda_{\mathbf{u}+\mathbf{v}} = \lambda_{\mathbf{u}}$ adódik. Minthogy a térben (persze síkon is) bármely $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorhoz van olyan harmadik $\mathbf{w}$ vektor, mely mindkettőtől független, ebből $\lambda_{\mathbf{u}} = \lambda_{\mathbf{w}} = \lambda_{\mathbf{v}}$ adódik. Tehát a $\lambda_{\mathbf{u}}$ valós szám nem függ az indexétől, vagyis konstans λ , ami azt jelenti, hogy $\mathbf{L}' = \lambda \mathbf{L}$. Ez igazolja a tétel második állítását. ■

A további formuláinkban hacsak különös jelentősége nincsen, nem különböztetjük meg a lineáris leképezést és az őt valamely bázisban reprezentáló mátrixot.

Azt mondjuk, hogy egy adott bázisban az $\mathbf{M}$ mátrix reprezentálja a κ kollineációt, ha $[\kappa(P)] = [P] \mathbf{M}$. A κ kollineáció transzponáltján azt a κ^T kollineációt

értjük, melyet reprezentáló mátrix a κ kollineációt reprezentáló mátrix transzponáltja, vagyis homogén koordinátákban

$$\kappa: \mathbf{u} \mapsto [\mathbf{u}]\mathbf{M} \Leftrightarrow \kappa^T: \mathbf{u} \mapsto [\mathbf{u}]\mathbf{M}^T.$$

*Szimmetrikus kollineáció*nak nevezzük azon kollineációkat, melyekhez tartozó mátrix szimmetrikus. Ilyenkor $\kappa = \kappa^T$.

Tétel. *A projektív sík kollineációinak van fixpontja és invariáns egyenes.*

Bizonyítás. Tekintsük a $\kappa([x, y, z]) = [(x, y, z)\mathbf{M}]$ kollineációt. Mivel $\mathbf{M}$ egy 3×3 -as mátrix, a hozzá tartozó lineáris leképezésnek létezik egy $\mathbf{u}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ sajátvektora, és invariáns altere, vagyis két olyan független $\mathbf{u}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ és $\mathbf{u}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ vektor, hogy ezek összes lineáris kombinációjának $\mathbf{M}$ melletti képe ugyanezen vektorok lineáris kombinációja. (Ennek a lineáris algebrai ténynek egyszerű számolással való igazolása megtalálható a Függelékben.)

Ez egyfelől azt jelenti, hogy $[\mathbf{u}_0] = [\mathbf{u}_0]\mathbf{M}$, tehát a κ kollineációnak van fixpontja, másfelől azt, hogy az $\mathbf{u}_1$ és $\mathbf{u}_2$ által lineáris kombinációkkal generált, és ezért az origón átmenő $\mathcal{U}$ sík minden $\mathbf{u}$ vektorára $\mathbf{u}\mathbf{M} \in \mathcal{U}$, vagyis az $\mathcal{U}$ síkra illeszkedő főkörhöz tartozó projektív egyenes invariáns a κ kollineációra nézve. ■

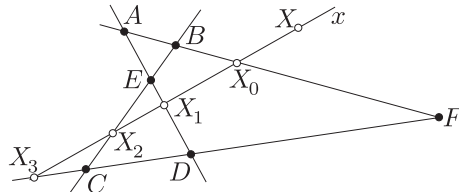
Tételünk választ ad egyik régebbi kérdésünkre: a projektív sík minden kollineációja affin. Jegyezzük azért meg, hogy arról nem szól az állítás, hogy a fixpont illeszkedik-e az invariáns egyenesre.

Kollineációk alaptétele. *Legyenek A, B, C, D és A', B', C', D' külön-külön általános helyzetű pontokból álló pontnégyesek. Ekkor pontosan egy olyan κ kollineáció létezik, melyre $A' = \kappa(A)$, $B' = \kappa(B)$, $C' = \kappa(C)$ és $D' = \kappa(D)$.*

Bizonyítás. Legyen az $ABCD$ teljes négyszög további két csúcsa $E = AD \cap CB$ és $F = AB \cap CD$, az $A'B'C'D'$ teljes négyszög további két csúcsa pedig $E' = A'D' \cap C'B'$ és $F' = A'B' \cap C'D'$.

Unicitás. Ha a κ_0 és κ_1 kollineáció is olyan, hogy $A' = \kappa_0 A = \kappa_1 A$, ..., $D' = \kappa_0 D = \kappa_1 D$, akkor persze az illeszkedés tartása miatt $E' = \kappa_0 E = \kappa_1 E$ és $F' = \kappa_0 F = \kappa_1 F$ is teljesül.

Ekkor $\kappa = \kappa_0^{-1} \circ \kappa_1$, olyan kollineáció, melynek A, B, C, D, E, F is fixpontja.



13. ábra

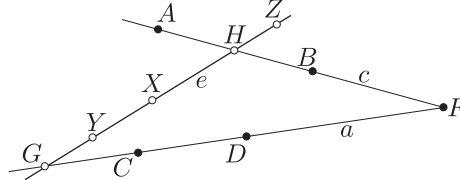
Ezek közül minden oldalra pontosan három különböző esik, így a projektivitások alaptételéből (hiszen Staudt tétele szerint a kollineációk projektívek) következik, hogy az $ABCDEF$ teljes négyoldal minden oldalegyenesének minden pontja fix.

Tekintsünk egy tetszőleges X pontot, és vegyünk rajta át egy olyan x egyenest, mely nem megy át az $ABCDEF$ teljes négyoldal egyetlen csúcán sem, vagyis $\emptyset = x \cap \{A, B, C, D, E, F\}$. Mivel x és az oldalak metsze fixpont, és ebből pontosan 4 van, a projektivitások alaptétele szerint x minden pontja, így az X pont is fix. Tehát minden pont fix, vagyis κ az identitás.

Egzisztencia. A κ leképezést pontról pontra definiáljuk. Az A, B, C, D, E, F pontokra legyen $\kappa(A) := A', \dots, \kappa(F) := F'$.

Ha X rajta van az $a = AB$, illetve $c = CD$ oldalon, akkor legyen X' az a pont az $a' = A'B'$, illetve $c' = C'D'$ oldalon, melyre $(ABXF) = (A'B'X'F')$ illetve $(CDXF) = (C'D'X'F')$, és legyen $\kappa(X) := X'$.

Ha X nincs rajta az a és c oldalak egyikén se, akkor vegyük az X középpontú π_{Xac} perspektivitást. Ez projektív kapcsolatba hozza az a és c egyenest, így a $\kappa|_c \circ \pi_{Xac} \circ \kappa^{-1}|_{a'}$ is egy projektivitás az a' és c' egyenesek közt, ami az F' pontot fixen hagyja. Ez azt jelenti, hogy valamely X' pontra $\kappa|_c \circ \pi_{Xac} \circ \kappa^{-1}|_{a'} = \pi_{X'a'c'}$. Legyen tehát az ilyen X pontokra $\kappa(X) := X'$.



135. ábra

Ekkor κ egyenestartó, hiszen ha XYZ kollineáris és közös e egyenesük a $G \neq H$ pontokban metszi az a és c egyeneseket, akkor $\pi_{Xac}(G) = \pi_{Yac}(G) = \pi_{Zac}(G) = H$ miatt $\pi_{X'a'c'}(G') = \pi_{Y'a'c'}(G') = \pi_{Z'a'c'}(G') = H'$ is teljesül, amiért $X'Y'Z'$ a $G'H'$ egyenesre esik.

A κ injektív is, mert ha $X' = Y'$, akkor $\kappa \circ \pi_{Xac} \circ \kappa^{-1} = \pi_{X'a'c'} = \pi_{Y'a'c'} = \kappa \circ \pi_{Yac} \circ \kappa^{-1}$ miatt $\pi_{Xac} = \pi_{Yac}$ adódik és két egyenes közti perspektivitás pontosan akkor egyenlő, ha középpontjuk megegyezik, vagyis $X = Y$.

A κ szürjektív is, hiszen ha X' egy tetszőleges pont, akkor a $\pi_{X'a'c'}$ perspektivitás a $\kappa^{-1}\pi_{X'a'c'}\kappa$ projektivitást határozza meg az a és c egyenesek között, melynek F fixpontja, tehát perspektivitás, vagyis valamely X pontra $\pi_{Xac} = \kappa^{-1}\pi_{X'}\kappa$, ami azt mutatja, hogy $X' = \kappa(X)$.

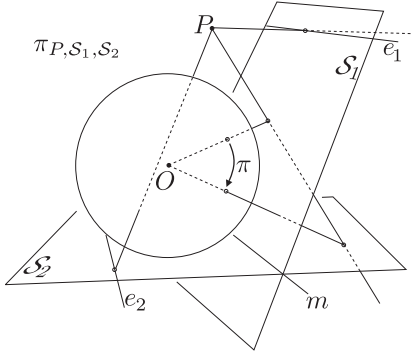
Eszerint κ bijektív és egyenestartó, tehát kollineáció. ■

2.6. Perspektív kollineációk

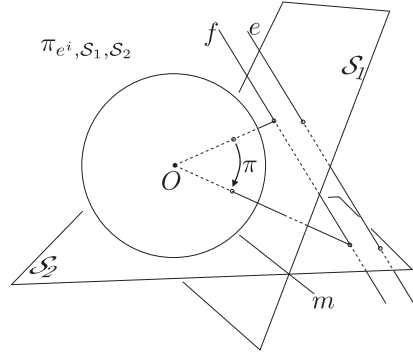
Tekintsük az $\mathcal{S}_1 \parallel \mathcal{S}_2$ síkokat a térben, és ezeken kívül egy tetszőleges P pontot. Legyen a P ponton át az $\mathcal{S}_2$ síkkal párhuzamos sík metszete az $\mathcal{S}_1$ síkkal az $e_1 \subset \mathcal{S}_1$ egyenes, valamint a P ponton át az $\mathcal{S}_1$ síkkal párhuzamos sík metszete az $\mathcal{S}_2$ síkkal az $e_2 \subset \mathcal{S}_2$ egyenes.

A P pont, a rajta átmenő

- egyik síkkal sem párhuzamos p egyenesekkel az $\mathcal{S}_1 \setminus e_1$ és $\mathcal{S}_2 \setminus e_2$ pontjait hozza a bijektív $p \cap (\mathcal{S}_1 \setminus e_1) \leftrightarrow p \cap (\mathcal{S}_2 \setminus e_2)$ kapcsolatba,
- $p \parallel \mathcal{S}_1$ egyenesekkel az e_2 egyenes és az $\mathcal{S}_1$ sík párhuzamossági osztályait hozza a bijektív $e_2 \cap p \leftrightarrow \{g \subset \mathcal{S}_1 : g \parallel p\}$ kapcsolatba,
- $p \parallel \mathcal{S}_2$ egyenesekkel az e_1 egyenes és az $\mathcal{S}_2$ sík párhuzamossági osztályait hozza a bijektív $e_1 \cap p \leftrightarrow \{h \subset \mathcal{S}_2 : h \parallel p\}$ kapcsolatba.



140. ábra



150. ábra

Ha $\mathcal{S}_1 \parallel \mathcal{S}_2$, akkor a P pont a rajta átmenő

- egyik síkkal sem párhuzamos p egyenesekkel az $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ pontjait hozza a bijektív $p \cap \mathcal{S}_1 \leftrightarrow p \cap \mathcal{S}_2$ kapcsolatba,
- a $p \parallel \mathcal{S}_1$ egyenesekkel pedig az $\mathcal{S}_1$ sík és az $\mathcal{S}_2$ sík párhuzamossági osztályait hozza a bijektív $\{g \subset \mathcal{S}_1 : g \parallel p\} \leftrightarrow \{h \subset \mathcal{S}_2 : h \parallel p\}$ kapcsolatba.

Eszerint a P pont és az $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ síkok rendszere a projektív sík egy $\pi_{P, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2}$ bijektív transzformációját adja. Ezek a transzformációk nem feltétlenül különbözőek, hiszen minden $\lambda \neq 0$ valós számra $\pi_{P, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2} = \pi_{\lambda P, \lambda \mathcal{S}_1, \lambda \mathcal{S}_2}$, ahol $\lambda \mathcal{S}_i = \{\lambda Q : Q \in \mathcal{S}_i\}$.

Tekintsük most egy olyan e térbeli egyenes $e^i = \{f : f \parallel e\}$ párhuzamossági osztályát, mely nem párhuzamos az $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ síkok egyikével sem. Az e^i párhuzamossági osztály, az $f \in e^i$ egyenesével az $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ pontjait a bijektív $f \cap \mathcal{S}_1 \leftrightarrow f \cap \mathcal{S}_2$ kapcsolatba hozza. Az $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ párhuzamossági osztályait ugyanígy a bijektív $\{g : g \parallel (f_1 \cap \mathcal{S}_1)(f_2 \cap \mathcal{S}_1)\} \leftrightarrow \{h : h \parallel (f_1 \cap \mathcal{S}_2)(f_2 \cap \mathcal{S}_2)\}$ kapcsolatba hozza.

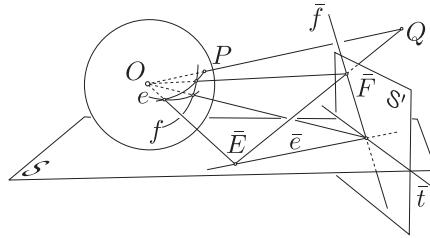
Eszerint az e^i párhuzamossági osztály és az $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ síkok rendszere a projekt-

ív sík egy π_{e^i, S_1, S_2} bijektív transzformációját adja. Ezek a transzformációk nem feltétlenül különbözöek, hiszen minden $\lambda \neq 0$ valós számra $\pi_{e^i, S_1, S_2} = \pi_{e^i, \lambda S_1, \lambda S_2}$.

A projektív sík imént leírt π_{P, S_1, S_2} és π_{e^i, S_1, S_2} transzformációit a projektív *sík perspektivitásának* nevezzük. Ezek nem csak bijektívek, de egyenestartóak is, hiszen egy $x \subset S_1$ egyenes képe minden esetben az S_2 síknak azzal a síkkal való metszete, mely az x egyenesre és a P pontra vagy e^i ideális pontra illeszkedik, ezért *perspektív kollineációnak* is szokás nevezni őket.

Tétel. Minden π_{Pef} perspektivitáshoz létezik olyan $\pi_{QSS'}$ perspektív kollineáció, melynek az e egyenesre vett $\pi_{QSS'}|_e$ megszorítása a π_{Pef} perspektivitással egyenlő, vagyis $\pi_{Pef} = \pi_{QSS'}|_e$.

Bizonyítás. Legyen t az $e \cap f$ ponton keresztül egy az e és f egyenesektől különböző egyenes. Vegyük fel olyan egymást metsző S és S' affin síkokat, melyek $\bar{t} = S \cap S'$ metszetének az origóra illeszkedő $S_{O\bar{t}}$ síkja a t egyenes főkörét metszi ki, vagyis $S_{O\bar{t}} = S_{Ot}$. Legyen $\bar{e} \subset S$ és $\bar{f} \subset S'$ rendre az e és f egyeneseknek az S illetve S' síkokban megfelelő egyenes, vagyis $\bar{e} = S_{Oe} \cap S$ és $\bar{f} = S_{Of} \cap S'$.



180. ábra

Mivel $(\bar{e} \cap \bar{f}) \in \bar{t}$, az $\bar{e}$ és $\bar{f}$ egyenesek egy közös $S_{\bar{e}\bar{f}}$ síkra esnek.

Ha valamely $E \in e$ és $F \in f$ pontokra $\pi_{Pef}(E) = F$, akkor a $p = EF$ projektív egyenes origón átmenő S_{Op} síkja olyan $\bar{p} = S_{Op} \cap S_{\bar{e}\bar{f}}$ egyenesben metszi az $S_{\bar{e}\bar{f}}$ síkot, mely az $\bar{e}$ és $\bar{f}$ egyeneseket a

$$\bar{p} \cap \bar{e} = S_{Op} \cap S_{\bar{e}\bar{f}} \cap \bar{e} = S_{Op} \cap S_{Oe} \cap S_{\bar{e}\bar{f}} = OE \cap S_{\bar{e}\bar{f}} = \bar{E},$$

$$\bar{p} \cap \bar{f} = S_{Op} \cap S_{\bar{e}\bar{f}} \cap \bar{f} = S_{Op} \cap S_{Of} \cap S_{\bar{e}\bar{f}} = OF \cap S_{\bar{e}\bar{f}} = \bar{F}$$

pontokban metszi és átmegy a $Q = OP \cap S_{\bar{e}\bar{f}}$ ponton.

Ez azt jelenti, hogy a $\pi_{QSS'}$ perspektív kollineáció az e egyenest az f egyenesre képezi úgy, hogy minden pontban megegyezik a π_{Pef} perspektivitással. Ez igazolja a tételt. ■

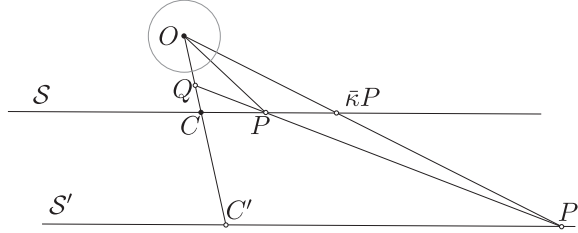
A perspektív kollineációk projektívek, ezért affin kollineációk, de például az affin síkbeli forgatás nem perspektív kollineáció.

Tétel. *A projektív sík kollineációi közül pontosan azok perspektívek, amelyekhez van olyan egyenes, melynek minden pontja fix.*

Bizonyítás. Tekintsük a π_{P,S_1S_2} és $\pi_{\bar{e},S_1S_2}$ perspektív kollineációkat. Ha $S_1 = S_2$, akkor ezek a perspektív kollineációk identikusak. Ha $S_1 \neq S_2$ és $S_1 \parallel S_2$, akkor az ezen síkokkal párhuzamos főkörhöz tartozó projektív egyenes minden pontja fix. Ha $S_1 \neq S_2$ és $S_1 \not\parallel S_2$, akkor a síkok metszetéhez tartozó $\{\{X, -X\} : OX \cap S_1 \cap S_2 \neq \emptyset\}$ projektív egyenes minden egyes pontja fix.

Ha κ a projektív sík egy olyan kollineációja, melynek f egy pontonként fix egyenese, akkor az f egyeneshez tartozó főkör síkjával párhuzamos $\mathcal{S}$ síkon olyan $\bar{\kappa}$ affinitást hoz létre, mely tartja az ideális egyenes minden egyes pontját, vagyis minden $e \subset \mathcal{S}$ egyenesre $\bar{\kappa}(e) \parallel e$, amiért $\bar{\kappa}$ affin homotécia vagy párhuzamos eltolás.

Első eset. $\bar{\kappa}$ egy λ együtthatós affin homotécia. Legyen $\bar{\kappa}$ centruma $C \in \mathcal{S}$. Ekkor minden $P \in \mathcal{S}$ pontra $\overrightarrow{C\bar{\kappa}(P)} = \lambda \overrightarrow{CP}$.

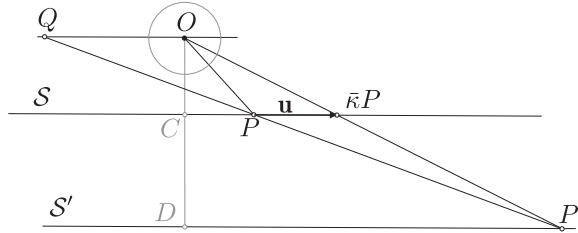


16. ábra Az OCP síkkal vett síkmetszet képe.

Vegyünk egy tetszőleges $\mathcal{S}' \parallel \mathcal{S}$ síkot, mely nem esik egybe $\mathcal{S}$ -sel. Legyen $C' = OC \cap \mathcal{S}'$ és $\mu \neq 0$ olyan valós szám, hogy $\mu \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC'}$. Legyen Q az a pont az OC egyenesen, melyre $\lambda \mu \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{QC'}$. Ekkor $\pi = \pi_{Q,S,S'}$, mert

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP'} &= \overrightarrow{O\pi_{QSS'}(P)} = \overrightarrow{OQ} + \lambda \mu \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OQ} + \lambda \mu (\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CP}) \\ &= \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QC'} + \lambda \mu \overrightarrow{CP} = \mu \overrightarrow{OC} + \mu \overrightarrow{C\bar{\kappa}(P)} = \mu \overrightarrow{O\bar{\kappa}(P)}. \end{aligned}$$

Második eset. $\bar{\kappa}$ egy eltolás. Vegyünk egy tetszőleges $\mathcal{S}' \parallel \mathcal{S}$ síkot, mely nem $\mathcal{S}$, legyen C az $\mathcal{S}$ origóhoz legközelebbi pontja és $D = \mathcal{S}' \cap OC$, valamint $\mu \neq 1, 0$ olyan valós szám, hogy $\mu \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OD}$.



17. ábra Az $OP\bar{\kappa}(P)$ síkkal vett síkmetszet képe.

Legyen a $\bar{\kappa}$ eltolás vektora $\mathbf{u}$, és minden $P \in \mathcal{S}$ esetén P' az $O\bar{\kappa}(P)$ egyenes metszete az $\mathcal{S}'$ síkkal. Legyen Q az a pont, melyre $\overrightarrow{OQ} = \mu \cdot \mathbf{u}$. Ekkor $\kappa = \pi_{Q\mathcal{S}\mathcal{S}'}$, mert

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O\pi_{Q\mathcal{S}\mathcal{S}'}(P)} &= \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{Q\pi_{Q\mathcal{S}\mathcal{S}'}(P)} = \mu\mathbf{u} + \mu\pi_{Q\mathcal{S}\mathcal{S}'}(P)\vec{P} = \mu(\pi_{Q\mathcal{S}\mathcal{S}'}(P)\vec{P} + \mathbf{u}) \\ &= \mu \cdot (\pi_{Q\mathcal{S}\mathcal{S}'}(P)\vec{P} + \overrightarrow{P\bar{\kappa}(P)}) = \mu\pi_{Q\mathcal{S}\mathcal{S}'}(P)\bar{\kappa}(P).\end{aligned}$$

A κ perspektív kollineációt *elációnak* nevezzük, ha $\bar{\kappa}$ eltolás, és *homológiának* hívjuk, ha $\bar{\kappa}$ homotécia. Eredményünk alapján minden perspektív kollineáció eláció, vagy homológia, és e két kollineáció-halmaznak kizárólag az identikus leképezés a közös eleme.

Tétel. *A projektív sík minden kollineációja legfeljebb két perspektív kollineáció szorzata.*

Bizonyítás. Staudt tétele szerint minden κ kollineáció projektív és azt is igazoltuk már, hogy a kollineációknak van fixpontja és invariáns egyenese.

Legyen F a κ kollineáció fixpontja, e pedig egy erre illeszkedő egyenes. Ekkor $\kappa|_e$ egy perspektivitás az e és $\kappa(e)$ egyenesek között, hiszen projektív és a két egyenes $F = e \cap \kappa(e)$ metszéspontja fix.

Előbbi tételünk szerint létezik olyan $\kappa_{P\mathcal{S}\mathcal{S}'}$ perspektív kollineáció, melyre $\kappa|_e = \kappa_{P\mathcal{S}\mathcal{S}'}|_e$, így az e egyenes minden pontja a $\kappa' := \pi_{P\mathcal{S}'\mathcal{S}} \circ \kappa$ kollineáció fixpontja. Ebből következik, hogy κ' perspektív kollineáció, így $\kappa = \pi_{P\mathcal{S}\mathcal{S}'} \circ \kappa'$, ami igazolja az állítást. ■

A projektív sík egy pontját egy kollineációra nézve *erősen fixnek* nevezzük, ha fix és minden rajta átmenő egyenes invariáns.

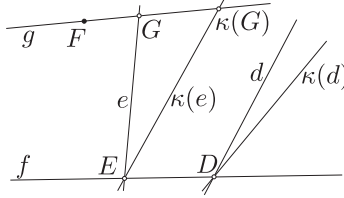
Tétel. *A projektív sík egy kollineációjának akkor és csak akkor létezik erősen fix pontja, ha perspektív kollineáció.*

Bizonyítás. Legyen κ egy perspektív kollineáció, vagyis valamely $P, \mathcal{S}, \mathcal{S}'$ rendszerre $\kappa = \pi_{P,\mathcal{S},\mathcal{S}'}$. Ekkor az OP egyenesre illeszkedő minden $\mathcal{U}$ síknak az $\mathcal{S}$ és $\mathcal{S}'$ síkokkal vett metszeteit a P pontbeli vetítés egymásba viszi, vagyis az $\mathcal{U}$ síkhoz tartozó projektív egyenes invariáns a κ perspektív kollineációra nézve. Mivel a P ponthoz tartozó projektív ponton átmenő minden projektív egyenes ilyen $\mathcal{U}$ síkhoz tartozik, eszerint a P ponthoz tartozó projektív pont a κ perspektív kollineáció erősen fix pontja.

A fordított irány igazolásához tekintsünk egy κ kollineációt, melyre nézve valamely F pont erősen fix.

Ha az $e \not\subset F$ egyenes invariáns, akkor minden pontja fix, ugyanis bármely $G \in e$ pontra $\kappa(G) = \kappa(FG \cap e) = \kappa(FG) \cap \kappa(e) = FG \cap e = G$. Ha e a κ fix egyenese, akkor κ perspektív kollineáció, ami a bizonyítandó.

Ha az $e \not\equiv F$ egyenes nem invariáns, akkor az $E = e \cap \kappa(e)$ pont fix, mert $\kappa(E) = \kappa(FE \cap e) = \kappa(FE) \cap \kappa(e) = FE \cap \kappa(e) = E$.



19. ábra

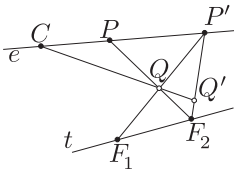
Legyen a $d \not\equiv F$ is nem invariáns egyenes, mely nem illeszkedik az E fixpontra. Ekkor a $D = d \cap \kappa(d)$ fixpont különbözik az E fixponttól, így tekinthetjük az $f = DE$ egyenest.

Az f egyenes invariáns, hiszen $\kappa(f) = \kappa(DE) = \kappa(D)\kappa(E) = DE = f$, amiből a fentebb már előadott érvek alapján következik, hogy f fix egyenes, és ezért κ perspektív kollineáció. Ez volt bizonyítandó. ■

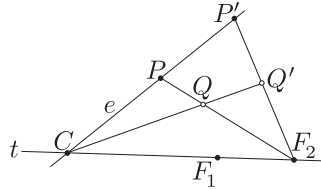
Jegyezzük meg, hogy homológia esetén az erősen fix pont nincs a fix egyenesen, elációnál pedig rajta van a fix egyenesen.

Perspektív kollineációk alaptétele. *Bármely különböző kollineáris pontokból álló C, P, P' ponthármashoz, és ezek egyenesétől különböző t egyeneshez, ahol $P \neq P'$, $P, P' \notin t$, pontosan egy olyan $\pi_{QSS'}$ perspektív kollineáció létezik, melyre $\pi_{QSS'}(P) = P'$ és amelynek C erősen fix pontja, t pedig pontonként fix egyenese.*

Bizonyítás. Legyenek az $F_1 \neq F_2$ pontok a t egyenesen olyanok, amelyek nincsenek rajta az $e = PP'$ egyenesen, és legyen $Q = F_1P' \cap F_2P$ valamint $Q' = CQ \cap F_2P'$.



20. ábra



21. ábra

Ha a π perspektív kollineáció eleget tesz a tétel feltételeinek, akkor $\pi: C \mapsto C$, $P \mapsto P'$, $F_1 \mapsto F_1$, és eszerint $Q \mapsto Q'$ is, mert $\pi(Q) \in \pi(F_2)\pi(P) = F_2P'$ és $Q' \in CQ$ miatt $Q' = \pi(Q)$.

Mínhogy C, P, Q, F_1 négy általános helyzetű pont, a kollineációk alaptétele szerint pontosan egy olyan κ kollineáció létezik, melyre ezek képe rendre C, P', Q', F_1 .

Már csak azt kell megmutatni, hogy κ perspektív, amihez elég látni, hogy F a κ erősen fix pontja. Minthogy Staudt tétele szerint κ projektivitás, ennek érdekében mindössze három, az F egyenesre illeszkedő invariáns egyenest kell mutatni.

Világos, hogy $\kappa(C) = C$, $\kappa(F_1) = F_1$, amiért a $g = FF_1$ egyenes invariáns, $\kappa(Q) = Q'$, amiért az $h = FQ$ egyenes invariáns, végül $\kappa(P) = P'$, amiért az e egyenes invariáns.

Ezzel a tételt beláttuk. ■

Ez az eredmény lehetővé teszi, hogy a projektív sík perspektív kollineációit a $\pi_{CtPP'}$ formában adjuk meg, ahol C, t, P és P' is a projektív síkban van. Ahogy már láttuk a $\pi_{CtPP'}$ perspektív kollineáció elácló, ha $C \in t$ és homológia, ha $C \notin t$.

Definíció. A perspektív kollineáció erősen fix pontját a *centrumának*, fix egyenesét pedig a *tengelyének* nevezzük. ▲

Érdeemes felfigyelni tá, hogy az eláció duális fogalma ugyancsak eláció, a homológia duális fogalma pedig homológia, és dualitáskor a centrum és tengely felcserélődik.

Tétel. Tetszőleges $\pi_{CtPP'}$ és κ kollineációra $\kappa \circ \pi_{CtPP'} \circ \kappa^{-1} = \pi_{\kappa(C), \kappa(t), \kappa(P), \kappa(P')}$.

Bizonyítás. Legyen $\pi' = \kappa \pi_{CtPP'} \kappa^{-1}$.

Ha $Q \in t$, akkor $\pi'(\kappa(Q)) = \kappa(\pi_{CtPP'}(Q)) = \kappa(Q)$, tehát π' fixen hagyja a $\kappa(t)$ pontjait, amiért a π' egy perspektív kollineáció.

Ha $F \in q$, akkor minden $Q \in q$ pontra $\pi'(\kappa(Q)) = \kappa(\pi_{CtPP'}(Q)) = \kappa(Q')$, ahol $Q' \in q$, hiszen q invariáns a $\pi_{CtPP'}$ perspektív kollineációra nézve, tehát a π' perspektív kollineációnak $\kappa(C)$ a centruma.

Végül $\pi'(\kappa(P)) = \kappa(\pi_{CtPP'}(P)) = \kappa(P')$ igazolja az állítást. ■

Tétel. Két nem identikus perspektív kollineáció akkor és csak akkor egyezik meg, ha ugyanaz a centrumuk és tengelyük, és valamely ezekre nem illeszkedő pontot ugyanabba a pontba képeznek.

Bizonyítás. Az nyilvánvaló, hogy két perspektív kollineáció megegyezik, ha centrumuk és tengelyük egybeesik, és valamely ezekre nem illeszkedő pontot ugyanabba a pontba képeznek.

Tegyük most fel, hogy $\pi_{FfQQ'} = \pi_{CtPP'}$.

Ekkor $\pi_{FfQQ'}(P) = \pi_{CtPP'}(P) = P'$, tehát $\pi_{FfQQ'} = \pi_{FfPP'}$.

Ha $T \in t$, akkor $\pi_{FfPP'}(T) = \pi_{CtPP'}(T) = T$, ezért $\pi_{FfPP'}$ fixálja a t minden pontját. Ha $f \neq t$, akkor az $f \cup t$ halmazban léteznek általános helyzetű pontnégyesek, így a kollineációk alaptétele értelmében $\pi_{FfPP'}$ csak az identikus kollineáció lehet. Ez ellentmond a feltételeknek, tehát $f = t$, vagyis $\pi_{FfPP'} = \pi_{FtPP'}$.

Ha $F \neq C$, akkor van olyan $c \neq t$ egyenes a C ponton át, mely elkerüli az F pontot. Emiatt minden $X \in c \ni C$ pontra

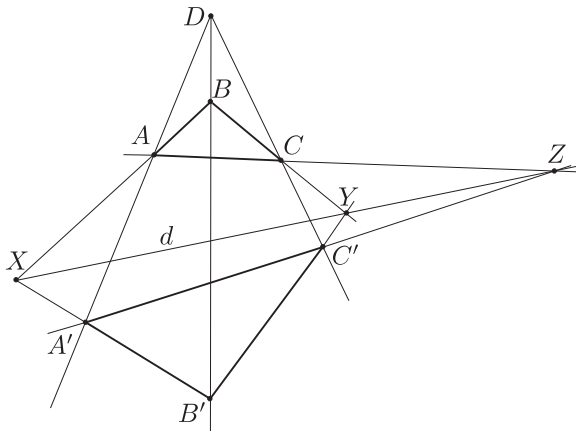
$$\begin{aligned}\pi_{FtPP'}(X) &= \pi_{FtPP'}(FX \cap c) = \pi_{FtPP'}(FX) \cap \pi_{FtPP'}(c) = FX \cap \pi_{CtPP'}(c) \\ &= FX \cap c = X,\end{aligned}$$

vagyis c fix egyenese az $\pi_{FtPP'}$ perspektív kollineációnak, amiből az előbbi indoklás értelmében $c = t$ következik. Ez ellentmondás, így $F = C$, ahogy a tétel állította. ■

Az ABC és $A'B'C'$ háromszögeket a projektív síkban a D pontra nézve *centrálisan perspektívnek* mondjuk, ha $AA' \cap BB' \cap CC' = D \notin \{A, A', B, B', C, C'\}$. A d egyenesre nézve *tengelyesen perspektívnek* nevezzük a két háromszöget, ha $AB \cap A'B' \in d$, $BC \cap B'C' \in d$ és $CA \cap C'A' \in d$ egyszerre teljesül és $d \notin \{AB, A'B', BC, B'C', CA, C'A'\}$.

Desargues-tétel. *Két háromszög akkor és csak akkor centrálisan perspektív, ha tengelyesen is perspektív.*

Bizonyítás. Ha az ABC és $A'B'C'$ háromszögek a D pontra nézve centrálisan perspektívek, akkor pontosan egy olyan κ kollineáció létezik, melyre $\kappa(D) = D$, $\kappa(A) = A'$, $\kappa(B) = B'$ és $\kappa(C) = C'$. Ennek D erősen fix pontja, hiszen a DA , DB és DC egyenesek invariánsak, tehát κ perspektív és D a centruma. Legyen d a κ tengelye. Ekkor az $X = d \cap AB$ fix pontra $X = d \cap AB = \kappa(X) = \kappa(d \cap AB) = d \cap A'B'$, amiért az $X = AB \cap A'B'$, és ugyanígy az $Y = BC \cap B'C'$ és $Z = CA \cap C'A'$ pontok is a d egyenesre esnek, vagyis az ABC és $A'B'C'$ háromszögek tengelyesen perspektívek a d tengelyre nézve.



21. ábra

Ha az ABC és $A'B'C'$ háromszögek a d egyenesre nézve tengelyesen perpektívek, akkor pontosan egy olyan κ kollineáció létezik, mely a d egyenesen lévő $X = AB \cap A'B'$ és $Y = BC \cap B'C'$ pontokat helyben hagyja, és $\kappa(A) = A'$, valamint $\kappa(C) = C'$. A κ kollineáció az X és Y tartása miatt invariánsan hagyja a d egyenest, és a B pontot a B' pontba viszi, hiszen $\kappa(B) = \kappa(XA \cap YC) = \kappa(XA) \cap \kappa(YC) = XA' \cap YC' = B'$. A κ a $Z = CA \cap C'A'$ pontot is helyben hagyja, mert

$$\begin{aligned}\kappa(Z) &= \kappa(CA \cap C'A') = \kappa(d \cap CA \cap C'A') = \kappa(d \cap CA) = \kappa(d) \cap C'A' \\ &= d \cap C'A' = Z,\end{aligned}$$

amiért (lévén projektivitás) a d egyenes minden pontját fixen hagyja, vagyis κ perspektív és d a tengelye. Legyen D a κ centruma. Ekkor $\kappa(DA) = DA'$, $\kappa(DB) = DB'$ és $\kappa(DC) = DC'$ miatt az ABC és $A'B'C'$ háromszögek a D pontra centrálisan perpektívek. ■

Vegyük észre, hogy a Desargues-tétel önduális állítás, vagyis nem változik, ha az egyenes (pontsor) és a pont (sugársor) fogalmakat következetesen felcseréljük benne.

Az affin sík eltolásai kommutatív csoportot alkotnak, így az alábbi tétel ennek következménye, de mi most „belülről”, a projektív geometriai ismereteink birtokában bizonyítunk.

Tétel. *Két eláció szorzata akkor és csak akkor eláció, ha tengelyeik vagy centrumaik egybeesnek.*

Bizonyítás. Tekintsük a $\pi_1 = \pi_{C_1 t_1 P P'}$ és $\pi_2 = \pi_{C_2 t_2 P' P''}$ nem identikus elációkat, és tegyük fel, hogy $t_1 \neq t_2$ és $C_1 \neq C_2$.

Legyen $\kappa = \pi_2 \circ \pi_1$ és tételezzük fel, hogy κ eláció, melynek C a centruma és t a tengelye.

A κ elációnak az $F = t_1 \cap t_2$ pont fixpontja, az $f = C_1 C_2$ pedig invariáns egyenese, és a κ eláció nem identikus, mert ellenkező esetben $C_1 = \kappa(C_1) = \pi_2(C_1) \in t_2$ és $C_2 = \pi_2^{-1}(C_2) = \pi_2^{-1}(\kappa(C_2)) = \pi_1(C_2) \in t_1$, vagyis $C_1 = C_2 = F$ lenne.

Mivel κ nem identikus, minden fixpontja a t tengelyére esik, amiért $F \in t$.

Ha $t = f$, akkor $C_1, C_2 \in t$ is teljesül, és

- (1) $C_1 \neq F, t = t_1, F = C_2 \in t_1$, vagy
- (2) $C_2 \neq F, t = t_2, F = C_1 \in t_2$

legalább egyike teljesül, mert $C_1 \neq C_2$. Ha (1) teljesül, akkor t a π_1 perspektivitásnak is tengelye, így $\pi_2 = \kappa \circ \pi_1^{-1}$ miatt a π_2 perspektivitásnak is tengelye, ami a $t_1 = t_2$ ellentmondásra vezet. Ha (2) teljesül, akkor $\pi_1 = \pi_2^{-1} \circ \kappa$ miatt kapunk ellentmondást. Tehát $t \neq f, t \neq t_1$ és $t \neq t_2$.

Mivel $t \neq f$, a $C = t \cap f$ pont a κ fixpontja az f invariáns egyenesen, amiért C a κ centruma.

Az előbbi bekezdés dualizálásával nyerjük, hogy $C = F$ ellentmondásra vezet, amiért $C \neq F$, $C \neq C_1$ és $C \neq C_2$. Mivel $C \neq F$, a κ két fixpontja meghatározza a tengelyét, vagyis $t = CF$.

Ha $C = C_2$ lenne, akkor $\pi_1 = \pi_2^{-1} \circ \kappa$ miatt C a π_1 perspektivitásnak is centruma, ami a $C_1 = C_2$ ellentmondásra vezet. Tehát $C \neq C_2$.

Mivel $C \neq C_2$, minden, az F és C_1 ponttól különböző $X \in t_1$ pontra $XC \ni \kappa(X) = \pi_2(X) \in XC_2$ adódik, amiből $X \neq \kappa(X)$ miatt $C, C_2 \in X\kappa(X)$, vagyis $f = X\kappa(X)$ következik, ami ellentmondás, hiszen $f \cap t_1 = C_1 \neq X$.

Több eset nem lévén, az ellentmondást okozó feltételek hamisak, vagyis ha κ eláció, akkor $t_1 = t_2$ vagy $C_1 = C_2$ legalább egyike teljesül.

A fordított állítás bizonyításához előbb megállapítjuk, hogy κ perspektív, ha $t_1 = t_2$ vagy $C_1 = C_2$ bármelyike teljesül, hiszen $t_1 = t_2$ esetén t_1 a κ fix egyenese, $C_1 = C_2$ esetén pedig C_1 a κ erősen fix pontja. Tehát valamely C pont és t egyenes párosára $\kappa = \pi_{CtPP''}$. Innentől feltesszük, hogy κ nem identikus. A dualitás miatt elegendő abban az esetben bizonyítani, amikor $C_1 = C_2$, mert ennek duálisa a $t_1 = t_2$ eset.

Ha $C_1 = C_2$, akkor $C = C_1 = C_2 = t_1 \cap t_2$. Ha $t_1 = t_2$, akkor nyilván $t = t_1 = t_2$ is teljesül és így κ eláció. Ha $t_1 \neq t_2$, akkor legyen $Q_1 = t \cap t_1$. Ekkor $Q_1 = \kappa(Q_1) = \pi_2(Q_1)$ miatt $Q_1 \in t_2$ is teljesül, vagyis t, t_1 és t_2 ugyanazon ponton mennek át, amiért $C \in t_1 \cap t_2 \in t$, tehát κ eláció.

Ezzel az állítást beláttuk. ■

Tétel. *A közös tengellyel rendelkező elációk halmaza a leképezések szorzása műveletével kommutatív csoportot alkot.*

Bizonyítás. Minthogy a kollineációk a leképezések szorzása műveletével nyilvánvalóan csoportot alkotnak, elegendő belátni, hogy az elációk adott halmazából a leképezések szorzása és az inverzképzés sem vezet ki (zárttság), és nem függ az elációk sorrendjétől (kommutativitás).

A szorzásra vett zárttságot előbbi tételünk igazolja, az inverz-képzésre való zárttság pedig triviálisan következik abból, hogy $\pi_{CtPP'}^{-1} = \pi_{CtP'P}$.

A kommutativitás igazolásához tekintsük a $\pi_1 = \pi_{C_1tP_1Q_1}$ és $\pi_2 = \pi_{C_2tP_2Q_2}$ nem identikus elációkat, és legyen

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \pi_2 \circ \pi_1 \circ \pi_2^{-1} = \pi_{\pi_2(C_1)\pi_2(t)\pi_2(P_1)\pi_2(Q_1)} = \pi_{C_1tP'_1Q'_1}, \\ \kappa_2 &= \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1^{-1} = \pi_{\pi_1(C_2)\pi_1(t)\pi_1(P_2)\pi_1(Q_2)} = \pi_{C_2tP'_2Q'_2},\end{aligned}$$

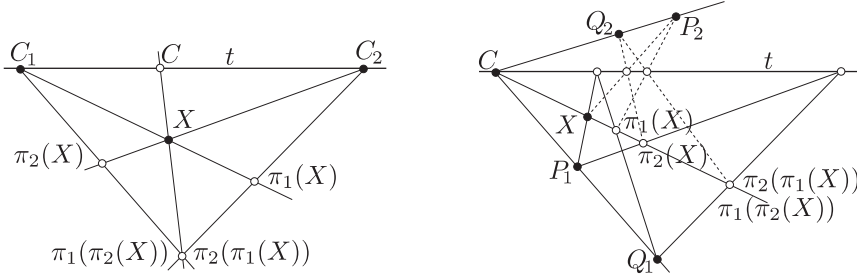
amiből minden X pontra

$$\pi_1(\pi_2(X)) = \kappa_2(\pi_1(X)) \in C_2\pi_1(X) = C_2\pi_2(\pi_1(X)) \text{ és}$$

$$\pi_2(\pi_1(X)) = \kappa_1(\pi_2(X)) \in C_1\pi_2(X) = C_1\pi_1(\pi_2(X))$$

következik.

Ha $C_1 \neq C_2$, akkor $\pi_1(\pi_2(X)) \in C_2\pi_2(\pi_1(X)) \cap C_1\pi_1(\pi_2(X)) \ni \pi_2(\pi_1(X))$ miatt $\pi_1(\pi_2(X)) = \pi_2(\pi_1(X))$ adódik, vagyis $\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1$ és megállapíthatjuk, hogy a $\pi_2 \circ \pi_1$ eláció centruma egyik C_1 és C_2 centrummal sem esik egybe (különben mind a három a centrum egybeesne, holott $C_1 \neq C_2$).



225. ábra

Ha $C_1 = C_2$, akkor vegyünk egy ezektől különböző $C_3 \in t$ pontot, és legyen $\pi_3 = \pi_{C_3tP_3Q_3}$ nem identikus eláció. Ekkor iménti eredményünk alapján

$$(\pi_1 \circ \pi_2) \circ \pi_3 = \pi_1 \circ (\pi_2 \circ \pi_3) = (\pi_2 \circ \pi_3) \circ \pi_1 = (\pi_3 \circ \pi_2) \circ \pi_1 = \pi_3 \circ (\pi_2 \circ \pi_1) = (\pi_2 \circ \pi_1) \circ \pi_3$$

adódik, ami π_3 bijektivitása miatt igazolja a kommutativitást.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

Eredményünk dualizálásával azonnal kapjuk a következőt.

Tétel. *A közös centrummal rendelkező elációk halmaza a leképezések szorzása műveletével kommutatív csoportot alkot.*

A κ kollineációt n -ed rendűnek nevezzük, ha $\kappa^n = \text{id}$, de $i < n$ esetén $\kappa^i \neq \text{id}$. Például a $\kappa: A \mapsto B, B \mapsto C, C \mapsto D, D \mapsto A$ kollineáció rendje négy, a $\kappa: A \mapsto C, B \mapsto D, C \mapsto A, D \mapsto B$ pedig másodrendű. A másodrendű kollineációkat *involutív kollineációknak*.

Ha a szimmetrikus κ kollineáció involutív, akkor a κ kollineációt reprezentáló M mátrixra $M = M^T$ és alkalmas $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ valós számra $M^2 = \lambda^2 I$ is teljesül, ahol I az egységmátrix. Ekkor

$$u \perp v \Leftrightarrow uv^T = 0 \Leftrightarrow uM^2v^T = 0 \Leftrightarrow uMM^Tv^T = 0 \Leftrightarrow uM(vM)^T = 0,$$

vagyis az M mátrix ortogonális.

Tétel. Egy $\pi = \pi_{CtPP'}$ homológiára ekvivalensek a

- (1) π involutív,
 - (2) valamely X pontra $(X\pi(X)CT_X) = -1$ teljesül,
 - (3) minden X pontra $(X\pi(X)CT_X) = -1$ teljesül,
- feltételek, ahol $T_X = t \cap CX$ minden X pontra.

Ha a $\pi_{CtPP'}$ perspektív kollineáció involutív, akkor homológia.

Bizonyítás. Ha π involutív, akkor minden X pontra

$$\begin{aligned} (CT_X X\pi(X))^2 &= (CT_X X\pi(X))(\pi(C)\pi(T_X)\pi(X)\pi^2(X)) \\ &= (CT_X X\pi(X))(CT_X \pi(X)X) = (CT_X X\pi(X)) = 1, \end{aligned}$$

amiért $(CT_X X\pi(X)) = -1$, tehát $(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2)$.

Ha valamely X pontra $(CT_X X\pi(X)) = -1$, akkor $(CT_X \pi(X)\pi^2(X)) = -1$ is teljesül, amiért $(CT_X \pi^2(X)\pi(X)) = -1$ is igaz, így a kettősviszony bijektivitása miatt $\pi^2(X) = X$, vagyis $\pi_{CtXX'}$ involutív. A perspektív kollineációk megadásának egyértelműsége miatt $\pi_{CtPP'} = \pi_{CtXX'}$, tehát $\pi_{CtPP'}$ involutív, vagyis $(2) \Rightarrow (1)$.

Ha a $\pi = \pi_{CtPP'}$ perspektív kollineáció involutív, akkor (3) alapján minden X pontra $(X\pi(X)CT_X) = -1$, vagyis a C centrumra illeszkedő minden e egyenesen $\pi|_e$ involutív hiperbolikus projektivitás. Mivel t minden pontja fix, ebből következik, hogy $C \notin t$, vagyis $\pi_{CtPP'}$ homológia. ■

Az involutív homológia az affin sík tengelyes tükrözésének felel meg ha a tengely a végesben, a centruma pedig a végtelenben van. Ha a tengely a végtelenben és a centrum a végesben van, akkor az involutív homológia középpontos tükrözésként jelenik meg az affin geometriában. A következő tétel jól mutatja ezt az analógiát.

Tétel. Két involutív homológia szorzata akkor és csak akkor homológia, ha mindkét homológia centruma a másik homológia tengelyére esik. Ezesetben a szorzat is involutív homológia.

Bizonyítás. Tekintsük a $\pi_1 = \pi_{C_1 t_1 P_1 Q_1}$ és $\pi_2 = \pi_{C_2 t_2 P_2 Q_2}$ involutív homológiákat, és legyen $\kappa = \pi_2 \circ \pi_1$.

Ha κ homológia, vagyis $\kappa = \pi_{CtPQ}$ valamely alkalmas C, P, Q kollineáris ponthármásra, ahol $C \notin t$, akkor esetvizsgálattal bizonyítjuk, hogy $C_1 \in t_2$ és $C_2 \in t_1$.

Ha $C_1 = C_2$ és $t_1 = t_2$, akkor κ az identitás.

Ha $C_1 \neq C_2$ és $t_1 = t_2$, akkor $t = t_1$ a κ tengelye. Minthogy az $f = C_1 C_2$ egyenest a κ invariánsan hagyja, $C \in f$ vagy $f = t$. Utóbbi nem lehet, mert $C_1 \notin t_1$ és $C_2 \notin t_2$.

Ha $C \in f$, akkor $\kappa(C) = C$ és a π_2 involutivitása miatt $\pi_1(C) = \pi_2(C)$. Ugyanakkor π_1 és π_2 involutivitása, valamint $C \neq F := f \cap t$ alapján $(C_1 F C \pi_1(C)) =$

$-1 = (C_2 F C \pi_2(C))$, amiből $\pi_1(C) = \pi_2(C)$ miatt $C_1 = C_2$ adódik. Ez ellentmondás, így $C = F$ következik, amiért κ eláció. Ez is ellentmondás.

Ha $C_1 = C_2$ és $t_1 \neq t_2$, akkor iménti meggondolásunk duálisából kapjuk, hogy κ eláció, ami ellentmondás.

Ha $C_1 \neq C_2$ és $t_1 \neq t_2$, akkor a κ homológia fixen hagyja az $F = t_1 \cap t_2$ pontot, és invariánsan az $f = C_1 C_2$ egyenest.

Minthogy t a κ tengelye, ennek minden $T \in t$ pontjára $C_2 T = C_2 \kappa(T) = C_2 \pi_2(\pi_1(T)) = C_2 \pi_1(T)$, amiért $\pi_1(T) \in C_2 T$, vagyis $T \pi_1(T) = C_2 T$, amiből $C_1 \in C_2 T$, vagyis $T \in f$ következik, tehát $t = f$.

Minthogy $t = f$, a C_1 és C_2 is a κ fixpontja, amiért mindkettő a π_1 és π_2 perspektivitásoknak is fixpontja, vagyis $C_1 \in t_2 \cup \{C_2\}$ és $C_2 \in t_1 \cup \{C_1\}$. Mivel $C_1 \neq C_2$, ez azt jelenti, hogy $C_1 \in t_2$ és $C_2 \in t_1$.

A most igazoltak fordítottjának megmutatásához legyen $C_1 \in t_1$ és $C_2 \in t_2$.

Az világos, hogy κ fixen hagyja a C_1 és C_2 pontokat, valamint invariánsan hagyja a t_1 és t_2 egyeneseket, amiért κ az $F = t_1 \cap t_2$ pontot is fixen hagyja. Az $f = C_1 C_2$ egyenes nem megy át az F ponton, és a κ invariánsan hagyja, hiszen két fixpont is van rajta, így ennek bármely P pontjára

$$\begin{aligned} (C_1 C_2 P \kappa(P)) &= (\pi_2(C_1) \pi_2(C_2) \pi_2(P) \pi_2(\kappa(P))) = (C_1 C_2 \pi_2(P) \pi_1(P)) \\ &= (C_1 C_2 \pi_2(P) P) (C_1 C_2 P \pi_1(P)) = (-1)(-1) = 1, \end{aligned}$$

vagyis a κ az f egyenes minden pontját fixen hagyja, amiből $\kappa = \pi_{FfPQ}$ következik alkalmas $P, Q \notin f \cup \{F\}$ pontokra.

A κ homológia involutív is, hiszen az F ponton átmenő t_1 egyenesen megegyezik a π_2 involutív homológiával. Ezzel a bizonyítást befejeztük. ■

2.7. Korrelációk és polarítások

A projektív sík dualitása veti fel a gondolatot, hogy az egyenesek és pontok halmaza közti hozzárendeléseket alaposabb vizsgálat alá vessük. Jelölje a projektív sík egyeneseinek halmazát $\mathbb{E}^2$.

Egy bijektív leképezésekből álló $\rho = (\rho|_{\mathbb{P}^2}, \rho|_{\mathbb{E}^2})$ leképezéspárt *általános korrelációnak* hívunk, ha $\rho|_{\mathbb{P}^2}: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ és $\rho|_{\mathbb{E}^2}: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ is bijektív és $\rho|_{\mathbb{P}^2}$ a pontsorokhoz sugársorokat, $\rho|_{\mathbb{E}^2}$ pedig a sugársorokhoz pontsorokat rendel.

Egy $\rho = (\rho|_{\mathbb{P}^2}, \rho|_{\mathbb{E}^2})$ általános korreláció esetén a $(\rho|_{\mathbb{E}^2}^{-1}, \rho|_{\mathbb{P}^2}^{-1})$ leképezéspár is általános korreláció. Ezt az általános korreláció inverzének mondjuk, amit ρ^{-1} jelöl. Jegyezzük meg, hogy $\rho^{-1}|_{\mathbb{P}^2} = \rho|_{\mathbb{E}^2}^{-1}$ és $\rho^{-1}|_{\mathbb{E}^2} = \rho|_{\mathbb{P}^2}^{-1}$.

Egy $\rho = (\rho|_{\mathbb{P}^2}, \rho|_{\mathbb{E}^2})$ általános korreláció és egy κ kollineáció balszorzatán a $\kappa \rho = (\hat{\kappa} \rho|_{\mathbb{P}^2}, \kappa \rho|_{\mathbb{E}^2})$, jobbszorzatán a $\rho \kappa = (\rho|_{\mathbb{P}^2} \kappa, \rho|_{\mathbb{E}^2} \hat{\kappa})$ általános korrelációt

értjük, ahol $\hat{\kappa}: e \in \mathbb{E}^2 \mapsto \kappa(e) = \{\kappa(E) : E \in e\} \in \mathbb{E}^2$. A továbbiakban a κ ezen természetes $\hat{\kappa}$ hatását az egyeneseken egyszerűen κ jelöli, vagyis $\kappa(e) = \hat{\kappa}(e)$.

Egy általános korrelációt projektívnek nevezünk, ha mindkét leképezése tartja a kettősviszonyt. Igazolni fogjuk, hogy ez minden általános korrelációra érvényes.

A továbbiakban a $\rho|_{\mathbb{P}^2}$ és $\rho|_{\mathbb{E}^2}$ leképezéseket a jelölésben nem különböztetjük meg, ha a szövegkörnyezetből világos, hogy a ρ általános korreláció mely leképezése szerepel, vagyis az E ponthoz rendelt egyenest $\rho(E)$, az e egyeneshez rendelt pontot $\rho(e)$ jelöli. Az általános korreláció feltételei ezekkel a jelölésekkel azt jelentik, hogy a kollineáris pontok ρ szerinti képei egy sugársorban vannak, az egy pontra illeszkedő egyenesek ρ szerinti képei egy pontsorhoz tartoznak.

Lemma. *Az általános korrelációk bijektíven rendelik hozzá*

- bármely egyenes pontjaihoz egy megfelelő sugársor egyeneseit, és
- bármely sugársor egyeneséhez egy megfelelő egyenes pontjait.

Bizonyítás. Az általános korreláció bijektivitása miatt $\rho|_{\mathbb{P}^2}$ megszorítása bármely egyenesre és $\rho|_{\mathbb{E}^2}$ megszorítása bármely sugársorra injektív.

Tekintsünk most egy e egyenest és ennek pontjait képezze a $\rho|_{\mathbb{P}^2}$ leképezés az E pont $\check{E}$ sugársorába. Azt kell igazolnunk, hogy $\rho|_e: e \rightarrow \check{E}$ szürjektív.



23. ábra

Indirekt módon tegyük fel, hogy van egy olyan f egyenes az $\check{E}$ sugársorban, mely nem képe az e egyetlen pontjának sem.

A $\rho|_{\mathbb{P}^2}$ szürjektivitása miatt van olyan $F \notin e$ pont, melyre $\rho(F) = f$. Vegyünk egy tetszőleges g egyenest az F ponton át, legyen ennek metszete az e egyenessel X .

A g egyenes X pontjának $x = \rho(X)$ képe az E pontban metszi az f egyenest, így $\rho|_{\mathbb{P}^2}$ a g egyenes minden pontját az $\check{E}$ sugársorba viszi. Minthogy g tetszőleges volt, ez azt jelenti, hogy $\mathbb{P}^2$ minden Y pontjára $\rho(Y) \in \check{E}$, ami ellentmondás, hiszen $\rho|_{\mathbb{P}^2}$ szürjektív, amiért az E pontra nem illeszkedő egyenesek is benne vannak a $\rho|_{\mathbb{P}^2}$ képterében.

Ez az ellentmondás bizonyítja állításunk első részét.

Minthogy a második állítás az első duálisa, ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

A homogén koordináták segítségével egymáshoz rendelhetünk egy e egyenest és egy E pontot az $[e] = [E]$ egyenlet alapján. Ez nyilván bijektív, és teljesíti az általános korreláció feltételeit, sőt a kettősvizonyok megtartása miatt projektív is. Ezt az általános korrelációt *természetes korrelációnak* nevezzük. A természetes korrelációt a továbbiakban ω jelöli. A természetes korreláció megegyezik az inverzával, hiszen ω és ω^{-1} is a megegyező homogén koordinátájú pontokat és egyeneseket rendeli egymáshoz.

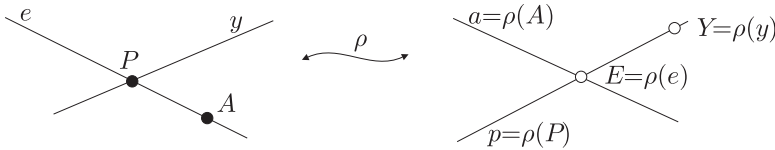
Tétel. Minden ρ általános korreláció egyértelműen áll elő $\rho = (\omega|_{\mathbb{P}^2} \circ \kappa_1, \kappa_2 \circ \omega|_{\mathbb{P}^2})$ alakban, ahol κ_1 és κ_2 kollineációk.

Az általános korrelációk tartják a kettősvizonyt.

Bizonyítás. Tekintsük a ρ és τ korrelációkat. Ekkor a $\kappa_1 = \tau|_{\mathbb{P}^2} \circ \rho|_{\mathbb{P}^2}$ és a $\kappa_2 = \rho|_{\mathbb{P}^2} \circ \tau|_{\mathbb{P}^2}$ leképezés is kollineáció, ezért $\tau|_{\mathbb{P}^2}^{-1} \circ \kappa_1 = \rho|_{\mathbb{P}^2}$ és $\kappa_2 \circ \tau|_{\mathbb{P}^2}^{-1} = \rho|_{\mathbb{P}^2}$, ami a $\tau = \omega$ választás mellett – figyelembevéve, hogy $\omega|_{\mathbb{P}^2}^{-1} = \omega|_{\mathbb{P}^2}$ –, igazolja az első állítást.

Mivel a κ_1 és κ_2 kollineációk Staudt tétele szerint projektívek is, az ω természetes korrelációnak pedig nyilván mindkét leképezése projektív, következik, hogy a ρ korreláció tartja a kettősvizonyt. ■

Definíció. Korrelációnak nevezünk egy általános korrelációt, ha egy egyenes képe egybeesik a pontjaihoz rendelt egyenesek metszéspontjával, vagyis $\bigcap_{P \in e} \rho(P) = \rho(e)$ minden e egyenes esetében. ▲



22. ábra

Másként fogalmazva, egy korrelációra $P \in e$ akkor és csak akkor, ha $\rho(P) \ni \rho(e)$. Ezt a tulajdonságot az általános korreláció *illeszkedéstartásának* nevezzük.

Tétel. Minden ρ korreláció egyértelműen áll elő $\rho = (\omega|_{\mathbb{P}^2} \circ \kappa^T, \kappa^{-1} \circ \omega|_{\mathbb{P}^2})$ alakban, ahol κ egy alkalmas kollineáció.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy a ρ korreláció előáll $\rho|_{\mathbb{P}^2} = \omega|_{\mathbb{P}^2} \circ \kappa_1$ és $\rho|_{\mathbb{P}^2} = \kappa_2 \circ \omega|_{\mathbb{P}^2}$ alakban, ahol κ_1 és κ_2 kollineáció. Legyen $\mathbf{M}_1$ és $\mathbf{M}_2$ rendre a κ_1 és κ_2 kollineációhoz homogén koordinátákban rendelt mátrix.

Korreláció esetén a pontsorhoz rendelt sugársor éppen a pontsor egyenesének képére esik, ezért $\rho|_{\mathbb{P}^2}(e) = \rho|_{\mathbb{P}^2}(A) \cap \rho|_{\mathbb{P}^2}(B)$, ahol e az A és B pontok közös egyenese. Eszerint $\kappa_2 \circ \omega|_{\mathbb{P}^2}(e) = \omega|_{\mathbb{P}^2}(\kappa_1(A)) \cap \omega|_{\mathbb{P}^2}(\kappa_1(B))$. Ha az A és B pontok homogén koordinátája rendre $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$, akkor azonosságunk az

$$[(\mathbf{u} \times \mathbf{v})\mathbf{M}_2] = [\mathbf{u}\mathbf{M}_1] \times [\mathbf{v}\mathbf{M}_1]$$

formát ölti, hiszen az e egyenes homogén koordinátája $[\mathbf{u} \times \mathbf{v}]$.

Figyeljük meg, hogy a most kapott azonosság szerint ha $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, akkor

$$[\mathbf{u}\mathbf{M}_2] = [(\mathbf{v} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}))\mathbf{M}_2] = [\mathbf{v}\mathbf{M}_1] \times [(\mathbf{u} \times \mathbf{v})\mathbf{M}_1] \perp [\mathbf{v}\mathbf{M}_1],$$

vagyis az $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{M}_2\mathbf{u} \perp \mathbf{M}_1\mathbf{v}$ implikáció teljesül. Eszerint

$$(\mathbf{u}\mathbf{M}_i)^\perp \supseteq \{\mathbf{v}\mathbf{M}_{3-i} : \mathbf{v} \perp \mathbf{u}\} = \mathbf{u}^\perp \mathbf{M}_{3-i} \quad (i = 1, 2).$$

Ugyanakkor a nem elfajuló $\mathbf{M}_1$ és $\mathbf{M}_2$ mátrixok az $\mathbf{u}^\perp = \{\mathbf{v} : \mathbf{v} \perp \mathbf{u}\}$ kétdimenziós alteret kétdimenziós altérbe viszik, vagyis $\dim(\mathbf{u}\mathbf{M}_i)^\perp = 2 = \dim(\mathbf{u}^\perp \mathbf{M}_{3-i})$, amiért $(\mathbf{u}\mathbf{M}_i)^\perp = \mathbf{u}^\perp \mathbf{M}_{3-i}$ ($i = 1, 2$), vagy ami ugyanaz, $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u}\mathbf{M}_2 \perp \mathbf{v}\mathbf{M}_1$. Ez azt jelenti, hogy

$$\mathbf{u}\mathbf{v}^T = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u}\mathbf{M}_2 \perp \mathbf{v}\mathbf{M}_1 \Leftrightarrow 0 = \mathbf{u}\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1^T\mathbf{v}^T = \mathbf{u}(\mathbf{v}\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2^T)^T,$$

vagyis minden $\mathbf{v}$ vektorra $\mathbf{v}^\perp = (\mathbf{v}\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2^T)^\perp$, amiért alkalmas nem nulla $\lambda_{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}$ valós számra $\lambda_{\mathbf{v}}\mathbf{v} = \mathbf{v}\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2^T$. A kollineációk mátrix reprezentációjánál már igazoltuk, hogy ekkor $\lambda_{\mathbf{v}}$ nem függ a $\mathbf{v}$ vektortól, vagyis $\lambda\mathbf{I} = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2^T$. Ez igazolja a tételt. ■

A κ kollineáció mátrixát a *korreláció mátrixának* nevezzük. Világos, hogy ez a mátrix meghatározza a korrelációt, és a kollineációk bijektivitása miatt nem elfajuló.

Korrelációk alaptétele. Legyen A, B, C és D négy általános helyzetű pont, a, b, c és d pedig négy általános helyzetű egyenes. Ekkor pontosan egy olyan ρ korreláció létezik, melyre $\rho(A) = a$, $\rho(B) = b$, $\rho(C) = c$ és $\rho(D) = d$.

Bizonyítás. Legyen $A' = \omega(a)$, $B' = \omega(b)$, $C' = \omega(c)$ és $D' = \omega(d)$. Ekkor $A'B'C'D'$ egy teljes négyszög, így a kollineációk alaptétele szerint létezik pontosan egy olyan π kollineáció, melyre $\pi(A) = A'$, $\pi(B) = B'$, $\pi(C) = C'$ és $\pi(D) = D'$. Eszerint a $\pi^{-1} \circ \omega$ korreláció megfelel a tétel követelményének, és nincs is másik, hiszen minden korreláció előáll ω és egy kollineáció összetételként. ■

Tétel. Egy ρ korreláció akkor és csak akkor involutív, ha

- van olyan szimmetrikus $\kappa = \kappa^T$ kollineáció, hogy $\rho = (\omega|_{\mathbb{P}^2} \circ \kappa, \kappa^{-1} \circ \omega|_{\mathbb{P}^2})$; vagy
- minden A, B pontpárra $B \in \rho(A) \Leftrightarrow \rho(B) \ni A$;

Bizonyítás. Vizsgáljuk a korrelációt a $\rho = (\omega \circ \kappa^T, \kappa^{-1} \circ \omega)$ alakban, ahol κ egy kollineáció.

Először az első állítással foglalkozunk. A ρ korreláció pontosan akkor involutív, ha minden P pontra $P = \rho(\rho(P)) = \kappa^{-1}(\kappa^T(P))$, vagyis $\kappa = \kappa^T$, ahogy az első állításban szerepel. Ha pedig a ρ korrelációban a κ kollineáció szimmertikus, akkor $\rho(\rho(P)) = \kappa^{-1}(\kappa(P)) = P$ igazolja, hogy involutív.

A második állításhoz először tegyük fel, hogy $B \in \rho(A) \Leftrightarrow \rho(B) \ni A$ érvényes minden A és B pontra. A korreláció illeszkedéstartása miatt ebből $\rho(B) \ni \rho(\rho(A)) \Leftrightarrow B \in \rho(A) \Leftrightarrow \rho(B) \ni A$ minden A és B pont esetén. Mint-hogy ρ bijektív, minden e egyeneshez van olyan B pont, melyre $e = \rho(B)$, ezért ebből $\rho(\rho(A)) = A$ következik, tehát ρ involúció.

Most azt tegyük fel a második állításban, hogy ρ involutív. Ekkor az involutivitás, majd az illeszkedés tartása miatt $\rho(B) \ni A \Leftrightarrow \rho(B) \ni \rho(\rho(A)) \Leftrightarrow B \in \rho(A)$ igazolja az állítást. ■

Az involutív korrelációkat, *polaritásnak* nevezzük. Az ω nyilvánvalóan polaritás, és minden A, B pontpárra $B \in \omega(A) \Leftrightarrow \omega(B) \ni A$.

Definíció. Egy ρ korreláció esetén a P pontot a $\rho(P)$ egyenes *pólusának*, a $\rho(P)$ egyenest a P pont *polárisának* mondjuk.

Egy ρ polaritás esetén egy P pont $\rho(P)$ polárisán lévő pontokat a P pont *konjugáltjainak*, az e egyenes $\rho(e)$ pólusán átmenő egyeneseket pedig az e egyenes *konjugáltjainak* nevezünk. A P pontot illetve az e egyenest a ρ polarításra nézve *önkonjugáltak* hívjuk, ha $P \in \rho(P)$ illetve $\rho(e) \in e$.

Egy polaritást *elliptikusnak* illetve *hiperbolikusnak* nevezünk, ha nincs illetve ha van önkonjugált pontja. ▲

Világos, hogy az ω polaritás nem rendelkezik önkonjugált pontokkal, vagyis elliptikus.

Tétel. Egy polaritás akkor és csak akkor elliptikus illetve hiperbolikus, ha a mátrixa is elliptikus illetve hiperbolikus.

Bizonyítás. Ha a polaritás mátrixa $\mathbf{M}$, akkor az $[\mathbf{u}]$ homogén koordinátájú pólus polárisának homogén koordinátája $[\mathbf{u}]\mathbf{M}$. A pólus és a poláris ezért pontosan akkor illeszkedik egymásra ha $\langle \mathbf{u}, \mathbf{uM} \rangle = 0$, tehát a polaritás elliptikus vagy hiperbolikus, aszerint, hogy az $\langle \mathbf{u}, \mathbf{uM} \rangle = 0$ egyenletnek nincs vagy van megoldása az $\mathbf{u}$ vektorra.

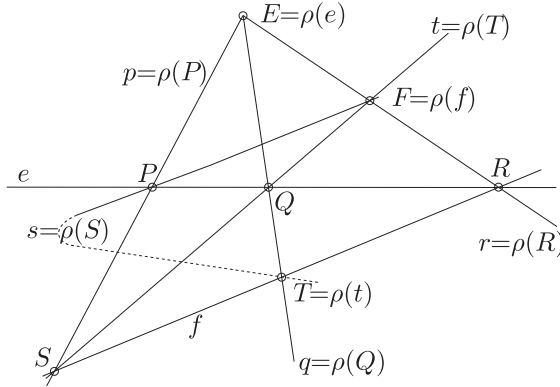
Mivel $\mathbf{M}$ szimmetrikus, létezik sajátvektorainak ortonormált $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ rendszere, mely bázist alkot. Legyenek a megfelelő valós sajátértékek rendre $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, és $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{u}_i$ tetszőleges vektor. Ekkor $0 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{vM} \rangle = \sum_{i=1}^3 \lambda_i v_i^2$, ahol a λ_i együtthatók nem nullák, így ennek akkor és csak akkor van megoldása, ha a λ_i sajátértékek nem mind egyforma előjelűek. ■

Tétel. *Hiperbolikus polaritás önkonjugált pontjai között nincs három kollineáris.*

Bizonyítás. Indirekt feltevésként induljunk ki abból, hogy az e egyenes R , Q és X különböző pontjai önkonjugáltak.

Legyen pontjaink polárisa rendre r , q és x . Ekkor minden $Y \in e$ pontra a ρ projektivitása és Papposz tétele miatt $(RQXY) = (rqxy) = (r \cap e \cap q \cap e \cap x \cap e \cap y \cap e) = (RQX y \cap e)$ alapján $Y = y \cap e \in e$, ahol $y = \rho(Y)$ az Y pont polárisa, vagyis az e egyenes minden pontja önkonjugált.

Vegyük fel az R ponton át az $f \neq e$ egyenest, ami nem megy át az e egyenes $E = \rho(e)$ polárisán. Legyen $T = f \cap q$, ahol $q = \rho(Q)$.



25. ábra

A T pont $t = \rho(T)$ polárisa átmegy az f egyenes $F = \rho(f)$ pólusán, mely illeszkedik a R pont $r = \rho(R)$ polárisára. A t egyenes a Q ponton is átmegy, mert $T \in q = \rho(Q)$. Legyen $S = f \cap t$. Ezek alapján az S pont $s = \rho(S)$ polárisa átmegy az F és T pontokon, és átmegy a $P = e \cap SE$ önkonjugált ponton is, hiszen a P pont $p = \rho(P)$ polárisa éppen az SE egyenes, amiért $S \in \rho(P)$, vagyis $s \ni P$.

Egy teljes négyoldal átlós pontjai azonban sosem esnek egy egyenesre, így az $EFQP$ pontnégyes nem alkothat teljes négyoldalt, vagyis legalább három eleme kollineáris. Mivel a P , Q és R pontok különbözőek, és így a p , q és r egyenesek kizárólag az E pontban metszik egymást, következik, hogy $E = F$ vagy $F = R$. Csakhogy $e \neq f$ és $f \neq r$ (mivel $E \notin f$), vagyis az indirekt feltétel hamis, ami igazolja tételünket. ■

A másodrendű görbék definíciója [Kurusa: Euklidészi geometria] alapján utóbbi két tételünk az alábbi eredményezi.

Tétel. *Hiperbolikus polaritás önkonjugált pontjai másodrendű görbét alkotnak.*

Konkréten ha az önkonjugált pontok görbét az egységömbön akarjuk meg-
nézni, és a hiperbolikus polaritás szimmetrikus mátrixa sajátvektorainak orton-
ormált rendszere $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, melyekhez tartozó sajátértékei rendre $\lambda_1 > 0$ és
 $\lambda_2, \lambda_3 < 0$, akkor a $\mathbf{v}$ vektor $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ bázisban vett koordinátáira érvényes
 $1 = \sum_{i=1}^3 v_i^2$ egyenletből helyettesítéssel a görbére nyert

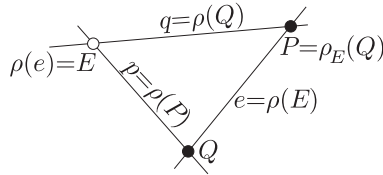
$$0 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i v_i^2 = \lambda_1 \left(1 - \sum_{i=2}^3 v_i^2\right) + \sum_{i=2}^3 \lambda_i v_i^2 = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)v_2^2 + (\lambda_3 - \lambda_1)v_3^2$$

formula egy ellipszis egyenlete, ami pontosan akkor kör, ha $\lambda_2 = \lambda_3$. Főképpen azonban
nem lehet az önkonjugált pontok halmaza, hiszen akkor $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 - \lambda_1 = -1$ és
 $\lambda_3 - \lambda_1 = -1$ lenne, amiből $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ következik, holott ez lehetetlen, mert $\mathbf{M}$
nem elfajuló.

Tétel. Legyen ρ egy polaritás, e egy nem önkonjugált egyenes, $E = \rho(e)$ pedig
ennek pólusa. Ekkor az a $\rho_E: e \rightarrow e$ leképezés, melyre $\rho_E(Q) := \rho(Q) \cap e$, involutív
projektivitás.

Bizonyítás. A ρ_E leképezés nem identikus, sőt legfeljebb 2 fixpontja lehet, hiszen
ellenkező esetben az e egyenes minden pontja önkonjugált lenne.

A ρ_E definíciója miatt az $E\rho_E(Q)$ egyenes éppen a Q pont $q = \rho(Q)$ polárisa.



25. ábra

A $\rho_E(Q)$ ponton átmenő e és q egyenesek pólusai E és Q , amiért $\rho(\rho_E(Q))$ éppen
az EQ egyenes, így $\rho_E(\rho_E(Q)) = EQ \cap e = Q$, amiért ρ_E másodrendű és nem
identikus, tehát involúció.

Mivel a korrelációk tartják a kettősviszonyt, a Papposz-tétel felhasználásával
minden e egyenesen lévő P, Q, R, S pontnégyesre

$$(PQRS) = (\rho(P)\rho(Q)\rho(R)\rho(S)) = (\rho_E(P)\rho_E(Q)\rho_E(R)\rho_E(S))$$

következik, vagyis ρ_E tartja a kettősviszonyt. ■

Az egyenesek önmagukra vett involutív projektivitásairól tudjuk, hogy csak
elliptikusak vagy hiperbolikusak lehetnek.

Ha a ρ polarítás elliptikus, akkor egyetlen pont sem önkonjugált, így egyetlen E pontra sem lehet a ρ_E leképezésnek fix pontja, ezért ρ_E minden pontra elliptikus.

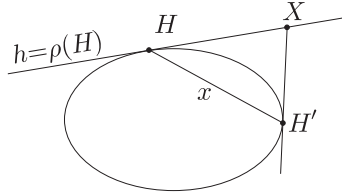
Ha a ρ polarítás hiperbolikus, akkor vannak önkonjugált pontjai, ezért a ρ_E pontosan azon pontokra lesz hiperbolikus, amelyek polárisain van önkonjugált pont.

2.8. Hiperbolikus polarítások határhalmazai

Egy E pontot a ρ (hiperbolikus) polarításra nézve *határpontnak* nevezünk, ha E önkonjugált. Az E pontot rendre *belső* illetve *külső pontnak* mondjuk, ha ρ_E elliptikus illetve hiperbolikus. A határpontok halmazát a (hiperbolikus) polarítás *határhalmazának* nevezzük.

Tétel. *A H határpont h polárisának minden $X \neq H$ pontja külső pont. A H határponton átmenő minden $x \neq h$ egyenes pontosan kettő határpontot tartalmaz.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy $X \in h \setminus \{H\}$ pontot. Ekkor H rajta van az X pont $x = \rho(X)$ polárisán, ahol önkonjugáltsága miatt $\rho_X(H) = H$ teljesül. Eszerint ρ_X hiperbolikus, tehát X külső pont.



26. ábra

Amennyiben az $x \neq h$ egyenes áthalad a H határponton, akkor $H \in x$ miatt $h = \rho(H) \ni \rho(x) = X$, vagyis az x egyenes X pólusa a h egyenesre esik. Eszerint X külső pont (határpont nem lehet, mert akkor $x = h$ lenne), amiért ρ_X hiperbolikus, vagyis pontosan két fix pontja van, amelyek közül az egyik a H . ■

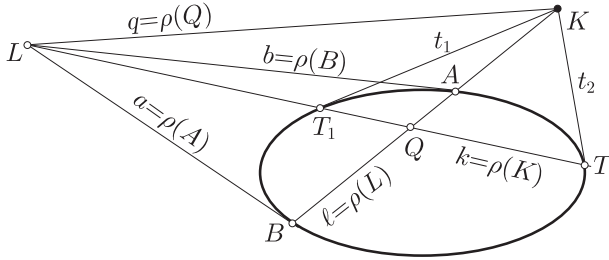
A határpontot nem tartalmazó egyeneseket elkerülőeknek, a pontosan egy határpontot tartalmazó egyeneseket, vagyis a határpontok polárisait, *érintőeknek*, a két határpontot tartalmazó egyeneseket pedig metsző egyeneseknek nevezzük.

Tétel. *Minden külső pontra pontosan kettő érintő illeszkedik.*

Bizonyítás. Az X külső pont $x = \rho(X)$ polárisán a ρ_X projektivitás hiperbolikus, tehát pontosan kettő fixpontja van. Lévéen ρ_X fixpontjai, ezek önkonjugáltak, vagyis határpontok, amiért az ezeket az X ponttal összekötő egyenesek érintők. További érintő az X pontra nem illeszkedhet, mert minden érintő önkonjugált, így az x egyenessel vett metszete a ρ_X fixpontja, de abból pontosan kettő van. ■

Az eddigieket összefoglalva állíthatjuk, hogy hiperbolikus polaritás esetén léteznek külső pontok, és ezek éppen az érintők metszetei. Minden egyenes metszi az összes érintőt, így minden egyenesen vannak külső pontok, melyek pontosan az egyenesnek az érintőkkel vett metszetei. Egy külső pont polárisa a rajta átmenő két érintő határpontjait összekötő egyenes.

Tétel. Legyen K egy külső pont a ρ hiperbolikus polaritásnál, t_1 és t_2 a $K = \rho(k)$ pontra illeszkedő két érintő, T_1 és T_2 rendre ezek érintési pontjai, ℓ pedig egy tetszőleges egyenes a K ponton át, mely tartalmazza az $A \neq B$ határpontokat. Ekkor a $Q = \ell \cap k$ pontra $(ABQK) = -1$.



28. ábra

Bizonyítás. Nyilván $k = \rho(K)$. Legyen $a = \rho(A)$ és $b = \rho(B)$ az A illetve B pontban érintő polárisok. Ezek metszetét jelölje L . Nyilván $L = \rho(\ell)$, hiszen $A, B \in \ell$.

A $Q = k \cap \ell$ feltétel miatt $K, L \in q = \rho(Q)$, amiből $\rho_L(Q) = K$ és $\rho_L(K) = Q$ következik, így a ρ_L hiperbolikus involúcióra $(ABQK) = -1$, ahogy állítottuk. ■

Figyeljük meg, hogy az LKQ háromszög minden oldala éppen az oldallal szemközti csúcs polárisa, és az L, K csúcsok külső pontok, de a Q pont belső pontnak tűnik. Most igazolni fogjuk, hogy Q valóban belső pont.

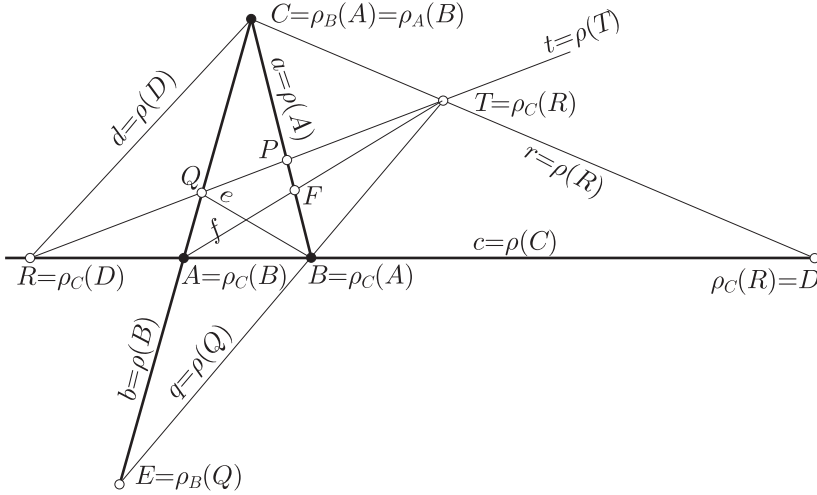
Egy nem elfajuló ABC háromszöget a ρ polaritás *poláris háromszögének* vagy *polárháromszögének* nevezünk, ha csúcsaival szemközti oldalai rendre a szemben lévő csúcsok polárisai, vagyis $a = \rho(A)$, $b = \rho(B)$ és $c = \rho(C)$.

Iménti tételünkéből következőleg polárháromszögek léteznek, az alábbi alapján emiatt belső pontok is léteznek.

Tétel. Hiperbolikus polaritás nem elfajuló polárháromszögének csúcsai közül pontosan egy pont belső.

Bizonyítás. Vegyünk egy tetszőleges T határpontot, ennek polárisa, amely a T pontban érintő, legyen $t = \rho(T)$. Mivel a polárháromszög egyetlen oldala sem lehet

önkonjugált, $t \neq a, b, c$ és $T \neq A, B, C$.



27. ábra

Messe az ABC polárháromszög három oldalát ez a t egyenes a P , Q és R pontokban, és tegyük fel, hogy olyan sorrendben betűztük ezen pontokat, hogy $(RTPQ) > 1$. Betűzzük most úgy a polárháromszög oldalait, hogy $P \in a$, $Q \in b$ és $R \in c$ legyen.

Állítjuk, hogy ekkor a $C = \rho(c)$ csúcs belső pont, az $A = \rho(a)$ és $B = \rho(b)$ pontok viszont külsők.

Az R pont $r = \rho(R)$ polárisa átmegy a T ponton, mert R rajta van a T pont t polárisán, de ugyancsak illeszkedik a C pontra is, hiszen illeszkedik a C pont c polárisára, ezért $\rho_C(R) = t \cap c = T$.

Legyen d a C és R pontokra illeszkedő egyenes. Ennek D pólusa a c és r metszetében van, amiért $D = \rho_C(R)$.

Vegyük észre, hogy Papposz tételét is alkalmazva $(D\rho_C(D)B\rho_C(B)) = (DRBA) = (drba) = (RTQP) > 0$ adódik, amiből ρ_C involutivitása miatt ρ_C hiperbolikussága is következik, vagyis C belső pont.

A Q pont $q = \rho(Q)$ polárisa átmegy a T és a B ponton, hiszen $Q = t \cap b$. Legyen $E = \rho_B(Q) = b \cap q$. Papposz tételét is alkalmazva $(A\rho_B(A)Q\rho_B(Q)) = (ACQE) = (caeq) = (RPQT) = 1/(1 - (RTPQ)) < 0$ adódik, amiből ρ_B involutivitása miatt ρ_B hiperbolikussága következik, vagyis B külső pont.

A P pont $p = \rho(P)$ polárisa átmegy a T és az A ponton, hiszen $P = t \cap a$. Legyen $F = \rho_A(P) = a \cap p$. Papposz tételét is alkalmazva $(B\rho_A(B)P\rho_A(P)) = (BCPF) = (cbfp) = (RQPT) = 1/(1 - (RTQP)) > 0$ adódik, amiből ρ_A involutivitása miatt ρ_A elliptikussága következik, vagyis A belső pont. ■

Tétel. *Hiperbolikus polaritásnál az alábbiak ekvivalensek:*

- (0) *a C pont belső;*
- (1) *a C pont polárisának minden pontja külső;*
- (2) *a C pontra illeszkedő minden egyenes pontosan kettő határpontot tartalmaz.*

Bizonyítás. Legyen $c = \rho(C)$.

(0) $\Rightarrow$ (1) Bármely $A \in c$ pontra $B = \rho_C(A) \neq A$, mert (0) szerint ρ_C elliptikus, vagyis nincs fixpontja. Eszerint ABC nem elfajuló polárháromszög, és csúcsai közül (0) szerint C belső pont, amiért A és B külső pont, vagyis (1) teljesül.

(1) $\Rightarrow$ (2) Ha a d egyenes a C pontra illeszkedik, akkor ennek $D = \rho(d)$ pólusa a c egyenesen van, és így (1) miatt külső pont, amiért az ő $d = \rho(D)$ polárisán ρ_D hiperbolikus projektivitás, melynek pontosan kettő fixpontja van. Ezek a fixpontok ρ határpontjai, vagyis (2) teljesül.

(2) $\Rightarrow$ (1) Ha $P \in c$ akkor a $p = \rho(P)$ polárisa a C pontra illeszkedik, így (2) szerint azon pontosan kettő határpont van, amiért ρ_P hiperbolikus, vagyis P külső, tehát (1) teljesül.

(1) $\Rightarrow$ (0) Bármely $A \in c$ pontra a $B = \rho_C(A) \neq A$, hiszen A nem önkonjugált pont. Ugyankor (1) szerint B is külső pont, amiért az ABC polárháromszögben a C pont a belső pont, tehát (0) teljesül. ■

A továbbiakban jelölje $\mathcal{H}_\rho$ a ρ hiperbolikus polaritás határpontjainak halmazát, vagyis $\mathcal{H}_\rho = \{P \in \mathbb{P}^2 : P \in \rho(P)\}$ a ρ határhalmaza.

Tétel. *Határhalmaz projektív képe határhalmaz, és bármely két határhalmazhoz létezik olyan kollineáció, mely bijektíven képezi az egyiket a másikra.*

Bizonyítás. Legyen $\rho = (\omega \circ \pi, \pi^{-1} \circ \omega)$ egy polaritás, ahol emiatt π egy szimmetrikus kollineáció.

Tetszőleges κ kollineáció esetén

$$\begin{aligned} \kappa(\mathcal{H}_\rho) &= \kappa(\{P : P \in \rho(P)\}) = \{\kappa(P) : P \in \rho(P)\} = \{Q : \kappa^{-1}(Q) \in \rho(\kappa^{-1}(Q))\} \\ &= \{Q : \kappa^{-1}(Q) \in \omega \circ \pi \circ \kappa^{-1}(Q)\} = \{[u] : [uM_\kappa^{-1}] \perp [uM_\kappa^{-1}M_\pi]\} \\ &= \{[u] : uM_\kappa^{-1}(uM_\kappa^{-1}M_\pi)^T = 0\} = \{[u] : uM_\kappa^{-1}M_\pi^T(M_\kappa^{-1})^T u^T = 0\} \\ &= \{[u] : uM_\kappa^{-1}M_\pi(M_\kappa^{-1})^T u^T = 0\}, \end{aligned}$$

ahol M_κ és M_π rendre a κ és π kollineációhoz tartozó nem elfajuló lineáris leképezés.

Már láttuk, hogy ρ akkor és csak akkor hiperbolikus, ha a π kollineáció M_π mátrixa is hiperbolikus.

A tétel első állításának feltétele alapján tehát M_π nem csak szimmetrikus, de hiperbolikus is, amiért az $M_\nu = M_\kappa^{-1}M_\pi(M_\kappa^{-1})^T$ mátrix is szimmetrikus és

hiperbolikus, hiszen a konjugálás sem a sajátértékeket, sem a szimmetriát nem változtatja meg. Az $\mathbf{M}_\nu$ által definiált ν kollineációval meghatározott $\tau = (\omega \circ \nu, \nu^{-1} \circ \omega)$ korreláció eszerint hiperbolikus polaritás, melynek határhalmaza

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\tau &= \{Q \in \mathbb{P}^2 : Q \in \tau(Q)\} = \{Q \in \mathbb{P}^2 : Q \in \omega \circ \nu(Q)\} = \{[\mathbf{u}] : [\mathbf{u}] \perp [\mathbf{u}\mathbf{M}_\nu]\} \\ &= \{[\mathbf{u}] : \mathbf{u}(\mathbf{u}\mathbf{M}_\kappa^{-1}\mathbf{M}_\pi(\mathbf{M}_\kappa^{-1})^T)^T = 0\} = \{[\mathbf{u}] : \mathbf{u}\mathbf{M}_\kappa^{-1}\mathbf{M}_\pi^T(\mathbf{M}_\kappa^{-1})^T\mathbf{u}^T = 0\},\end{aligned}$$

melyre láthatólag $\mathcal{H}_\tau = \kappa(\mathcal{H}_\rho)$ teljesül. Ez bizonyítja az első állítást.

A tétel második állításának igazolásához legyenek adottak a $\rho = (\omega \circ \pi, \pi^{-1} \circ \omega)$ és $\tau = (\omega \circ \nu, \nu^{-1} \circ \omega)$ hiperbolikus polaritások, és ezek $\mathcal{H}_\rho$ valamint $\mathcal{H}_\tau$ határhalmazai. Ekkor π és ν egy-egy szimmetrikus kollineáció, melyek $\mathbf{M}_\pi$ és $\mathbf{M}_\nu$ mátrixai szimmetrikusak és hiperbolikusak. Mivel ezeknek azonos a szignatúrájuk, a főtengeley-transzformáció biztosít egy olyan $\mathbf{M}_\kappa$ nem elfajuló lineáris leképezést^(*), melyre $\mathbf{M}_\nu = \mathbf{M}_\kappa^{-1}\mathbf{M}_\pi(\mathbf{M}_\kappa^{-1})^T$ teljesül. A fentiek alapján ebből $\mathcal{H}_\tau = \kappa(\mathcal{H}_\rho)$ következik az $\mathbf{M}_\kappa$ által meghatározott κ kollineációra. ■

Eredményünk szerint minden határhalmaz előáll a kör projektív képeként, hiszen egy az origón átmenő $z = 0$ síkra vonatkozó tükrözés a gömbön egy π kollineációt ad, melynek mátrixa $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, így a $\rho = (\omega \circ \pi, \pi^{-1} \circ \omega)$ korreláció határhalmaza pontjainak $[\mathbf{u}]$ homogén koordinátáira $\mathbf{u}\mathbf{M}_\pi^T\mathbf{u}^T = 0$, vagyis $\mathbf{u}_1^2 + \mathbf{u}_2^2 - \mathbf{u}_3^2 = 0$ teljesül, márpedig ennek metszete a $z = -1$ síkkal $\mathbf{u}_1^2 + \mathbf{u}_2^2 = 1$.

A projektív sík gömbi interpretációja esetén, a kúpszeletek (vagyis a határhalmazok) három részre osztják a gömbfelületet, melyből kettő ugyanahhoz a projektív ponthalmazhoz tartozik és nem tartalmaz főkört. A három tartomány közül az felel meg a külső pontok halmazának, amely tartalmaz egy teljes főkört, hiszen ennek síkja a kúp csúcsára illeszkedik, így nem metszi a kúpszeletet, márpedig a belső pontokon átmenő minden egyenes (aminek képe a főkör) két pontban metszi a határhalmazt. A gömb most említett három tartománya közül egy mindig tartalmaz teljes főkört, hiszen a belső pontok polárisai mind csupa külső pontból állnak. Ha veszünk egy ilyen csupa külső pontból álló egyenest, majd az annak megfelelő főkörrel párhuzamos sík metszetét a határhalmaz pontjainak megfelelő egyenesekkel, akkor a fentiek értelmében a metszet görbe ellipszis. Ha olyan síkra „vetítjük” (ezen most az iménti megfeleltetési módszert értjük) a projektív kúpszeletet, amely párhuzamos a határhalmaz egy érintő egyenesét reprezentáló főkörrel, akkor a kúpszelet képe parabola lesz. Ha olyan síkra „vetítjük” a projektív kúpszeletet, amely párhuzamos egy a határhalmazt két különböző határpontban metsző egyenest reprezentáló főkörrel, akkor a síkbeli kép hiperbola lesz.

(*)Ez a sajátvektorokból alkotott ortonormált bázisokat egymásba vivő bázistranszformáció

2.9. Kúpszeletek

Mivel egy polaritás akkor és csak akkor hiperbolikus, ha mátrixa hiperbolikus, egy hiperbolikus polaritás határhalmazát mindig egy affin síkban lévő $\lambda_1 \mathbf{u}_1^2 + \lambda_2 \mathbf{u}_2^2 = \lambda_3$ ellipszis pontjait az origóval összekötő egyenesek határozzák meg. Ezek az egyenesek emiatt egy kúp palástjának alkotói, amiért a határhalmazokat gyakran *kúpszeletnek* nevezik. A továbbiakban a határhalmazokat kúpszeletnek nevezzük.

Kúpszeletek alaptétele. *Pontosan egy olyan kúpszelet van, mely*

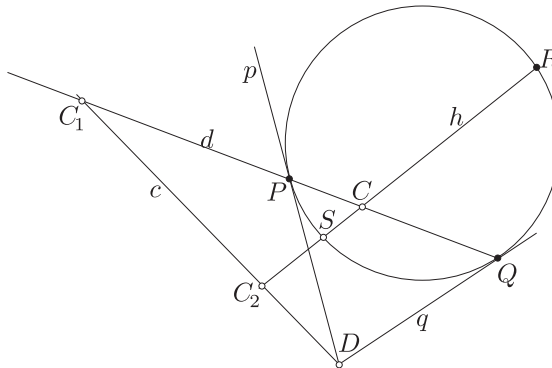
- (1) *3 nem kollineáris pontra illeszkedik, és ebből kettőben egy-egy előre adott egyenest érint, vagy*
- (2) *4 általános helyzetű pontra illeszkedik, és az egyikben egy előre adott egyenest érint, vagy*
- (3) *5 általános helyzetű pontra illeszkedik.*

Bizonyítás. Az (1) állításban legyenek az adott pontok P , Q és R , a két, rendre P és Q pontra illeszkedő érintő legyen p és q , ezek metszetét jelölje $D = p \cap q$.

Most mutatunk egy olyan kúpszeletet, mely illeszkedik az adott pontokra és érinti a p és q egyeneseket. Vegyünk fel egy tetszőleges $\mathcal{K}$ kúpszeleten három különböző P' , Q' és R' pontot, legyen a P' és Q' pontban rendre p' és q' az érintő, végül legyen $D' = p' \cap q'$.

Ekkor a kollineációk alaptétele szerint létezik pontosan egy olyan κ kollineáció, mely a P , Q , R és D pontokat rendre a P' , Q' , R' és D' pontba viszi. Erre a kollineációra persze $\kappa(p) = p'$ és $\kappa(q) = q'$ is teljesül. Ezek alapján a $\kappa^{-1}(\mathcal{K})$ kúpszelet illeszkedik a P , Q és R pontokra, és érinti a p és q érintőket, mert a kollineáció önkonjugált pontokat önkonjugált pontokba visz, vagyis érintőket érintőkbe képez.

Az unicitás belátásához tekintsünk egy tetszőleges h egyenest az R ponton keresztül, ami egy C pontban metszi a $d = PQ$ egyenest.



34. ábra

Ekkor a C pont polárisa az a c egyenes, mely átmegy a $D = p \cap q$ ponton, valamint azon a C_1 ponton, melyre $(PQCC_1) = -1$.

Legyen $C_2 = h \cap c$ és tekintsük a h egyenesen annak H pólusával megadott ρ_H hiperbolikus projektivitást. Világos, hogy $\rho_H(R) = R$ és $\rho_H(C) = C_2$.

Tudjuk, hogy ρ_H fixpontjai harmonikusan választják el a pontot a képétől, ezért az az S pont a h egyenesen, melyre $(RSCC_2) = -1$ éppen a ρ_H másik fixpontja, vagyis a kúpszelet h egyenesen lévő pontja, ami nem R .

Eszerint a kúpszelet minden $h \ni R$ egyenesen lévő pontját meg tudjuk szerkeszteni az adatokból, ami igazolja az unicitást az (1) állításban.

A (2) bizonyításhoz legyenek az adott pontok P, Q, R és S , valamint a p érintő a P pontban és legyen $C = RS \cap PQ$. Legyen C_1 az a pont a $d = PQ$ egyenesen, melyre $(PQCC_1) = -1$, és legyen C_2 az a pont a $h = RS$ egyenesen, melyre $(RSCC_2) = -1$. Legyen c a C_1 és C_2 pontok közös egyenese, ennek metszéspontja a p egyenessel legyen D .

A C pont polárisa, átmegy a C_1 ponton és a C_2 ponton is, tehát $\rho(C) = c$. A D pont rajta van a P és a C polárisán, tehát a d pólusa. Eszerint a $q = DQ$ egyenes pólusa illeszkedik a d egyenesre és a Q pont polárisára. Mivel a Q a kúpszeletre esik, polárisa illeszkedik magára a Q pontra, így ez az egyetlen metszete a d egyenessel, vagyis q pólusa maga a Q pont. Eljárásunk eredményeképpen már van három pontunk, kettőben érintővel, így (1) szerint a kúpszelet megszerkeszthető, ami igazolja a (2) állításban az unicitást.

Az (1) állítás alapján van olyan kúpszelet, mely illeszkedik a P, Q és R pontokra, és érinti a p és q érintőket. Ez a kúpszelet átmegy az S ponton is, mert éppen abban az S' pontban metszi a h egyenest, amelyre $(RS'CC_2) = -1$. Ezzel a (2) állítás bizonyítása teljes.

A (3) bizonyításához legyenek az adott pontok P, Q, R, S és T . Ahogy a (2) bizonyításában, a P, Q, R és S pontok meghatározzák az $C = RS \cap PQ$ pont $c = \rho(C)$ polárisát. Ugyanígy tekintve a P, Q, T és S pontokra, azok meghatározzák a $B = TS \cap PQ$ pont $b = \rho(B)$ polárisát. Mivel a különböző C és B pontok illeszkednek a $d = PQ$ egyenesre, polárisaik $D = c \cap b$ metszete a d pólusa, amiért a $p = DP$ és $q = DQ$ egyenesek (mint már láttuk a (2) bizonyítása közben), rendre a P és Q pontban érintik a kúpszeletet. Ez igazolja a (3) állításban az unicitást.

Az (2) állítás alapján van olyan kúpszelet, mely illeszkedik a P, Q, R és S pontokra, és érinti a p és q érintőket. Ez a kúpszelet átmegy a T ponton is, mert éppen abban a T' pontban metszi a TB egyenest, amelyre $(T'SBB_2) = -1$. Ez igazolja a (3) állításban az egzisztenciát. ■

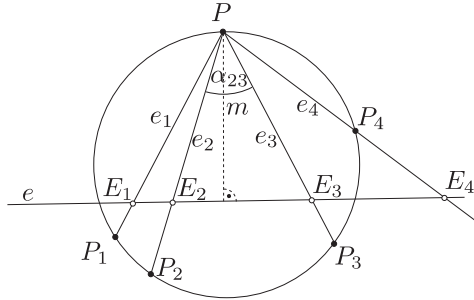
Tétel. *Legyenek a P_i ($i = 1, 2, 3, 4$) pontok a $\mathcal{K}$ kúpszeleten, és tekintsük minden $P \in \mathcal{K} \setminus \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ pontra az $e_i(P) = PP_i$ egyeneseket. Ekkor az*

$(e_1(P)e_2(P)e_3(P)e_4(P))$ kettősszorzó konstans, nem függ a P pont választásától.

Bizonyítás. Alkalmas κ kollineációt választva a $\mathcal{K}$ kúpszelet bármely másik kúpszeletbe átvihető, és közben a kettősszorzók nem változnak, hiszen a kollineációk projektívek, ezért elegendő a bizonyítást olyan kúpszeletre elvégezni, melynek affin képe kör. Papposz-tételét alkalmazva pedig eszerint elegendő a bizonyítást az affin síkban egy kör esetében elvégezni.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehető — hiszen ez legfeljebb átszámozást igényel —, hogy a P_1, P_2, P_3 és P_4 pontok úgy helyezkednek el a körön, hogy P_1 és P_3 elválasztja a P_2 és P_4 pontokat. Ekkor ezen pontok P_1, P_2, P_3, P_4 és P_4, P_1 páirjai rendre olyan i_{12}, i_{23}, i_{34} és i_{41} ívekre osztják a körvonalat, melyek nem tartalmazzák a P_1, P_2, P_3 és P_4 pontok egyikét sem.

Tegyük fel, hogy P az i_{12} íven van, és legyen az e olyan egyenes, amely nem illeszkedik a P pontra, de minden egyes e_i ($i = 1, 2, 3, 4$) egyenest rendre az E_i ($i = 1, 2, 3, 4$) pontokban metsz. Az e_i és e_j egyenesek szögét jelölje α_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4$), a P pontnak az e egyenestől mért távolsága pedig legyen m .



70. ábra

Papposz tétele szerint ekkor $(e_1e_2e_3e_4) = (E_1E_2E_3E_4)$.

Az E_i ($i = 1, 2, 3, 4$) pontok $(E_1E_2E_3E_4)$ kettősszorzóját az $(E_1E_2E_j)$ ($j = 3, 4$) osztóviszonyokból számítjuk ki:

$$-(E_1E_2E_j) = \frac{d(E_1, E_j)}{d(E_2, E_j)} = \frac{t(E_1, E_j)/m}{t(E_2, E_j)/m} = \frac{t(E_1, E_j)}{t(E_2, E_j)} = \frac{|PE_1||PE_j|\sin \alpha_{1j}}{|PE_2||PE_j|\sin \alpha_{2j}},$$

amiért

$$\begin{aligned} (E_1E_2E_3E_4) &= \frac{(E_1E_2E_3)}{(E_1E_2E_4)} = \frac{|PE_1||PE_3|\sin \alpha_{13}}{|PE_2||PE_3|\sin \alpha_{23}} : \frac{|PE_1||PE_4|\sin \alpha_{14}}{|PE_2||PE_4|\sin \alpha_{24}} \\ &= \frac{\sin \alpha_{13}}{\sin \alpha_{23}} : \frac{\sin \alpha_{14}}{\sin \alpha_{24}}. \end{aligned}$$

Minthogy a látószögtétel miatt az α_{ij} szögek minden íven állandóak, ebből az következik, hogy az $(E_1E_2E_3E_4)$ kettősvíszony minden íven állandó.

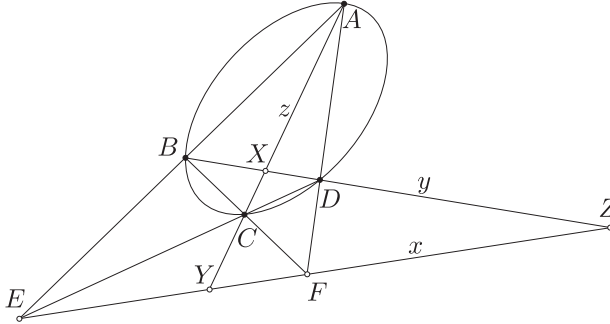
Két ív között pontosan azok az α_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4$) szögek változnak, amelyeknél az ívek a P_iP_j egyenesnek két különböző oldalára esnek. Ezek a szögek a kiegészítő szögükre változnak, ami szinuszuk értékét nem változtatja meg, vagyis az $(E_1E_2E_3E_4)$ kettősvíszony minden íven megegyezik. Ez bizonyítja a tételt. ■

Amennyiben az egyenesekre mint elfajult kúpszeletekre tekintünk, akkor az alábbi definíció voltaképpen a kettősvíszony fogalmának kiterjesztése.

Definíció. Ha a P_1, P_2, P_3 és P_4 pontok egy határhalmazra illeszkednek, akkor *kettősvíszonyukon* azt a $(P_1P_2P_3P_4) := (e_1e_2e_3e_4)$ számot értjük, ahol $e_i = PP_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) a határhalmaz valamely tetszőleges P pontjára. ▲

Tétel. Ha egy teljes négyszög négy csúcsa egy kúpszeletre esik, akkor az ezen csúcsait összekötő átlók metszetének polárisa éppen a nem kúpszeleten lévő csúcsait összekötő átló.

Bizonyítás. Tekintsük a $\mathcal{K}$ kúpszeletbe írt $ABCD$ négyszöget. Ennek további csúcsai $E = CD \cap BA$ és $F = DA \cap CB$.



35. ábra

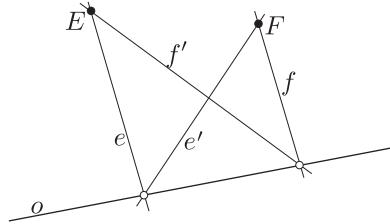
Az AB, BC, CD, DA teljes négyszögből $(ACXY) = (BDXZ) = -1$ következik. Ez azt jelenti, hogy az Y és Z pontok az X polárisán vannak, vagyis $x = \rho(X)$. Ugyanígy $y = \rho(Y)$ és $z = \rho(Z)$, ami bizonyítja az állítást. ■

2.10. Sugársorok közti projektivitások

Papposz tétele szerint egy o egyenes két projektív leképezést is létrehoz két nem rá illeszkedő E és F pont sugársora között, melyek

- (1) $\pi_{oEF}: \check{E} \rightarrow \check{F}$, ahol $\pi_{oEF}(e) = F(e \cap o) = e'$, illetve
- (2) $\pi_{oFE}: \check{F} \rightarrow \check{E}$, ahol $\pi_{oFE}(f) = E(f \cap o) = f'$.

Ezek egymás inverzei és sugársorok közti *perspektivitásnak* hívjuk őket.



75. ábra

A sugársorok közti perspektivitásokra és projektivitásokra az egyenesek közti ilyen tételek mindegyikének duálisa — vagyis az, amelyben a pontsor és sugársor szavak következetesen megcseréltek — igazolható, azonban a kúpszeletek ismerete újabb eredményhez is vezet, melynek duálisát az egyenesek közti projektivitásokra még ki se mondhattuk.

Tétel. *Illeszkedjenek az a, b, c egyenesek az E pontra, az $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ egyenesek pedig az F pontra. Ekkor létezik egy $\pi: \check{E} \rightarrow \check{F}$ projektivitás, melyre $\hat{a} = \pi(a)$, $\hat{b} = \pi(b)$ és $\hat{c} = \pi(c)$. Az ilyen tulajdonságú $\check{E} \rightarrow \check{F}$ projektivitás egyértelmű.*

Bár a dualitás igazolja ezt a tételt, Papposz tételére is hivatkozhatunk, hiszen e szerint mindkét sugársor projektív módon hozzárendelhető egy-egy olyan egyenes pontjaihoz, mely nem megy át az E és F pontok egyikén sem, és ezen egyenesek között a projektivitások alaptétele éppen a bizonyítandó állítást adja.

Az egyenesek közti perspektivitásokra vonatkozó tétel dualizálásával nyerjük a következő tételt is, habár természetesen az ottani bizonyítási módszerrel iménti tételünkre való hivatkozással is igazolható.

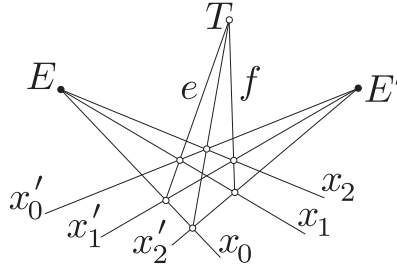
Tétel. *Az E és E' pontok közti $\pi: \check{E} \rightarrow \check{E}'$ projektivitás akkor és csak akkor perspektivitás, ha az $e = EE'$ egyenes fix, vagyis $\pi(e) = e$.*

Bár alábbi tételünk az egyenesek közti projektivitások tengelyére vonatkozó eredményünk duálisa, és így természetesen teljesül, a szemléletbeni jelentős eltérés miatt itt is bizonyítjuk az eredeti tétel bizonyításának dualizálásával.

Tétel. *Ha a sugársorok közti $\pi: \check{E} \rightarrow \check{E}'$ leképezés projektív, akkor minden E ponton átmenő x, y egyenesre az $(x \cap \pi(y))(\pi(x) \cap y)$ egyenesek egy sugársor elemei.*

Bizonyítás. Legyenek x_0, x_1 és x_2 különböző egyenesek az E ponton át, és legyen $x'_0 = \pi(x_0)$, $x'_1 = \pi(x_1)$ és $x'_2 = \pi(x_2)$, valamint T az $e = (x_0 \cap x'_1)(x'_0 \cap x_1)$ és

$f = (x_0 \cap x'_2)(x'_0 \cap x_2)$ egyenesekre illeszkedő pont.



8. ábra

A $\pi_{x_0TE'}$ és $\pi_{x'_0ET}$ perspektivitásokból összetett $\pi_{x_0TE'} \circ \pi_{x'_0ET}$ projektivitás az x_0, x_1 és x_2 egyeneseket nyilván rendre az x'_0, x'_1 és x'_2 egyenesekbe viszi, ezért a sugársorok projektivitásaira bizonyított első, alaptételünk értelmében $\pi = \pi_{x_0TE'} \circ \pi_{x'_0ET}$. Ebből $(x_0 \cap \pi(y))T = \pi_{x_0TE'}^{-1}(\pi(y)) = \pi_{x'_0ET}(y) = (x'_0 \cap y)T$, ahogy állítottuk. ■

A T pont akkor és csak akkor esik az EE' egyenesre, ha EE' fix egyenese a π projektivitásnak, vagyis π perspektívitás a két sugársor között. A T pontot a projektivitás középpontjának nevezzük.

Eredményünk értelmében két különböző sugársor közti projektivitás legfeljebb kettő perspektívitás szorzata, egy sugársor önmagára vett projektivitása pedig legfeljebb három perspektívitás szorzata, hiszen egy perspektívitás kell ahhoz, hogy a képegységek másik sugársorba kerüljenek.

Papposz–Pascal-tétel. *Ha az a_1, a_2, a_3 az A , a b_1, b_2, b_3 egyenesek pedig a B pontra illeszkednek, akkor az $a_1b_1a_2b_2a_3b_3$ hatoldal szemköztes csúcsait összekötő egyenesek közös pontra illeszkednek.*

A bizonyítás éppen úgy történik, mint az eredeti Papposz–Pascal-tételnél, vagyis előbbi tételünket alkalmazzuk arra a $\pi: \check{A} \rightarrow \check{B}$ projektivitásra, melyre $\pi(a_1) = b_2$, $\pi(a_2) = b_3$ valamint $\pi(a_3) = b_1$.

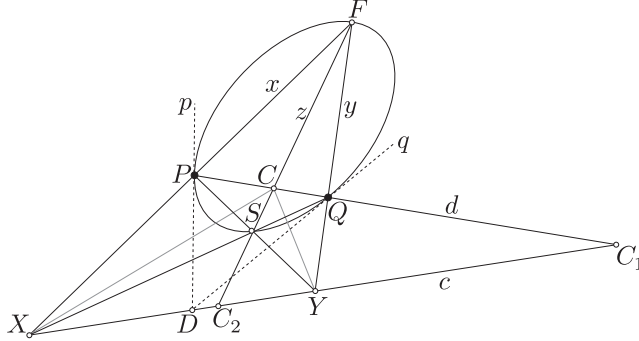
Steiner alábbi tételének duálisa nem szerepelt az egyenesek közti projektivitások vizsgálatakor.

Steiner tétele. *A $\check{P}$ és $\check{Q}$ sugársorok közötti $\pi: \check{P} \rightarrow \check{Q}$ leképezés akkor és csak akkor projektivitás, ha a $\mathcal{H} = \{\pi(e) \cap e : e \in \check{P}\} = \{\pi^{-1}(e) \cap e : e \in \check{Q}\}$ halmaz egyenes, vagy egy a P és Q pontokra illeszkedő kúpszelet.*

A π projektivitás akkor és csak akkor perspektív, ha $\mathcal{H}$ egy egyenes.

Bizonyítás. Ha a $\mathcal{H}$ ponthalmaz egyenes, akkor korábbi eredményeink alapján π perspektív projektivitás. Tegyük fel ezért, hogy $\mathcal{H}$ egy kúpszelet, az ezen lévő P és Q pontokban vett érintők pedig rendre p és q , melyek metszete D .

Rögzítsünk egy tetszőleges C pontot a $PQ = d = \rho(D)$ egyenesen, legyen a $z = FC$ egyenesen a kúpszelet másik pontja $S \neq F$, továbbá $X = PF \cap SQ$, $Y = PS \cap FQ$, $c = XY$, $C_1 = c \cap d$ és $C_2 = c \cap z$.



35. ábra

A PS, SQ, QF, FP teljes négyoldal, melynek C átlóspontja, c pedig erre nem illeszkedő átló, ezért $c = \rho(C)$. A PS, SF, FQ, QP majd PF, FS, SQ, QP oldalú teljes négyoldalból, rendre $CY = \rho(X)$ és $CX = \rho(Y)$ adódik.

Világos, hogy F változásával a $\mathcal{H}$ kúpszeleten az S , az X és az Y pont ugyan mozog, de az ábra többi eleme változatlan marad, vagyis az X és az Y pont mindig a $c = \rho(C)$ egyenesen lesz, és $\rho_C(X) = Y$ valamint $\rho_C(Y) = X$ mindvégig teljesül.

Eszerint $\pi(PF) = FQ = QY = Q\rho_C(X) = Q\rho_C(PF \cap c)$, amiért π projektivitás. Ugyanakkor π nem perpektivitás, hiszen $\pi(PQ) = Q\rho_C(PQ \cap c) = Q\rho_C(d \cap c) = QD = q$.

Ezzel a tétel „akkor” részét igazoltuk, de azért jegyezzük még meg, hogy $\pi(p) = Q\rho_C(p \cap c) = Q\rho_C(D) = QC_1 = d$.

A fordított irányhoz tegyük fel, hogy a $\pi: \check{P} \rightarrow \check{Q}$ leképezés, melyre $\pi(PF) = QF$ egy projektivitás.

Ha π perspektív, akkor korábbi eredményeink alapján a $\mathcal{H}$ ponthalmaz egy egyenes.

Mivel π nem perspektív, $\pi(d) \neq d = PQ$, tehát van olyan p és q egyenes rendre a P és Q ponton keresztül, hogy $\pi(p) = d$ és $\pi(d) = q$. Tekintsük most azokat a kúpszeleteket, melyek rendre a P és Q pontban érintik a p és q egyeneseket. A kúpszeletek alaptétele szerint ezen kúpszeletek közül az F minden helyzetében pontosan egy megy át az F ponton. Legyen ez a kúpszelet $\mathcal{H}_F$.

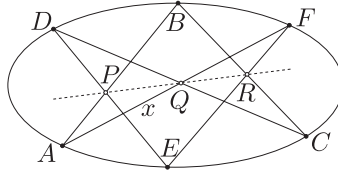
A π projektivitás akkor és csak akkor perspektív, ha $\mathcal{H}$ egy pont.

36. ábra

Pascal tétele. Általános helyzetű csúcsok alkotta hatszög, szemköztes oldalpárjainak metszéspontjai akkor és csak akkor illeszkednek egy egyenesre, ha a hat csúcs egy kúpszeletre illeszkedik.

Bizonyítás. Mivel az $ABCDEF$ hatszög csúcsai általános helyzetűek, az $ABCDE$ ötszög egyértelműen kijelöl egy kúpszeletet, mely illeszkedik a csúcsaira.

Tekintsük az $ABCDE$ ötszöget.



33. ábra

Legyen $P = AB \cap DE$, és vizsgáljuk azt a $\pi: \check{A} \rightarrow \check{E}$ projektivitást, melyre $\pi: x \mapsto ER$, ahol $Q = x \cap CD$ és $R = BC \cap PQ$.

Mivel az A, E és P pontok nem kollineárisak, $\pi(AE) \neq AE$, vagyis π nem perspektivitás, amiért Steiner tétele szerint az $F = x \cap ER$ pontok halmaza egy $\mathcal{K}$ kúpszelet.

Az A, B, C, D és E pontok a $\mathcal{K}$ kúpszeletre esnek, hiszen

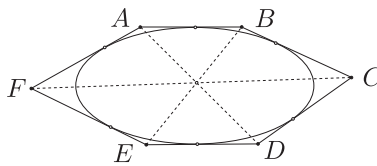
- ha $R = B$ vagy $R = C$, akkor rendre $F = R$ vagy $F = C$,
- ha $Q = D$ vagy $Q = E$, akkor rendre $R \in DE$, tehát rendre $F = D$ vagy $F = E$,
- ha Q a $\mathcal{H}$ kúpszelet A pontjában lévő érintőjének és a DC egyenesnek a metszete, akkor $F = A$.

A kúpszeletek alaptétele szerint a $\mathcal{K}$ kúpszelet tehát éppen az A, B, C, D, E pontok által egyértelműen meghatározott kúpszelet, ami bizonyítja a tételt. ■

Érdemes megemlíteni, hogy eszerint a hatszögek szemközti oldalai metszeteinek kollinearitása pontosan akkor következik be, ha a csúcsok egy egyenespárra vagy kúpszeletre illeszkednek.

Ismét a dualitás jelenik meg Brianchon alábbi tételében, hiszen az pontosan megegyezik azzal, hogy Pascal tételében következetesen pontra cseréljük az egyenest, és egyenesre a pont fogalmait. Fontos megfigyelni, hogy a kúpszeletet ez a csere-bere nem érinti, és a dualizálást egy polaritással végezzük.

Brianchon tétele. *Ha egy hatszög minden oldala egy kúpszelet érintője, akkor a hatszög szemközti csúcspárjaira illeszkedő három egyenes egy pontra illeszkedik.*



32. ábra

Bizonyítás. Legyen ρ a kúpszeletet meghatározó valamely hiperbolikus polaritás. Ez a polaritás a kúpszelet köré írt hatszög

- oldalait ezek érintési pontjaiba, a „csúcsokba” viszi,
- oldalai metszéspontjait az ezen csúcsokat összekötő egyenesbe, az „élekbe” viszi,
- a szemköztes metszéspontokat összekötő egyeneseket pedig ezen szemköztes élek metszéspontjaiba.

Pascal tétele szerint a csúcsok által a kúpszeletbe írt hatszög szemköztes élének metszetei egy egyenesre illeszkednek, ami azt jelenti, hogy ezek ρ melletti ősei, a szemköztes metszéspontokat összekötő egyenesek egy pontra illeszkednek. ■

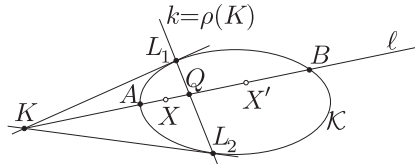
2.11. Kúpszeleteket helyben hagyó transzformációk

Valamely kúpszeletet és belső pontjai halmazát invariánsan hagyó involutív kollineációkat *kúpszeletinvolúciónak* nevezzük. Most két ilyen mutatunk be.

Tétel. Legyen a ρ hiperbolikus polaritás határhalmaza a $\mathcal{K}$ kúpszelet, ennek egy külső pontja K , $k = \rho(K)$, ℓ olyan egyenes a K ponton át, mely különböző A és B pontokban metszi a $\mathcal{K}$ kúpszeletet.

Ekkor a π_{KkAB} perspektivitás involutív és a $\mathcal{K}$ kúpszelet belső, határ- és külső pontjait rendre a $\mathcal{K}$ kúpszelet belső, határ- és külső pontjaiba transzformálja.

Bizonyítás. Mivel $K \notin k$, a π_{KkAB} perspektivitás homológia. Legyen L_1 és L_2 a $k = \rho(K)$ poláris kúpszeletre eső két pontja.



361. ábra

A π_{KkAB} homológia helyben hagyja a KL_1 és KL_2 egyeneseket és az L_1, L_2 pontokat, valamint a $\mathcal{K}$ kúpszelet A pontját a B pontjába viszi, ezért a $\pi_{KkAB}(\mathcal{K})$ kúpszeletnek három pontja és ezek közül kettő érintője egybeesik a $\mathcal{K}$ kúpszeletével, amiből a kúpszeletek alaptétele szerint $\pi_{KkAB}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$ következik.

Mivel a π_{KkAB} homológia fixen tartja az L_1 és L_2 pontokat, miközben felcseréli az A és B pontokat, a $\kappa = \pi_{KkAB} \circ \pi_{KkAB}$ kollineáció fixen tartja az L_1L_2AB teljes négyszöget, amiért a kollineációk alaptétele szerint κ az identikus leképezés, vagyis a π_{KkAB} homológia involutív.

A π_{KkAB} involutív homológia a kúpszelet érintőit a kúpszelet érintőibe viszi, így az érintők metszeteit érintők metszeteibe transzformálja, tehát a külső pontokat külső pontokba képezi. Ez igaz az inverzére is, hiszen az önmaga, így π_{KkAB} bijektív a külső pontok halmazán.

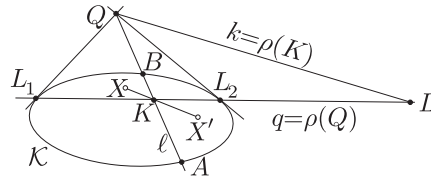
A π_{KkAB} involutív homológia a kúpszelet pontjait a kúpszelet pontjaiba viszi, így a kúpszeletet metsző egyenesek metszeteit kúpszeletet metsző egyenesek metszeteibe transzformálja, tehát a belső pontokat belső pontokba képezi. Ez igaz az inverzére is, így π_{KkAB} bijektív a belső pontok halmazán.

Ezzel a tétel állítását beláttuk. ■

Tétel. Legyen a ρ hiperbolikus polaritás határhalmaza a $\mathcal{K}$ kúpszelet, ennek egy belső pontja K , $k = \rho(K)$, ℓ egy egyenes a K ponton át, mely az A és B pontokban metszi a $\mathcal{K}$ kúpszeletet.

Ekkor a π_{KkAB} perspektivitás involutív és a $\mathcal{K}$ kúpszelet belső, határ- és külső pontjait rendre a $\mathcal{K}$ kúpszelet belső, határ- és külső pontjaiba transzformálja.

Bizonyítás. Mivel $K \notin k$, a π_{KkAB} perspektivitás homológia. Az ℓ egyenes invariáns, így a $Q = \ell \cap k$ pont fix. Ennek $q = \rho(Q)$ polárisa átmegy a K ponton és két pontban – mondjuk L_1 és L_2 – metszi a $\mathcal{K}$ kúpszeletet. Ekkor az $L = q \cap k$ pontra nyilván $L = \rho(\ell) = \rho_Q(K)$, amiért $(L_1 L_2 K L) = -1$.



370. ábra

Emiatt a π_{KkAB} homológia invariánsan tartja az $\{L_1, L_2\}$ ponthalmazt, miközben felcseréli az A és B pontokat, és így a $\kappa = \pi_{KkAB} \circ \pi_{KkAB}$ kollineáció fixen tartja az $L_1 L_2 A B$ teljes négyszöget. Ebből a kollineációk alaptétele szerint következik, hogy κ az identikus leképezés, és eszerint a nem identikus π_{KkAB} homológia involutív. Ennek következtében $\pi_{KkAB}(L_1) = L_2$.

A π_{KkAB} involutív homológia tehát a $\mathcal{K}$ kúpszelet A, L_1, L_2 pontjait a B, L_2, L_1 pontokba viszi, a QL_1, QL_2 érintőit pedig a QL_2, QL_1 érintőibe, amiért a $\pi_{KkAB}(\mathcal{K})$ kúpszeletnek három pontja, és ezek közül kettő érintője egybeesik a $\mathcal{K}$ kúpszeletével, amiből a kúpszeletek alaptétele szerint $\pi_{KkAB}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$ következik.

A π_{KkAB} involutív homológia a kúpszelet érintőit a kúpszelet érintőibe viszi, így az érintők metszeteit érintők metszeteibe transzformálja, tehát a külső pontokat

külső pontokba képezi. Ez igaz az inverzére is, így π_{KkAB} bijektív a külső pontok halmazán.

A π_{KkAB} involutív homológia a kúpszelet pontjait a kúpszelet pontjaiba viszi, így a kúpszeletet metsző egyenesek metszeteit a kúpszeletet metsző egyenesek metszeteibe transzformálja, tehát a belső pontokat belső pontokba képezi. Ez igaz az inverzére is, így π_{KkAB} bijektív a belső pontok halmazán.

Ezzel a tétel állítását beláttuk. ■

Világos, hogy $\pi_{\rho(K)kA_0B_0} = \pi_{\rho(K)kA_1B_1}$, és $\pi_{K\rho(K)A_0B_0} = \pi_{K\rho(K)A_1B_1}$ ha az A_0, B_0 és A_1, B_1 pontpárok is ρ határhalmazának K pontra illeszkedő egyenesére illeszkednek, ezért érdemes bevezetni a $\tau_k := \pi_{\rho(k)kA_0B_0}$ és $\tau_K := \pi_{K\rho(K)A_0B_0}$ jelöléseket.

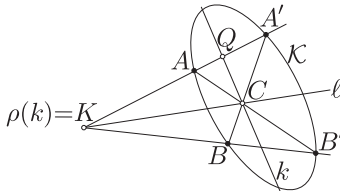
Definíció. A most látott τ_k kúpszeletinvolúciót, ahol k egy metsző egyenes, *hiperbolikus tengelyes tükrözésnek*, a τ_K kúpszeletinvolúciót pedig, ahol K egy belső pont, *hiperbolikus centrális tükrözésnek* vagy *hiperbolikus középpontos tükrözésnek* mondjuk. ▲

A k egyenest a hiperbolikus tengelyes tükrözés tengelyének, a K pontot a hiperbolikus centrális tükrözés középpontjának hívjuk, illetve gyakran ezekre való tükrözésről beszélünk.

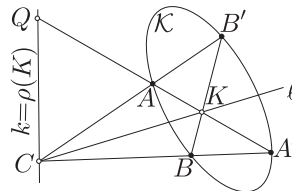
Tétel. Minden kúpszeletinvolúció hiperbolikus tengelyes vagy centrális tükrözés.

Bizonyítás. Legyen κ egy kúpszeletinvolúció. Az érintőket nyilván érintőkre viszi, hiszen a határ- és külső pontokat rendre határ- és külső pontba viszi, és legfeljebb kettő fixpontja lehet a kúpszeleten, mert a kúpszeletet meghatározza három pontja és ezen pontokban vett érintői, tehát ellenkező esetben κ csak identitás lehetne.

Tekintsünk két különböző nem fix pontot a kúpszeletről, mondjuk ezek A és B , és legyen $A' = \kappa(A)$, valamint $B' = \kappa(B)$.



380. ábra



400. ábra

Ekkor a $C_{AB} = AB' \cap BA'$ és a $K_{AB} = AA' \cap BB'$ pont is a κ egy-egy fixpontja, hiszen $\kappa(C_{AB}) = \kappa(A)\kappa(B') \cap \kappa(B)\kappa(A') = A'B \cap B'A$ és $\kappa(K_{AB}) = \kappa(A)\kappa(A') \cap \kappa(B)\kappa(B') = A'A \cap B'B$. Ennek köszönhetően az $\ell = K_{AB}C_{AB}$ egyenes invariáns a κ kollineációra.

Mivel κ involutív és az AA' egyenesen a K_{AB} fixpont, a $\kappa|_{AA'}$ projektivitás hiperbolikus, amiért kettő fix pontja van. Legyen a másik fixpont $Q_{AB} \neq K_{AB}$, melyre természetesen $(K_{AB}Q_{AB}AA') = -1$.

A kúpszelet bármely $X \notin \{A, B, A', B'\}$ pontjára a $K_{AX} = AA' \cap XX'$ és $K_{BX} = BB' \cap XX'$ pont is a κ és a $\kappa|_{XX'}$ fixpontja. Mivel

$$K_{AX} \neq K_{BX} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K_{AX} \neq K_{AB} \Rightarrow K_{AX} = Q_{AB} \\ K_{XA} \neq K_{XB} \Rightarrow K_{XA} = Q_{XB} \\ K_{AB} \neq K_{BX} \Rightarrow Q_{AB} = K_{BX} \\ K_{XA} \neq K_{XB} \Rightarrow Q_{XA} = K_{XB} \end{array} \right\} \Rightarrow Q_{XB} = Q_{AB},$$

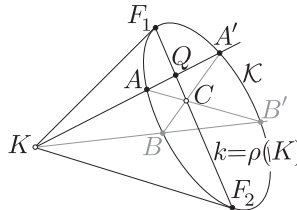
$$\left\{ \begin{array}{l} K_{AX} \neq K_{AB} \Rightarrow K_{AX} = Q_{AB} \\ K_{XA} \neq K_{XB} \Rightarrow K_{XA} = Q_{XB} \\ K_{AB} \neq K_{BX} \Rightarrow Q_{AB} = K_{BX} \\ K_{XA} \neq K_{XB} \Rightarrow Q_{XA} = K_{XB} \end{array} \right\} \Rightarrow Q_{AB} = Q_{XA},$$

alapján $Q_{XB} = Q_{XA}$, amiből $K_{XA} = K_{XB}$, vagyis ellentmondás következik. Tehát kapjuk, hogy $K_{XA} = K_{XB}$ minden X pontra, amiért a továbbiakban a K_{XA} pontokat egyszerűen K jelöli.

Vegyük észre, hogy a κ kollineációra invariáns ℓ egyenesen $\kappa|_{\ell}(\ell \cap AB) = \ell \cap A'B'$, továbbá $\ell \cap AB \neq \ell \cap A'B'$, mert az $AB'BA'$ teljes négyszög átlós pontjai — vagyis $AB \cap \ell$, $A'B' \cap \ell$ és $AB \cap A'B'$ — nem kollineárisak. Eszerint $\kappa|_{\ell}$ nem identikus, tehát hiperbolikus involúció. Mivel κ a kúpszeletet invariánsan hagyja, ebből következik, hogy a K és C_{AB} pontok harmonikusan választják el az ℓ egyenesnek a kúpszelettel vett metszéspontjait, amiért a K és a C_{AB} pont konjugáltak, vagyis $C_{AB} \in k = \rho(K)$, és ennek következtében K pontosan akkor külső vagy belső pont, amikor C_{AB} belső vagy külső pont.

1. eset: Ha a κ kúpszeletinvolúciónak van a kúpszeleten egy F_1 fixpontja. Ekkor a κ kúpszeletinvolúciónak a KF_1 invariáns egyenese, hiszen két fix pontra illeszkedik. A KF_1 egyenesre a kúpszelet más pontja nem eshet, mert az is fixpontja lenne a $\kappa|_{KF_1}$ (nem identikus) involutív projektivitásnak, ezért KF_1 minden pontja külső pont, kivéve az F_1 pontot. Eszerint KF_1 a kúpszelet érintője, és K maga is külső pont, a C_{AB} pedig belső pont, így az F_1C_{AB} invariáns egyenesnek pontosan még egy közös F_2 pontja van a kúpszelettel. Az F_2 is a κ fixpontja, hiszen a kúpszelet és az F_1C_{AB} egyenes is invariáns.

Mivel az F_1 és F_2 fixpontokban vett érintők metszete a K pont, $F_1F_2 = k = \rho(K)$ adódik.

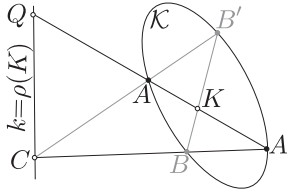


390. ábra

Ha $A' = \kappa(A)$ a kúpszelet egy A pontjára, akkor a KA egyenes is a κ kúpszelet-involúció invariáns egyenese, ezért a $Q_A = KA \cap k$ pont fix. Mivel a k egyenesen így már három fix pont van, $\kappa|_k$ csak az identikus leképezés lehet, vagyis k minden pontja fix.

Eszerint a $\pi_{KkAA'}$ involutív homológia az F_1, F_2, A és A' pontokon ugyanúgy hat, mint a κ kúpszeletinvolúció, ami a kollineációk alaptétele szerint azt jelenti, hogy $\kappa = \pi_{KkAA'}$. Ez bizonyítja a tétel állítását, ha a kúpszeleten van fixpont.

2. eset: Ha a κ kúpszeletinvolúciónak a kúpszeleten nincs fixpontja. A K nem külső pont, mert a kúpszelet rá illeszkedő érintőinek érintési pontjai fixpontokat adnának. Tehát K belső pont, amiért minden AB esetén $C_{AB} \in k = \rho(K)$ külső pont.



400. ábra

Minthogy $C_{AB} \in k$ és a kúpszelet minden A, B pontjára C_{AB} a κ fixpontja, adódik, hogy k minden pontja fix.

Ha $A' = \kappa(A)$ a kúpszelet egy A pontjára, akkor az AA' egyenes invariáns a κ kúpszeletinvolúcióra nézve, ezért a k egyenessel vett $Q_A = KA \cap k$ metszete fix. Az AA' invariáns egyenesen a κ (nem identikus) kúpszeletinvolúciónak pontosan a Q_A és a K a fixpontja, ezért $(KQ_A AA') = -1$ teljesül. Hasonlóan a BB' egyenesen is $(KQ_B BB') = -1$ teljesül, így a $\pi_{KkAA'}$ involutív homológia az A, A', B és B' pontokon ugyanúgy hat, mint a κ kúpszeletinvolúció, ami a kollineációk alaptétele szerint azt jelenti, hogy $\pi = \pi_{KkAA'}$.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

Jegyezzük meg, hogy a bizonyítás közben igazoltak szerint, egy kúpszelet-involúciót meghatároz két különböző pont-képpont pár.

Tétel. Minden kúpszeletet invariánsan hagyó kollineáció legfeljebb két kúpszelet-involúció szorzata.

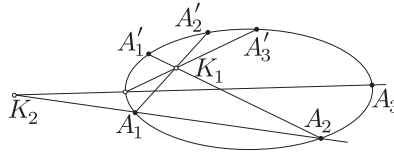
Bizonyítás. Tekintsük a K kúpszeletet invariánsan hagyó κ_0 kollineációt, és az A_i ($i = 1, 2, 3$) pontokat a kúpszeleten, melyek képei az $A'_i = \kappa_0(A_i)$ ($i = 1, 2, 3$) pontok a kúpszeleten. Legyen $A_0 = t_1 \cap t_2$ az A_1 és A_2 pontokban húzott t_1 és t_2 érintők metszete. Ekkor az érintők tartása miatt $A'_0 = \kappa_0(A_0) = \kappa_0(t_1) \cap \kappa_0(t_2)$ éppen az A'_1 és A'_2 pontokban húzott $t'_1 = \kappa_0(t_1)$ és $t'_2 = \kappa_0(t_2)$ érintők metszéspontja.

Mivel egy kúpszeletet három pontja és ezek közül kettőben adott érintője meghatároz, valamint minden kollineációt egyértelműen definiál egy teljes négyszög négy csúcsának képe, elegendő legfeljebb két olyan kúpszeletinvolúciót mutatni, melyek szorzata az A_i pontokat az A'_i pontokba viszi ($i = 1, 2, 3$).

Ha az $A_i A'_i$ egyenesek ($i = 1, 2, 3$) mind egy K ponton mennek át, legyen $k = \rho(K)$ a K polárisa és vegyük észre, hogy a $\pi_{KkA_1A'_1}$ kúpszeletinvolúcióra $\pi_{KkA_1A'_1}(A_i) = A'_i$ teljesül ($i = 1, 2, 3$).

Ha az $A_i A'_i$ egyenesek ($i = 1, 2, 3$) nem egy pontban metszik egymást, akkor legyen $K_1 = A_1 A'_2 \cap A_2 A'_1$, $k_1 = \rho(K_1)$ a K_1 polárisa és $\kappa_1 = \pi_{K_1 k_1 A_1 A'_2}$. Nyilván $\kappa_1(A'_1) = A_2$ és $\kappa_1(A'_2) = A_1$ teljesül.

Legyen $\bar{A}_3 = \kappa_1(A'_3)$, $K_2 = A_1 A_2 \cap A_3 \bar{A}_3$, $k_2 = \rho(K_2)$ a K_2 polárisa és $\kappa_2 = \pi_{K_2 k_2 A_1 A_2}$. Ekkor $\kappa_2(A_1) = A_2$, $\kappa_2(A_2) = A_1$ és $\kappa_2(\bar{A}_3) = A_3$ is teljesül.



410. ábra

Ekkor a $\kappa = \kappa_2 \circ \kappa_1 \circ \kappa_0$ kollineáció az A_1 , A_2 és A_3 pontokat helyben hagyja, és a kúpszeletet invariánsan tartja, amiért a t_1 és t_2 egyenesek invariánsak a κ kollineációra nézve, tehát az $A_0 = t_1 \cap t_2$ pontot is helyben hagyja a κ kollineáció. A kollineációk alaptétele szerint tehát κ az identikus leképezés, ami igazolja a tétel állítását. ■

Bizonyításunk a kívánt eredményen túl az alábbi is igazolja.

Tétel. *A kúpszelet bármely két rendezett ponthármasához pontosan egy olyan kúpszeletet invariánsan hagyó kollineáció létezik, mely az egyik ponthármasat rendezéstartóan a másikba viszi.*

Fontos felfigyelni rá, hogy eszerint a hiperbolikus középpontos tükrözés előáll a középpontján átmenő két olyan hiperbolikus tengelyes tükrözés szorzataként, melyek tengelyei az adott pontban metszik egymást, és átmennek egymás pólusán. Az ilyen két egyenesre vonatkozó tükrözések invariánsan hagyják a másik egyenest, és az ilyen két tükrözés szorzata nem függ a tagok sorrendjétől, ezért ezeket *hiperbolikusan merőleges egyeneseknek* nevezzük.

Definíció. Ha két kúpszeletet metsző egyenes a kúpszeleten metszi egymást, akkor *elpattanó egyenesnek*, vagy *párhuzamos egyenesnek*, vagy *aszimptotikus egyenesnek* nevezzük őket. Ha két kúpszeletet metsző egyenes külső pontban metszi egymást, akkor *ultrapárhuzamosnak* mondjuk őket. ▲

Tétel. *Két ultrapárhuzamos egyeneshez pontosan egy olyan egyenes létezik, amely mind a kettőre merőleges. Ez az egyértelmű közös merőleges egyenes mindkét ultrapárhuzamos egyenest belső pontban metszi.*

Bizonyítás. Tekintsük a $\mathcal{K}$ kúpszeletet és az f és g ultrapárhuzamos egyeneseket.

Mivel két egyenes pontosan akkor merőleges egymásra, ha mindkettő invariáns a másikkra vett tengelyes tükrözésre, és pontosan azon egyenesek invariánsak egy egyenesre való tükrözésre, amelyek illeszkednek a tükrözési tengely pólusára, két egyenes akkor és csak akkor merőleges, ha illeszkednek egymás pólusára.

Egy egyenes pólusát éppen a határpontjaiban felvett érintők metszete adja, így a fentiek értelmében két ultrapárhuzamos egyenest pontosan az az egyenes metsz egyszerre merőlegesen, amely átmegy az ultrapárhuzamos egyenesek pólusán.

Az ultrapárhuzamos egyenesek pólusait összekötő egyenes a két ultrapárhuzamos egyenes metszéspontjának polárisa. Mivel a két ultrapárhuzamos egyenes metszéspontja külső pont, a polárisa belső pontban metszi a két ultrapárhuzamos egyenest. ■

Projektív sík metrizálásai

A projektív sík pontjai bármely részhalmazának pontpárjain értelmezett d valós függvényeket *metrikának* nevezzük, ha

(M₁) minden P, Q pontpárra teljesül, hogy

(M'₁) $d(P, Q) \geq 0$ (ez a pozitivitás), és

(M''₁) egyenlőség pontosan akkor érvényes, ha $P = Q$ (ez a definités);

(M₂) $d(P, Q) = d(Q, P)$, vagyis a függvény szimmetrikus (ez a szimmetria);

(M₃) minden P, Q, R ponthármasra teljesül, hogy

(M'₃) a $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$ (ez a háromszög-egyenlőtlenség vagy szub-additivitás).

Ilyenkor a $d(P, Q)$ számot a P, Q pontok *távolságának* mondjuk. Egy ilyen metrikát *projektívnek* nevezünk, ha a következő is teljesül:

(M''₃) $d(P, R) = d(P, Q) + d(Q, R)$ pontosan akkor áll fenn, ha a pontok kollineárisak és $d(P, R) \geq \max\{d(P, Q), d(Q, R)\}$.

Ezt a feltételt additivitásnak nevezzük, mely azt a hétköznapi megfigyelést fogalmazza meg, hogy „két pont között a legrövidebb út az egyenes”.

Rendkívül sokféle projektív metrika található a projektív sík különféle részhalmazain (erről továbbiak a Függelékben), azonban Beltrami tétele [Kurusa: Bevezetés a differenciálgeometriába] azt bizonyítja, hogy csak három lényegesen különböző Riemann-féle projektív metrika létezik, mégpedig az elliptikus, euklidészi és Bolyai-féle.

Az alábbiakban a többi között bemutatjuk a tükrözéses projektív metrikákat, melyek éppen az elliptikus, euklidészi és Bolyai-féle geometriát adják. Emlékeztünk, hogy az affin síkon egy metrikát *tükrözésesnek* nevezünk [Kurusa: Euklidészi geometria], ha minden egyeneshez létezik olyan izometria, amely az egyenes minden egyes pontját helyben hagyja, az egyenes két félsíkjának pontjait viszont felcseréli.

3.1. Invariáns metrikák egyeneseken

Az egyenes adott részhalmazát invariánsan hagyó projektivitásokra invariáns metrizálásokat mutatjuk be. Az $(ABXY)(ABYZ) = (ABXZ)$ formula azt sugalja, hogy ilyen metrikát a kettősvizonyból egy alkalmas formulával kaphatunk.

Tétel. (Elliptikus metrizálás.) *Ha π az e egyenesen elliptikus projektivitás, akkor a $d: e \times e \rightarrow [0, \pi/2]$ függvény, ahol $\operatorname{tg}(d(X, Y)) = \sqrt{-(X\pi(X)Y\pi(Y))}$, egy metrika.*

Bizonyítás. A π hatását jelöljük vesszővel, vagyis például $\pi(X) = X'$.

Az M_1 feltételei nyilván teljesülnek.

Az M_2 is teljesül, hiszen

$$\operatorname{tg}(d(X, Y)) = \sqrt{-(XX'YY')} = \sqrt{-(YY'XX')} = \operatorname{tg}(d(Y, X)).$$

Mielőtt az additivitás M_3'' követelményét igazolnánk, vegyük észre az

$$\begin{aligned} (YY'ZZ') &= (YY'ZX)(YY'XX')(YY'X'Z') \\ &= (XX'YY')(YY'ZX)(Y'YXZ) = (XX'YY')(YY'ZX)^2, \\ (YY'XX') &= (ZZ'YY')(YY'XZ)^2 = (XX'ZZ')(ZZ'YX)^2(YY'XZ)^2, \\ (YY'ZZ') &= (ZZ'XX')(XX'YZ)^2(YY'ZX)^2, \end{aligned}$$

és az

$$\begin{aligned} (XX'YZ)(YY'ZX)(ZZ'XY) &= (XY'YZ)(Y'X'YZ)(1 - (YZY'X))(Z'ZX'Y') \\ &= (Y'X'YZ)((XY'YZ) - 1)(ZZ'Y'X') = -(Y'X'YZ')(XY'YZ) \\ &= -(Y'X'YZ')(X'Y'YZ') = -1, \end{aligned}$$

valamint az

$$\begin{aligned} (YZX'Y')((ZZ'YX)(YY'XZ) + (XX'YZ)(YY'ZX)) &= -(YZX'Y')(XX'YZ) + (XY'YZ)(YY'ZX) \\ &= -(XY'YZ) + (XY'YZ)(YY'ZX) \\ &= (XY'YZ)[(YY'ZX) - 1] = -(XY'YZ)(YZY'X) = -1 \end{aligned}$$

azonosságokat.

Figyeljük meg, hogy előbbi miatt az $(XX'YZ)$, $(YY'ZX)$ és $(ZZ'XY)$ ket-tősvviszonyok közül legalább egyik negatív. Ha kettő negatív lenne, akkor ugyanemi-att mindhárom negatív, így utolsó egyenletünkéből $(YZX'Y') < 0$ adódik, amiből ciklikus permutációval kapjuk az $(ZXY'Z') < 0$ egyenlőtlenséget. Utóbbi egyenlőt-lenségre a π projektivitást alkalmazva $(Z'X'YZ) < 0$ következik, amit az elsővel összeszorozva az $(Z'Y'YZ) = (YZX'Y')(Z'X'YZ) > 0$ ellentmondásra jutunk, vagyis a $(XX'YZ)$, $(YY'ZX)$ és $(ZZ'XY)$ kettősvviszonyok között pontosan egy negatív és kettő pozitív van.

Tegyük fel, hogy $(XX'YZ) > 0$, $(YY'ZX) < 0$ és $(ZZ'XY) > 0$. Ekkor

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{tg}(d(X, Y) + d(Y, Z)) \\
 &= \frac{\operatorname{tg}(d(X, Y)) + \operatorname{tg}(d(Y, Z))}{1 - \operatorname{tg}(d(X, Y)) \operatorname{tg}(d(Y, Z))} = \frac{\sqrt{-(XX'YY') + \sqrt{-(YY'ZZ')}}}{1 - \sqrt{(XX'YY')(YY'ZZ')}} \\
 &= \sqrt{-(ZZ'XX')} \frac{-(ZZ'YX)(YY'XZ) - (XX'YZ)(YY'ZX)}{1 - (XX'YY')(YY'ZX)} \\
 &= \operatorname{tg}(d(X, Z)) \frac{(ZZ'YX)(YY'XZ) + (XX'YZ)(YY'ZX)}{-(YY'XZ)} = \operatorname{tg}(d(X, Z)),
 \end{aligned}$$

ami az additivitást igazolja. ■

A következő kettő metrizálás már nem az egész egyenesen értelmezett.

Tétel. (Parabolikus metrizálás.) Legyen E_- és E_+ az e egyenes két különböző pontja, O és I ezektől különböző pontok úgy, hogy $(E_-E_+OI) = -1$ és bármely X pontra jelölje X' azt a pontot az e egyenesen, amelyre $(E_-E_+XX') = -1$, ha $Y \notin \{E_-, E_+\}$ és E_- illetve E_+ , ha rendre $Y = E_-$ illetve $Y = E_+$.

Ekkor a $d: e_I \times e_I \rightarrow \mathbb{R}_{0 \leq}$ függvény, ahol $d(X, Y) = |\delta(Y) - \delta(X)|$ és $\delta(X) = \operatorname{sign}(OIE_+X)\sqrt{(OIXX')}$, egy metrika az $e_I = e \setminus \{I\}$ halmazon.

Bizonyítás. Az M'_1 triviális, de az M'_1 feltétel is teljesül, hiszen $\delta(X) = \delta(Y)$ alapján $\operatorname{sign}(OIE_+X) = \operatorname{sign}(OIE_+Y)$ és $(OIXX') = -1 = (OIYY')$, amiből $|(OIXE_+)| = |(OIYE_+)|$, majd $X = Y$ következik.

Az M_2 is teljesül, hiszen $d(X, Y) = |\delta(X) - \delta(Y)| = |\delta(Y) - \delta(X)| = d(Y, X)$.

Mielőtt az additivitás M'_3 feltételét igazolnánk, vegyük észre, hogy tetszőleges X és Y pontokra

$$\frac{\delta(Y)}{\delta(X)} = \frac{\operatorname{sign}(OIE_+X) |(OIYE_+)|}{\operatorname{sign}(OIE_+Y) |(OIXE_+)|} = \operatorname{sign}(OIYX) |(OIYX)| = (OIYX),$$

az $(XZYI)$, $(ZYXI)$ és $(YXZI)$ kettősviszonyok között pedig van negatív, hiszen

$$\begin{aligned}
 (XZYI)(ZYXI)(YXZI) &= (XZYI)(ZYXI)(1 - (YZXI)) \\
 &= (XZYI)((ZYXI) - 1) = -(XZYI)(ZXYI) = -1.
 \end{aligned}$$

Az additivitás bizonyításához legyen mondjuk $(XZYI) < 0$. Ekkor

$$\begin{aligned}
 & (\delta(Y) - \delta(X))(\delta(Z) - \delta(Y)) \\
 &= \delta^2(Y)(1 - (OIXY))((OIZY) - 1) = -\delta^2(Y)(OXIY)(OZIY) \\
 &= -\delta^2(Y)(ZXYI)(OZIY)^2 > 0,
 \end{aligned}$$

amiért

$$d(X, Y) + d(Y, Z) = |\delta(Y) - \delta(X)| + |\delta(Z) - \delta(Y)| = |\delta(Z) - \delta(X)| = d(X, Z),$$

ami igazolja a tételt. ■

Vegyük észre, hogy a bizonyításban használt három kettősviszony közül eredményünk alapján pontosan egy a negatív, és azt is figyeljük meg, hogy a most definiált d nem metrika a teljes egyenesen, mert $\delta(O) = 0$ és $|\delta(I)| = |\sqrt{|(OIO)|}| = \infty$, amiért $d(O, I) = \infty$.

Tétel. (Hiperbolikus metrizálás.) *Minden e egyenes tetszőleges $A \neq B$ pontjai által definiált $d: e \times e \rightarrow \mathbb{R}_{0\leq}$ függvény, ahol $d_{AB}(X, Y) = |\ln(ABXY)|$, egy metrika az AB mindkét szomszédossági halmazán.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy bármely szomszédossági osztály két X, Y elemére $(ABXY) > 0$, d_{AB} jól definiált.

Az M_1 feltételei nyilván teljesülnek.

Az M_2 is teljesül, hiszen $d(X, Y) = |\ln(ABXY)| = |-\ln(ABYX)| = d(Y, X)$.

Az M_3 igazolásához tekintsük mondjuk az e_{AB}^+ szomszédossági osztályt, és legyen $X, Y, Z \in e_{AB}^+$. Ekkor a $d(X, Y)$, $d(Y, Z)$ és $d(Z, X)$ nem negatív számok között van olyan, amely egyik másíknál sem kisebb. Mondjuk legyen $d(Z, X)$ ilyen.

Ha $\ln(ABXY)$ és $\ln(ABYZ)$ különböző előjelűek lennének, akkor a

$$\begin{aligned} d(X, Z) &= |\ln(ABXZ)| = |\ln(ABXY) + \ln(ABYZ)| \\ &\leq \max\{|\ln(ABXY)|, |\ln(ABYZ)|\} = \max\{d(X, Y), d(Y, Z)\} \end{aligned}$$

ellentmondáshoz jutnánk, ezért $\ln(ABXY)$ és $\ln(ABYZ)$ azonos előjelű.

A kettősviszonyok szorzásának azonossága alapján

$$\begin{aligned} d(X, Y) + d(Y, Z) &= |\ln(ABXY)| + |\ln(ABYZ)| \\ &= |\ln(ABXY) + \ln(ABYZ)| = |\ln(ABXZ)| = d(X, Z) \end{aligned}$$

igazolja a tételt. ■

Figyeljük meg, hogy a most definiált d nem metrika a teljes egyenesen, mert ha $(ABXY) = -1$, akkor egyrészt $X \neq Y$, másrészt $d(X, Y) = 0$, tehát sérül a definitétség feltétele.

3.2. Elliptikus metrizálás

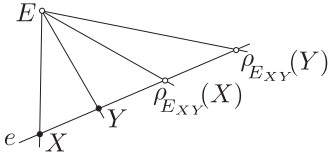
Ha adott egy ρ elliptikus polaritás, akkor tudjuk, hogy minden e egyenes bármely $F \neq G$ pontjaira $(F\rho_E(F)G\rho_E(G)) < 0$. A formulák rövidítése és áttekinthetőbbé

tétele érdekében innentől egy e egyenes $H \in e$ pontja $\rho_E(H)$ képének magadására a H'_e illetve a H' jelölést használjuk, ha ez nem okoz félreértést.

Elliptikus eljárás. Legyen ρ egy elliptikus polaritás.

Bármely $X \neq Y$ pontpárra legyen e az X, Y pontok közös egyenese, ennek pólusa pedig E . A $d: \mathbb{P}^2 \rightarrow [0, r\pi/2]$ függvényt a

$$\operatorname{tg}(d(X, Y)/r) = \sqrt{-(XX'YY')}$$



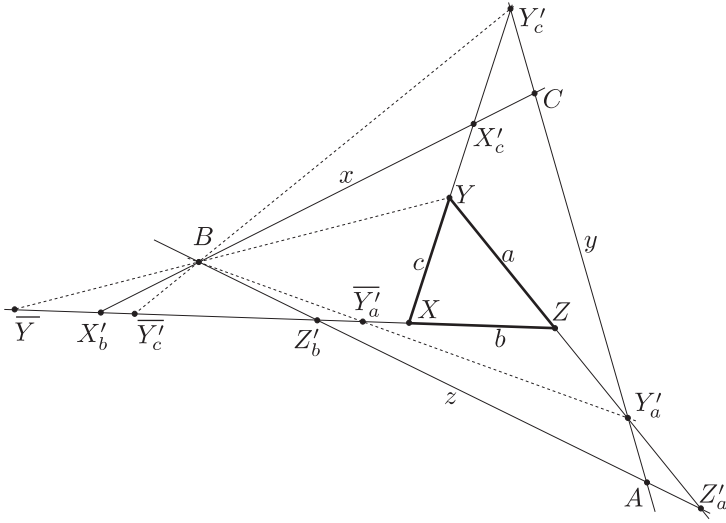
010. ábra

képlettel definiáljuk, ahol $r > 0$ tetszőleges konstans.



Tétel. Az elliptikus eljárással definiált d függvény egy metrika.

Bizonyítás. Minthogy a megadott metrika az egyeneseket elliptikus metrikával látja el, most elegendő az (M'_3) háromszög-egyenlőtlenséget igazolni.



020. ábra

Tekintsük a nem egy egyenesre eső X, Y és Z pontokat rendre az x, y és z polárisaikkal. Az X, Y és Z pontok által meghatározott háromszög szemben fekvő oldalegyenesei legyenek rendre a, b és c , melyek pólusai rendre az A, B és C pontok.

Az X, Y, Z pontok polárisainak metszetét valamely a, b vagy c oldallal jelölje a pont betűje vesszővel és alsó indexben az oldal jelével, vagyis például $Y'_a = y \cap a$, $X'_c = x \cap c$ stb. Bármely pont és a B pont közös egyenesének metszetét a b egyenessel a pont fölé húzott vonalka jelöli, vagyis például $\bar{Y}'_a = b \cap BY'_a$ stb.

A B pontra vett perspektivitás miatt a $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ azonosság felhasználásával

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}\left(\frac{d(X, Y) + d(Y, Z)}{r}\right) \\ &= \frac{\sqrt{-(XX'_cYY'_c)} + \sqrt{-(YY'_aZZ'_a)}}{1 - \sqrt{(XX'_cYY'_c)(YY'_aZZ'_a)}} = \frac{\sqrt{-(XX'_bYY'_c)} + \sqrt{-(YY'_aZZ'_b)}}{1 - \sqrt{(XX'_bYY'_c)(YY'_aZZ'_b)}} \\ &= \frac{\sqrt{-(XX'_bYY'_b)(XX'_b\bar{Y}'_b\bar{Y}'_c)} + \sqrt{-(\bar{Y}\bar{Y}'_bZZ'_b)(\bar{Y}'_b\bar{Y}'_aZZ'_b)}}{1 - \sqrt{(XX'_b\bar{Y}\bar{Y}'_b)(XX'_b\bar{Y}'_b\bar{Y}'_c)(\bar{Y}\bar{Y}'_bZZ'_b)(\bar{Y}'_b\bar{Y}'_aZZ'_b)}} \\ &= \frac{\alpha\sqrt{-(XX'_b\bar{Y}\bar{Y}'_b)} + \beta\sqrt{-(\bar{Y}\bar{Y}'_bZZ'_b)}}{1 - \alpha\beta\sqrt{(XX'_b\bar{Y}\bar{Y}'_b)(\bar{Y}\bar{Y}'_bZZ'_b)}} \end{aligned}$$

ahol $\bar{Y}'_b = \rho_B(\bar{Y})$, $\alpha = \sqrt{(XX'_b\bar{Y}'_b\bar{Y}'_c)}$ és $\beta = \sqrt{(\bar{Y}'_b\bar{Y}'_aZZ'_b)}$ (a négyzetgyök alatt nem negatív számok vannak, hiszen ezek szorzótényezője a képletbeni négyzetgyök alatt nem negatív).

Vegyük észre, hogy $\bar{Y}'_b = Y'_b$, mert

$$\begin{aligned} \bar{Y}'_b &= \rho_B(\bar{Y}) = \rho_B(BY \cap b) = \rho(BY \cap b) \cap b = \rho(BY)\rho(b) \cap b \\ &= (\rho(B) \cap \rho(Y))B \cap b = (b \cap y)B \cap b = Y'_bB \cap b = Y'_b. \end{aligned}$$

Az additivitásnál már láttuk, hogy $(\bar{Y}\bar{Y}'_bXZ) > 0$, $(ZZ'_b\bar{Y}X) < 0$ és $(XX'_b\bar{Y}Z) > 0$ miatt

$$\operatorname{tg}\left(\frac{d(X, Z)}{r}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{d(\bar{Y}, X) - d(Z, \bar{Y})}{r}\right) = \frac{\sqrt{-(XX'_b\bar{Y}\bar{Y}'_b)} - \sqrt{-(\bar{Y}\bar{Y}'_bZZ'_b)}}{1 + \sqrt{(XX'_b\bar{Y}\bar{Y}'_b)(\bar{Y}\bar{Y}'_bZZ'_b)}},$$

az $u = \sqrt{-(XX'_b\bar{Y}\bar{Y}'_b)}$ és $v = \sqrt{-(\bar{Y}\bar{Y}'_bZZ'_b)}$ jelöléseket bevezetve

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}\left(\frac{d(X, Y) + d(Y, Z)}{r}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{d(X, Z)}{r}\right) \\ &= \frac{\alpha u + \beta v}{1 - \alpha\beta uv} - \frac{u - v}{1 + uv} = \frac{(\alpha u + \beta v)(1 + uv) + (1 - \alpha\beta uv)(u - v)}{(1 - \alpha\beta uv)(1 + uv)} \\ &= \frac{\alpha u + \beta v + \alpha u^2 v + \beta uv^2 + u - v - \alpha\beta u^2 v + \alpha\beta uv^2}{(1 - \alpha\beta uv)(1 + uv)} \\ &= \frac{(\alpha + 1)u(1 + \beta v^2) + (\beta - 1)v(1 - \alpha u^2)}{(1 - \alpha\beta uv)(1 + uv)} \end{aligned}$$

adódik.

Mivel $\alpha, \beta, u, v > 0$ és $1 - \alpha\beta uv = \frac{\alpha u + \beta v}{\operatorname{tg}(\frac{d(X,Y)+d(Y,Z)}{r})} > 0$ valamint $1 - uv = \frac{u+v}{\operatorname{tg}(\frac{d(X,Z)}{r})} > 0$, a háromszög-egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha az $(\alpha + 1)u(1 + \beta v^2) + (\beta - 1)v(1 - \alpha u^2)$ számláló pozitív, ami

$$\begin{aligned} 1 - \beta^2 &= 1 - (\overline{Y'_b Z'_a} Z'_b) = (Z \overline{Y'_b Z'_a}) = (Z Y'_b Z'_b \overline{Y'_a}) > 0 \\ 1 - \alpha^2 u^4 &= 1 - (X X'_b \overline{Y'_b Y'_c})(X X'_b \overline{Y Y'_b})^2 = 1 - (X X'_b \overline{Y Y'_c})(X X'_b \overline{Y Y'_b}) \\ &= 1 - (X X'_c Y Y'_c)(X X'_b \overline{Y Y'_b}) > 1 \end{aligned}$$

alapján bizonyított. Az egyenlőség kizárt, mert abban az esetben $1 = \beta^2$ miatt $Y'_b = \overline{Y'_a}$ vagy $Z = Z'_b$, amiből $Z \in z$ következne, holott elliptikus polaritás esetében nincsenek önkonjugált pontok.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

A d metrikával ellátott $\mathbb{P}^2$ síkot *elliptikus síknak* nevezzük. A d metrikában rögzített $r > 0$ valós számot az *elliptikus sík sugarának* mondjuk.

Az alábbi eredmény azt mutatja, hogy a kettősviszony és a metrika kölcsönösen meghatározza egymást.

Tétel. Ha a kollineáris A, B, C, D pontnégyesre $(ABCD) > 0$, akkor

$$(ABCD) = \frac{\sin(d(A, C)/r)}{\sin(d(C, B)/r)} : \frac{\sin(d(A, D)/r)}{\sin(d(D, B)/r)}.$$

Bizonyítás. Felhasználva a $\sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ összefüggést az alábbi levezetés bizonyítja az állítást.

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\sin(\frac{d(A,C)}{r})}{\sin(\frac{d(C,B)}{r})} : \frac{\sin(\frac{d(A,D)}{r})}{\sin(\frac{d(D,B)}{r})} \right)^2 \\ &= \frac{\frac{\operatorname{tg}^2(d(A,C)/r)}{1 + \operatorname{tg}^2(d(A,C)/r)}}{\frac{\operatorname{tg}^2(d(C,B)/r)}{1 + \operatorname{tg}^2(d(C,B)/r)}} : \frac{\frac{\operatorname{tg}^2(d(A,D)/r)}{1 + \operatorname{tg}^2(d(A,D)/r)}}{\frac{\operatorname{tg}^2(d(D,B)/r)}{1 + \operatorname{tg}^2(d(D,B)/r)}} = \frac{\frac{-(AA'CC')}{1 - (AA'CC')}}{\frac{-(CC'BB')}{1 - (CC'BB')}} : \frac{\frac{-(AA'DD')}{1 - (AA'DD')}}{\frac{-(DD'BB')}{1 - (DD'BB')}} \\ &= \frac{(AA'CC')(1 - (CC'BB'))(1 - (AA'DD'))(DD'BB')}{(1 - (AA'CC'))(CC'BB')(AA'DD')(1 - (DD'BB'))} \\ &= \frac{(AA'DD')(CC'B'B)(1 - (CC'BB'))(1 - (AA'DD'))}{(AA'C'C)(DD'B'B)(1 - (AA'CC'))(1 - (DD'BB'))} \\ &= \frac{((CC'B'B) - 1)((AA'DD) - 1)}{((AA'C'C) - 1)((DD'B'B) - 1)} = \frac{(CB'C'B)(AD'A'D)}{(AC'A'C)(DB'D'B)} \\ &= \frac{(CB'C'B)(AD'A'D)}{(CA'C'A)(BD'B'D)} = \frac{(CA'C'B)(A'B'C'B)}{(CA'C'A)} \cdot \frac{(ABA'D)(BD'A'B')}{(BD'B'D)} \\ &= (CA'AB)(A'B'C'B) \cdot (ABA'D)(BD'A'B') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (CA'AB)(ABA'D)(A'B'C'B)(BD'A'B') = (ABCD)(A'B'C'D') \\
&= (ABCD)^2.
\end{aligned}$$

■

A $\rho = (\omega \circ \kappa, \kappa^{-1} \circ \omega)$ elliptikus polaritás előállításban a κ mátrix elliptikus, vagyis sajátvektorainak ortonormált $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ bázisában $\begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_3 \end{pmatrix}$ alakú, ahol $\kappa_1\kappa_2, \kappa_1\kappa_3 > 0$. Ezzel definiálhatjuk azt az euklidészi metrikát az affin téren, melyre a belső szorzás $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_\kappa = \sum_{i=1}^3 |\kappa_i| u_i v_i$, ahol $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{b}_i$ és $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{b}_i$. Az így nyert tér izometrikusan izomorf a többi euklidészi térrel, ezért $\mathcal{I}_1$ egységgömbje is izometrikusan izomorf a többi euklidészi tér egységgömbjével. Jelölje eme metrika egységgömbjének $r > 0$ valós számmal vett többszörösét $\mathcal{I}_r$, mely persze a szokásos $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^3 u_i v_i$ szorzásból nyert metrikában ellipszoid, mégis az origón átmenő síkokkal vett metszeteit főköröknek nevezzük.

Tétel. Az $\mathcal{I}_r$ ellipszoid $\mathbf{F}: \mathcal{I}_r \rightarrow \mathbb{E}_r$ leképezése, melyre $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = [\mathbf{u}]$, pontosan az átellenes pontokat viszi azonos pontba, szürjektív, a főköröket egyenesbe viszi és izometrikus.

Bizonyítás. Tételünk egyetlen korábban még nem bizonyított állítása az, hogy $\mathbf{F}$ izometrikus.

Ennek belátásához először az elipszoidon vizsgáljuk a $d_{\mathcal{I}}$ távolságot. Erre persze $d_{\mathcal{I}}(U, V) = r \arccos \left| \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_\kappa}{|\mathbf{u}|_\kappa |\mathbf{v}|_\kappa} \right|$ érvényes, ahol $[U] = [\mathbf{u}]$, $[V] = [\mathbf{v}]$ és $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vektorok. Ebből

$$\operatorname{tg}^2 \left(\frac{d_{\mathcal{I}}(U, V)}{r} \right) = \frac{\sin^2(d_{\mathcal{I}}(U, V)/r)}{\cos^2(d_{\mathcal{I}}(U, V)/r)} = \frac{|\mathbf{u}|_\kappa^2 |\mathbf{v}|_\kappa^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_\kappa^2}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_\kappa^2} = \frac{|\mathbf{u}|_\kappa^2 |\mathbf{v}|_\kappa^2}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_\kappa^2} - 1,$$

adódik. Az elliptikus $d_{\mathbb{E}}$ távolságra

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg}^2 \left(\frac{d_{\mathbb{E}}(U, V)}{r} \right) \\
&= -(U \rho_W(U) V \rho_W(V)) = -([\mathbf{u}][\rho_W(U)][\mathbf{v}][\rho_W(V)]) \\
&= -([\mathbf{u}][\kappa(\mathbf{u}) \times \mathbf{w}][\mathbf{v}][\kappa(\mathbf{v}) \times \mathbf{w}]) = ([\mathbf{u}][\mathbf{v}][\kappa(\mathbf{u}) \times \mathbf{w}][\kappa(\mathbf{v}) \times \mathbf{w}]) - 1
\end{aligned}$$

adódik, ahol $[W] = [\mathbf{w}]$ és $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. A kifejtési tétel alapján ugyanakkor

$$\begin{aligned}
&[\kappa(\mathbf{u}) \times \mathbf{w}] \ni \kappa(\mathbf{u}) \times \mathbf{w} = \kappa(\mathbf{u}) \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = -\langle \mathbf{u}, \kappa(\mathbf{u}) \rangle \mathbf{v} + \langle \mathbf{v}, \kappa(\mathbf{u}) \rangle \mathbf{u}, \\
&[\kappa(\mathbf{v}) \times \mathbf{w}] \ni \kappa(\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \kappa(\mathbf{v}) \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = -\langle \mathbf{v}, \kappa(\mathbf{v}) \rangle \mathbf{u} + \langle \mathbf{u}, \kappa(\mathbf{v}) \rangle \mathbf{v},
\end{aligned}$$

amiért

$$\begin{aligned}
&([\mathbf{u}][\mathbf{v}][\kappa(\mathbf{u}) \times \mathbf{w}][\kappa(\mathbf{v}) \times \mathbf{w}]) \\
&= \frac{-\langle \mathbf{u}, \kappa(\mathbf{u}) \rangle}{\langle \mathbf{v}, \kappa(\mathbf{u}) \rangle} : \frac{\langle \mathbf{u}, \kappa(\mathbf{v}) \rangle}{-\langle \mathbf{v}, \kappa(\mathbf{v}) \rangle} = \frac{\langle \mathbf{u}, \kappa(\mathbf{u}) \rangle \langle \mathbf{v}, \kappa(\mathbf{v}) \rangle}{\langle \mathbf{v}, \kappa(\mathbf{u}) \rangle \langle \mathbf{u}, \kappa(\mathbf{v}) \rangle} = \frac{|\mathbf{u}|_\kappa^2 |\mathbf{v}|_\kappa^2}{(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_\kappa)^2}
\end{aligned}$$

azt mutatja, hogy $\operatorname{tg}^2 \left(\frac{d_{\mathbb{A}}(U,V)}{r} \right) = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{d_{\mathbb{E}}(U,V)}{r} \right)$, ahogy a tétel állította. ■

Tételünkéből következik, hogy az elliptikus metrika tükrözéses.

3.3. Parabolikus metrizálás

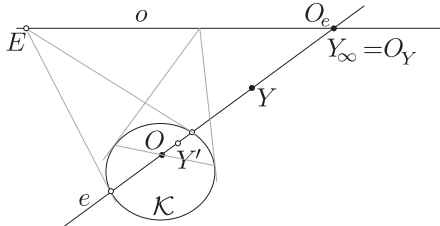
Legyen o egy projektív egyenes, $\mathbb{A}$ pedig a nem erre eső pontok halmaza. A projektív síkunk létrehozásának következtében nyilvánvaló, hogy $\mathbb{A}$ egy Desargues-típusú affin sík, amiben már van értelme az $\overline{XZ}$ nyílt szakaszcól és az egyeneseken rendezésről beszélni.

A projektív síkunk és az affin (euklidészi) sík közötti jól ismert kapcsolat alapján beszélhetünk az $\mathbb{A}$ affin sík részhalmazainak konvexitásáról. A konvexitás összes tulajdonsága jól kiolvasható az affin és projektív sík kapcsolatából, a részletek vizsgálata az olvasóra marad.

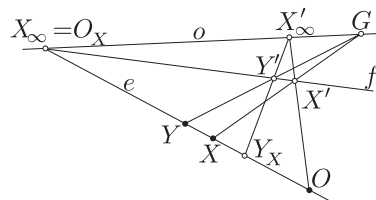
Papposz tétele alapján az $\mathbb{A}$ affin sík részhalmazainak középpontos szimmetriáját is meg tudjuk fogalmazni: az $\mathbb{A}$ affin sík egy $\mathcal{K}$ ponthalmazát az O pontra nézve középpontosan szimmetrikus mondunk, amennyiben $X \in \mathcal{K}$ akkor és csak akkor, ha $Y \in \mathcal{K}$, ahol $(OPXY) = -1$ és $P = o \cap XY$. Ez a fogalom egybeesik az affin síkon megszokott középpontos szimmetria fogalmával, melynek bizonyítása az olvasóra marad.

Ha adott egy ρ hiperbolikus polaritás, melynek nincs fixpontja az o egyenesen, akkor az általa meghatározott kúpszelet belső- és határpontjaival együtt korlátos zárt konvex ponthalmazt alkot, mely az o egyenes O pólusára nézve középpontosan szimmetrikus.

Parabolikus eljárás. Legyen adott egy o egyenes és ennek $\mathbb{A}$ affin síkjában egy középpontosan szimmetrikus, szigorúan konvex $\mathcal{K}$ ponthalmaz, melynek szimmetriaközéppontja az O pont. Legyen minden e egyenesre $O_e = o \cap e$, minden $X \in \mathbb{A} \setminus \{O\}$ pontra $X_\infty = O_{OX}$, és legyen $\{K_X, K'_X\} = OX \cap \partial\mathcal{K}$ az OX metszete a $\mathcal{K}$ határával.



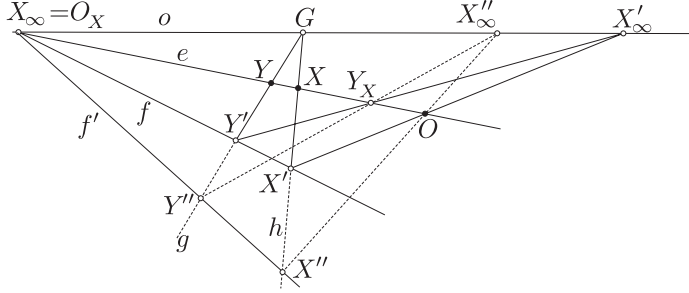
010. ábra



011. ábra

Tekintsük a tetszőleges $X \neq O$ és Y pontokat az $\mathbb{A}$ affin síkon. Ha $Y \notin OX$, legyen $Y_X = X_\infty Y \cap OO_{XY}$. Ha $Y \in OX$, akkor válasszunk egy olyan $f \not\equiv o$ egyenest,

Most az f választásától való függetlenséget igazoljuk. A GY egyenest jelölje g , az GX egyenest pedig h , és vegyünk egy f' egyenest az X_∞ ponton át, melynek metszete a g és h egyenessel rendre Y'' és X'' .



013. ábra

Vegyük észre, hogy $\pi_{Y_X go}$ és $\pi_{Oho} \circ \pi_{X_\infty gh}$ a G , Y és Y' pontokat rendre a G , X és X'_∞ pontokba képezi. A projektivitások alaptétele szerint tehát $\pi_{Y_X go} = \pi_{Oho} \circ \pi_{X_\infty gh}$, amiért $X''_\infty = \pi_{Oho}(X'') = \pi_{Oho} \circ \pi_{X_\infty gh}(Y'') = \pi_{Y_X go}(Y'')$, vagyis X''_∞ , Y_X és Y'' kollineárisak, tehát Y_X független az f választásától. ■

A következő lemma a norma homogenitásának és a párhuzamos szelők tételének analóg állítása a parabolikus eljárással definiált d függvényre.

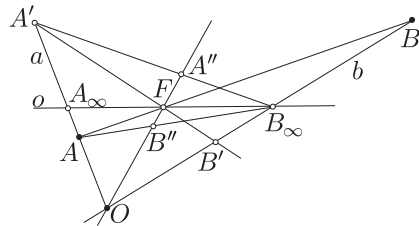
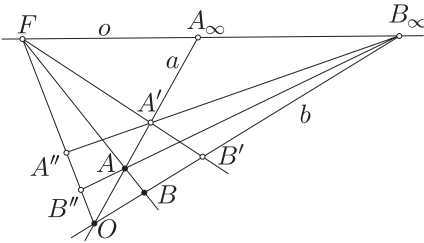
Lemma. *A parabolikus eljárásban definiált δ függvényre*

- (1) $\delta(X) = \delta(Y)|(OX_\infty XY)|$, ahol $X \in \mathbb{A}$, $X \neq O$ és $Y \in OX_\infty$, és
- (2) (párhuzamos szelők tétele) $\frac{\delta(A')}{\delta(A)} = \frac{\delta(B')}{\delta(B)} = \frac{d(A', B')}{d(A, B)}$ akkor és csak akkor, ha $AB \cap A'B' \in o$, ahol $A, B \in \mathbb{A} \setminus \{O\}$, $A' \in OA_\infty$, $B' \in OB_\infty$, $(OA_\infty AA')(OB_\infty BB') > 0$.

Bizonyítás. Az (1) állítást az egyenesek parabolikus metrizálásánál már láttuk.

A (2) állítás bizonyításához legyen $a = AA'$, $b = BB'$, $F = AB \cap A'B'$, $A'' = FO \cap B_\infty A'$ és $B'' = FO \cap B_\infty A$.

Először tegyük fel, hogy $F \in o$.



014. ábra

Az (1) állítás, valamint a B_∞ és F pontokból vett perspektivitások alapján

$$\frac{d(A', B')}{d(A, B)} = \frac{\delta(A'')}{\delta(B'')} = |(OF A'' B'')| = |(OA_\infty A' A)| = \frac{\delta(A')}{\delta(A)} = |(OB_\infty B' B)| = \frac{\delta(B')}{\delta(B)}$$

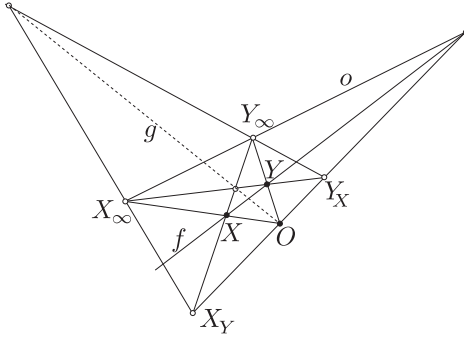
igazolja az állítás „akkor” részét.

A visszafelé irányú igazolásához vizsgáljuk a π_{Fab} perspektív projektivitást. Erre $\pi_{Fab}(O) = O$, $\pi_{Fab}(A) = B$ és $\pi_{Fab}(A') = B'$ is teljesül. A $\frac{\delta(A')}{\delta(A)} = \frac{\delta(B')}{\delta(B)} = \frac{d(A', B')}{d(A, B)}$ feltételből $|(OA_\infty A' A)| = \frac{\delta(A)}{\delta(A')} = \frac{\delta(B)}{\delta(B')} = |(OB_\infty B' B)|$ következik, amiből $(OA_\infty A' A)(OB_\infty B' B) > 0$ miatt $(OA_\infty A' A) = (OB_\infty B' B)$, és így nyilván $\pi_{Fab}(A_\infty) = B_\infty$ adódik, mely bizonyítja, hogy $F \in o$.

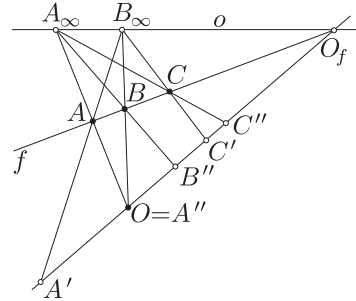
Ezzel a bizonyítás teljes. ■

Tétel. A parabolikus eljárásban definiált d függvény szimmetrikus és additív.

Bizonyítás. A szimmetriát elegendő az $Y \notin OX$ esetben megmutatni, hiszen az $Y \in OX$ esetén is $Y' \notin OX'$ az f egyenesen, és $d(X', Y') = d(X, Y)$. Ilyenkor a bizonyítandó az, hogy $\delta(Y_X) = \delta(X_Y)$.



017. ábra



018. ábra

Az $X_Y X X_\infty$ és $Y_X Y Y_\infty$ háromszögek az O_f pontra perspektívek, így a Desargues-tétel miatt e két háromszög egyenesre nézve is perspektív, vagyis az $O = X X_\infty \cap Y Y_\infty$ pont az $X_Y Y_\infty \cap Y_X X_\infty$ és $X_Y X_\infty \cap Y_X Y_\infty$ metszéspontok g egyenesére esik. Eszerint az O és O_f az $X_Y X_\infty Y_X Y_\infty$ teljes négyszögnek átlós pontjai, melyek harmonikusan választják el az X_Y és Y_X csúcspontokat, vagyis $(X_Y Y_X O O_f) = -1$, így előző lemmánkból $\delta(X_Y) = \delta(Y_X)$ adódik, ami bizonyítja a d függvény szimmetriáját.

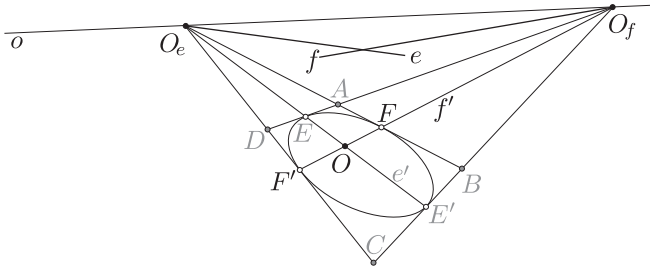
Az additivitás bizonyításához tekintsük az A, B és C pontokat egy f egyenesen, ahol $(ACBO_f) < 0$. A B_∞ pontból tekintve világos, hogy $d(A, B) = \delta(A_B) = \delta(A')$ és $d(B, C) = \delta(C_B) = \delta(C')$. Az A_∞ pontból pedig $d(A, C) = \delta(C_A) = \delta(C'')$ és $d(A, B) = \delta(B_A) = \delta(B'')$.

Mivel $\delta(A') = d(A, B) = \delta(B'')$, előző lemmánk értelmében

$$\begin{aligned} \frac{\delta(C'')}{\delta(A')} &= \frac{\delta(C'')}{\delta(B'')} = |(OO_f C'' B'')| = |(AO_f C B)| = |(A' O_f C' O)| \\ &= |-1 + (A' C' O_f O)| = |-1 + (OO_f C' A')| = 1 + \frac{\delta(C')}{\delta(A')} \end{aligned}$$

vagyis $\delta(C'') = \delta(A') + \delta(C')$, ami igazolja az additivitást. ■

Az $\mathbb{A}$ affin sík e egyenesét az f egyenesre *merőlegesnek* nevezzük, ha az f egyenessel párhuzamos, O pontra illeszkedő f' egyenes a $\mathcal{K}$ induktrix határából olyan F és F' pontokat metsz ki, hogy az azokban a szigorú konvexitás miatt egyértelmű érintők párhuzamosak az e egyenessel, vagyis illeszkednek az O_e pontra. Ezt $e \perp f$ jelöli.



015. ábra

Tétel. $A \perp$ merőlegesség szimmetrikus reláció, és $e \perp f \perp g$ esetén $e \parallel g$. Tetszőleges $e \neq o$ egyeneshez és P ponthoz pontosan egy olyan f egyenes megy át a P ponton, melyre $f \perp e$.

Bizonyítás. Iménti definíciónk jelöléseit megőrizve legyen $e \perp f$, és menjen az $e' \parallel e$ egyenes az O ponton át. Az e' metszete a $\mathcal{K}$ induktrix határával legyen E és E' , melyekben az egyértelmű érintők rendre g és g' . Legyen $A = O_e F \cap g$, $B = O_e F \cap g'$, $C = O_e F' \cap g'$ és $D = O_e F' \cap g$.

Az $ABCD$ négyszög által megadott teljes négyoldal további két csúcsa O_e és $G = g \cap g'$. Ebből következik, hogy $(DAEG) = (CBE'G) = -1$.

Az $AFF'D$ négyszög által megadott teljes négyoldal további két csúcsa O_e és $G_F = g \cap f'$. Ebből következik, hogy $(DAEG_F) = (F'FOG_F) = -1$.

Összevetve az előbbi kettősviszonyokkal, $(DAEG) = -1 = (DAEG_F)$ alapján a kettősviszony egyértelműsége miatt $G = G_F$ adódik, vagyis $G = g \cap g' \cap f'$.

A középpontos szimmetria miatt $(FF'OO_f) = -1$, így ismét a kettősviszony egyértelműsége miatt $G_F = O_f$ következik, ami azt jelenti, hogy $g \parallel f \parallel g'$, vagyis $f \perp g$, ami a szimmetria bizonyítéka.

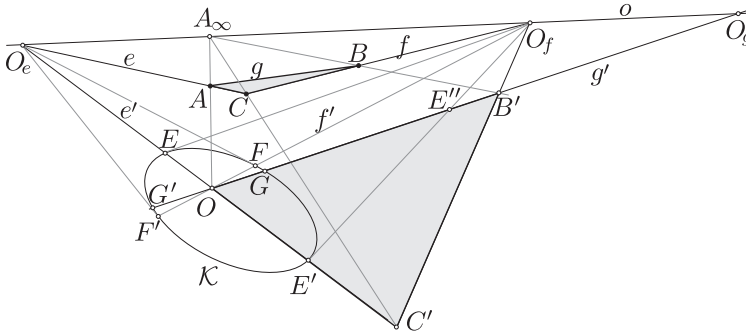
Ha $e \perp f \perp g$, akkor az e és g egyenesek is átmennek az o és az f' által az induktrix határából kimetszett F és F' pontokban állított érintők metszéspontján, amiért $e \parallel g$.

Az e egyenesre merőleges minden f egyenes átmegy az e által az induktrix határából kimetszett E és E' pontokban állított érintők M metszéspontján, így pontosan a P pontot ezzel az M ponttal összekötő egyenes merőleges a P ponton át az e egyenesre. ■

Egy ABC háromszöget a C csúcsnál derékszögű háromszögnek nevezünk, ha $AC \perp CB$.

Tétel. Ha a nem elfajuló ABC háromszög a C csúcsánál derékszögű, akkor $d(A, C) < d(A, B)$ és $d(C, B) < d(A, B)$.

Bizonyítás. Tekintsük a C csúcsánál derékszögű ABC háromszöget. Legyen $e = CA$, $e' = OO_e$, $\{E, E'\} = e' \cap \mathcal{K}$, $f = CB$, $f' = OO_f$, $\{F, F'\} = f' \cap \mathcal{K}$, $g = AB$, $g' = OO_g$ és $\{G, G'\} = g' \cap \mathcal{K}$.



024. ábra

A $C' = CA_\infty \cap e'$ és $B' = BA_\infty \cap C'O_f$ pontokkal alkotott $OC'B'$ háromszög az A_∞ pontra nézve perspektív az ABC háromszöggel, így a Desargues-tétel alapján a két háromszög tengelyesen is perspektív, mégpedig az o egyenesre nézve, hiszen az $O_e = C'O \cap CA$ és $O_f = C'B' \cap CB$ pont is az o egyenesen van, vagyis $OB' \parallel AB$.

Eszerint az ABC és az $OB'C'$ háromszögek oldalegyenesei páronként párhuzamosak, amiből következik, hogy az $OC'B'$ háromszög is derékszögű a C' csúcsánál, és $d(O, B') = d(A, B)$, $d(O, C') = d(A, C)$ és $d(C', B') = d(C, B)$.

Mivel $e \perp f$, az EO_f , $E'O_f$, FO_e és $F'O_e$ egyenesek rendre érintik a $\mathcal{K}$ induktrixot az E , E' , F és F' pontokban, ezért $\mathcal{K}$ szigorú konvexitása és szimmetriája

miatt a $\pi := \pi_{O_f g' e'}$ perspektivitást alkalmazva $0 < (O_e OC' \pi(G))$, és

$$\begin{cases} (OE' O_e \pi(G)) < 0 & \text{ha } O \notin \overline{E'C'} \\ (EO O_e \pi(G)) < 0 & \text{ha } O \in \overline{E'C'} \end{cases}$$

következik. Ezeket és az egyenesen megismert δ függvényt használva

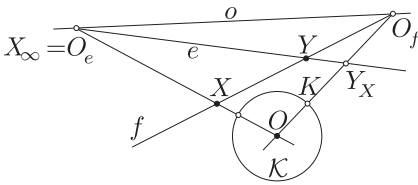
$$\begin{aligned} d(A, B) &= \delta(B') = \delta(G) |(OO_g B' G)| = (OO_e C' \pi(G)) \\ &= \begin{cases} \delta(E')(OO_e C' E')(OO_e E' \pi(G)) & \text{ha } O \notin \overline{E'C'} \\ \delta(E)(OO_e C' E)(OO_e E \pi(G')) & \text{ha } O \in \overline{E'C'} \end{cases} \\ &= \delta(C') \begin{cases} 1 - (OE' O_e \pi(G)) & \text{ha } O \in \overline{E'C'} \\ 1 - (EO O_e \pi(G')) & \text{ha } O \notin \overline{E'C'} \end{cases} \\ &> \delta(C') = d(A, C) \end{aligned}$$

adódik. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

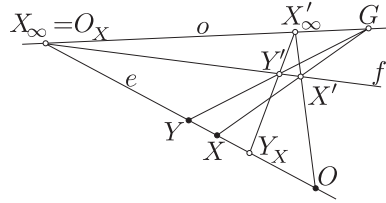
Tétel. A parabolikus eljárással definiált d függvény metrika az $\mathbb{A}$ affin síkon.

Bizonyítás. A definícióból világos, hogy (M'_1) teljesül.

Az (M''_1) tulajdonság igazolásához legyen $d(X, Y) = 0$. Ekkor a definíció szerint $0 = \delta(Y_X)$, ha $X \neq O$, és $0 = \delta(Y)$, ha $X = O$. Utóbbinak $(OO_Y YY') = 0$ a szükséges feltétele, amiből $Y = O$ adódik. Előbbi esetre ebből következik, hogy $Y_X = O$.



016. ábra



011. ábra

Ha $O \notin XY$, akkor ebből $X_\infty Y \cap OO_{XY} = O$, amiért $O \in X_\infty Y$, vagyis $Y \in OX$ adódik, ami ellentmond az $O \notin XY$ feltételnek.

Ha $O \in XY$, akkor $Y_X = O$ miatt, $Y' \in X'_\infty O$, vagyis $Y' = X'$, így $Y = X$ következik.

A szimmetria (M_2) és az additivitás (M''_3) teljesülését előbbi tételeink igazolják.

Az (M'_3) háromszög-egyenlőtlenség igazolásához tekintsünk egy nem elfajuló ABC háromszöget. Vegyük a C ponton át azt az m egyenest, mely merőleges az AB egyenesre, és legyen $M = m \cap AB$. Iménti tételünk szerint $d(A, M) < d(A, C)$ és $d(M, B) < d(C, B)$, így ha $d(A, B) = \max\{d(A, B), d(A, M), d(M, B)\}$, akkor

az additivitás alapján, ha pedig $d(A, B) < \max\{d(A, B), d(A, M), d(M, B)\}$, akkor közvetlenül iménti tételünkből kapjuk a háromszög-egyenlőtlenséget. Mivel előbbi tételünkben egyenlőség csak elfajult háromszög esertén lehetséges, ez általában is így van, ami teljessé teszi (M'_3) bizonyítását.

Ezzel a tételt beláttuk. ■

Definíció. A parabolikus eljárással a $\mathcal{K}$ indikátrix által meghatározott metrikát *Minkowski-metrikának*, a vele ellátott $\mathbb{A}$ Desargues-típusú affin síkot *Minkowski-síknak* nevezzük, és az $\mathbb{M}_{\mathcal{K}}$ jellel hivatkozunk rá. ▲

Jegyezzük meg, hogy a gömböt az indikátrix szimmetriaközéppontjában érintő síkra kivetítve az $\mathbb{A}$ affin síkot, a szokásos [Kurusa: Euklidészi geometria] értelemben vett Minkowski-síkot kapjuk.

Az alábbi eredmény Papposz tételének egy újabb átfogalmazása, és azt mutatja, hogy a kettősviszony és a metrika a Minkowski-síkon is meghatározza egymást.

Tétel. Ha a kollineáris X, Y, Z, T pontnégyesre $(XYZT) > 0$, akkor

$$(XYZT) = \frac{d(X, Z)}{d(Z, Y)} : \frac{d(X, T)}{d(T, Y)}.$$

Bizonyítás. Ha az X, Y, Z, T pontnégyes közös e egyenese átmegy az O ponton, akkor tekintsünk egy olyan $f \not\equiv O$ egyenest, amelyre $O_f = O_e$, és vetítsük valamely $G \in o \setminus \{O_e\}$ pontból a pontjainkat az f egyenesre. A metrika definíciója miatt ez nem változtatja meg a pontok távolságát, ugyanakkor projektív, tehát a pontok kettősviszonyát sem módosítja.

Elegendő tehát a bizonyítást olyan X, Y, Z, T pontnégyesre elvégezni, melyek közös e egyenese nem illeszkedik az O pontra.

A bizonyítást aszerint bontjuk esetekre, hogy az $\mathcal{M} = \{d(X, Y), d(X, Z), d(X, T), d(Y, Z), d(Y, T), d(Z, T)\}$ halmazban szereplő távolságok közül melyik egyezik meg a halmaz $m = \max \mathcal{M}$ maximumával.

Ha $d(X, Y) = m$, akkor a Z és T pontok nem szomszédosak az O_e ponttal az X, Y pontpárra nézve. Vetítsük pontjainkat a $g = OY$ egyenes O_g pontjából, arra az f egyenesre, mely átmegy az O ponton és $O_f = O_e$. Ezzel sem változnak meg a pontok távolságai és kettősviszonyai, és Y képe O . A pontok képét a $'$ jellel jelezve, ekkor

$$\begin{aligned} \frac{d(X, Z)}{d(Z, Y)} : \frac{d(X, T)}{d(T, Y)} &= \frac{d(X', Z')}{d(Z', Y')} : \frac{d(X', T')}{d(T', Y')} = \frac{d(X', Z')}{d(Z', O)} : \frac{d(X', T')}{d(T', O)} \\ &= \frac{d(X', O) - d(Z', O)}{\delta(Z')} : \frac{d(X', O) \pm d(T', O)}{\delta(T')} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\delta(X') - \delta(Z')}{\delta(Z')} : \frac{\delta(X') - \delta(T')}{\delta(T')} = \frac{(OO_e X'Z') - 1}{(OO_e X'T') - 1} \\
&= \frac{-(OX'O_e Z')}{-(OX'O_e T')} = (O'X'T'Z') = (XYZT),
\end{aligned}$$

ami igazolja az állítást ebben az esetben.

Ha $d(X, T) = m$, akkor az Y és Z pontok nem szomszédosak az O_e ponttal az X, T pontpárra nézve, így $(XYZT) > 0$ miatt $(TO_e ZY) < 1$. Vetítsük pontjainkat a $g = OT$ egyenes O_g pontjából, arra az f egyenesre, mely átmegy az O ponton és $O_f = O_e$. Ezzel sem változnak meg a pontok távolságai és kettősviszonyai, és T képe O . A pontok képét a $'$ jellel jelezve, ekkor

$$\begin{aligned}
\frac{d(X, Z)}{d(Z, Y)} : \frac{d(X, T)}{d(T, Y)} &= \frac{d(X', Z')}{d(Z', Y')} : \frac{d(X', T')}{d(T', Y')} = \frac{d(X', Z')}{d(Z', Y')} : \frac{d(X', O)}{d(O, Y')} \\
&= \frac{d(X', O) - d(Z', O)}{|d(Z', O) - d(Y', O)|} : \frac{\delta(X')}{\delta(Y')} \\
&= \frac{\delta(X') - \delta(Z')}{|\delta(Z') - \delta(Y')|} : \frac{\delta(X')}{\delta(Y')} = \frac{1 - (OO_e Z'X')}{|(OO_e Z'Y') - 1|} \\
&= \frac{(OZ'O_e X')}{(OZ'O_e Y')} = (OZ'Y'X') = (XYZT),
\end{aligned}$$

ami igazolja az állítást ebben az esetben.

A további esetek ezekkel teljesen analóg vizsgálata az olvasóra marad. ■

Mivel a távolságot a kettősviszony határozza meg, bármely κ kollineációra az $\mathbb{M}_\kappa$ és $\mathbb{M}_{\kappa(K)}$ Minkowski-síkok izomorfak.

Tekintve, hogy bármely két kúpszelethez van (nem is egy) olyan kollineáció, mely az egyiket a másikba viszi, a kúpszeletekkel adott Minkowski-síkok mind izomorfak egymással.

A továbbiakban csak a kúpszelettel adott Minkowski-síkkal foglalkozunk: bebizonyítjuk, hogy ez pontosan az euklidészi sík.

Figyeljük meg, hogy minden kúpszelet középpontosan szimmetrikus bármely öt nem metsző egyenes pólusára, ezért a továbbiakban az eddigi jelölés O pontját és o egyenesét, mint a kúpszeletet határhalmazaként meghatározó ρ hiperbolikus polaritás pólus-poláris párját kezeljük, vagyis $O = \rho(o)$.

Lemma. *Egy kúpszelettel adott Minkowski-síkon tekintsük az x és z egyeneseket az O ponton keresztül. Legyen $C, B' \in z$ és $C', B \in x$ az O ponttól különböző pontok, az OCB és $OC'B'$ háromszög pedig a C illetve C' csúcsánál derékszögű. Ekkor $\delta(C')/\delta(B') = \delta(C)/\delta(B)$.*

Eszerint $\pi_{Yxz}(D) = D'$, amiért

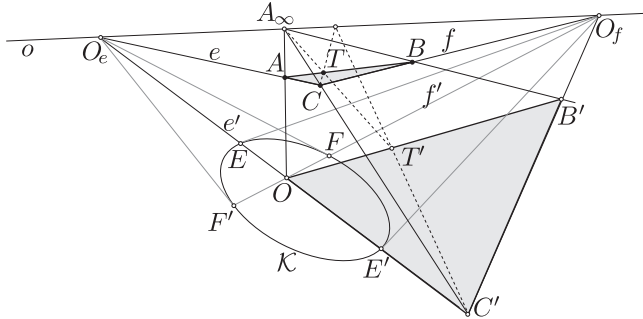
$$\begin{aligned}\delta(D) &= \delta(E)|(\overline{OD_\infty ED})| = |(OE_\infty ED)| = |(OF_\infty FD')| = \delta(F)|(\overline{OF_\infty FD'})| \\ &= \delta(D'),\end{aligned}$$

ami a bizonyítást teljessé teszi. ■

Tétel. Egy kúpszelettel adott Minkowski-síkon teljesülnek a következők:

- (1) A C csúcsánál derékszögű ABC háromszög $T \in AB$ pontjára $\frac{d(A,T)}{d(A,C)} = \frac{d(A,C)}{d(A,B)}$ akkor és csak akkor, ha $CT \perp AB$ (vagyis T a C ponthoz tartozó „magasság talppontja”);
- (2) (Pitagorasz tétele). Az euklidészi eljárással definiált d függvényre az ABC háromszögben $d^2(A, C) + d^2(C, B) = d^2(A, B)$ teljesül, ha $AC \perp BC$.

Bizonyítás. Előbb (1) igazolása következik. Tekintsük a C csúcsánál derékszögű ABC háromszöget, és az AB egyenesen azt a T pontot, melyre $AB \perp TC$. Legyen $e = CA$, $e' = OO_e$, $\{E, E'\} = e' \cap \mathcal{K}$, $f = CB$, $f' = OO_f$ és $\{F, F'\} = f' \cap \mathcal{K}$.



019. ábra

Az ABC háromszög az A_∞ pontra nézve perspektív az $OC'B'$ háromszöggel, ahol $C' = CA_\infty \cap e'$ és $B' = BA_\infty \cap C'O_f$. A Desargues-tétel alapján e két háromszög tengelyesen is perspektív, mégpedig az o egyenesre nézve, hiszen az $O_e = C'O \cap CA$ és $O_f = C'B' \cap CB$ pont is az o egyenesen van, vagyis $OB' \parallel AB$.

Ugyanígy megfontolással a $T' = TA_\infty \cap OB'$ pontra $CT \parallel C'T'$ adódik, amiből $C'T' \perp OB'$ következik.

Mivel pedig $AO \parallel TT' \parallel BB'$ is fennáll, $d(A, B) = d(O, B') = \delta(B')$ és $d(A, T) = d(O, T') = \delta(T')$ is teljesül. Ugyanakkor $\delta(C') = d(A, C)$ és $d(C', B') = d(C, B)$ is érvényes, így (1) bizonyításához elég belátni, hogy $\frac{d(O, T')}{d(O, C')} = \frac{d(O, C')}{d(O, B')}$, vagyis $\delta(T')/\delta(C') = \delta(C')/\delta(B')$, ami előző lemmánkból következik.

A (2) állítást, vagyis Pitagorasz tételét gyorsan bizonyíthatjuk (1) és az additivitás alapján, hiszen (1) szerint $\frac{d(A,T)}{d(A,C)} = \frac{d(A,C)}{d(A,B)}$ és $\frac{d(B,T)}{d(B,C)} = \frac{d(B,C)}{d(A,B)}$, amiért az additivitásból

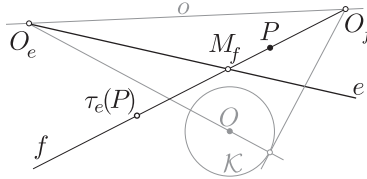
$$d^2(A, B) = d(A, B)(d(A, T) + d(T, B)) = d^2(A, C) + d^2(B, C).$$

Ezzel a tétel egészét bebizonyítottuk. ■

Tétel. *A kúpszelettel adott Minkowski-sík euklidészi sík.*

Bizonyítás. Elég belátnunk, hogy kúpszelettel adott Minkowski-síkon a metrika tükrözéses, hiszen ebből [Kurusa: Euklidészi geometria] következik, hogy a metrika euklidészi.

Pitagorasz tételét használva tetszőleges e egyeneshez olyan τ_e izometriát konstruálunk, mely fixen hagyja az e minden pontját, miközben az egyenes két félsíkját felcseréli: Egy $P \notin e$ ponthoz keressük meg azt a P pontra illeszkedő f egyenest, mely merőleges az e egyenesre, majd vegyünk azt a $\tau_e(P)$ pontot az f egyenesen, melyre $(O_f M_f P \tau_e(P)) = -1$, ahol $M_f = e \cap f$.



011. ábra

Világos, hogy $d(\tau_e(P), M_f) = d(M_f, P)$, és nyilvánvaló, hogy a τ_e transzformáció felcseréli az f egyenesnek az O_f, M_f pontpár által meghatározott szomszédossági osztályait.

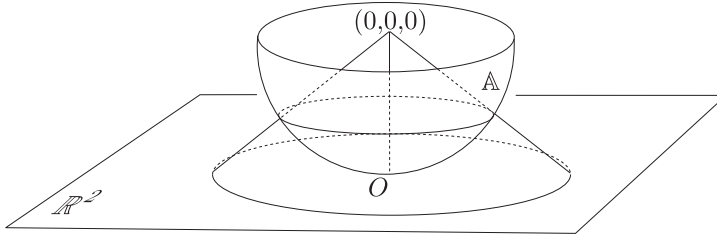
A tétel igazolásához már csak azt kell belátni, hogy τ_e izometria. Tetszőleges Q pont esetén legyen g a rá illeszkedő, az e egyenesre merőleges egyenes és $M_g = e \cap g$. Ekkor eddigi eredményeink és Pitagorasz tétele szerint

$$\begin{aligned} d^2(P, Q) &= (d(P, M_f) - d(Q, M_g))^2 + d^2(M_f, M_g) \\ &= (d(\tau_e(P), M_f) - d(\tau_e(Q), M_g))^2 + d^2(M_f, M_g) = d^2(\tau_e(P), \tau_e(Q)), \end{aligned}$$

vagyis τ_e izometria, amivel a tétel bizonyítását befejeztük. ■

Mínhogy a kúpszeletek kollineációkkal egymásba vihetők, szabadon választhatunk kúpszeletet és O pontot az euklidészi sík tanulmányozásához. Vegyünk tehát egy $\pi/4$ (45°) középponti szögű gömbsapkát és legyen annak középpontja az O pont.

A gömbsapka $\mathcal{K}$ határa egy kúpszeletnek felel meg a projektív geometria origón átmenő egyenesekkel vett reprezentálásában. Mivel a gömbsapka középpontja az O pont, ennek o polárisa a gömbsapka alapjával párhuzamos főkör. Tekintsük most a $(0, 0, 0)$ origón átmenő egyeneseknek a gömbsapkát a középpontjában érintő, mondjuk $z = -1$ egyenletű, síkkal vett metszéspontjait. Ez egy χ bijektív leképezést ad a projektív sík fentebb euklidészi metrikával ellátott és félgömbnek megfelelő részhalmaza és a gömböt az O pontban érintő affín sík között.



040a. ábra

Tétel. *A projektív sík fentebb euklidészi metrikával ellátott, félgömbnek megfelelő $(\mathbb{A}, d)$ részhalmaza olyan euklidészi sík, mely kanonikusan izomorf az O pontban a gömböt érintő $\mathbb{R}^2$ euklidészi síkkal.*

Bizonyítás. Azt fogjuk megmutatni, hogy az $\mathbb{R}^2$ halmazon megszokott távolsággal tekintve a gömböt érintő síkot a tétel előtt definiált $\chi: (\mathbb{A}, d) \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezés izomorfia a két euklidészi sík között.

A χ tartja az egyeneseket, mert a projektív pontok pontosan akkor kollineárisak, ha a nekik megfelelő egyenesek közös euklidészi síkba esnek, azok pedig egyenesben metszik az $\mathbb{R}^2$ euklidészi síkot. Mivel χ bijektív, ez azt jelenti, hogy a két euklidészi síkból a metrikák elhagyása után maradó affín síkok között izomorfia (affinitás). Speciálisan a χ tartja a párhuzamosságot is, hiszen a főkör pontjaiban egymást metsző projektív egyeneseket az érintő euklidészi síkban egymással párhuzamos affín egyenesekbe viszi.

Most igazoljuk, hogy χ izometria. Mivel χ tartja a párhuzamosságot, és a távolságot megadó euklidészi eljárásban éppen a párhuzamossággal vezettük vissza a távolságot az O ponton átmenő egyeneseken vett δ függvényre, elég belátni, hogy $\delta(Y) = d(O, \chi(Y))$. Legyen $Y \neq O$, $y = d(O, \chi(Y))$ és használjuk a parabolikus eljárásnál megadott jelöléseket. Ekkor a $-1 = (K_Y K'_Y Y Y_K)$ feltételből Papposz tételének és az $y' = d(O, \chi(Y_K))$ jelölésnek a felhasználásával

$$-1 = (\chi(K_Y) \chi(K'_Y) \chi(Y) \chi(Y_K)) = \frac{(\chi(K_Y) \chi(K'_Y) \chi(Y))}{(\chi(K_Y) \chi(K'_Y) \chi(Y_K))} = \frac{y - 1}{-1 - y} : \frac{y' - 1}{-1 - y'}$$

adódik, amiért $y' = 1/y$.

Eszerint

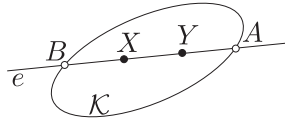
$$\begin{aligned}
 \delta(Y) &= \sqrt{(OO_Y Y Y_K)} = \sqrt{(\chi(O)\chi(O_Y)\chi(Y)\chi(Y_K))} \\
 &= \sqrt{(O\infty\chi(Y)\chi(Y_K))} = \sqrt{(\chi(Y)\chi(Y_K)O\infty)} \\
 &= \sqrt{(\chi(Y)\chi(Y_K)O) : (\chi(Y)\chi(Y_K)\infty)} = \sqrt{\frac{y-0}{0-y'} : \frac{y-\infty}{\infty-y'}} \\
 &= \sqrt{\frac{y}{-1/y} : (-1)} = \sqrt{y^2} = y = d(O, \chi(Y)),
 \end{aligned}$$

amit bizonyítani kellett. ■

3.4. Hiperbolikus metrizálás

Legyen o egy projektív egyenes, $\mathbb{A}$ pedig a nem erre eső pontok Desargues-típusú affin síkja, amiben $\mathcal{H} \subset \mathbb{A}$ egy olyan konvex ponthalmaz, melynek pontjai nem mind kollineárisak.

Hiperbolikus eljárás. Legyen $\mathcal{K}$ egy szigorúan konvex zárt ponthalmaz, és minden a belsejét metsző e egyenesre legyen A_e és B_e az e két metszéspontja a $\mathcal{K}$ határával.



020. ábra

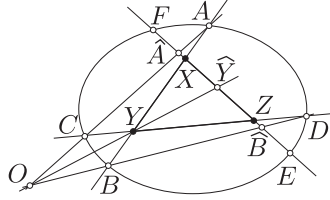
A $\mathcal{K}$ minden belső X, Y pontjára legyen $d(X, Y) = \varrho |\ln \sqrt{(A_{XY} B_{XY} XY)}|$, ahol $\varrho > 0$ tetszőleges konstans. ▲

Figyeljük meg, hogy $d(X, Y)$ értéke független attól, hogy az e két metszéspontját milyen sorrendben használjuk, mert felcserélésük csak reciprokára változtatja a definícióban szereplő kettősviszony értékét. Ha $\mathcal{K}$ egy ρ hiperbolikus polaritás határhalmaza, vagyis kúpszelet, akkor a harmonikus elválasztásnál bizonyított formula alapján $\tanh(d(X, Y)/\varrho) = \sqrt{(XX'YY')}$ adódik, ahol $X' = \rho(X) \cap XY$.

Tétel. A hiperbolikus eljárással a $\mathcal{K}$ szigorúan konvex zárt ponthalmaz belsején definiált d függvény egy metrika.

Bizonyítás. Az egyenesek hiperbolikus metrizálásánál látottak alapján most elegendő igazolnunk a háromszögegyenlőtlenséget.

Tekintsük a $\mathcal{K}$ konvex zárt ponthalmaz X, Y és Z nem egy egyenesre eső belső pontjait. Az XY, YZ és ZX egyenesek messék a $\mathcal{K}$ ponthalmazt rendre az A, B, C, D, E és F pontokban.



030. ábra

Tekintsük az $O = CA \cap BD$ pontot és vetítsünk minden pontot az EF egyenesre. Jelöljük a vetített pontokat a $\hat{\cdot}$ jellel, vagyis $\hat{C} = \hat{A}, \hat{F} = F, \hat{X} = X, \hat{Y} = OY \cap EF, \hat{Z} = Z, \hat{D} = \hat{B}$ és $\hat{E} = E$. A $\mathcal{K}$ szigorú konvexitása miatt ekkor $\hat{F} \prec \hat{C} = \hat{A} \prec \hat{X} \prec \hat{Y} \prec \hat{Z} \prec \hat{D} = \hat{B} \prec \hat{E}$, amiért $(\hat{B}XEZ) < 0$ és $(FX\hat{A}Z) < 0$.

Ezeket a pontokat felhasználva

$$\begin{aligned}
 (BAXY)(DCYZ)/(EFXZ) &= (\hat{B}\hat{A}X\hat{Y})(\hat{D}\hat{C}\hat{Y}Z)/(EFXZ) = (\hat{B}\hat{A}X\hat{Y})(\hat{B}\hat{A}\hat{Y}Z)/(EFXZ) \\
 &= (\hat{B}\hat{A}XZ)/(EFXZ) = (\hat{B}EXZ)(EFXZ)(F\hat{A}XZ)/(EFXZ) \\
 &= (\hat{B}EXZ)(F\hat{A}XZ) = (1 - (\hat{B}XEZ))(1 - (FX\hat{A}Z)) \\
 &> 1 \cdot 1 = 1
 \end{aligned}$$

adódik. Eszerint $(EFXZ) < (BAXY)(DCYZ)$, amiből a d definíciója alapján $e^{d(X,Z)/\varrho} < e^{d(X,Y)/\varrho} e^{d(Y,Z)/\varrho}$ következik, ami igazolja a háromszög-egyenlőtlenséget és így a tételt. ■

Definíció. A $\mathcal{K}$ szigorúan konvex zárt ponthalmaz belső pontjainak halmazát a hiperbolikus eljárással definiált metrikával *Hilbert-síknak* nevezzük, és a $\mathbb{H}_{\mathcal{K},\varrho}$ jellel hivatkozunk rá, ahol ϱ a metrikában megadott konstans. ▲

A kettősviszony és a metrika a Hilbert-síkon is meghatározza egymást.

Tétel. Ha a kollineáris X, Y, Z, T pontnégyesre $(XYZT) > 0$, akkor

$$(XYZT) = \frac{\sinh(d(X, Z)/\varrho)}{\sinh(d(Z, Y)/\varrho)} \cdot \frac{\sinh(d(X, T)/\varrho)}{\sinh(d(T, Y)/\varrho)}.$$

Bizonyítás. Legyen A és B az X, Y, Z, T pontnégyes közös e egyenesének két metszéspontja a Hilbert-síkot megadó konvex halmaz határával.

Felhasználva a $\sinh$ függvény definícióját, azt látjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sinh(d(X, Z)/\varrho)}{\sinh(d(Z, Y)/\varrho)} \cdot \frac{\sinh(d(X, T)/\varrho)}{\sinh(d(T, Y)/\varrho)} \\
 &= \frac{\sqrt{(ABXZ)} - \sqrt{(ABZX)}}{\sqrt{(ABZY)} - \sqrt{(ABYZ)}} \cdot \frac{\sqrt{(ABXT)} - \sqrt{(ABTX)}}{\sqrt{(ABTY)} - \sqrt{(ABYT)}} \\
 &= \frac{(ABXZ) - 1}{(ABZY) - 1} \cdot \frac{(ABXT) - 1}{(ABTY) - 1} \times \sqrt{\frac{(ABZX)}{(ABYZ)} \cdot \frac{(ABTX)}{(ABYT)}} \\
 &= \frac{((ABXZ) - 1)((ABTY) - 1)}{((ABZY) - 1)((ABXT) - 1)} \times \sqrt{\frac{(ABZX)(ABYT)}{(ABYZ)(ABTX)}} \\
 &= (\dagger) \times \sqrt{(\ddagger)}.
 \end{aligned}$$

Az $(\dagger)$ és $(\ddagger)$ kifejezésekkel tovább dolgozva

$$\begin{aligned}
 (\dagger) &= \frac{((ABXZ) - 1)((ABTY) - 1)}{((ABZY) - 1)((ABXT) - 1)} = \frac{(AXBZ)(ATBY)}{(AZBY)(AXBT)} \\
 &= (AXTZ)(ZTBY) = (XAZT)(BYZT),
 \end{aligned}$$

és

$$(\ddagger) = \frac{(ABZX)(ABYT)}{(ABYZ)(ABTX)} = (ABZT)(ABZT) = (ABZT)^2,$$

amiért

$$(\dagger) \times \sqrt{(\ddagger)} = (XAZT)(BYZT) \times (ABZT) = (XYZT)$$

következik, ami bizonyítja az állítást. ■

Mivel a távolságot a kettősvizony határozza meg, bármely κ kollineációra a $\mathbb{H}_{\mathcal{K}, \varrho}$ és $\mathbb{H}_{\kappa(\mathcal{K}), \varrho}$ Hilbert-síkok izomorfak. A κ kollineáció tehát akkor és csak akkor izometriája a $\mathbb{H}_{\mathcal{K}, \varrho}$ Hilbert-síknak, ha $\kappa(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$.

Tekintve, hogy bármely két kúpszelethez van (nem is egy) olyan kollineáció, mely az egyiket a másikba viszi, a kúpszeleteken adott Hilbert-síkok mind izomorfak egymással.

Definíció. A $\mathcal{K}$ kúpszelet belső pontjainak halmazán adott Hilbert-síkot *hiperbolikus síknak* nevezzük, és a $\mathbb{H}_\varrho$ jellel hivatkozunk rá, ahol ϱ a metrikában megadott konstans, melyet a *hiperbolikus sík sugarának* nevezünk. ▲

Tétel. A hiperbolikus síkon a hiperbolikus tükrözés tartja a távolságot, vagyis izometria, és felcseréli a tengelye két hiperbolikus félsíkját.

Bizonyítás. Az nyilvánvaló, hogy a hiperbolikus tükrözés izometria, hiszen projektivitás, és a metrika éppen a kettősviszony logaritmus.

Mivel a hiperbolikus tükrözés tengelye és ennek pólusa harmonikusan választja el a pontokat a képüktől, a hiperbolikus tükrözés ezeket felcseréli. Másfelől ha a P és Q pontok képei rendre P' és Q' , akkor a $PQ' \cap P'Q$ pont a hiperbolikus tükrözés tengelyére esik, tehát ha P és Q nem ugyanazon hiperbolikus félsíkban van, akkor képeik sem, ha pedig a P és Q pont azonos hiperbolikus félsíkba esik, akkor a képeik is azonos hiperbolikus félsíkba esnek. ■

Azt a geometriát, amelyben a párhuzamossági axiómán kívül az euklidészi sík minden axiómája teljesül (a Desargues-tulajdonság teljesülése az euklidészi síkon tétel), és *minden nem illeszkedő pont-egyenes pár esetén a pontra végtelen sok, az egyenest nem metsző egyenes illeszkedik*, Bolyai-síknak nevezzük.

Tétel. *A hiperbolikus sík egy Bolyai-sík.*

Bizonyítás. Az érdeklődő olvasóra marad annak részletes igazolása, hogy affin síkban teljesülő axiómák alábbi része bármely $\mathcal{H} \subset \mathbb{A}$ szigorúan konvex ponthalmaz belső pontjainak halmazán is teljesül:

- (I₀) Létezik legalább három nem kollineáris pont;
- (I₁) Minden egyenesre legalább két különböző pont illeszkedik;
- (I₂) Két különböző pontra egy és csak egy egyenes illeszkedik;
- (R₁) Minden egyenesen adott két teljes rendezés $\prec$ és $\succ$, amelyek egymás megfordítottjai;
- (R₂) Ha egy egyenes egy háromszög egyik csúcsára sem illeszkedik, de van közös pontja valamely oldallal, akkor pontosan még egy másik oldalt metsz;
- (F₁) Minden $Q \in g$ ponthoz léteznek tőle különböző $P, R \in g$ pontok, hogy $P \prec Q \prec R$;
- (F₂) Minden $\mathcal{Q} \subseteq \overline{PR} \subseteq g$ ponthalmazhoz létezik olyan Q_- és Q_+ pont a $\overline{PR}$ szakaszon, hogy minden $Q \in \mathcal{Q}$ esetén $Q_- \prec Q \prec Q_+$ és bármely, a $\mathcal{Q}$ minden pontját közrefogó $X, Y \in g$ pontpárra $X \prec Q_-$ és $Q_+ \prec Y$ is igaz;

Eszerint az affin geometria axiómái a párhuzamossági axiómát kivéve mind teljesülnek a $\mathcal{H} \subset \mathbb{A}$ szigorúan konvex ponthalmaz belső pontjainak halmazán, továbbá egy e egyenesen kívüli P ponton át végtelen sok olyan egyenes megy, amely nem metszi az e egyenest a $\mathcal{H}$ belsejében. (Természetesen a Desargues-tulajdonság sem teljesül.)

Előbbi tételünkben igazoltuk, hogy a hiperbolikus sík metrikája tükrözéses (be lehet bizonyítani, hogy a Hilbert-síkok közül ez kizárólag a hiperbolikus síkokra teljesül), ami teljessé teszi e bizonyítást. ■

A Bolyai-síkot az axiómákból felépítve belátható, hogy a Bolyai-sík izomorf a hiperbolikus síkkal, ezért a továbbiakban gyakran szinonimaként használjuk e két fogalmat.

Áttekintve a bemutatott három lényegileg különböző tükrözéses metrizálást, kimondhatjuk a következőt.

Tétel. *Az euklidészi sík párhuzamossági axiómája független a többi axiómától.*

Amennyiben az euklidészi sík axiómái közé a párhuzamossági axióma helyére olyan axióma kerül, hogy

(I₃) a nem illeszkedő pont-egyenes párok esetén a pontra illeszkedő egyenesek közül az adott egyenest nem metsző egyenesek száma

(h) végtelen,

(e) egy,

(g) nulla,

akkor rendre a (h) Bolyai- (hiperbolikus), (e) euklidészi, illetve (g) elliptikus síkgeometriát kapjuk.

Bolyai-sík

Célunk a Bolyai-sík trigonometriájának és ennek felhasználásával a végtelen sugarú Bolyai-sík geometriájának meghatározása. Ehhez szükségünk van a Bolyai-sík megfelelő szög- és szögmérték-fogalmának definiálására, amit az euklidészi geometriában már sikerrel alkalmazott eljárással [Kurusa: Euklidészi geometria] analóg módon a Bolyai-sík izometriáira alapozunk.

A $\mathbb{H}_{\mathcal{K},\varrho}$ Hilbert-sík $\mathbb{H}_{\mathcal{K}',\varrho'}$ Hilbert-síkra való leképezését *izometriának* hívjuk, ha tartja a hiperbolikus távolságot. Minthogy egyenesek és pontok a Hilbert-síkot tartalmazó projektív síkban is vannak, megkülönböztetésük érdekében a Hilbert-sík egyeneseit Hilbert-egyeneseknek fogjuk nevezni.

Tétel. *A Hilbert-sík minden izometrikus leképezése kollineáció.*

Bizonyítás. Tekintsük a $\mathbb{H}_{\mathcal{K},\varrho}$ Hilbert-sík egy ι izometriáját.

Mivel a P és Q pont akkor és csak akkor esik egybe, ha $d(P, Q) = 0$, ami pontosan ugyanakkor érvényes, amikor $d(\iota(P), \iota(Q)) = 0$, mely kizárólag $\iota(P) = \iota(Q)$ esetén teljesül, azt kapjuk, hogy ι injektív.

A P , Q és R pontok, ahol $d(P, R) \geq \max\{d(P, Q), d(Q, R)\}$ akkor és csak akkor kollineárisak, ha $d(P, R) = d(P, Q) + d(Q, R)$. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha $d(\iota(P), \iota(R)) = d(\iota(P), \iota(Q)) + d(\iota(Q), \iota(R))$, ami pontosan akkor érvényes, ha az $\iota(P)$, $\iota(Q)$ és $\iota(R)$ pontok kollineárisak. Ez azt jelenti, hogy az ι izometria tartja a $\mathbb{H}_{\mathcal{K},\varrho}$ Hilbert-sík egyeneseit, sőt az additivitás tulajdonsága miatt $\iota(\overline{PR}) \subset \overline{\iota(P)\iota(R)}$ is következik.

Tekintsük a különböző P és Q pontokat és e Hilbert-egyenesüket. A fentiek szerint az e egyenes $\iota(e)$ képe az $e' := \iota(P)\iota(Q)$ Hilbert-egyenes része. Tetszőleges $X' \in e'$ pontra legyen $p = d(\iota(P), X')$ és $q = d(X', \iota(P))$. Nyilván a $d(\iota(P), \iota(Q)) = |p - q|$ és $d(\iota(P), \iota(Q)) = p + q$ egyenletek közül, és az $\iota(Q) \in \overline{\iota(P)X'}$, $\iota(P) \in \overline{\iota(Q)X'}$ vagy $X' \in \overline{\iota(P)\iota(Q)}$ tartalmazások közül is pontosan az egyik teljesül. Mivel $d(P, Q) = d(\iota(P), \iota(Q))$, a fenti egyenletek közül teljesülő egyenlet a P és Q pontokra is érvényes ugyanazon p és q nem negatív valós számok esetén, amiért van olyan $X \in e$ pont, melyre $p = d(\iota(P), X)$ és $q = d(X, \iota(P))$, és ezek közül pontosan egy teljesíti azt a tartalmazást a P és Q pontokkal, amelyet X' az $\iota(P)$ és $\iota(Q)$

pontokkal. Eszerint az ι izometria szürjektív az egyeneseken, amiért az egyeneseken bijektív.

Rögzítsük a Hilbert-sík nem kollineáris P , Q és R pontjait. Ekkor ezek képei, rendre $\iota(P)$, $\iota(Q)$ és $\iota(R)$, ugyancsak nem kollineárisak. A Hilbert-sík tetszőleges E' pontján át vegyünk egy olyan e' Hilbert-egyeneset, mely metszi az $\iota(P)\iota(Q)$, $\iota(Q)\iota(R)$ és $\iota(R)\iota(P)$ Hilbert-egyenesek mindegyikét, rendre az X' , Y' és Z' pontokban. Mint-hogy az egyeneseken az ι izometria bijektív, vannak olyan X , Y és Z pontok rendre a PQ , QR és RP Hilbert-egyeneseken, melyekre $X' = \iota(X)$, $Y' = \iota(Y)$ és $Z' = \iota(Z)$. Az X' , Y' és Z' pontok közül legalább kettő különböző, hiszen az $\iota(P)$, $\iota(Q)$ és $\iota(R)$ pontok nem kollineárisak, így az X , Y és Z pontok közül is legalább kettő különböző. Tekintve, hogy ι bijektív az X , Y és Z pontok közös e Hilbert-egyenesén, melynek képe e' , van egy olyan $E \in e$ pont, melyre $E' = \iota(E)$. Ez azt jelenti, hogy ι szürjektív a Hilbert-síkon, amiért bijektív is. ■

Tétel. A $\mathbb{H}_{\mathcal{K},\varrho}$ Hilbert-sík minden izometrikus önmagába képezése a projektív sík egy olyan kollineációjának megszorítása a $\mathbb{H}_{\mathcal{K},\varrho}$ Hilbert-síkra, mely invariánsan hagyja a $\mathcal{K}$ konvex halmaz határpontjait.

Bizonyítás. Legyen $\iota: \mathbb{H}_{\mathcal{K},\varrho} \rightarrow \mathbb{H}_{\mathcal{K},\varrho}$ izometrikus. Előbb igazoltuk, hogy ι a Hilbert-sík egy kollineációja, a hiperbolikus metrizálásnál pedig bizonyítottuk, hogy Hilbert-síkon a metrika és a kettősvizony meghatározza egymást, tehát az ι izometria projektív is a Hilbert-sík pontjainak halmazán.

Rögzítsünk egy teljes négyoldal a projektív síkon, melynek minden csúcsa a Hilbert-sík eleme. Fentiek szerint ennek ι izometria melletti képe is teljes négyoldal, ezért a kollineációk alaptétele szerint a projektív síknak pontosan egy olyan κ kollineációja van, melyre $\pi := \kappa \circ \iota$ fixen hagyja a rögzített négyoldal minden csúcsát. Világos, hogy ekkor π az átlóspontokat is fixen hagyja, hiszen azok az invariáns átlós egyenesek metszéspontjai.

A π a Hilbert-sík pontjainak halmazán injektív és projektív, a Hilbert-egyeneseket pedig a Hilbert-egyenesek részhalmazába viszi, ezért a rögzített teljes négyoldal oldalainak a Hilbert-síkba eső minden pontja fix, hiszen mindegyik ilyen oldal Hilbert-egyenesén a három csúcs fix, amiért a kettősvizony bijektivitása miatt a pont és π melletti képe egybeesik. Ugyancsak három fixpont van a rögzített teljes négyoldal átlóin is, ezért azoknak is fixek a Hilbert-síkba eső pontjaik.

A Hilbert-sík minden olyan X pontjára, mely nincs a teljes négyoldal oldalain és átlóin, illeszkedik olyan x Hilbert-egyenes, mely a rögzített teljes négyoldal minden oldalának Hilbert-egyenesét metszi. A metszéspontok közül legalább három különböző, hiszen X nincs rajta a teljes négyoldal oldalain és átlóin. A metszéspontok fixpontok, így ismét a kettősvizony bijektivitása miatt az X pont és a $\pi(X)$ pont egybeesik.

Eszerint π a Hilbert-sík minden pontját fixen hagyja, vagyis ι a κ megszorítása a Hilbert-síkra.

A π bijektivitása folytán a κ kollineáció a $\mathcal{K}$ konvex halmaz határpontjait nem viheti belső pontokba. A κ kollineáció nem viheti $\mathcal{K}$ határpontjait külső pontba se, mert akkor a képponton át lenne legalább két olyan egyenes, melynek minden pontja külső, holott a határponton átmenő egyeneseken az egyetlen érintő kivételével mindig van belső pont. Tehát κ invariánsan hagyja a $\mathcal{K}$ határpontjait. ■

A bizonyításból kitűnik, hogy a Hilbert-sík minden izometrája egyértelműen meghatározza a projektív sík azon kollineációját, melynek megszorítottja.

4.1. Hiperbolikus izometriák és egybevágóságok

A $\mathbb{H}_\rho$ Bolyai-sík $\mathbb{H}_\rho$ Bolyai-síkra való leképezését (*hiperbolikus*) *izometriának* hívjuk, ha tartja a hiperbolikus távolságot. Előbbi tételeink alapján ezek pontosan a kúpszeletet invariánsan hagyó kollineációk. Utóbbiakról tudjuk, hogy legfeljebb két kúpszeletinvolúció szorzataként állnak elő, ami bizonyítja a következőt.

Tétel. *A Bolyai-sík minden izometriája legfeljebb két kúpszeletinvolúció szorzata.*

A most következő, sorban egymásra épülő tételek az euklidészi síknál használt eljárásokkal [Kurusa: Euklidészi geometria] bizonyíthatók. A teljesség kedvéért az első bizonyítását itt is megadjuk.

Tétel. *Azon pontok halmaza, melyek két különböző ponttól azonos távolságra vannak, egy egyenes.*

Bizonyítás. Legyen a két pont P és Q , és jelölje F azt az egyértelmű pontot az $e := PQ$ egyenesen, melyre $d(P, F) + d(F, Q) = d(P, Q)$. Vegyük az F ponton át azt az egyértelmű f egyenest, mely hiperbolikusan merőleges az e egyenesre. Az f egyenesre vonatkozó τ_f hiperbolikus tükrözés izometria, az e egyenest invariánsan hagyja és felcseréli a két hiperbolikus félsíkját, ezért $\tau_f(P) = Q$. Ugyanakkor a τ_f hiperbolikus tükrözés fixen hagyja az f minden pontját, így ezek a pontok egyforma távolságra vannak a P és Q pontoktól.

Ha $X \notin f$, akkor X az f egyenes valamelyik, mondjuk a P ponttal közös, félsíkjában van. Ekkor az $\overline{XQ}$ szakasz metszi az f egyenest valamely Y pontban, így a háromszög-egyenlőtlenség és az eddigiek alapján

$$d(X, P) < d(X, Y) + d(Y, P) = d(X, Y) + d(Y, Q) = d(X, Q),$$

ami igazolja a tételt. ■

A tételben állított egyenest a bizonyításban szereplő merőlegesség okán is *szakaszfelező merőlegesnek* nevezzük, a bizonyításbeli F pontot pedig *szakaszfelező pontnak*.

Izometriák alaptétele. *A hiperbolikus síkban akkor és csak akkor van valamely P, Q, R és P', Q', R' ponthármasokhoz olyan ι izometria, melyre $P' = \iota(P)$, $Q' = \iota(Q)$ és $R' = \iota(R)$, ha $d(P', Q') = d(P, Q)$, $d(Q', R') = d(Q, R)$ és $d(R', P') = d(R, P)$. Az ilyen ι izometria egyértelmű, ha P, Q, R nem kollineáris ponthármas.*

Az alaptétel azt mutatja, hogy a Bolyai-sík izometriáinak csoportja ugyanolyan gazdag, mint az euklidészi sík izometria-csoportja.

Tétel. (Konjugálás.) *Tetszőleges ι izometriára és τ_e tükrözésre $\iota \circ \tau_e \circ \iota^{-1} = \tau_{\iota(e)}$.*

Az izometriák fixpontok szerinti osztályozását bemutató alábbi tételben az egyenesek hiperbolikus merőlegességét a $\perp$ jel mutatja és az euklidészi módon való bizonyításhoz szükséges emlékeznünk arra, hogy két ultrapárhuzamos egyeneshez pontosan egy olyan egyenes van, mely mindkettőre merőleges.

Fixpont tétel. *Legyen ι egy izometria a $\mathbb{H}_q$ Bolyai-síkon.*

- (1) *Ha ι három nem egy egyenesre eső pontot fixen hagy, akkor identitás.*
- (2) *Ha ι fixen hagyja a $P_1 \neq P_2$ pontokat, akkor $\iota = \text{id}$, vagy $\iota = \tau_e$, ahol e a P_1 és P_2 pontok szakaszfelező merőlegese, τ_e pedig az erre vonatkozó tükrözés.*
- (3) *Ha ι fixen hagy egy P pontot, akkor $\iota = \text{id}$, vagy $\iota = \tau_f$, ahol a tengelyre tükrözés f egyenese tartalmazza a P pontot, vagy $\iota = \tau_f \tau_e$, ahol $P \in e \cap f$ (forgatás vagy elliptikus mozgás).*
- (4) *Bármely ι izometria vagy identikus, vagy $\iota = \tau_g$, vagy $\iota = \tau_g \tau_f$, ahol $g \cap f \neq \emptyset$, vagy $\iota = \tau_g \tau_f$, ahol g és f elpattanó (parabolikus mozgás), vagy $\iota = \tau_g \tau_f$, ahol g és f ugyanazon h egyenesre merőlegesek (eltolás vagy hiperbolikus mozgás), vagy $\iota = \tau_g \tau_f \tau_e$, ahol $g \perp f \perp e$ (csúsztatva tükrözés).*

A hiperbolikus sík valamely $\mathcal{A}$ részhalmazának a hiperbolikus sík valamely $\mathcal{B}$ részhalmazára való leképezését (*hiperbolikus egybevágóságnak* hívjuk, ha bijektív és az $\mathcal{A}$ részhalmaz pontjai közötti hiperbolikus távolságokat tartja.

Tétel. *A hiperbolikus síkon adott $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ halmazok akkor és csak akkor hiperbolikusan egybevágók, ha létezik a hiperbolikus sík olyan ι izometriája, melyre $\iota(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.*

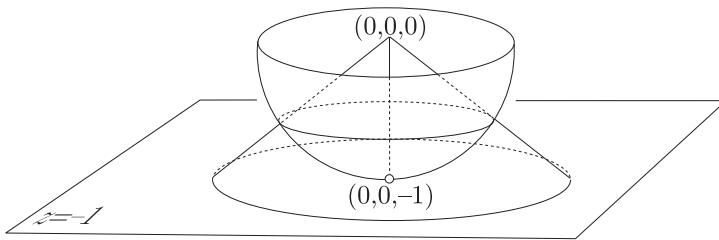
Ebből a tételből azonnal adódik, hogy két háromszög egybevágó, ha megfelelő oldalaik páronként azonos hosszúságúak.

4.2. Modellek

Minthogy a projektív sík kúpszeletei kollineációkkal egymásba vihetők, szabadon választhatunk kúpszeletet a Bolyai-sík tanulmányozásához. Ez lehetővé teszi, hogy a Bolyai-síkot az euklidészi síkon különféle módokon modellezzük, ami rendelkezésünkre bocsátja az euklidészi geometria eszköztárát a Bolyai-sík tanulmányozásához.

Egy modell legfontosabb tulajdonsága az a mennyiség, amelynek modellbeli és euklidészi értelemben vett értéke megegyezik. Ha a távolság ilyen, akkor izometrikus, ha a szög ilyen, akkor konform modelltől beszélünk. Előbbi esetben nyilván a Bolyai-sík egyenesei euklidészi egyenesek részei, az utóbbi esetben pedig a Bolyai-síkon eddig definiálatlan szögek és mérése és definiálása válik lehetségessé. (Olyan modell nem létezhet, mely egyszerre izometrikus és konform [Kurusa: Bevezetés a differenciálgeometriába].)

Vegyünk egy $\pi/4$ (45°) középponti szögű gömbsapkát.

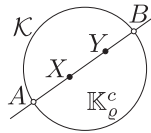


041. ábra

Ennek határa egy kúpszeletnek felel meg a projektív geometria origón átmenő egyenesekkel vett reprezentálásában, belső pontjai pedig éppen a kúpszelet belső pontjai, hiszen a gömbsapkát kimetsző síkkal párhuzamos főkörnek megfelelő projektív egyenes nem metszi a kúpszeletet, amiért teljes egészében a külső pontok halmazába esik. (Persze az is igaz, hogy a gömbsapka bármely pontján átmenő főkör pontosan kettő pontban metszi a gömbsapka határát, amiért az ilyen főköröknek megfelelő projektív egyenesek metszetei adják a belső pontokat.)

Tekintsük most az origón átmenő egyeneseknek a gömbsapkát a középpontjában érintő, mondjuk $z = -1$ egyenletű, síkkal vett metszéspontjait. Ez egy χ bijektív leképezést ad a Bolyai-sík és az euklidészi sík egységkörének belseje között.

Cayley–Klein-modell. Legyen $\mathbb{K}_\varrho^c$ a $\mathcal{K}$ euklidészi egységkör belső pontjainak halmaza, melyben egyeneseknek nevezzük a $\mathcal{K}$ kör nyílt húrjait, és az $X, Y \in \mathbb{K}_\varrho^c$ pontok közötti távolságot $d(X, Y) = \varrho |\ln \sqrt{(ABXY)}|$ adja, ahol A és B a $\mathcal{K}$ kör X és Y pontra illeszkedő húrjának a körvonalra eső pontjai. ▲



050. ábra

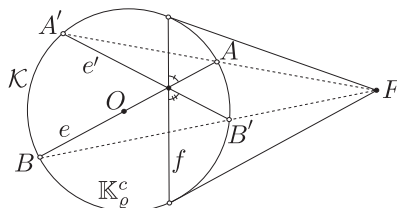
Tétel. A $\mathbb{K}_\varrho^c$ Cayley–Klein modell izometrikus a ϱ sugarú $\mathbb{H}_\varrho$ Bolyai-síkkal.

Bizonyításképpen elegendő arra gondolni, hogy a χ tartja az egyeneseket, mert a projektív pontok pontosan akkor kollineárisak, ha a nekik megfelelő egyenesek közös euklidészi síkba esnek. A χ tartja a kettősviszonyt is, mivel a kollineáris projektív pontnégyesek kettősviszonya a Papposz-tétel folytán megegyezik az őket reprezentáló egyenesek kettősviszonyával, ami a Papposz-tétel miatt megegyezik bármely egyenesen vett metszéspontjaik kettősviszonyával.

A szögeket nem definiáltuk a Bolyai-síkban, de a Cayley–Klein modellben az euklidészi geometria alapján könnyű megtenni: kötött szögön az egy pontból kiinduló rendezett félegyenespárokat értjük. Két kötött szöget i -relációban lévőknek mondunk, ha a Bolyai-sík valamely izometriája egymásba viszi őket. Az i -reláció ekvivalencia-reláció, mely pontosan ugyanúgy látható be, mint az euklidészi esetben [Kurusa: Euklidészi geometria]. Irányítatlan szabad szögnek nevezzük a kötött szögek ezen ekvivalencia-reláció szerinti ekvivalencia-osztályait.

Amire a trigonometriához szükség van, az a szabad szögek mérése. Ez azt jelenti, hogy a kötött szögekhez olyan nem negatív számokat kell rendelni, melyeket a Bolyai-sík izometriái nem változtatnak meg.

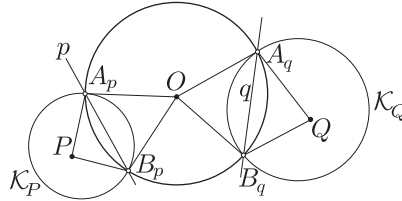
A szögek ilyen mérésére nem alkalmas a Cayley–Klein modell félegyenespárjaihoz rendelt euklidészi szögmérték, mert nem invariáns a Bolyai-sík izometriáival szemben. Tekintsük ugyanis az euklidészi egységkör e átmérőjét és egy ezt metsző, de nem átmérő f húrvát. Tudjuk, hogy az e hiperbolikus egyenes f hiperbolikus egyenesre vonatkozó e' hiperbolikus tükörképének határpontjai, valamint az e határpontjai és az f egyenes F pólusa kollineárisak.



80. ábra

Az e és f euklidészi szöge egy vonással, az e' és f szöge két vonással van jelölve az ábrán, és nyilván nem egyenlő mértékűek, hacsak az e egyenes nem merőleges az f húrra, vagyis $(\tau_f(e), f) \triangleleft \neq (e, f) \triangleleft$, ahol τ_f a hiperbolikus tükrözés.

A hiperbolikus sík izometriái a Cayley–Klein modellben nem csak az egyeneseket tartják, hanem az alapkört merőlegesen metsző köröket is, ugyanis egy izometria a projektív síknak valamely, az alapkört invariánsan hagyó ι kollineációjának megszorítása a modell pontjaira. Az ι kollineáció bármely q egyenest valamely p egyenesbe visz, így ezeknek a körvonallal vett A_q, B_q és A_p, B_p metszéspontjait, valamint az ezekbe húzott érintők $Q = \rho(q)$ és $P = \rho(p)$ metszéspontjait is egymásba viszi (itt ρ a kúpszeletet meghatározó valamely polaritás), tehát az ι kollineáció a Q középpontú $|QA_q|$ sugarú kört a P középpontú $|PA_p|$ sugarú körbe transzformálja. (Emlékeztetünk, hogy a projektív kollineációk a kúpszeleteket kúpszeletekbe transzformálják!)



100. ábra

Érdemes felfigyelni rá, hogy ráadásul bármely a Cayley–Klein modell határát merőlegesen metsző K_P és K_Q kör esetén, ezek középpontja rendre P és Q , van őket egymásba vivő ι izometria, sőt kettő is, hiszen a körök által az egységkörből ki-metszett A_p, B_p és A_q, B_q határpont-párok elvárt transzformációja — és ebből éppen kettő van, mégpedig az $(A_p \mapsto A_q, B_p \mapsto B_q)$ és $(A_p \mapsto B_q, B_p \mapsto A_q)$ — meghatározza a kúpszeletinvolúciót.

Az alábbi tételben az egységkör belső pontjait az origó középponttal és egy u egységvektorral megadott euklidészi polárkoordinátákkal látjuk el, vagyis a sík pontjait azzal a (φ, r) számpárral adjuk meg, amelynél az origóból az onnan $r \geq 0$ euklidészi távolságra lévő pontba induló félegyenes φ euklidészi mértékű szöget zár be az u egységvektorral.

Tétel. A $\Phi: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ transzformáció, melyre $\Phi(\varphi, r) = (\varphi, \frac{2r}{1+r^2})$, bijektíven képezi a $\mathcal{K}$ egységkörlapot önmagára, őrzi az origón áthaladó egyeneseket, az egységkört merőlegesen metsző minden körívet a körív metszéspontjait összekötő húrba visz, és a kettőviszonyt a négyzetébe viszi.

Bizonyítás. Mivel $0 \leq r < 1 < 1/r$ esetén a számtani és mértani közép közti

$A\hat{X}\bar{X}\triangle \sim X\hat{X}B\triangle$ és $A\hat{X}X\triangle \sim \bar{X}\hat{X}B\triangle$ hasonlóságok alapján az

$$\frac{|A\bar{X}|}{|BX|} = \frac{|A\hat{X}|}{|\hat{X}X|} = \frac{|\bar{X}\hat{X}|}{|\hat{X}B|} \quad \text{és} \quad \frac{|AX|}{|B\bar{X}|} = \frac{|A\hat{X}|}{|\hat{X}\bar{X}|} = \frac{|X\hat{X}|}{|\hat{X}B|}$$

aránypárokat állíthatjuk fel, melyekből

$$\frac{|A\hat{X}|}{|\hat{X}B|} = \frac{|A\hat{X}|}{|\hat{X}X|} \frac{|X\hat{X}|}{|\hat{X}B|} = \frac{|A\bar{X}|}{|BX|} \frac{|AX|}{|B\bar{X}|} = \frac{|A\bar{X}|}{|\bar{X}B|} \frac{|AX|}{|XB|}$$

adódik.

Mivel OA és OB is a $\mathcal{C}$ kör érintője, $OAX\triangleleft = O\bar{X}A\triangleleft$ és $OBX\triangleleft = O\bar{X}B\triangleleft$, amiért $OAX\bar{X}\triangle \sim OXA\triangle$ és $OB\bar{X}\triangle \sim OXB\triangle$ teljesül. Ezek alapján

$$\frac{|A\bar{X}|}{|AX|} = \frac{|O\hat{X}|}{|OA|} = \frac{|OA|}{|OX|} \quad \text{és} \quad \frac{|B\bar{X}|}{|BX|} = \frac{|O\hat{X}|}{|OB|} = \frac{|OB|}{|OX|},$$

amiért a nyilvánvaló $|OB| = |OA|$ egyenlőség okán $|A\bar{X}|/|AX| = |B\bar{X}|/|BX|$. Előbbi egyenlőségünkbe ezt beírva

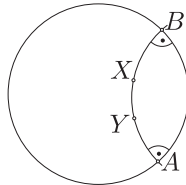
$$\frac{|A\hat{X}|}{|\hat{X}B|} = \frac{|A\bar{X}|}{|\bar{X}B|} \frac{|AX|}{|XB|} = \left(\frac{|AX|}{|XB|} \right)^2$$

következik. Figyelembe véve, hogy

$$(ABX) = \frac{\sin A\bar{X}X\triangleleft}{\sin X\bar{X}B\triangleleft} = \frac{|AX|/2r}{|XB|/2r} = \frac{|AX|}{|XB|},$$

kapjuk, hogy $(ABX)^2 = (AB\hat{X})$, amiért a Φ transzformáció a kettősviszonyokat a négyzetükre változtatja. Ezzel a tételt beláttuk. ■

Poincaré-féle körmodell. Legyen $\mathbb{K}_\varrho^p$ az $\mathcal{K}$ euklidészi egységkör belső pontjainak halmaza, melyben egyeneseknek nevezzük az átmérőket és a $\mathcal{K}$ kört merőlegesen metsző körök $\mathcal{K}$ belsejébe eső íveit, az $X, Y \in \mathbb{K}_\varrho^p$ pontok közötti távolság pedig $d(X, Y) = \varrho |\ln(ABXY)|$, ahol A és B az X és Y pontra illeszkedő, a $\mathcal{K}$ kört merőlegesen metsző kör két metszéspontja a $\mathcal{K}$ körrel. ▲



110. ábra

Tétel. $A \Phi: \mathbb{K}_\varrho^p \rightarrow \mathbb{K}_\varrho^c$ kollineáció izometria.

Bizonyítás. Előbbi tételünk szerint Φ bijektív leképezés, mely a $\mathbb{K}_\varrho^p$ Poincaré-féle körmodell egyeneseit a $\mathbb{K}_\varrho^c$ Cayley–Klein-modell egyeneseibe viszi, vagyis kollineáció, ezért elég látni, hogy Φ izometria is.

Jelölje d_ϱ^p a Poincaré-féle, d_ϱ^c pedig a Cayley–Klein-féle távolságmérést. Ekkor ezek definíciója és előbbi tételünk alapján

$$\begin{aligned} d_\varrho^p(X, Y) &= \varrho |\ln(ABXY)| = \varrho |\ln \sqrt{(ABXY)^2}| = \varrho |\ln \sqrt{(\Phi(A)\Phi(B)\Phi(X)\Phi(Y))}| \\ &= \varrho |\ln \sqrt{(AB\Phi(X)\Phi(Y))}| = d_\varrho^c(\Phi(X), \Phi(Y)). \end{aligned}$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

Következmény. A $\mathbb{K}_\varrho^p$ Poincaré-féle körmodell izometrikus a ϱ sugarú $\mathbb{H}_\varrho$ Bolyai-síkkal.

Tétel. A $\mathbb{H}_\varrho$ Bolyai-sík hiperbolikus tükrözéseinek a $\mathbb{K}_\varrho^p$ Poincaré-féle körmodellben a hiperbolikus egyeneseknek megfelelő ívek köreire vonatkozó inverziók felelnek meg.

Bizonyítás. Tekintsünk egy a $\mathcal{K}$ egységkört merőlegesen metsző C középpontú $\mathcal{C}$ kört. Világos, hogy a $\mathcal{C}$ körre vonatkozó inverzió

- az egységkört helyben hagyja, hiszen az merőlegesen metszi,
- az egységkört merőlegesen metsző köröket origón átmenő egyenesekbe, vagy az egységkört merőlegesen metsző körökbe viszi,
- az origón átmenő egyeneseket az egységkört merőlegesen metsző körökbe viszi,
- a $\mathcal{C}$ alapkört pontonként helyben hagyja,
- felcseréli az egységkör lap azon két részét, amire az inverzió $\mathcal{C}$ alapköre osztja, hiszen az inverzió az alapköre belső és külső pontjait felcseréli.

Lefordítva ezeket a tulajdonságokat a Bolyai-síkra, azt látjuk, hogy az inverzió egy olyan kúpszelet-involúció, mely fixen hagy egy egyenest. Ebből következik, hogy ez a Bolyai-sík egy hiperbolikus tükrözése. ■

Mivel az inverziók tartják a szögek euklidészi mértékét [Kurusa: Euklidészi geometria], és iménti eredményünk alapján ezek hiperbolikus izometriák is, következik, hogy a Poincaré-féle körmodellben látható euklidészi szögek — vagyis két kör metszésénél a körök érintői által alkotott szög —, euklidészi mérése teljesíti a szögek hiperbolikus mérésére vonatkozó invariancia-követelményünket. Minthogy ez nyilván fordítva is így van, a Bolyai-síkon a szögek mérése konstans szorzó erejéig megegyezik a Poincaré-féle körmodellbeli euklidészi méréssel.

Definíció. A $\mathbb{H}_\varrho$ Bolyai-sík szabad szögét úgy mérjük, hogy vesszük egy kötött szögének a Poincaré-féle körmodellben megfelelő kötött szöge euklidészi mértékét. Ezt *hiperbolikus szögmértéknek* nevezzük. ▲

Definíciónk tartalmát úgy is kifejezhetjük, hogy a Poincaré-féle körmodell a Bolyai-sík konform képe.

Tekintsük a $\Phi: \mathbb{H}_\varrho \rightarrow \mathbb{K}_\varrho^c$ izometrikus kollineációt, legyen $O \in \mathbb{H}_\varrho$ az a pont, melynek $O' = \Phi(O)$ képe a $\mathbb{K}_\varrho^c$ Cayley–Klein-modell origója. Legyen $X \in \mathbb{H}_\varrho$ az O ponttól h hiperbolikus távolságra, az OX egyenes messe $\mathbb{H}_\varrho$ határát az A és B pontokban, és használjuk az

$$A' = \Phi(A), B' = \Phi(B), X' = \Phi(X) \text{ és } r = \begin{cases} |O'X'| & \text{ha } X \in \overline{OA}, \\ -|O'X'| & \text{ha } X \in \overline{OB} \end{cases}$$

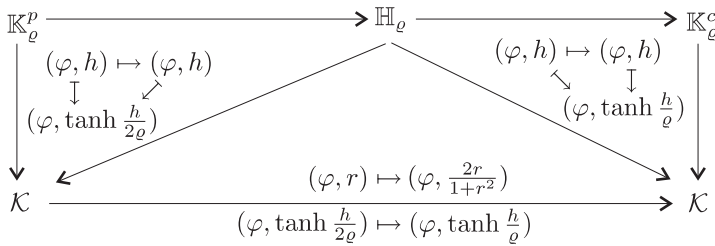
jelöléseket. Ekkor $e^{2h/\varrho} = (ABOX) = (A'B'O'X') = \frac{1/2}{1/2} : \frac{1-r}{1+r} = \frac{1+r}{1-r}$, amiből $r = \frac{e^{h/\varrho} - e^{-h/\varrho}}{e^{h/\varrho} + e^{-h/\varrho}} = \tanh \frac{h}{\varrho}$ következik.

Most vizsgáljuk a $\Psi: \mathbb{H}_\varrho \rightarrow \mathbb{K}_\varrho^p$ izometrikus kollineációt, és legyen $O \in \mathbb{H}_\varrho$ az a pont, melynek $O' = \Psi(O)$ képe a $\mathbb{K}_\varrho^p$ Poincaré-féle körmodell origója. Legyen $X \in \mathbb{H}_\varrho$ az O ponttól h hiperbolikus távolságra, az OX egyenes messe $\mathbb{H}_\varrho$ határát az A és B pontokban, és használjuk az

$$A' = \Psi(A), B' = \Psi(B), X' = \Psi(X) \text{ és } r = \begin{cases} |O'X'| & \text{ha } X \in \overline{OA}, \\ -|O'X'| & \text{ha } X \in \overline{OB} \end{cases}$$

jelöléseket. Ekkor $e^{h/\varrho} = (ABOX) = (A'B'O'X') = \frac{1/2}{1/2} : \frac{1-r}{1+r} = \frac{1+r}{1-r}$, amiből $r = \frac{e^{h/2\varrho} - e^{-h/2\varrho}}{e^{h/2\varrho} + e^{-h/2\varrho}} = \tanh \frac{h}{2\varrho}$ következik.

Mindegyik síkon rögzítve az origót és polár-koordinátáikkal jelölve a pontokat, a következő diagram foglalja össze az eddigieket.



140. ábra

A szög hiperbolikus mérése és a modellek közti kapcsolat birtokában világos, hogy a Cayley–Klein-modellben

- az origón átmenő egyenesek egymásközti, és
- az origón átmenő, valamint ezekre hiperbolikusan merőleges egyenesek

euklidészi szögmértéke megegyezik a hiperbolikus szögmértékkel.

Fontos megjegyezni, hogy bár az origó láthatólag speciális helyzetnek örvend a modellekben, ez csak a modellek sajátossága, hiperbolikus értelemben az origó nem különböztethető meg a többi ponttól.

Modelljeink kettősvizonyt tartó bijektív transzformálásával újabb síkbeli modellek nyerhetők. Például a Poincaré-féle körmodell olyan körre vonatkozó inverziója, melynek középpontja a $\mathcal{K}$ határoló körön van, a Poincaré-féle félsíkmodellhez vezet, melyben az egyenesek a félsík határát merőlegesen metsző körök. A részletekre és a további modellekre itt most nem térünk ki, de megjegyezzük, hogy kétköpenyű forgáshiperboloidon a Bolyai-sík olyan modellje hozható létre, aminek különféle vetítéseiből az itt tárgyalt két modell egyszerűen nyerhető [Kurusa: Bevezetés a differenciálgeometriába].

Tekintsük most modelljeinket a komplex számsík $\mathbb{C}_{\leq 1} = \{z : |z| \leq 1\}$ egységkörlapjaként. Ekkor természetesen adódnak a $\delta_p: \mathbb{K}_\varrho^p \rightarrow \mathbb{C}_{\leq 1}$ és $\delta_c: \mathbb{K}_\varrho^c \rightarrow \mathbb{C}_{\leq 1}$, valamint ezekből a $\Delta_p: \mathbb{H}_\varrho \rightarrow \mathbb{C}_{\leq 1}$ és $\Delta_c: \mathbb{H}_\varrho \rightarrow \mathbb{C}_{\leq 1}$ koordinátázások.

Ismert, és a Függelékben is megtalálható, hogy a $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_{\leq 1}$ komplex számok

$$(z_1 z_2 z_3 z_4) := \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3} : \frac{z_4 - z_1}{z_2 - z_4}$$

komplex kettősvizonya akkor és csak akkor valós szám, ha a $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_{\leq 1}$ komplex számok közös egyenesre vagy közös körre esnek.

A Δ_p és Δ_c koordinátázásokban a $\mathbb{H}_\varrho$ Bolyai-sík izometriái a $\mathbb{C}_{\leq 1}$ komplex egységkörlapot bijektíven, az egyeneseket egyenesekbe, az egységkörvonalat merőlegesen metsző köröket az egységkörvonalat merőlegesen metsző körökbe képezik, ami iménti észrevételünk alapján pontosan azt jelenti, hogy tartják a komplex kettősvizony *valósságát*.

A függelékben közölt eredmények alapján pontosan a konjugálással kiegészült $f(z) = k \frac{z - \ell}{1 - z\bar{\ell}}$ alakú ($|k| = 1$ és $|\ell| < 1$) törtlineáris leképezések tartják a komplex kettősvizony valósságát. Ez alapján konkrét formában tudjuk megadni a Bolyai-sík izometriáit.

Tétel. A $\mathbb{H}_\varrho$ Bolyai-sík izometriái a Δ_p és Δ_c koordinátázásban is az

$$f_{k,\ell}(z) = k \frac{z - \ell}{1 - z\bar{\ell}} \quad \text{és} \quad f_{k,\ell}^-(z) = k \frac{\bar{z} - \ell}{1 - \bar{z}\bar{\ell}}$$

alakú leképezések, ahol $|k| = 1$ és $|\ell| < 1$.

Az izometriák ilyen explicit formájának rendelkezésre állása lehetővé teszi, hogy az izometriákról igazolt állításainkat egyszerű számolással bizonyítsuk, aminek átgondolása az érdeklődő olvasóra marad.

Világos, hogy $|XY| = \tanh c \sin \alpha$, és $|AB|/2 = \sqrt{1 - \tanh^2 c \cos^2 \alpha}$, amiért $(|AB|/2)^2 - |XY|^2 = 1 - \tanh^2 c = 1/\cosh^2 c$. Ezt kétszer is felhasználva

$$\begin{aligned} \sinh d(X, Y) &= \sinh |\ln \sqrt{(ABXY)}| = \sinh \left| \frac{1}{2} \ln \frac{|BY|}{|AY|} \right| = \sinh \left| \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{1}{2}|AB| + |XY|}{\frac{1}{2}|AB| - |XY|} \right| \\ &= \sinh \left| \frac{1}{2} \ln \frac{(\frac{1}{2}|AB| + |XY|)^2}{1/\cosh^2 c} \right| = \sinh \left[\ln \left(\left(\frac{1}{2}|AB| + |XY| \right) \cosh c \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2}|AB| + |XY| \right) \cosh c - \frac{1}{(\frac{1}{2}|AB| + |XY|) \cosh c} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2}|AB| + |XY| \right) \cosh c - \left(\frac{1}{2}|AB| - |XY| \right) \cosh c \right] \\ &= |XY| \cosh c = \sinh c \sin \alpha \end{aligned}$$

bizonyítja az állítást derékszögű háromszögre.

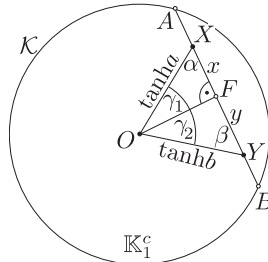
Általános háromszög C csúcsából az AB egyenesre bocsájtott merőleges messe az AB egyenest a T pontban, és legyen $m = d(C, T)$. Ekkor az ACT és BCT háromszögek a T csúcsuknál derékszögűek, ezért $\sin \alpha \sinh b = m = \sin \beta \sinh a$, ami bizonyítja a tételt. ■

Hiperbolikus koszinusztétel. Az ABC hiperbolikus háromszögben

- (1) $\cosh \frac{c}{\varrho} = \cosh \frac{a}{\varrho} \cosh \frac{b}{\varrho} - \sinh \frac{a}{\varrho} \sinh \frac{b}{\varrho} \cos \gamma$ (oldalra),
- (2) $\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cosh \frac{c}{\varrho}$ (szögre).

Bizonyítás. Elegendő a $\mathbb{K}_1^c$ modellben bizonyítani, és feltehetjük, hogy a háromszög C csúcsa az origóba esik. Az (1) állítást visszavezetjük a szinusztételre.

A háromszög origóval szemközti XY oldalán legyen F az origó merőleges vetülete, A és B az XY egyenes két határpontja. Az X és Y csúcsokkal szemben lévő oldalak hossza rendre b és a , az OF magasságvonal hiperbolikus hossza m . A háromszög origónál lévő szöge γ , az OF magasságvonal OX és OY oldalakkal bezárt szöge rendre γ_1 és γ_2 .



160. ábra

Legyen $x = d(F, X)$ és $y = d(F, Y)$, melyekre a szinusztétel szerint $\sinh x = \sinh a \sin \gamma_1$ és $\sinh y = \sinh b \sin \gamma_2$ teljesül.

Az ábrán a $d(X, Y) = x + y$ eset látható, de $F \notin \overline{XY}$ esetén $d(X, Y) = |x - y|$, ezért

$$\begin{aligned} \cosh d(X, Y) &= \cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \\ &= \underbrace{\sqrt{1 + \sinh^2 a \sin^2 \gamma_1} \sqrt{1 + \sinh^2 b \sin^2 \gamma_2}}_{(*)} \pm \sinh a \sin \gamma_1 \sinh b \sin \gamma_2, \end{aligned}$$

amiben az

$$\begin{aligned} 1 + \sinh^2 a \sin^2 \gamma_1 &= 1 + \sinh^2 a (1 - \cos^2 \gamma_1) = \cosh^2 a - \sinh^2 a \cos^2 \gamma_1 \\ &= \cosh^2 a (1 - \cos^2 \gamma_1 \tanh^2 a), \\ 1 + \sinh^2 b \sin^2 \gamma_2 &= \cosh^2 b (1 - \cos^2 \gamma_2 \tanh^2 b), \\ \cos \gamma_1 \tanh a &= \cos \gamma_2 \tanh b, \end{aligned}$$

azonosságokat felhasználva

$$\begin{aligned} (*) &= \cosh a \cosh b (1 - \cos^2 \gamma_1 \tanh^2 a) \\ &= \cosh a \cosh b (1 - \cos \gamma_1 \tanh a \cos \gamma_2 \tanh b) \end{aligned}$$

adódik, amiért

$$\begin{aligned} \cosh d(X, Y) &= \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b (\cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \mp \sin \gamma_1 \sin \gamma_2) \\ &= \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos(\gamma_1 \pm \gamma_2) \\ &= \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma, \end{aligned}$$

és ez éppen a bizonyítandó (1) állítás.

Ahhoz, hogy a (2) formulát bizonyítsuk, előbb vezessük be rendre az α és β jelölést az OXY háromszög X és Y pontjánál lévő hiperbolikus szögmértékre. Vegyük észre, hogy a szinusztétel és (1) derékszögű háromszögre való alkalmazásával

$$\begin{aligned} \sinh m &= \sinh a \sin \alpha = \sinh b \sin \beta \\ \cosh m &= \frac{\cosh a}{\cosh x} = \frac{\cosh b}{\cosh y}, \\ \cos \gamma_1 &= \frac{\tanh m}{\tanh a} = \frac{\cosh a \sinh m}{\sinh a \cosh m} = \frac{\cosh a (\sinh a \sin \alpha)}{\sinh a (\cosh a / \cosh x)} = \cosh x \sin \alpha, \\ \cos \gamma_2 &= \cosh y \sin \beta, \\ \cos \alpha &= \cosh m \sin \gamma_1, \\ \cos \beta &= \cosh m \sin \gamma_2, \end{aligned}$$

ahol az utolsó három sor a $\cos \gamma_1$ formulájának analóg alkalmazása derékszögű háromszögekre. Ezekből

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin \beta \cosh c &= \sin \alpha \sin \beta (\cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma) \\ &= \sin \alpha \sin \beta \cosh^2 m \cosh x \cosh y - \sinh^2 m \cos \gamma \\ &= \cosh^2 m \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 - (\cosh^2 m - 1) \cos \gamma \\ &= \cosh^2 m \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 + \cos \gamma \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma \end{aligned}$$

következik, ami bizonyítja a tételt. ■

Tétel. *A C csúcsánál derékszögű háromszögben érvényesek a következők.*

- (Pitagorasz-tétel) $\cosh \frac{c}{\varrho} = \cosh \frac{a}{\varrho} \cosh \frac{b}{\varrho}$.
- (Befogótétel) $\tanh \frac{b}{\varrho} = \tanh \frac{c}{\varrho} \cos \alpha$.

Az oldalra vonatkozó Pitagorasz-tétel a koszinusztétel egyszerű alkalmazása, a befogótételt pedig a bizonyításban már használtuk is.

Egy tetszőleges m hosszúságú szakasz egyik végpontjában felvéve az e egyenesére merőleges f egyenest, majd a másik végpontjában az f egyenessel elpattanó egyik egyenest, egy egyszeresen aszimptotikus derékszögű háromszöget kapunk. Két ilyen egyszeresen aszimptotikus derékszögű háromszög pontosan akkor egybevágó, ha a véges befogók hossza egyenlő, ezért beszélhetünk *szakasz párhuzamossági szögéről*, mely az m véges befogóval rendelkező egyszeresen aszimptotikus derékszögű háromszögben a nem elpattanó és nem derékszögre szerkesztett csúcsnál kialakul. Euklidészi síkon ez a szög az m hosszúságtól függetlenül derékszög.

Tétel. *A ϱ sugarú Bolyai-síkon a b hosszúságú szakasz $\varphi(b)$ párhuzamossági szögére $\cos \varphi(b) = \tanh(b/\varrho)$.*

A bizonyítás mindössze annyi, hogy előbbi tételünk (2) állításában vesszük a $c \rightarrow \infty$ határátmenetet, mely esetben $\alpha \rightarrow \varphi(b)$.

A párhuzamossági szögre hagyományosan a fentivel ekvivalens $\operatorname{tg}(\varphi(b)/2) = e^{-b}$ egyenletet szokás megadni, amit a fentiből a szögfüggvények azonosságai adnak.

A párhuzamossági szög 0 és $\pi/2$ közé esik, de ezen értékek egyikét sem veszi fel, ami azt mutatja, hogy egyszeresen aszimptotikus derékszögű háromszögben a szögösszeg kisebb, mint π .

Tétel. *Minden háromszög belső szögeinek összege kisebb mint π .*

Bizonyítás. Tekintsük az ABC háromszög C csúcsát a Poincaré-féle körmodell origójában. Ekkor a háromszög két ezen átmenő oldala euklidészi értelemben is egyenes, az origón nem átmenő c oldal pedig euklidészi értelemben olyan körív, melynek $\mathcal{K}$ köre merőlegesen metszi az egységkört. Mivel a $\mathcal{K}$ kör minden nem nulla hosszúságú húrja pozitív szögeket zár be a végpontjaiban a kört érintő egyenesekkel, az ABC hiperbolikus háromszög A és B pontnál lévő szögei, melyek a körív és az oldalegyenesek euklidészi szögeivel egyeznek meg, kisebbek az ABC pontokkal megadott euklidészi háromszög A és B pontnál lévő szögeinél. Mivel utóbbi euklidészi háromszög szögösszege π , ez bizonyítja a tételt. ■

A szögösszegnek a π szögtől való, most kimutatott $\delta = \alpha + \beta + \gamma - \pi$, mindig negatív eltérését *szögdefektusnak* hívjuk.

4.4. Területmérés

A területmérés bevezetéséhez ismét az euklidészi sík és a gömbfelület esetében is bevált átdarabolási eljárást használjuk a hiperbolikus sokszögek $\mathcal{P}(\mathbb{H}_\rho)$ halmazában.

Az $t: \mathcal{P}(\mathbb{H}_\rho) \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést területmérésnek nevezzük, ha minden hiperbolikus sokszögre

- (1) $t \geq 0$,
- (2) $t = 0$ akkor és csak akkor, ha a sokszög üres,
- (3) ha a P_{12} hiperbolikus sokszöget egy egyenes a P_1 és P_2 hiperbolikus sokszögre vágja, akkor $t(P_1) + t(P_2) = t(P_{12})$, és
- (4) minden izometrikus ι transzformációra $t \circ \iota = t$.

Jegyezzük meg, hogy a háromszorosan aszimptotikus háromszögek izometrikusak egymással (egybevágóak), mert a kúpszelet bármely két ponthármához pontosan egy kúpszeletet invariánsan hagyó kollineáció létezik, mely az egyik ponthármast a másikba viszi, ezért következő tételünk első állításában a hangsúly a háromszorosan aszimptotikus háromszög területének végtességén van.

Tétel. *Pontosan egy területmérés létezik. Ez minden háromszorosan aszimptotikus háromszögre ugyanazt a véges T valós számot adja, és*

$$t(ABC\triangle) = (\pi - \alpha - \beta - \gamma) \frac{T}{\pi},$$

ahol α , β és γ az ABC háromszög szögei.

Bizonyítás. Az állításokat több, egymásra épülő lépésben igazoljuk.

A területmérés létezésének igazolásához definiáljuk a t függvényt egy hiperbolikus sokszögre úgy, hogy választunk egy $T > 0$ konstans valós számot, majd a

sokszöget valamely A_1 csúcsát a többivel összekötő egyenesek — ezek az átlók — mentén háromszögekre bontjuk, ezekre kiszámítjuk a $(\pi - \alpha - \beta - \gamma)\frac{T}{\pi}$ értéket, és ezen értékeket összeadjuk.

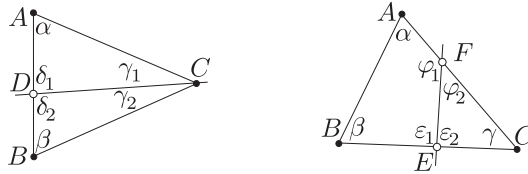
Mivel a háromszögek csúcsai a sokszög csúcsaiba esnek, és az A_1 csúcsban éppen egyfel több háromszög csúcsa van, mint ahány átló, ezen értékek összege $(n - 2)\pi - \sum_i \alpha_i$, ahol α_i az n -szög i -edik csúcsban lévő belső szög. Ez az érték független a felbontástól, így elég látnunk, hogy a

$$t(A_1 A_2 \dots A_n) = \left((n - 2)\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \frac{T}{\pi}$$

függvény eleget tesz a területmérésre kirótt négy követelménynek és a háromszorosan aszimptotikus háromszögekhez a T számot rendeli.

Valójában csak (3) igazolása nem teljesen nyilvánvaló.

A (3) tulajdonság bizonyítását két esetre bontjuk aszerint, hogy a háromszöget kettévágó egyenes átmegy egy csúcson, vagy elkerüli a csúcsokat.



200. ábra

Ha a kettévágó egyenes átmegy a C csúcson, akkor

$$\begin{aligned} t(ACD) + t(CBD) &= (\pi - \alpha - \gamma_1 - \delta_1) \frac{T}{\pi} + (\pi - \beta - \gamma_2 - \delta_2) \frac{T}{\pi} \\ &= (\pi - \alpha - \beta - \gamma) \frac{T}{\pi} = t(ABC), \end{aligned}$$

ha pedig elkerüli a csúcsokat, akkor

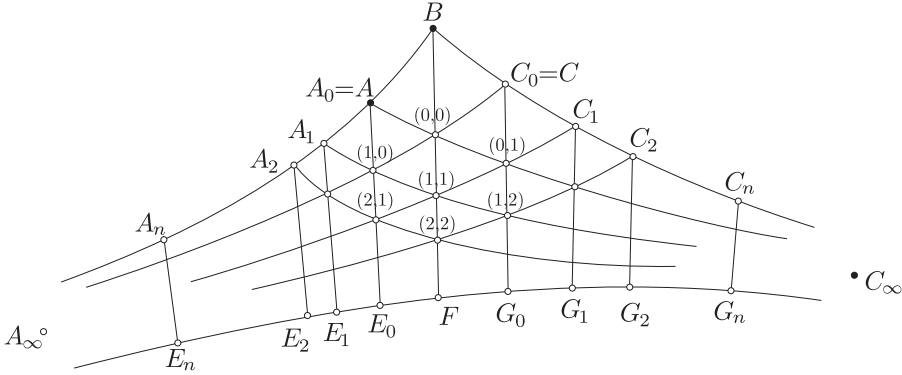
$$\begin{aligned} t(ABFE) + t(EFC) &= (2\pi - \alpha - \beta - \varphi_1 - \varepsilon_1) \frac{T}{\pi} + (\pi - \varepsilon_2 - \varphi_2 - \gamma) \frac{T}{\pi} \\ &= (\pi - \alpha - \beta - \gamma) \frac{T}{\pi} = t(ABC) \end{aligned}$$

igazolja a (3) állítást.

Az unicitás igazolásához legyen t egy területmérés.

1. Legyen ABC_∞ egy egyszeresen, a C_∞ csúcsában aszimptotikus háromszög. Vegyük az ABC_∞ háromszög B csúcsánál a szögfelezőt, és tükrözzük erre az ABC_∞

háromszöget. Jelölje A_∞ a C_∞ tükörképét, C pedig az A tükörképét.



170. ábra

Legyen a B csúcs $A_\infty C_\infty$ egyenesen lévő merőleges vetülete F . Világos, hogy a BF egyenes az ABC_∞ háromszög B csúcsánál lévő szögfelező, hiszen a BF egyenesre való tükrözés a B csúcsot fixen hagyja, az A_∞ és C_∞ pontokat viszont felcseréli (hiszen a hiperbolikus tükrözés megőrzi a szögeket, így a tükrözés tengelyére merőleges egyenesek invariánsak). Eszerint az A pont BF egyenesre vonatkozó C tükörképe a BC_∞ egyenesre esik, és így az $AC_\infty \cap CA_\infty$ pont a BF egyenesre esik.

Legyen $A_0 = A$, $C_0 = C$, E_0 az A_0 , G_0 pedig a C_0 merőleges vetülete az $A_\infty C_\infty$ egyenesre. Az iménti BF egyenesre vonatkozó érvelésünk értelmében az $E_0 A_0$ egyenes felezi az A_0 pontba összefutó $A_\infty A_0$ és $A_0 C_\infty$ egyenesek alkotta szöget, és ugyanígy a $G_0 C_0$ egyenes felezi a C_0 pontba összefutó $A_\infty C_0$ és $C_0 C_\infty$ egyenesek alkotta szöget.

Ha valamely $i \in \mathbb{N}$ természetes számra az A_i , C_i , E_i és G_i pontok már meghatározásra kerültek, akkor legyen

- az A_{i+1} pont a $C_i A_\infty$ egyenes $A_i E_i$ egyenesre vett tükörképének a BA_∞ egyenessel vett metszete,
- a E_{i+1} az A_{i+1} merőleges vetülete az $A_\infty C_\infty$ egyenesre,
- a C_{i+1} pont az $A_i C_\infty$ egyenes $C_i G_i$ egyenesre vett tükörképének a BC_∞ egyenessel vett metszete, és
- a G_{i+1} a C_{i+1} merőleges vetülete az $A_\infty C_\infty$ egyenesre.

Ismét a BF egyenesnél alkalmazott érvelés szerint az $E_i A_i$ egyenes felezi az A_i pontba összefutó $A_\infty A_i$ és $A_i C_\infty$ egyenesek alkotta szöget, a $G_i C_i$ egyenes pedig felezi a C_i pontba összefutó $A_\infty C_i$ és $C_i C_\infty$ egyenesek alkotta szöget. Ez egyben

azt is jelenti, hogy az $m, n < i$ természetes számokra

$$A_m C_\infty \cap A_\infty C_n \in \begin{cases} BF & \text{ha } m = n, \\ C_{n-m-1} G_{n-m-1} & \text{ha } m < n, \\ A_{m-n-1} E_{m-n-1} & \text{ha } m > n. \end{cases}$$

Az eljárást folytatva, az indukciós elv szerint a fentiek minden $i, m, n \in \mathbb{N}$ természetes számra érvényesek maradnak, tehát eljárásunk a kétszeresen aszimptotikus $A_\infty B C_\infty$ háromszöget végtelen sok kis háromszögre bontja úgy, hogy mindegyik kis háromszögnek egyik oldala valamely $E_i A_i$ vagy $G_i C_i$ egyenes része. Az eljárás során keletkező egyenesek metszéspontjait koordinátázhatjuk azzal, hogy mely $A_m C_\infty$ és $C_n A_\infty$ egyenesen vanna rajta: ekkor a metszéspont koordinátája (m, n) . Ezekkel kifejezve egy kis háromszög egyik oldala valamely $A_{m-n-1} E_{m-n-1}$ vagy $C_{n-m-1} G_{n-m-1}$ egyenesen van, ha erre az oldalra eső csúcsainak koordinátája $(m+i, n+i)$ és $(m+i+1, n+i+1)$ alakúak valamely alkalmas $i \in \mathbb{N}$ választással. (Itt most éltünk a $B = C_{-1} = A_{-1}$ és $F = G_{-1} = E_{-1}$ jelöléssel.) Ekkor a kis háromszög harmadik csúcsa már csak $(m+i+1, n+i)$ vagy $(m+i, n+i+1)$ lehet. Az $E_i A_i$ vagy $G_i C_i$ egyenesekre vonatkozó tükrözéseket figyelembe véve világos, hogy azok a kis háromszögek, melyek koordinátái összege állandó, egymás (néhány tükrözéssel létrejött) izometrikus képei.

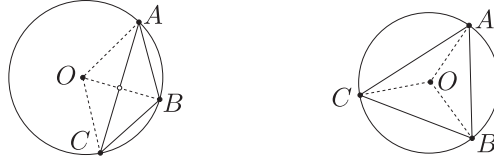
Szemléletesen az ábrán ez úgy látszik, hogy az $A_\infty C_\infty$ egyeneshez képest „azonos magasságban” (ez a magasság fogalom valójában metszéspont koordinátáinak összege) lévő háromszögek egybevágók.

Márpedig minden „magasságban” az ilyen kis háromszögekből az $E_0 G_0 C B A$ ötszög ugyanúgy pontosan kettőt tartalmaz, mint az 1-szeresen aszimptotikus $A B C_\infty$ háromszög. Mivel az egybevágó háromszögeken a (4) feltétel szerint egy területfüggvény ugyanazt az értéket veszi fel, a (3) feltétel szerint pedig ezen kis háromszögek unióján a területfüggvény az egyes kis háromszögekhez rendelt értékeinek összegét veszi fel, a területfüggvény értéke a $E_0 G_0 C B A$ ötszögön ugyanakkora mint az 1-szeresen aszimptotikus $A B C_\infty$ háromszögön. (Fontos megjegyezni, hogy a végtelen összeg dacára, itt nem kell konvergencia-problémától tartani, mert csupa pozitív szám összegéről van szó, azok pedig szabadon rendezhetőek, és egy rendezésükben — az ötszög esetében —, a feltétel szerint véges összeget adnak.)

2. Legyen $A_\infty B C_\infty$ egy kétszeresen, az A_∞ és C_∞ csúcsában aszimptotikus háromszög. Ekkor a B csúcsán keresztül (akár az előbbi ábráról is leolvasható módon a $B F$ egyenessel például) felvágható két egyszeresen aszimptotikus háromszögre. Azokhoz a területfüggvény véges számot rendel, amiért $t(A_\infty B C_\infty)$ is véges szám.

3. Legyen $A B C$ egy 3-szorosan aszimptotikus háromszög. Két eset lehetséges: a modell O középpontja az $A B C$ háromszögön kívül vagy belül esik. Előbbi esetben

a betűzés változtatásával elérhető, hogy az O és a B pont az AC egyenes különböző oldalára essen.



180. ábra

Mindkét esetben a területfüggvényre vonatkozó (3) feltétel miatt

$$t(ABC) = \begin{cases} t(OAB) + t(OBC) - t(OAC), & \text{ha } O \notin ABC\Delta, \\ t(OAB) + t(OBC) + t(OAC), & \text{ha } O \in ABC\Delta, \end{cases}$$

vagyis a háromszorosan aszimptotikus háromszögekre a területfüggvény véges számokat vesz fel. Minthogy ugyanakkor az összes háromszorosan aszimptotikus háromszög egybevágó egymással, a (4) szerint ezek a számok mind egyenlők, mondjuk $T = t(ABC)$.

4. Vegyünk egy kétszeresen aszimptotikus $A_\infty BC_\infty$ háromszöget, melynél B nem határpont. Vegyünk egy olyan izometriát, mely a B pontot a modell középpontjába viszi. Mint minden izometriánál, az A_∞ és C_∞ pontok képe ennél az izometriánál is határpont lesz, vagyis a képháromszög kétszeresen aszimptotikus. Az origó körüli elforgatások miatt így kimondható, hogy két duplán aszimptotikus háromszög akkor és csak akkor egybevágó, ha a nem határpont csúcsában lévő szögek megegyeznek. A (4) feltétel alapján ez azt jelenti, hogy egy területfüggvény által egy duplán aszimptotikus háromszöghöz rendelt szám kizárólag a csúcsban lévő szögtől függ. Legyen $f(\beta) = t(A_\infty BC_\infty)$, ahol β az $A_\infty BC_\infty$ háromszög B pontjában mért szöge.

Iménti ábránk jelölései szerint, ha $\varphi = AOB\angle$ és $\psi = BOC\angle$, akkor a területfüggvény (4) feltétele miatt, ha $\varphi, \psi > 0$, akkor

$$f(\varphi) + f(\psi) = \begin{cases} T + f(\varphi + \psi) & \text{ha } \varphi + \psi < \pi, \\ T & \text{ha } \varphi + \psi = \pi, \\ T - f(2\pi - \varphi - \psi) & \text{ha } \varphi + \psi > \pi. \end{cases}$$

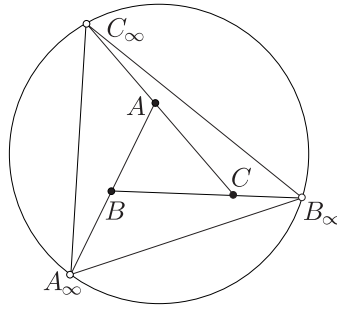
Ebből következik, hogy a $g(\varphi) = T - f(\varphi)$ függvény additív, mert

$$\begin{aligned} g(\alpha) + g(\beta) &= T - f(\alpha) + T - f(\beta) = 2T - (T + f(\alpha + \beta)) \\ &= 2T - (f(\alpha) + f(\beta)) = g(\alpha + \beta), & \text{ha } \alpha + \beta < \pi, \\ g(\alpha) + g(\beta) &= T - f(\alpha) + T - f(\beta) = 2T - (T - f(\pi - \alpha)) - (T - f(\pi - \beta)) \\ &= f(\pi - \alpha) + f(\pi - \beta) = T - f(2\pi - (\pi - \alpha) - (\pi - \beta)) \\ &= g(\alpha + \beta) & \text{ha } \alpha + \beta > \pi, \end{aligned}$$

$$g(\alpha) + g(\beta) = T - f(\alpha) + T - f(\beta) = T = g(\pi) = g(\alpha + \beta) \quad \text{ha } \alpha + \beta = \pi.$$

Minthogy az f szigorúan monoton növekvő, hiszen a területfüggvény értékei pozitívak, a g függvény szigorúan monoton fogyó, így az additivitásából (a Függelékben megadott tétel értelmében) következik a homogenitása is, vagyis létezik egy k konstans, melyre $g(\varphi) = k\varphi$. Mivel $g(\pi/2) = T - f(\pi/2) = f(\pi/2) = T/2$, következik, hogy $g(\varphi) = \varphi T/\pi$, vagyis $f(\varphi) = T - \varphi T/\pi = (\pi - \varphi)T/\pi$.

5. Vegyünk egy tetszőleges nem aszimptotikus ABC háromszöget, és hosszabbítsuk meg mindegyik oldalát az ábrán látható módon a határpontokig.



190. ábra

A meghosszabbított oldalak messék a modell határát a $A_\infty B_\infty C_\infty$ háromszorosan aszimptotikus háromszög csúcsaiban. A területfüggvény additivitási tulajdonsága alapján

$$t(ABC) = T - f(\pi - \alpha) - f(\pi - \beta) - f(\pi - \gamma)$$

ahol α , β és γ rendre az ABC háromszög A , B és C csúcsánál lévő belső szöge.

Eszerint

$$t(ABC) = T - \alpha \frac{T}{\pi} - \beta \frac{T}{\pi} - \gamma \frac{T}{\pi} = (\pi - \alpha - \beta - \gamma) \frac{T}{\pi},$$

amivel a tétel bizonyítása teljessé vált. ■

A szögdefektusra érvényes összefüggések közül csak érdekességképpen közlünk kettőt bizonyítás nélkül.

Tétel. Ha egy háromszög szögdefektusát δ , fél területét pedig s jelöli, akkor

$$(1) \quad \operatorname{tg} \frac{-\delta}{2} = \frac{\tanh(a/\varrho) \tanh(b/\varrho) \sin \gamma}{1 - \tanh(a/\varrho) \tanh(b/\varrho) \cos \gamma}, \quad \text{és}$$

$$(2) \quad \operatorname{tg} \frac{-\delta}{2} = \frac{\sqrt{\sinh \frac{s}{\varrho} \sinh \frac{s-a}{\varrho} \sinh \frac{s-b}{\varrho} \sinh \frac{s-c}{\varrho}}}{\cosh(a/\varrho) \cosh(b/\varrho) \cosh(c/\varrho)}.$$

A (2) formulát szokás hiperbolikus Héron-képletnek is hívni. Jegyezzük meg, hogy az (1) képlet az elpattanó oldalakat tartalmazó háromszögekre is érvényes.

4.5. A „végtelen sugarú” Bolyai-sík geometriája

Az alábbiak jól mutatják, hogy bár hétköznapi tapasztalataink az euklidészi geometria törvényeit látszanak alátámasztani, még a Bolyai-geometria törvényeinek kizárására sem elegendők.

Tétel. *A „végtelen sugarú” hiperbolikus sík euklidészi.*

Bizonyítás. Tekintsük a Bolyai-sík $\Phi: \mathbb{H}_\varrho \rightarrow \mathbb{K}_\varrho^c$ leképezését, és paraméterezzük a $\mathbb{H}_\varrho$ pontjait úgy, hogy egy P pontjához hozzárendeljük annak hiperbolikus p távolságát a Cayley–Klein-modell origójának megfelelő O origótól, valamint azt az irányított $-\pi < \xi \leq \pi$ szöget, mellyel az origó körül elforgatva az x tengely pozitív félegyenesét, a $\Phi(P)$ pontot tartalmazó félegyenest kapunk. Világos, hogy a $P \mapsto (\xi, p)_{\mathbb{H}_\varrho}$ hozzárendelés bijektív.

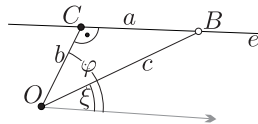
A síkon tekintsük azt a polárkoordináta-rendszert, melyben egy Q ponthoz hozzárendeljük annak q euklidészi távolságát az O origótól, valamint azt az irányított $-\pi < \psi \leq \pi$ szöget, mellyel az origó körül elforgatva az x tengely pozitív félegyenesét, a Q pontot tartalmazó félegyenest kapunk. Világos, hogy a $Q \mapsto (\psi, q)_S$ hozzárendelés bijektív.

Legyen $\Psi_\varrho: \mathbb{H}_\varrho \rightarrow \mathbb{R}^2$ az a leképezés, melyre a most adott koordinátázások mellett $\Psi_\varrho: (\xi, p)_{\mathbb{H}_\varrho} \mapsto (\xi, p)_S$. Ez nyilván bijektív kapcsolatba hozza a Bolyai-sík pontjait és az euklidészi sík pontjait, és ez a kapcsolat nem függ a sugártól.

A Bolyai-sík egyenesének Φ_ϱ melletti képe nyilván nem lehet euklidészi egyenes, azonban megmutatjuk, hogy minden e hiperbolikus egyenes esetén $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \Phi_\varrho(e)$ egy euklidészi egyenes.

Tekintsük a Bolyai-sík valamely e egyenesét. Ha ez átmegy az O ponton, akkor Ψ_ϱ egy origón átmenő egyenesbe képezi, hiszen pontjainak polárkoordinátáiban a szög-koordináta konstans.

Ha az e egyenes nem megy át az O origón, akkor vegyük az O ponton át az e egyenesre hiperbolikusan merőleges egyenes $C \in e$ metszéspontját az e egyenessel, melyre $\Psi_\varrho(C) = (\varphi, b)_S$.



195. ábra

A B pontot meghatározza a $\Psi_\varrho(B) = (\xi, c)_S$ koordinátájának ξ szöge, hiszen a befogótétel értelmében

$$\tanh \frac{b}{\varrho} = \tanh \frac{c}{\varrho} \cosh |\xi - \varphi|.$$

Ez a ϱ sugarú $\mathbb{H}_\varrho$ Bolyai-sík hiperbolikus egyenesének egyenlete az $\mathbb{R}^2$ síkon a Ψ_ϱ koordinátázásban. Mindkét oldalt elosztva a ϱ sugárral, a $\varrho \rightarrow \infty$ határátmenet eredménye

$$\begin{aligned} b &= \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{\sinh(b/\varrho)/\varrho}{\cosh(b/\varrho)} = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{\tanh(b/\varrho)}{\varrho} = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{\tanh(c/\varrho) \cosh |\xi - \varphi|}{\varrho} \\ &= c \cosh |\xi - \varphi|, \end{aligned}$$

ami pontosan $\mathbb{R}^2$ egyeseinek egyenlete.

Ezzel be is bizonyítottuk, hogy a „végtelen sugarú” $\mathbb{H}_\infty$ Bolyai-sík egy affin sík. A tétel bizonyításához a metrikát kell még megvizsgálni.

A $\mathbb{H}_\varrho$ Bolyai-síkon jelölje d_ϱ a metrikát. Ekkor a $\Psi_\varrho(A) = (\xi, a)_S$ és $\Psi_\varrho(B) = (\xi', b)_S$ pontok távolságát a $c_\varrho = d_\varrho((\xi, a)_S, (\xi', b)_S)$ szám adja. Legyen $\gamma = \xi' - \xi$. A koszinusztétel szerint

$$\cosh \frac{c_\varrho}{\varrho} = \cosh \frac{a}{\varrho} \cosh \frac{b}{\varrho} - \sinh \frac{a}{\varrho} \sinh \frac{b}{\varrho} \cos \gamma,$$

amiből

$$1 + 2 \sinh^2 \frac{c_\varrho}{2\varrho} = \left(1 + 2 \sinh^2 \frac{a}{2\varrho}\right) \left(1 + 2 \sinh^2 \frac{b}{2\varrho}\right) - \sinh \frac{a}{\varrho} \sinh \frac{b}{\varrho} \cos \gamma$$

és így

$$2 \sinh^2 \frac{c_\varrho}{2\varrho} - 4 \sinh^2 \frac{a}{2\varrho} \sinh^2 \frac{b}{2\varrho} = 2 \sinh^2 \frac{a}{2\varrho} + 2 \sinh^2 \frac{b}{2\varrho} - \sinh \frac{a}{\varrho} \sinh \frac{b}{\varrho} \cos \gamma,$$

következik. Mindkét oldalt elosztva az $1/(2\varrho)^2$ számmal a

$$\begin{aligned} 2c_\varrho^2 \left(\frac{\sinh(c_\varrho/2\varrho)}{c_\varrho/2\varrho} \right)^2 - 4 \frac{a^2 b^2}{4\varrho^2} \left(\frac{\sinh(a/2\varrho)}{a/2\varrho} \right)^2 \left(\frac{\sinh(b/2\varrho)}{b/2\varrho} \right)^2 \\ = 2a^2 \left(\frac{\sinh(a/2\varrho)}{a/2\varrho} \right)^2 + 2b^2 \left(\frac{\sinh(b/2\varrho)}{b/2\varrho} \right)^2 - 4ab \frac{\sinh(a/\varrho)}{a/\varrho} \frac{\sinh(b/\varrho)}{b/\varrho} \cos \gamma \end{aligned}$$

egyenlőséghez jutunk. A háromszög-egyenlőtlenség miatt $c_\varrho \leq a + b$, így $\varrho \rightarrow \infty$ esetén $a/\varrho \rightarrow 0$, $b/\varrho \rightarrow 0$ és $c_\varrho/\varrho \rightarrow 0$, amiért

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{\sinh(a/\varrho)}{a/\varrho} = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{\sinh(b/\varrho)}{b/\varrho} = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{\sinh(c_\varrho/\varrho)}{c_\varrho/\varrho} = 1.$$

Ezeket alkalmazva egyenletünkben a $\varrho \rightarrow \infty$ határértékre azt kapjuk, hogy

$$2a^2 + 2b^2 - 4ab \cos \gamma = 2\left(\lim_{\varrho \rightarrow \infty} c_\varrho\right)^2,$$

ami éppen a síkban érvényes koszinusztétel.

Eszerint a „végtelen sugarú” $\mathbb{H}_\infty$ hiperbolikus síkon mérhető távolságok egybeesnek az $\mathbb{R}^2$ síkon mérhető távolságokkal, ami bizonyítja a tételt. ■

Bár tételünknek nyilvánvaló következménye, hogy a „végtelen sugarú” $\mathbb{H}_\infty$ hiperbolikus síkon az euklidészi trigonometria érvényes, azért nem érdektelen megvizsgálni, mivé alakulnak a hiperbolikus trigonometriai összefüggéseink a „végtelen sugarú” hiperbolikus síkon.

Rögzítsük az $a, b, c > 0$ valós számokat úgy, hogy a a legnagyobb és $b + c \geq a$. Ekkor minden $\mathbb{H}_\varrho$ Bolyai-síkon van a, b, c oldalakkal rendelkező háromszög, csak fel kell venni egy a hosszúságú főkörív két végpontjában egy b és egy c hiperbolikus sugarú hiperbolikus kört, és venni ezek metszéspontját.

Tétel. *Legyenek a ϱ sugarú $\mathbb{H}_\varrho$ Bolyai-síkon a, b, c oldalhosszakkal bíró háromszög szögei $\alpha(\varrho)$, $\beta(\varrho)$ és $\gamma(\varrho)$. Ekkor léteznek a $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \alpha(\varrho)$, $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \beta(\varrho)$ és $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \gamma(\varrho)$ határértékek, és rendre megegyeznek az a, b, c oldalhosszakkal rendelkező euklidészi háromszög α, β, γ szögeivel.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy a, b, c oldalhosszú háromszöget a ϱ sugarú $\mathbb{H}_\varrho$ Bolyai-síkon. Világos, hogy $a/\varrho \rightarrow 0$ amennyiben $\varrho \rightarrow \infty$, ezért

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{\sinh(a/\varrho)}{a/\varrho} = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{\sinh(b/\varrho)}{b/\varrho} = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{\sinh(c/\varrho)}{c/\varrho}.$$

Az oldalakra vonatkozó koszinusztétel szerint

$$\begin{aligned} \cos \gamma(\varrho) &= \frac{\cosh \frac{a}{\varrho} \cosh \frac{b}{\varrho} - \cosh \frac{c}{\varrho}}{\sinh \frac{a}{\varrho} \sinh \frac{b}{\varrho}} = \frac{\cosh^2 \frac{a}{\varrho} \cosh^2 \frac{b}{\varrho} - \cosh^2 \frac{c}{\varrho}}{\cosh \frac{c}{\varrho} + \cosh \frac{a}{\varrho} \cosh \frac{b}{\varrho}} \frac{(\varrho/a)(\varrho/b)}{\frac{\sinh(a/\varrho)}{a/\varrho} \frac{\sinh(b/\varrho)}{b/\varrho}} \\ &= \frac{(1 + \frac{a^2}{\varrho^2} \frac{\sinh^2(a/\varrho)}{(a/\varrho)^2})(1 + \frac{b^2}{\varrho^2} \frac{\sinh^2(b/\varrho)}{(b/\varrho)^2}) - (1 + \frac{c^2}{\varrho^2} \frac{\sinh^2(c/\varrho)}{(c/\varrho)^2})}{\cosh(c/\varrho) + \cosh(a/\varrho) \cosh(b/\varrho)} \frac{(\varrho/a)(\varrho/b)}{\frac{\sinh(a/\varrho)}{a/\varrho} \frac{\sinh(b/\varrho)}{b/\varrho}} \\ &= \frac{-\frac{c^2}{\varrho^2} \frac{\sinh^2(c/\varrho)}{(c/\varrho)^2} + \frac{b^2}{\varrho^2} \frac{\sinh^2(b/\varrho)}{(b/\varrho)^2} + \frac{a^2}{\varrho^2} \frac{\sinh^2(a/\varrho)}{(a/\varrho)^2} + \frac{a^2 b^2}{\varrho^4} \frac{\sinh^2(a/\varrho)}{(a/\varrho)^2} \frac{\sinh^2(b/\varrho)}{(b/\varrho)^2}}{\cosh(c/\varrho) + \cosh(a/\varrho) \cosh(b/\varrho)} \times \\ &\quad \times \frac{(\varrho/a)(\varrho/b)}{\frac{\sinh(a/\varrho)}{a/\varrho} \frac{\sinh(b/\varrho)}{b/\varrho}} \\ &\rightarrow \frac{-c^2 + b^2 + a^2}{2ab}, \quad (\varrho \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy az $\alpha(\varrho)$, $\beta(\varrho)$ és $\gamma(\varrho)$ függvényeknek van határértékük a végtelenben, és ezek a határértékek éppen az euklidészi sík a, b és c oldalhosszúsággal megrajzolt háromszögének szögei. ■

A szinusztétel a „végtelen sugarú” $\mathbb{H}_\infty$ Bolyai-síkon az euklidészi szinusztételbe alakul, mert

$$\frac{\sin \alpha(\varrho)}{\sin \beta(\varrho)} = \frac{\sinh(a/\varrho)}{\sinh(b/\varrho)} = \frac{\frac{\sinh(a/\varrho)}{a/\varrho}}{\frac{\sinh(b/\varrho)}{b/\varrho}} \cdot \frac{a}{b} \rightarrow \frac{a}{b}, \quad (\varrho \rightarrow \infty),$$

a szögekre vonatkozó koszinusztétel pedig az euklidészi háromszögek szögösszegét adja, hiszen

$$\begin{aligned} \cos \gamma(\varrho) + \cos(\alpha(\varrho) + \beta(\varrho)) &= \cos \gamma(\varrho) + \cos \alpha(\varrho) \cos \beta(\varrho) - \sin \alpha(\varrho) \sin \beta(\varrho) \\ &= \sin \alpha(\varrho) \sin \beta(\varrho) \left(\cosh \frac{c}{\varrho} - 1 \right) \rightarrow 0, \quad (\varrho \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

amiért $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \alpha(\varrho) + \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \beta(\varrho) + \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \gamma(\varrho) = \pi$.

Projektív terek, axiomatika és koordinátázás

Magasabb dimenziós nemeuklidészi geometriák vizsgálatához, melyre ebben a könyvben nem kerül sor, kulcsfontosságú a magasabb dimenziós projektív terek megismerése, ezért ebben a fejezetben a projektív síkot az eddigi empirikus, konstruktív megközelítés helyett absztrakt, deduktív módon vizsgáljuk, majd ennek eredményeit általánosítva magasabb dimenziós projektív tereket vezetünk be és vizsgálunk.

5.1. Projektív sík axiomatizálása és koordinátázása

Projektív sík axiómái. Projektív síknak nevezünk egy $(\mathfrak{P}, \mathfrak{E}, \bowtie)$ rendszert, ahol a $\mathfrak{P}$ halmaz elemeit pontoknak, az $\mathfrak{E}$ halmaz elemeit egyeneseknek, az ezen két halmaz közti $\bowtie$ relációt illeszkedésnek nevezzük, ha

- (1) minden $P, Q \in \mathfrak{P}$, $P \neq Q$ esetén létezik pontosan egy $e \in \mathfrak{E}$, hogy $P \bowtie e$ és $Q \bowtie e$,
- (2) minden $e, f \in \mathfrak{E}$, $e \neq f$ esetén létezik pontosan egy $P \in \mathfrak{P}$, hogy $P \bowtie e$ és $P \bowtie f$,
- (3) léteznek olyan $P, Q, R, S \in \mathfrak{P}$ pontok, hogy közülük semelyik három nem illeszkedik egy egyenesre. ▲

Természetesen ebben a geometriában sok, az eddigi tárgyalásban szereplő tétel nem igazolható, hiszen például a folytonosság fogalma teljesen hiányzik, azonban e néhány axióma mégis gazdag geometriai struktúra felfedezésére vezet.

A továbbiakban az illeszkedés szó kiváltására értelemszerűen használni fogjuk a szokásos szinonim terminológiákat, mint a két pontot összekötő egyenes, egyenesek metszéspontja, stb. Axiómáink így egyszerűen azt jelentik, hogy két különböző pontot egyetlen egyenes köt össze (1), két különböző egyenesnek pontosan egy metszéspontja van (2), és van nem elfajult négyszög (3), vagy ami ugyanaz, van négy általános helyzetű pont (3).

Tétel. *Léteznek olyan $e, f, g, h \in \mathfrak{E}$ egyenesek, hogy közülük semelyik három nem illeszkedik egy pontra.*

Bizonyítás. A (3) axióma szerinti $P, Q, R, S \in \mathfrak{P}$ pontokhoz léteznek az egyértelmű $e, f, g, h \in \mathfrak{E}$ egyenesek, melyekre $P, Q \bowtie e$, $Q, R \bowtie f$, $R, S \bowtie g$ és $S, P \bowtie h$.

Ha ezek között van három, mondjuk az e, f, g egyenesek, amelyek egy X pontra illeszkednek, vagyis $X \bowtie e, X \bowtie f$ és $X \bowtie g$, akkor $e = f$, mert mindkettő illeszkedik a Q és az X pontra is, továbbá $g = f$, mert mindkettő illeszkedik az R és az X pontra is. Ebből viszont $e = f = g$ következik, amiért mind a négy $P, Q, R, S \in \mathfrak{P}$ pont egy egyenesre, az $e = f = g$ egyenesre illeszkedik. Ez ellentmond a (3) axiómának, tehát a feltevés nem lehet igaz, ami a tétel állítását igazolja. ■

Vegyük észre, hogy az (1), (2) és (3) axiómák és tételünk együtt olyan rendszert alkot, melyben a pontok szerepét felcserélve az egyenesek szerepével az axiómák összességének tartalma nem változik, vagyis itt is érvényesül a korábban már megfogalmazott *dualitás*: minden bizonyítható állításnak a duálisa is teljesül.

Definíció. Egy projektív síkot Desargues-típusúnak, vagy Desargues-félének mondunk, ha teljesül benne a *Desargues-tulajdonság*, vagyis benne minden háromszögpár akkor és csak akkor centrálisan perspektív, ha tengelyesen is perspektív. ▲

Korábban már láttuk, hogy a Desargues-tulajdonság önduális, így a Desargues-féle projektív síkokon is érvényes a dualitás.

Definíció. Papposz-típusúnak, vagy Papposz-félének nevezzünk egy projektív síkot, ha teljesül benne a *Papposz-tulajdonság*, vagyis két kollineáris A_1, A_2, A_3 és B_1, B_2, B_3 ponthármak esetén az $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ hatszög szemközti oldalainak metszéspontjai kollineárisak. ▲

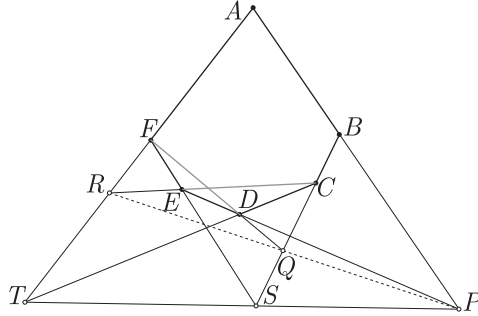
Jegyezzük meg, hogy a Papposz-tulajdonság nem önduális, ezért Papposz-féle síkon mindaddig nem használható a dualitási elv, amíg a Papposz–Pascal-tétel duálisa bizonyításra nem kerül.

Egy hatszöget nevezzünk *Papposz-féle hatszögnek*, ha szemközti oldalainak metszetei kollineárisak. (A korábban vizsgált projektív síkon ilyen például a kúpszeletbe írt, vagy az, amelyiknek a páros és páratlan sorszámú csúcsai felváltva két egyenesre esnek. Fontos azonban látni, hogy nem csak ezek lehetnek Papposz-féle hatszögek!)

Lemma. *Egy Papposz-féle síkon hat pont valamely sorrendje akkor és csak akkor határoz meg Papposz-féle hatszöget, ha bármely más sorrendjében is Papposz-féle hatszöget alkot.*

Bizonyítás. Elég bizonyítanunk, hogy ha $ABCDEF$ egy Papposz-féle hatszög, akkor az $ABCEDF$ is Papposz-féle hatszög, hiszen a szomszédok többszörös cseréjével bármely két csúcs cseréjét könnyű megvalósítani.

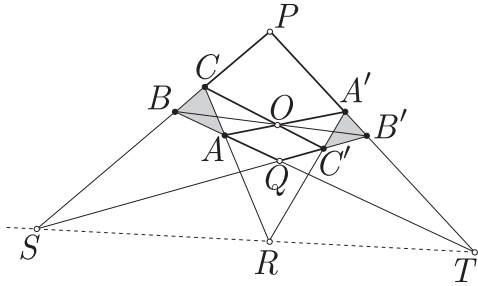
Az $ABCDEF$ hatszög szemközti oldalainak metszetei $P = AB \cap ED$, $S = BC \cap EF$ és $T = DC \cap AF$.



Tekintsük az FS és TC egyenesekre csúcsaival felváltva illeszkedő $TSCEDF$ hatszöget. Mivel Papposz-síkon vagyunk, ez Papposz-féle hatszög, vagyis a $P := TS \cap ED$, $Q := SC \cap FD$ és $R := CE \cap FT$ pontok kollineárisak. Mivel $P = AB \cap ED$, $Q = SC \cap FD = BC \cap DF$ és $R = CE \cap FT = EC \cap AF$, ez azt mutatja, hogy az $ABCEDF$ hatszög Papposz-féle, ami bizonyítja a tételt. ■

Desargues-tétel. Papposz-féle projektív síkban teljesül a Desargues-tulajdonság.

Bizonyítás. Legyen az ABC és a az $A'B'C'$ háromszög az $O := AA' \cap BB' \cap CC'$ pontra centrálisan perspektív. Vegyük fel még a $P = A'B' \cap BC$ és $Q = AB \cap B'C'$ pontokat.



Ekkor a $PCC'QAA'$ hatszög Papposz-féle, hiszen a $PC \cap QA = B$, $CC' \cap AA' = O$ és $C'Q \cap A'P = B'$ pontok egy egyenesre esnek.

A lemma szerint tehát a $PCAQC'A'$ hatszög is Papposz-féle, ami azt jelenti, hogy az $S := PC \cap QC'$, $R := CA \cap C'A'$ és $T := AQ \cap A'P$ pontok kollineárisak. Minthogy $S = PC \cap QC' = BC \cap B'C'$ és $T = AQ \cap A'P = AB \cap A'B'$, ez azt jelenti, hogy az ABC és a az $A'B'C'$ háromszögek egymásra tengelyesen perspektívek. Ezzel a Desargues-tulajdonság egyik irányát igazoltuk.

A Desargues-tulajdonság másik irányának bizonyításához legyen az ABC és az $A'B'C'$ háromszög tengelyesen perspektív az $S = BC \cap B'C'$, $R = CA \cap C'A'$ és $T = AB \cap A'B'$ pontok egyenesére. Legyen $O = AA' \cap CC'$ és $B'' = BO \cap PT$. Ekkor az ABC és az $A'B''C'$ háromszögek centrálisan perspektívek az O pontra, amiért — iménti bizonyításunk alapján — tengelyesen is perspektívek, mégpedig az RT egyenesre nézve. Eszerint $BC \cap B''C' \in RT$, amiért $BC \cap B''C' = BC \cap RT = S$, és így $B' = B''$, ami bizonyítja az állítást. ■

A könyvünk elején a projektív síkhoz vezető eredeti utunk gondolatát általánosítva különféle projektív síkokat tudunk konstruálni.

Legyen $\mathbb{F}$ egy ferdetest a $+$ és $\cdot$ műveletekkel, ahol $\mathbb{F}$ a $+$ művelettel kommutatív csoportot alkot, melynek nulleleme a 0 , valamint $\mathbb{F} \setminus \{0\}$ egy nem feltétlen kommutatív csoport a $\cdot$ művelettel. Az $\mathbb{F}$ elemeiből készített rendezett hármasok $\mathbb{F}^3$ halmaza egy 3-dimenziós nem feltétlenül kommutatív vektortér az $\mathbb{F}$ test felett.

Az $\mathbb{F}^3$ vektortérben a nullvektor kivételével két vektort egymással arányosnak nevezünk, ha van az $\mathbb{F}$ testben olyan nem nulla elem, amivel az egyik vektort balról megszorozva, a másikat kapjuk. Ez az arányosság nyilván ekvivalencia-reláció. Egy $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{F}^3$ nem nulla vektor arányosság szerinti ekvivalencia-osztályát $[\mathbf{v}]$ vagy $[v_1, v_2, v_3]$, ezen arányossági osztályok halmazát pedig $[\mathbb{F}^3]$ jelöli.

Tétel. $A \mathbb{P}_{\mathbb{F}} = ([\mathbb{F}^3], [\mathbb{F}^3], \perp)$ rendszer eleget tesz a projektív sík axiómáinak, ahol a $\perp$ illeszkedésre $[\mathbf{u}] \perp [\mathbf{v}]$ akkor és csak akkor, ha $\mathbf{u}\mathbf{v}^T = 0$.

Bizonyítás. Sorban igazoljuk az axiómák teljesülését.

(1) Legyen $[\mathbf{u}], [\mathbf{v}] \in [\mathbb{F}^3]$ és $[\mathbf{u}] \neq [\mathbf{v}]$, ahol $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ nem nulla vektorok. Egy $[\mathbf{w}] \in [\mathbb{F}^3]$ egyenes pontosan akkor illeszkedik az $[\mathbf{u}], [\mathbf{v}] \in [\mathbb{F}^3]$ pontokra, ha a $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ nem nulla vektorra $\mathbf{u}\mathbf{w}^T = 0$ és $\mathbf{v}\mathbf{w}^T = 0$, vagyis $u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 = 0$ és $v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 = 0$ teljesül. Azt kell igazolnunk, hogy ennek a két egyenletből álló rendszernek van nem triviális megoldása.

Mivel $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, feltehető, hogy mondjuk $v_3 = 1$, vagyis $\mathbf{v} = (v_1, v_2, 1)$. Két eset lehetséges aszerint, hogy $u_3 \neq 0$, vagy $u_3 = 0$.

Ha $u_3 \neq 0$, akkor feltehető, hogy $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 1)$ és akkor az $[\mathbf{u}] \neq [\mathbf{v}]$ feltétel azt jelenti, hogy $u_1 \neq v_1$ és $u_2 \neq v_2$ legalább egyike teljesül. Tegyük fel, hogy $u_2 \neq v_2$. Ekkor egyenleteinkből $(u_1 - v_1)w_1 + (u_2 - v_2)w_2 = 0$ adódik, amiért $w_2 = -(u_2 - v_2)^{-1}(u_1 - v_1)w_1$ és $w_3 = (u_2(u_2 - v_2)^{-1}(u_1 - v_1) - u_1)w_1$, vagyis egyenletrendszerünk összes megoldása

$$\mathbf{w} = w_1(1, -(u_2 - v_2)^{-1}(u_1 - v_1), u_2(u_2 - v_2)^{-1}(u_1 - v_1) - u_1)$$

alakú. Ezek a vektorok tényleg megoldást adnak, hiszen

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}\mathbf{w}^T &= u_1w_1 + u_2w_2 + 1 \cdot w_3 \\
 &= u_1w_1 - u_2(u_2 - v_2)^{-1}(u_1 - v_1)w_1 + (u_2(u_2 - v_2)^{-1}(u_1 - v_1) - u_1)w_1 = 0 \\
 \mathbf{v}\mathbf{w}^T &= v_1w_1 + v_2w_2 + 1 \cdot w_3 \\
 &= v_1w_1 - v_2(u_2 - v_2)^{-1}(u_1 - v_1)w_1 + (u_2(u_2 - v_2)^{-1}(u_1 - v_1) - u_1)w_1 \\
 &= (v_1 - v_2(u_2 - v_2)^{-1}(u_1 - v_1) + u_2(u_2 - v_2)^{-1}(u_1 - v_1) - u_1)w_1 \\
 &= (-v_2(u_2 - v_2)^{-1} + u_2(u_2 - v_2)^{-1} - 1)(u_1 - v_1)w_1 \\
 &= (-v_2 + u_2 - (u_2 - v_2))(u_2 - v_2)^{-1}(u_1 - v_1)w_1 = 0
 \end{aligned}$$

Ha $u_3 = 0$, akkor feltehető, hogy $\mathbf{u} = (u_1, 1, 0)$ és akkor az $[\mathbf{u}] \neq [\mathbf{v}]$ feltétel automatikusan teljesül. Ekkor egyenleteinkből $w_2 = -u_1w_1$ és $w_3 = (v_2u_1 - v_1)w_1$ adódik, vagyis egyenletrendszerünk összes megoldása $\mathbf{w} = w_1(1, -u_1, v_2u_1 - v_1)$ alakú. Ezek a vektorok tényleg megoldást adnak, hiszen

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}\mathbf{w}^T &= u_1w_1 + 1 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3 = u_1w_1 - u_1w_1 = 0 \\
 \mathbf{v}\mathbf{w}^T &= v_1w_1 + v_2w_2 + 1 \cdot w_3 = v_1w_1 - v_2u_1w_1 + (v_2u_1 - v_1)w_1 = 0
 \end{aligned}$$

A $w_1 = 1$ választással nyert $\mathbf{w}$ vektor mindkét esetben nem nulla, és az összes többi megoldás ennek többszöröse, ami azt jelenti, hogy az egyetlen egyenes, amely az $[\mathbf{u}] \neq [\mathbf{v}]$ pontokra illeszkedik az $[\mathbf{w}]$.

(2) Ennek bizonyítása pontosan megegyezik az (1) bizonyításával.

(3) Ennek igazolásához válasszuk a $P = [1, 0, 0]$, $Q = [0, 1, 0]$, $R = [0, 0, 1]$ és $S = [1, 1, 1]$ pontokat. Az ezekre illeszkedő $e, f, g, h \in [\mathbb{F}^3]$ egyenesekre, ha $P, Q \perp e$, $Q, R \perp f$, $R, S \perp g$, $S, P \perp h$, $P, R \perp i$ és $Q, S \perp j$, akkor $e = [0, 0, 1]$, $f = [1, 0, 0]$, $g = [1, -1, 0]$, $h = [0, 1, -1]$, $i = [0, 1, 0]$ és $j = [1, 0, -1]$. Ezek az egyenesek nyilván nem esnek egybe, ami igazolja az axióma teljesülését a rendszerünkben. ■

Az (1) bizonyítása közben meghatározott $\mathbf{w}$ vektorok $[\mathbf{u}] \perp [\mathbf{w}] \perp [\mathbf{v}]$ tulajdonsága alapján bevezetjük, és a továbbiakban használni fogjuk a természetes, és a korábbiakkal összhangban lévő $[\mathbf{u}] \times [\mathbf{v}] := [\mathbf{w}]$ jelölést.

Bár a koordinátázáshoz használt algebrai struktúra részletesebb vizsgálata is lehetséges [Kiss-Szőnyi: Véges geometriák], az affin geometriához fűződő szoros kapcsolat részletes bemutatása céljából itt és most a Desargues-tulajdonságot tekintjük kiindulási alapnak.

Projektív sík koordinátázása. Bármely Desargues-féle $\mathbb{P} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{E}, \bowtie)$ projektív síkhoz van olyan $\mathbb{F}$ ferdetest, melyhez létezik egy $\psi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{F}}$ kollineáció.

Bizonyítás. Több lépésben igazoljuk az állítást. Az A és B pontokra illeszkedő egyenest AB jelöli.

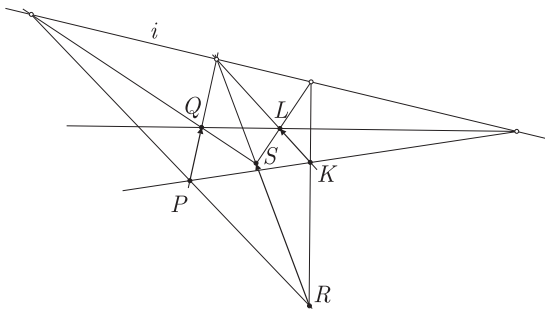
1. lépés. Válasszunk ki egy egyenest a $\mathbb{P}$ projektív síkon. Ezt a továbbiakban i jelöli, és végtelen távoli egyenesnek fogjuk nevezni. A nem a végtelen távoli egyenesre eső pontok halmazát $\mathbb{A}$ jelöli.

2. lépés. Két olyan egyenest, melyek egybeesnek, vagy metszetük a végtelen távoli egyenesre esik, párhuzamosnak nevezzük. A párhuzamosság nyilván ekvivalencia-reláció, jele $\parallel$.

3. lépés. A rendezett (P, Q) pontpárt, ahol $P, Q \in \mathbb{A}$, kötött vektornak nevezzük. A (P, Q) és (R, S) kötött vektorokra azt mondjuk, hogy p -relációban vannak, és ezt $(P, Q) \stackrel{p}{\sim} (R, S)$ jelöli, ha

- (1) $PQ \neq RS$, $PQ \parallel RS$ és $PR \parallel QS$, vagy
- (2) $PQ = RS$, és van olyan (K, L) kötött vektor, hogy $K, L \notin PQ$, $PQ \parallel KL$, $PK \parallel QL$ és $RK \parallel SL$.

4. lépés. A p -reláció nyilván reflexív, és természetesen szimmetrikus. Legyen $(P, Q) \stackrel{p}{\sim} (R, S)$ és $(R, S) \stackrel{p}{\sim} (K, L)$. Ha bármely két kötött vektor egy egyenesre esik, akkor a p -reláció definíciójából azonnal következik, hogy $(P, Q) \stackrel{p}{\sim} (K, L)$. Ha ezek a kötött vektorok nem esnek egy egyenesre, akkor nyilván $PQ \cap RS \in i$, $RS \cap KL \in i$, amiért a PQ, RS és KL egyenesek az $RS \cap i$ pontban metszik egymást.

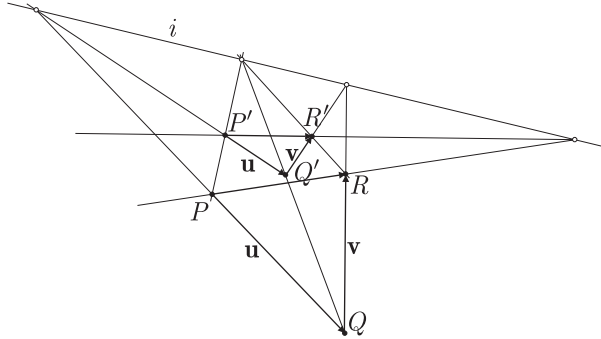


Ez azt jelenti, hogy a PRK és QSL háromszögek pontra nézve perspektívek. A Desargues-tulajdonság miatt ebből ezen háromszögek egyenesre való perspektivitása következik, amiért a $PK \cap QL$ pont a $PR \cap QS$ és $RK \cap SL$ pontok közös egyenesére esik. Utóbbi két pont a p -reláció definíciója miatt a végtelen távoli egyenesre esik, így $PK \parallel QL$ következik. Ugyanakkor a párhuzamosság tranzitivitása miatt $PQ \parallel KL$ is teljesül, ami a p -reláció definíciója értelmében éppen azt jelenti, hogy $(P, Q) \stackrel{p}{\sim} (K, L)$, vagyis a p -reláció tranzitív. Eszerint a p -reláció ekvivalencia-reláció.

5. lépés. A kötött vektorok p -reláció szerinti ekvivalencia osztályait vektoroknak nevezzük. Arra a kötött vektorra, amely egy $\mathbf{v}$ vektornak eleme, azt mondjuk, hogy reprezentálja a $\mathbf{v}$ vektort. A (P, Q) kötött vektor által reprezentált vektort $\overrightarrow{PQ}$ jelöli.

6. lépés: *egyértelmű reprezentálás*. Bármely $\mathbf{v}$ vektorhoz és P ponthoz pontosan egy olyan Q pont létezik, melyre $(P, Q) \in \mathbf{v}$. Ehhez elég az egyértelműséget látni, hiszen a vektor kötött vektorok halmaza. Ha $(P, Q) \in \mathbf{v}$ és $(P, S) \in \mathbf{v}$, akkor $(P, Q) \stackrel{p}{\sim} (P, S)$, hiszen ugyanazon ekvivalencia-osztályban vannak. A p -reláció definíciója szerint pedig ekkor $PQ \parallel PS$, amiért $PQ = PS$, így szintén a p -reláció definíciója értelmében van olyan (K, L) kötött vektor, hogy $K, L \notin PQ$, $PQ \parallel KL$, $PK \parallel QL$ és $PK \parallel SL$. A párhuzamosság tranzitivitása az utóbbi kettőből azt adja, hogy $QL \parallel SL$, amiből $QL = SL$ következik. Eszerint Q és S két különböző egyenes metszéspontjában van, amiért egybeesnek.

7. lépés. Ha valamely $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektor, és $P, Q, R \in \mathbb{A}$ pontok esetén $(P, Q) \in \mathbf{u}$ és $(Q, R) \in \mathbf{v}$, valamint a $P', Q', R' \in \mathbb{A}$ pontok esetén is $(P', Q') \in \mathbf{u}$ és $(Q', R') \in \mathbf{v}$, akkor $(P, R) \stackrel{p}{\sim} (P', R')$, amit a Desargues-tulajdonságból bizonyítunk: Ha $P \neq P'$, akkor a Desargues-tulajdonság alapján $(P, R) \stackrel{p}{\sim} (P', R')$, mert a p -reláció miatt $PP' \cap QQ' \in i$, $QQ' \cap RR' \in i$ és így a PP', QQ' és RR' egyenesek a $QQ' \cap i$ pontban metszik egymást, vagyis a PQR és $P'Q'R'$ háromszögek pontra nézve perspektívek.



A Desargues-tulajdonság miatt ebből ezen háromszögek egyenesre való perspektivitása következik, amiért a $PR \cap P'R'$ pont a $PQ \cap P'Q'$ és $QR \cap Q'R'$ pontok közös egyenesére esik. Utóbbi két pont a p -reláció definíciója miatt a végtelen távoli egyenesre esik, így $PR \parallel P'R'$ következik. Ugyanakkor a párhuzamosság tranzitivitása miatt $PP' \parallel RR'$ is teljesül, vagyis $(P, R) \stackrel{p}{\sim} (P', R')$. A $P \neq P'$ esetben az egyértelmű reprezentálás miatt ugyanez, vagyis $(P, R) \stackrel{p}{\sim} (P', R')$ adódik.

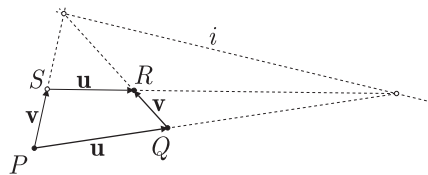
8. lépés. Bármely $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektor, és bármely $P \in \mathbb{A}$ pont esetén az egyértelmű reprezentálás miatt létezik olyan Q és R pont, melyre $(P, Q) \in \mathbf{u}$ és $(Q, R) \in \mathbf{v}$. Azt a $\mathbf{w}$ vektort, melyre $(P, R) \in \mathbf{w}$ az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok összegének nevezzük, és a „+” jellel fejezzük ki, vagyis $\mathbf{u} + \mathbf{v} := \mathbf{w}$.

9. lépés. A vektorok $\mathcal{V}$ halmaza a „+” művelettel csoportot alkot, mert

- létezik benne neutrális elem, hiszen $\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ}$ és $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ} = \overrightarrow{PQ}$, vagyis a $\overrightarrow{PP} = \overrightarrow{QQ}$ neutrális elem, amit a továbbiakban nullvektornak nevezünk és a $\mathbf{0}$ szimbólummal jelölünk,
- asszociatív, hiszen a $(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PQ} + (\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS})$,
- bármely vektornak van mindkét oldali inverzeleme, hiszen a $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{QQ} + \overrightarrow{PQ}$.

Innentől $-\mathbf{u}$ jelöli az $\mathbf{u}$ vektor inverzét.

10. lépés. A vektorok „+” művelete kommutatív. Legyen $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$ és $\mathbf{v} = \overrightarrow{QR}$. Az egyértelmű reprezentálás miatt van olyan S pont, és egyértelmű, melyre $\mathbf{v} = \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS}$. Ha a P, Q és R pontok nem kollineárisak, akkor a p -reláció definíciója miatt $\mathbf{u} = \overrightarrow{SR}$, és így $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SR} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.



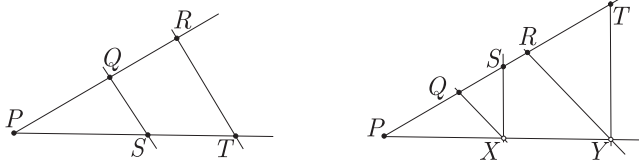
Ha a P, Q és R pontok kollineárisak, akkor vegyünk egy $T \notin PR$ pontot, és legyen $\mathbf{w} = \overrightarrow{QT}$, $\mathbf{u}' = \mathbf{u} + \mathbf{w} = \overrightarrow{PT}$ és $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + (-\mathbf{w}) = \overrightarrow{TR}$. Míthogy P, T és R nem kollineárisak, $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}' = \mathbf{v}' + \mathbf{u}' = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ ahogy állítottuk.

11. lépés. Az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{u}'$ vektorokat párhuzamosnak mondjuk, és ezt a $\mathbf{u} \parallel \mathbf{u}'$ jel mutatja, ha valamely P pontra a $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{u}$ és $\overrightarrow{PR} = \mathbf{u}'$ reprezentációikban a P, Q és R pontok kollineárisak. A párhuzamosság nem függ a P pont választásától, hiszen ha $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$ és $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{P'R'}$, akkor a p -reláció és az egyenesek közti párhuzamosság tranzitivitása miatt $P'Q' \parallel PQ \parallel PR \parallel P'R'$, amiért a P', Q' és R' pontok kollineárisak.

12. lépés. A vektorok párhuzamossága ekvivalencia-reláció, mert nyilván reflexív és szimmetrikus, továbbá tranzitív is, hiszen $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{PR}$ és $\overrightarrow{PR} \parallel \overrightarrow{PS}$ esetén a P, Q, R és S pontok mind ugyanarra az egyenesre esnek.

13. lépés. Az egymással párhuzamos, nem nulla vektorokból képzett $(\mathbf{u}, \mathbf{u}')$ rendezett párokat kötött arányoknak nevezzük. A $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})$ kötött arányt a $(\overrightarrow{PS}, \overrightarrow{PT})$ kötött aránnyal azonos arányúnak mondjuk, ha

- (1) $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{PS}$ és $QS \parallel RT$, vagy
- (2) $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{PS}$ és van olyan $(\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PY})$ kötött arány, melyre $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{PX}$ és a $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})$ és $(\overrightarrow{PS}, \overrightarrow{PT})$ kötött arány is azonos arányú a $(\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PY})$ kötött aránnyal.

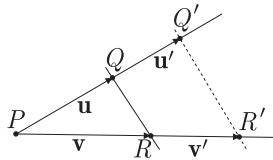


Világos, hogy (1) értelmében mindig létezik olyan $(\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PY})$ kötött arány, melyre $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{PX}$ és $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})$ kötött arány azonos arányú a $(\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PY})$ kötött aránnyal. Az azonos arányúságot „ $\overset{a}{\sim}$ ” jelöli.

14. lépés. A kötött arányok halmazán az $\overset{a}{\sim}$ azonos arányúság ekvivalencia-reláció, hiszen nyilván reflexív és szimmetrikus, valamint tranzitív is az alábbiak szerint. Tegyük fel, hogy $(\mathbf{u}, \mathbf{u}') \overset{a}{\sim} (\mathbf{v}, \mathbf{v}') \overset{a}{\sim} (\mathbf{w}, \mathbf{w}')$. Ha az $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{PR}$, $\mathbf{w} = \overrightarrow{PS}$ vektorok közül bármely kettő párhuzamos, akkor az $\overset{a}{\sim}$ definíciójából azonnal következik $(\mathbf{u}, \mathbf{u}') \overset{a}{\sim} (\mathbf{w}, \mathbf{w}')$. Ha az $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{PR}$, $\mathbf{w} = \overrightarrow{PS}$ páronként nem párhuzamos vektorok, és $\mathbf{u}' = \overrightarrow{PQ'}$, $\mathbf{v}' = \overrightarrow{PR'}$, $\mathbf{w} = \overrightarrow{PS'}$, akkor a QRS és $Q'R'S'$ háromszögek a P pontra perspektívek, így a Desargues-tulajdonság miatt egyenesre nézve is perspektívek, vagyis a $QS \cap Q'S'$ pont az $QR \cap Q'R'$ és $RS \cap R'S'$ pontok közös egyenesén van. Az azonos arányúság definíciója szerint a $QR \cap Q'R'$ és $RS \cap R'S'$ pontok a végtelen távoli i egyenesre esnek, ami azt jelenti, hogy $QS \parallel Q'S'$, ami az azonos arányúság definíciója szerint azt jelenti, hogy $(\mathbf{u}, \mathbf{u}') \overset{a}{\sim} (\mathbf{w}, \mathbf{w}')$.

15. lépés. A kötött arányok azonos arányúság szerinti ekvivalencia-osztályait arányoknak nevezzük. Arra a kötött arányra, amely egy aránynak eleme, azt mondjuk, hogy reprezentálja az arányt. A $(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ kötött arány által reprezentált arányt $\mathbf{v}' \div \mathbf{v}$ jelöli.

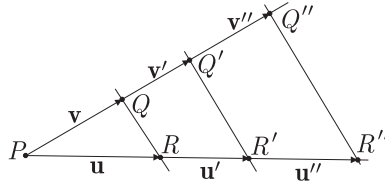
16. lépés: egyértelmű reprezentálás. Bármely a arányhoz és nem nulla $\mathbf{v}$ vektorhoz pontosan egy olyan $\mathbf{v}'$ vektor létezik, melyre $a = \mathbf{v}' \div \mathbf{v}$. Léven a egy arány, léteznek olyan $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$ és $\mathbf{u}' = \overrightarrow{PQ'}$ vektorok, hogy $a = \mathbf{u}' \div \mathbf{u}$. Legyen $\mathbf{v} = \overrightarrow{PR}$.



Ha $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$, akkor legyen $R' \in PR$ az az egyértelmű pont a PR egyenesen, melyre $QR \parallel Q'R'$. Ekkor az azonos arányúság definíciója értelmében a $\mathbf{v}' = \overrightarrow{PR'}$ vektor olyan, hogy $\mathbf{v}' \div \mathbf{v} = \mathbf{u}' \div \mathbf{u} = a$. Ha az $R'' \in PR$ pontra is teljesül, hogy $\overrightarrow{PR''} \div \mathbf{v} =$

$\mathbf{u}' \div \mathbf{u} = a$, akkor az azonos arányúság definíciója miatt $Q'R' \parallel QR \parallel Q'R''$, amiből $Q'R' \parallel Q'R''$, vagyis $Q'R' = Q'R''$ következik, amiért $R' = R''$. Ha $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$, akkor vegyünk egy $\mathbf{w} \parallel \mathbf{u}$ vektort, és alkalmazzuk iménti eredményünket az $\mathbf{u}, \mathbf{w}$, valamint $\mathbf{w}, \mathbf{v}$ vektorpárookra.

17. lépés. Bármely a és b arányokhoz és $\mathbf{v}$ vektorhoz léteznek olyan $\mathbf{v}'$ és $\mathbf{v}''$ vektorok, hogy $a = \mathbf{v}' \div \mathbf{v}$ és $b = \mathbf{v}'' \div \mathbf{v}'$. A $c = \mathbf{v}'' \div \mathbf{v}$ arány nem függ a $\mathbf{v}$ vektor választásától, hiszen ha $a = \mathbf{u}' \div \mathbf{u}$ és $b = \mathbf{u}'' \div \mathbf{u}'$ valamely $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$ vektorra, akkor a $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$, $\mathbf{v}' = \overrightarrow{PQ'}$, $\mathbf{v}'' = \overrightarrow{PQ''}$ és $\mathbf{u} = \overrightarrow{PR}$, $\mathbf{u}' = \overrightarrow{PR'}$, $\mathbf{u}'' = \overrightarrow{PR''}$ reprezentánsokra az azonos arányúság definíciója értelmében $QR \parallel Q'R'$ és $Q'R' \parallel Q''R''$, amiből a párhuzamosság tranzitivitása miatt $QR \parallel Q''R''$, vagyis $\mathbf{v}'' \div \mathbf{v} = \mathbf{u}'' \div \mathbf{u}$ következik.



Ha $a = \mathbf{u}' \div \mathbf{u}$ és $b = \mathbf{u}'' \div \mathbf{u}'$ valamely $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$ vektorra, akkor válasszunk egy $\mathbf{w} \parallel \mathbf{v}$ vektort, és ehhez az egyértelmű reprezentálás alapján azokat a $\mathbf{w}'$ és $\mathbf{w}''$ vektorokat, melyekre $a = \mathbf{w}' \div \mathbf{w}$ és $b = \mathbf{w}'' \div \mathbf{w}'$. Ekkor $\mathbf{v}'' \div \mathbf{v} = \mathbf{w}'' \div \mathbf{w} = \mathbf{u}'' \div \mathbf{u}$ igazolja, hogy $c = \mathbf{v}'' \div \mathbf{v}$ arány nem függ a $\mathbf{v}$ vektor választásától.

18. lépés. Az a és b arányok szorzatának azt a c arányt nevezzük, melyre valamely az $a = \mathbf{v}' \div \mathbf{v}$ és $b = \mathbf{v}'' \div \mathbf{v}'$ feltételt teljesítő $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ és $\mathbf{v}''$ vektorok esetén $c = \mathbf{v}'' \div \mathbf{v}$. Az arányok szorzását a „ $\cdot$ ” jellel fejezzük ki, vagyis $a \cdot b := c$.

19. lépés. Az arányok $\mathbb{F}_0$ halmaza a „ $\cdot$ ” művelettel csoportot alkot, mert

- létezik benne neutrális elem, hiszen a $(\mathbf{v} \div \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u}' \div \mathbf{u}) = \mathbf{u}' \div \mathbf{u}$, vagyis $\mathbf{v} \div \mathbf{v}$ neutrális elem, amit a továbbiakban egységnek nevezünk és az 1 szimbólum jelöl,
- asszociatív, hiszen a $((\mathbf{v}''' \div \mathbf{v}'') \cdot (\mathbf{v}'' \div \mathbf{v}')) \cdot (\mathbf{v}' \div \mathbf{v}) = (\mathbf{v}''' \div \mathbf{v}') \cdot (\mathbf{v}' \div \mathbf{v}) = \mathbf{v}''' \div \mathbf{v} = (\mathbf{v}''' \div \mathbf{v}'') \cdot (\mathbf{v}'' \div \mathbf{v}) = (\mathbf{v}''' \div \mathbf{v}'') \cdot ((\mathbf{v}'' \div \mathbf{v}') \cdot (\mathbf{v}' \div \mathbf{v}))$,
- bármely aránynak van mindkét oldali inverzeleme, hiszen a $(\mathbf{v}' \div \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v} \div \mathbf{v}') = (\mathbf{v} \div \mathbf{v}') = 1 = (\mathbf{v} \div \mathbf{v}') \cdot (\mathbf{v}' \div \mathbf{v})$.

20. lépés. Bármely e egyenes valamely O és $E \neq O$ pontját rögzítve, az a $\phi_{OE}: e \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{F}_0$ leképezés, melyre $\phi_{OE}(X) = \overrightarrow{OX} \div \overrightarrow{OE}$, az egyértelmű reprezentálás miatt bijektív. Legyen $\mathbb{F} = \mathbb{F}_0 \cup \{0\}$ és legyen $\varphi_{OE}: e \rightarrow \mathbb{F}$ olyan, hogy $\varphi_{OE}(X) = 0$, ha $X = O$, és $\varphi_{OE}(X) = \phi_{OE}(X)$, ha $X \neq O$. A φ_{OE} leképezés is bijektív.

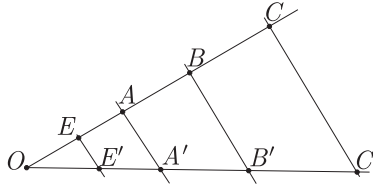
Bármely $a, b \in \mathbb{F}$ esetén a $\sigma_{OE}(a, b) := \varphi_{OE}(\overrightarrow{O\varphi_{OE}^{-1}(a)} + \overrightarrow{O\varphi_{OE}^{-1}(b)})$ is az $\mathbb{F}$ eleme. A $\sigma_{OE}: \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ tulajdonságait vizsgáljuk.

21. lépés. A σ_{OE} nem függ az E megválasztásától. Ennek igazolására legyen $OE \parallel OE'$, $a, b \in \mathbb{F}_0$,

A és A' azok a pontok, melyekre rendre $a = \overrightarrow{OA} \div \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA'} \div \overrightarrow{OE'}$,

B és B' azok a pontok, melyekre rendre $b = \overrightarrow{OB} \div \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB'} \div \overrightarrow{OE'}$,

C és C' azok a pontok, melyekre rendre $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ és $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$.



Az azonos arányúság miatt ebből $EE' \parallel AA' \parallel BB'$, a vektorok összegzéséből pedig $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'}$ adódik, amiket összevetve azt látjuk, hogy $CC' \parallel EE'$. Eszerint

$$\sigma_{OE}(a, b) = \varphi_{OE}(\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OC} \div \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC'} \div \overrightarrow{OE'} = \varphi_{OE'}(\overrightarrow{OC'}) = \sigma_{OE'}(a, b).$$

Ha $a = 0$ vagy $b = 0$ lenne, akkor rendre $A = A' = O$ vagy $B = B' = O$, és emiatt $C = B$ és $C' = B'$ vagy $C = A$ és $C' = A'$ lenne, amiért nyilván $\sigma_{OE}(a, b) = \sigma_{OE'}(a, b)$ adódik. Végül, ha $OE \parallel OE'$, akkor véve egy $E'' \notin OE$ pontot, az iméntiek értelmében $\sigma_{OE}(a, b) = \sigma_{OE''}(a, b) = \sigma_{OE'}(a, b)$ igazolja állításunkat.

22. lépés. Igazoljuk, hogy σ_{OE} az O megválasztásától sem függ. Legyen $OE \parallel O'E$,

A és A' azon pontok, melyekre rendre $a = \overrightarrow{OA} \div \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{O'A'} \div \overrightarrow{O'E}$,

B és B' azon pontok, melyekre rendre $b = \overrightarrow{OB} \div \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{O'B'} \div \overrightarrow{O'E}$,

C és C' azon pontok, melyekre rendre $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ és $\overrightarrow{O'C'} = \overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{O'B'}$.

Legyen továbbá E', A'', B'' és C'' rendre az a pont, melyre $\overrightarrow{O'E} = \overrightarrow{OE'}$, $\overrightarrow{O'A'} = \overrightarrow{OA''}$, $\overrightarrow{O'B'} = \overrightarrow{OB''}$ és $\overrightarrow{O'C'} = \overrightarrow{OC''}$. Ekkor

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA''} \div \overrightarrow{OE'} &= \overrightarrow{O'A'} \div \overrightarrow{O'E} = a, & \overrightarrow{OB''} \div \overrightarrow{OE'} &= \overrightarrow{O'B'} \div \overrightarrow{O'E} = b, \\ \overrightarrow{OC''} &= \overrightarrow{OA''} + \overrightarrow{OB''}, \end{aligned}$$

amiért az előző lépés eredménye alapján

$$\sigma_{OE}(a, b) = \sigma_{OE''}(a, b) = \overrightarrow{OC''} \div \overrightarrow{OE'} = \overrightarrow{O'C'} \div \overrightarrow{O'E} = \varphi_{O'E}(\overrightarrow{O'C'}) = \sigma_{O'E}(a, b),$$

ami igazolja állításunkat.

23. lépés. Az $a, b \in \mathbb{F}$ elemek $a + b$ jelű összegét definiáljuk. Legyen $a + b := \sigma_{OE}(a, b)$ valamely $O \neq E$ pontokra. Előbbi két lépésünk alapján $a + b$ nem függ az O és E pontok választásától.

24. lépés. Az $\mathbb{F}$ halmaz a „+” művelettel kommutatív csoportot alkot, mert zárt a műveletre és az alábbiak is teljesülnek.

- Létezik benne neutrális elem, hiszen $a + b = \sigma_{OE}(0, b) = b$, vagyis 0 neutrális elem, amit a továbbiakban nullának nevezünk.
- Asszociatív, hiszen $a = \overrightarrow{OA} \div \overrightarrow{OE}$, $b = \overrightarrow{OB} \div \overrightarrow{OE}$ és $c = \overrightarrow{OC} \div \overrightarrow{OE}$ esetén

$$\begin{aligned} (a + b) + c &= \sigma_{OE}(\sigma_{OE}(a, b), c) = \sigma_{OE}((\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \div \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OC} \div \overrightarrow{OE}) \\ &= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \div \overrightarrow{OE} = \sigma_{OE}(\overrightarrow{OA} \div \overrightarrow{OE}, (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \div \overrightarrow{OE}) \\ &= \sigma_{OE}(a, \sigma_{OE}(b, c)) = a + (b + c), \end{aligned}$$

és ugyanez triviálisan teljesül, ha az a, b és c közül néhány 0 .

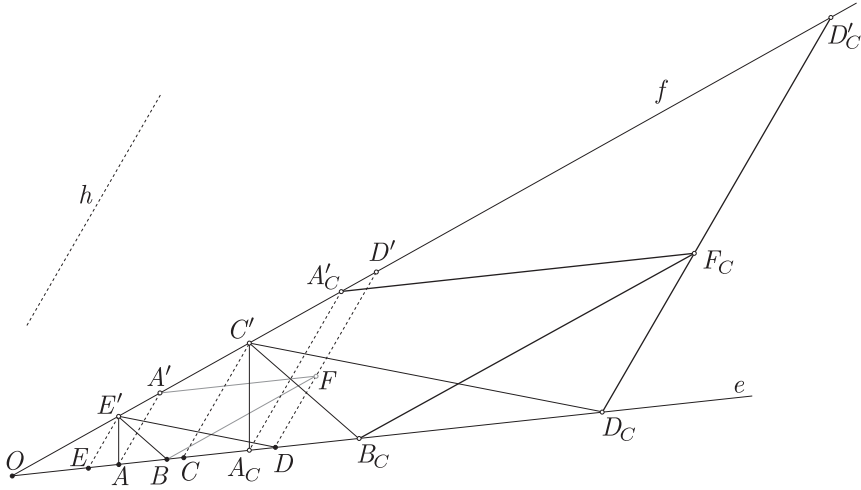
- Bármely elemnek van mindkét oldali inverzeleme, hiszen ha $a = \overrightarrow{OA} \div \overrightarrow{OE}$ és $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = \mathbf{0}$, akkor $b = \overrightarrow{OB} \div \overrightarrow{OE}$ elemre $a + b = \sigma_{OE}(a, b) = \overrightarrow{OO} \div \overrightarrow{OE} = 0$.
- Kommutatív, hiszen $a = \overrightarrow{OA} \div \overrightarrow{OE}$, $b = \overrightarrow{OB} \div \overrightarrow{OE}$ esetén

$$a + b = \sigma_{OE}(a, b) = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \div \overrightarrow{OE} = \sigma_{OE}(b, a) = b + a,$$

és ugyanez triviálisan teljesül, ha az a és b valamelyike 0 .

25. lépés. A „+” művelet balról disztributív a „ $\cdot$ ” műveletre. Ennek igazolására legyen az e egyenesen lévő pontokra $a = \overrightarrow{OA} \div \overrightarrow{OE}$, $b = \overrightarrow{OB} \div \overrightarrow{OE}$ és $c = \overrightarrow{OC} \div \overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA_C} \div \overrightarrow{OE} = (\overrightarrow{OC} \div \overrightarrow{OE}) \cdot (\overrightarrow{OA} \div \overrightarrow{OE})$, $\overrightarrow{OB_C} \div \overrightarrow{OE} = (\overrightarrow{OC} \div \overrightarrow{OE}) \cdot (\overrightarrow{OB} \div \overrightarrow{OE})$, $\overrightarrow{OD_C} \div \overrightarrow{OE} = (\overrightarrow{OC} \div \overrightarrow{OE}) \cdot (\overrightarrow{OD} \div \overrightarrow{OE})$. Vegyünk egy $f \neq e$ egyenest, az O ponton keresztül, valamint egy olyan h egyenest, mely az e és f egyikével sem párhuzamos. A fentebb megadott pontokon át a h egyenessel párhuzamosan haladó egyenesek messék az e egyenest ugyanúgy betűzött, de vesszővel jelölt pontokban.

Végül legyen még $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB}$, és $\overrightarrow{OF_C} = \overrightarrow{OA'_C} + \overrightarrow{OB_C}$.



Mivel $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{A'O} = \overrightarrow{A'A}$, $F \in DD'$ adódik. Tekintve, hogy $\overrightarrow{OA'_C} \div \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA_C} \div \overrightarrow{OA} = c = \overrightarrow{OB_C} \div \overrightarrow{OB}$, amiért $A'B \parallel A'_C B_C$, kapjuk, hogy az $A'FB$ és az $A'_C F_C B_C$ háromszögek a végtelen távoli egyenesre nézve perspektívek. A Desargues-tulajdonság miatt így e két háromszög pontra nézve is perspektív, amiből $F_C \in OF$ következik. Minthogy $BF \parallel B_C F_C$, $\overrightarrow{OF_C} \div \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB_C} \div \overrightarrow{OB} = c = \overrightarrow{OD_C} \div \overrightarrow{OD}$ adódik, amiből $h \parallel FD \parallel F_C D_C$ következik, és így $F_C \in D_C D'_C$ adódik.

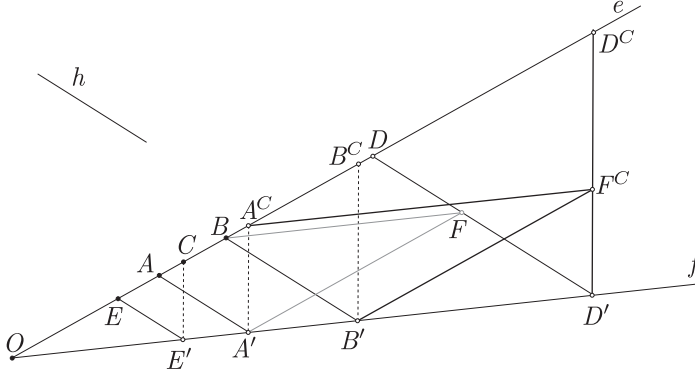
Ezeket felhasználva

$$\begin{aligned} c \cdot (a + b) &= (\overrightarrow{OC} \div \overrightarrow{OE}) \cdot ((\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \div \overrightarrow{OE}) = (\overrightarrow{OC} \div \overrightarrow{OE}) \cdot (\overrightarrow{OD} \div \overrightarrow{OE}) \\ &= \overrightarrow{OD_C} \div \overrightarrow{OE} = (\overrightarrow{OA_C} + \overrightarrow{OB_C}) \div \overrightarrow{OE} = (\overrightarrow{OA_C} \div \overrightarrow{OE}) + (\overrightarrow{OB_C} \div \overrightarrow{OE}) \\ &= (\overrightarrow{OC} \div \overrightarrow{OE}) \cdot (\overrightarrow{OA} \div \overrightarrow{OE}) + (\overrightarrow{OC} \div \overrightarrow{OE}) \cdot (\overrightarrow{OB} \div \overrightarrow{OE}) \\ &= c \cdot a + c \cdot b \end{aligned}$$

igazolja a baloldali disztributivitást, mely triviálisan teljesül akkor is, ha az a, b és c közül néhány 0.

26. lépés. A „ $\cdot$ ” művelet jobbról disztributív a „ $+$ ” műveletre. Ennek igazolására legyen az e egyenesen lévő pontokra $a = \overrightarrow{OA} \div \overrightarrow{OE}$, $b = \overrightarrow{OB} \div \overrightarrow{OE}$ és $c = \overrightarrow{OC} \div \overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA_C} \div \overrightarrow{OE} = (\overrightarrow{OA} \div \overrightarrow{OE}) \cdot (\overrightarrow{OC} \div \overrightarrow{OE})$, $\overrightarrow{OB_C} \div \overrightarrow{OE} = (\overrightarrow{OB} \div \overrightarrow{OE}) \cdot (\overrightarrow{OC} \div \overrightarrow{OE})$, $\overrightarrow{OD_C} \div \overrightarrow{OE} = (\overrightarrow{OD} \div \overrightarrow{OE}) \cdot (\overrightarrow{OC} \div \overrightarrow{OE})$. Vegyünk egy $f \neq e$ egyenest,

az O ponton keresztül, valamint egy olyan h egyenest, mely az e és f egyikével sem párhuzamos. A fentebb megadott pontokon át a h egyenessel párhuzamosan haladó egyenesek messék az f egyenest ugyanúgy betűzött, de vesszővel jelölt pontokban. Végül legyen még $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA'}$, és $\overrightarrow{OF^C} = \overrightarrow{OA^C} + \overrightarrow{OB'}$.



Mivel $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA'}) = \overrightarrow{OA'}$, $F \in DD'$ adódik. Eszerint $\overrightarrow{D'F^C} = \overrightarrow{B'F^C} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{OA^C} - \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{OA^C} - \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{A'A^C}$ miatt $F^C D' \parallel A^C A' \parallel D^C D'$ következik, és így $F^C \in D^C D'$.

Ezeket felhasználva

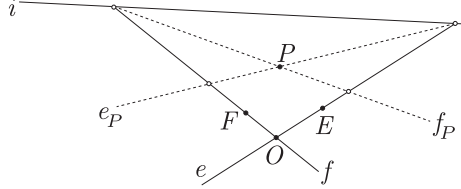
$$\begin{aligned}
 (a + b) \cdot c &= ((\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \div \overrightarrow{OE}) \cdot (\overrightarrow{OC} \div \overrightarrow{OE}) = (\overrightarrow{OD} \div \overrightarrow{OE}) \cdot (\overrightarrow{OC} \div \overrightarrow{OE}) \\
 &= (\overrightarrow{OD'} \div \overrightarrow{OE'}) \cdot (\overrightarrow{OC} \div \overrightarrow{OE}) = (\overrightarrow{OD^C} \div \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OC} \div \overrightarrow{OE}) \\
 &= \overrightarrow{OD^C} \div \overrightarrow{OE} = ((\overrightarrow{OA^C} + \overrightarrow{OB^C}) \div \overrightarrow{OE}) \\
 &= (\overrightarrow{OA^C} \div \overrightarrow{OE}) + (\overrightarrow{OB^C} \div \overrightarrow{OE}) = a \cdot c + b \cdot c
 \end{aligned}$$

igazolja a jobboldali disztributivitást, mely triviálisan teljesül akkor is, ha az a, b és c közül néhány 0.

27. lépés. Az $\mathbb{F}$ halmaz a „+” és „·” művelettel ferdetestet alkot, mert a „·” művelet mindkét oldalról disztributív a „+” műveletre.

28. lépés: *affin koordinátázás*. Vegyünk a végtelen távoli i egyenes kivételével maradt $\mathbb{A}$ ponthalmazban egy O pontot és rajta keresztül az $e \neq f$ egyeneseket (ezeket *koordináta-tengelyeknek* hívjuk), ezeken rendre rögzítve az $\mathbb{A}$ halmaz $E \neq O$ és $F \neq O$ pontját. Már láttuk, hogy a $\varphi_{OE}: e \rightarrow \mathbb{F}$ és a $\varphi_{OF}: f \rightarrow \mathbb{F}$ leképezés is bijektív és $\varphi_{OE}(O) = \varphi_{OF}(O) = 0$.

Tetszőleges $P \in \mathbb{A}$ ponthoz pontosan egy olyan $e_P \parallel e$, illetve $f_P \parallel f$ egyenes van, mely illeszkedik a P pontra. Ezek az egyenesek pontosan egy pontban metszik rendre az f és e egyeneseket.



Azt a $\phi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{F}^2$ leképezést, melyre $\phi(P) = (\varphi_{OE}(e \cap f_P), \varphi_{OF}(f \cap e_P))$ az $\mathbb{A}$ halmaz affin koordinatázásának hívjuk, az $\mathbb{A}$ halmazt affin síknak nevezzük.

29. lépés. Az $\mathbb{A}$ affin sík ϕ koordinatázása bijektív, hiszen a φ_{OE} és φ_{OF} leképezések és a ponthoz-egyenespár hozzárendelés is bijektív. Az $\mathbb{A}$ affin sík ϕ koordinatázása az egyeneseket egyenesekbe viszi:

- Az azonos arányúság miatt az origón átmenő egyenesek pontjait a ϕ arányos koordinátájú pontokba viszi, ami éppen egy 1-dimenziós altér, vagyis egyenes az $\mathbb{F}^2$ koordináta-síkban.
- Az origón nem áthaladó, valamely koordináta-tengellyel párhuzamos egyenesek nem nulla koordinátájú P pontban metszik a velük nem párhuzamos koordináta-tengelyt. Az egyenes pontjainak ezen koordinátája tehát ugyanaz a nem nulla konstans. Ha mondjuk $\phi(P) = (x_0, 0)$ az egyenes minden X pontjának képe $\phi(X) = (x_0, y)$ alakú, ez pedig éppen az $x = x_0$ egyenletű 1-dimenziós affin altér jellemzője az $\mathbb{F}^2$ koordinátasíkban.
- Az origón nem áthaladó, mindkét koordináta-tengelyt metsző egyenesek nem nulla koordinátájú P és Q pontokban metszik a koordináta-tengelyeket. Legyen $\phi(P) = (x_0, 0)$ és $\phi(Q) = (0, y_0)$. Az azonos arányúság definíciója szerint ekkor $\varphi_{PQ}(X)$ értéke arányos az $x - x_0$ illetve $y - y_0$ értékekkel, ahol $\phi(X) = (x, y)$. Ez éppen az $(x_0, 0)$ és $(0, y_0)$ pontokon áthaladó 1-dimenziós affin altér jellemzője az $\mathbb{F}^2$ koordinátasíkban.

(Mindez igazolja, hogy $\mathbb{A}$ affin sík az $\mathbb{F}$ ferdettest felett.)

30. lépés: *pontok homogén koordinatázása*. A $\mathbb{P}$ projektív sík pontjaihoz homogén koordinátákat rendelünk a $\hat{\psi}$ hozzárendelés definiálásával úgy, hogy

$$\hat{\psi}(P) := \begin{cases} [x, y, 1] & \text{ha } P \in \mathbb{A} \text{ és } \phi(P) = (x, y), \\ [x, y, 0] & \text{ha } P = i \cap OQ, Q \in \mathbb{A} \text{ és } \phi(Q) = (x, y). \end{cases}$$

Az affin koordinatázásnál láttuk, hogy az origón áthaladó egyenesek pontjainak koordinátái arányosak, így a $\hat{\psi}$ hozzárendelés jól definiált. Természetesen bijektív,

hiszen a ϕ bijektív az $\mathbb{A}$ halmazon, az i végtelen távoli egyenesnek pedig minden pontján át pontosan egy egyenes illeszkedik az O origóra.

31. lépés: *egyenesek homogén koordinátázása*. A $\mathbb{P}$ projektív sík tetszőleges $P \in i$ pontján átmenő tetszőleges e egyeneshez a $\bar{\psi}$ leképezés úgy rendel homogén koordinátákat, hogy

$$\bar{\psi}(e) := \begin{cases} [0, 0, 1] & \text{ha } e = i, \\ [x^{-1}y, -1, t - zx^{-1}y] & \text{ha } e \neq i \text{ és } x \neq 0, \\ [1, 0, -z] & \text{ha } e \neq i \text{ és } x = 0, \end{cases}$$

ahol $\hat{\psi}(P) = [x, y, 0]$, és $e \neq i$ esetén a $Q \in \mathbb{A} \cap e$ pontra $\phi(Q) = (z, t)$. Ez jól definiált leképezés, mert ha $[\bar{x}, \bar{y}, 0] = [x, y, 0]$, vagyis $\bar{x} = rx$, $\bar{y} = ry$ valamely $0 \neq r \in \mathbb{F}$ testelemre, és $\phi(Q') = (z', t')$, amiért $z' = z + sx$ és $t' = t + sy$ valamely $s \in \mathbb{F}$ testelemre, akkor

$$(\bar{x}^{-1}\bar{y}, -1, t' - z'\bar{x}^{-1}\bar{y}) = (x^{-1}y, -1, t + sy - (z + sx)x^{-1}y) = (x^{-1}y, -1, t - zx^{-1}y).$$

32. lépés: *illeszkedés*. Tekintsünk egy tetszőleges $P \in i$ pontot, melyre $\hat{\psi}(P) = [x, y, 0]$. Amennyiben $P \bowtie e$ akkor $e = i$, vagyis $\bar{\psi}(e) = [0, 0, 1]$, amiért $(x, y, 0)(0, 0, 1)^T = 0$, vagy $e \neq i$ és ekkor valamely $Q \in e \cap \mathbb{A}$ pontra $\hat{\psi}(Q) = [z, t, 1]$, amiért

- ha $x \neq 0$, akkor $\bar{\psi}(e) = [x^{-1}y, -1, t - zx^{-1}y]$, és így $(x, y, 0)(x^{-1}y, -1, t - zx^{-1}y)^T = xx^{-1}y - y = 0$,
- ha $x = 0$, akkor $\bar{\psi}(e) = [1, 0, -z]$, és így $(x, y, 0)(1, 0, -z)^T = 0$,

tehát $P \bowtie e \Rightarrow \hat{\psi}(P) \perp \bar{\psi}(e)$.

Tekintsünk egy tetszőleges $Q \in \mathbb{A}$ pontot, melyre $\hat{\psi}(Q) = [z, t, 1]$. Amennyiben $Q \bowtie e$, akkor $e \neq i$ és ekkor a $P := e \cap i$ metszetre $\hat{\psi}(P) = [x, y, 0]$, amiért

- ha $x \neq 0$, akkor $\bar{\psi}(e) = [x^{-1}y, -1, t - zx^{-1}y]$, amiért $(z, t, 1)(x^{-1}y, -1, t - zx^{-1}y)^T = zx^{-1}y - t + (t - zx^{-1}y) = 0$,
- ha $x = 0$, akkor $\bar{\psi}(e) = [1, 0, -z]$, amiért $(z, t, 1)(1, 0, -z)^T = z - z = 0$,

tehát $Q \bowtie e \Rightarrow \bar{\psi}(e) \perp \hat{\psi}(Q)$.

Ha valamely e egyenesre és $P \in i$ pontra $\hat{\psi}(P) \perp \bar{\psi}(e)$, ahol $\hat{\psi}(P) = [x, y, 0]$ és $\bar{\psi}(e) = [p, q, r]$, akkor $xp + yq = 0$, és így

- $x \neq 0$ esetén $p = -x^{-1}yq$, amiért $\bar{\psi}(e) = [-x^{-1}yq, q, r] = [-x^{-1}y, -1, rq^{-1}]$,
- $x = 0$ esetén $y \neq 0$ és $q = 0$, amiért $\bar{\psi}(e) = [p, 0, r] = [1, 0, rp^{-1}]$,

tehát $\hat{\psi}(P) \perp \bar{\psi}(e) \Rightarrow P \bowtie e$.

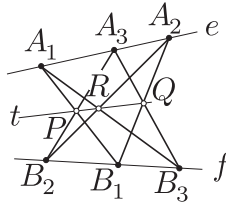
Ha valamely e egyenesre és $Q \in \mathbb{A}$ pontra $\hat{\psi}(Q) \perp \bar{\psi}(e)$, ahol $\hat{\psi}(Q) = [z, t, 1]$ és $\bar{\psi}(e) = [p, q, r]$, akkor $zp + tq + r = 0$, és így $\bar{\psi}(e) = [p, q, -zp - tq]$. Ha $q \neq 0$, akkor $\bar{\psi}(e) = [-pq^{-1}, -1, t + zpq^{-1}]$, ha pedig $q = 0$, akkor $p \neq 0$ és így $\bar{\psi}(e) = [p, 0, -zp] = [1, 0, -z]$ adódik, tehát $\hat{\psi}(Q) \perp \bar{\psi}(e) \Rightarrow Q \bowtie e$.

33. lépés: összefoglalás. Megkonstruáltuk az $\mathbb{F}$ ferdetestet és a $\psi = (\hat{\psi}, \bar{\psi}, \tilde{\psi}): \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{F}}$ illeszkedést tartó leképezést, ahol $\tilde{\psi}: \bowtie \mapsto \perp$. Ezzel a tételt igazoltuk. ■

A kommutatív $\mathbb{R}$ test feletti $[\mathbb{R}^3]$ projektív síkban igazoltuk a Papposz–Pascal-tétel állítását. Megmutatjuk, hogy ebben az $\mathbb{R}$ számtest kommutativitása volt a lényeges feltétel.

Tétel. Egy projektív sík akkor és csak akkor Papposz-féle, ha izomorf egy kommutatív $\mathbb{F}$ test feletti $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}$ projektív síkkal.

Bizonyítás. Legyen $\mathbb{F}$ egy kommutatív test, és essenek az A_1, A_2, A_3 és B_1, B_2, B_3 ponthármasok rendre az e illetve f egyenesre.



9. ábra

Megfelelő koordinátázást választva az $\mathbb{F}^3$ térben, elérhető, hogy $e = [0, 0, 1]$ és $f = [0, 1, 0]$, valamint $B_1 = [0, 0, 1]$, $B_2 = [-1, 0, 1]$, $B_3 = [1, 0, 1]$ és $A_3 = [0, 1, 0]$ legyen. Mivel $e = [0, 0, 1]$, a rajta lévő további pontokra $A_2 = [x_2, 1, 0]$ és $A_1 = [x_1, 1, 0]$ valamely $x_1 x_2 \neq 0$ esetén.

Eszerint

$$\begin{aligned} P &= A_1 B_1 \cap B_2 A_3 = ([x_1, 1, 0] \times [0, 0, 1]) \times ([-1, 0, 1] \times [0, 1, 0]) \\ &= [1, -x_1, 0] \times [-1, 0, -1] = [x_1, 1, -x_1], \\ Q &= B_1 A_2 \cap A_3 B_3 = ([0, 0, 1] \times [x_2, 1, 0]) \times ([0, 1, 0] \times [1, 0, 1]) \\ &= [-1, x_2, 0] \times [1, 0, -1] = [-x_2, -1, -x_2], \\ R &= A_2 B_2 \cap B_3 A_1 = ([x_2, 1, 0] \times [-1, 0, 1]) \times ([1, 0, 1] \times [x_1, 1, 0]) \\ &= [1, -x_2, 1] \times [-1, x_1, 1] = [-x_2 - x_1, -2, x_1 - x_2], \end{aligned}$$

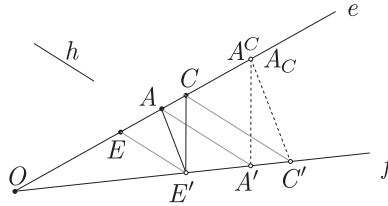
Mármost $PQ = [x_1, 1, -x_1] \times [-x_2, -1, -x_2] = [-x_2 - x_1, 2x_1 x_2, -x_1 + x_2]$ és így

$$\begin{aligned} &\langle (-x_2 - x_1, 2x_1 x_2, -x_1 + x_2), (-x_2 - x_1, -2, x_1 - x_2) \rangle \\ &= (x_2 + x_1)^2 - 4x_1 x_2 - (x_1 - x_2)^2 = 0 \end{aligned}$$

miatt $R \in PQ$. Ezt kellett bizonyítanunk.

Most a másik irányt bizonyítjuk. Amennyiben a projektív sík Papposz-féle, akkor teljesül benne a Desargues-tulajdonság, így valamely $\mathbb{F}$ ferdetestre izomorf az $[\mathbb{F}^3]$ projektív síkkal.

Vegyük fel az előbbi bizonyításunkban már használt végtelen távoli i egyenest és a nem rajta lévő pontok $\mathbb{A}$ affin síkjában az $e \in \mathbb{A}$ egyenesen az O, E, C és A pontokat. Válasszunk az O ponton át egy $f \neq e$ egyenest, és egy h egyenest, mely egyik egyenessel sem párhuzamos. A fentebb megadott pontokon át a h egyenessel párhuzamosan haladó egyenesek messék az f egyenest ugyanúgy betűzött, de vesszővel jelölt pontokban.



Legyen A^C az a pont, melyre $\overrightarrow{OA^C} \div \overrightarrow{OE} = (\overrightarrow{OA} \div \overrightarrow{OE}) \cdot (\overrightarrow{OC} \div \overrightarrow{OE})$. Világos, hogy ekkor $A'A^C \parallel E'C$.

Legyen A_C az a pont, melyre $\overrightarrow{OA_C} \div \overrightarrow{OE} = (\overrightarrow{OC} \div \overrightarrow{OE}) \cdot (\overrightarrow{OA} \div \overrightarrow{OE})$. Ekkor $C'A_C \parallel AE'$ teljesül.

Eszerint az $EE' \cap CC'$, $A'A^C \cap E'C$ és $C'A_C \cap AE'$ pontok mind a végtelen távoli i egyenesre esnek, vagyis kollineárisak. Ebből a Papposz-tulajdonság miatt $A_C = A^C$ következik, ami a tételt bizonyítja. ■

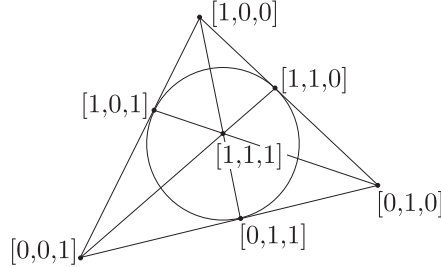
A koordináták léte lehetővé teszi, hogy az axiómákkal megadott projektív síkban bevezessük a kettősviszonyt és mindazon tételeket bizonyítsuk, vagy legalább megvizsgáljuk, amelyeket a kettősviszony segítségével kezeltünk.

A $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}$ projektív síkban nyilván teljesül a dualitás, hiszen a pontok és egyenesek illeszkedései a homogén koordinátákban ugyanazon feltételeket teljesítik, így kimondhatjuk az alábbi tételt, melyből természetesen következik a Papposz-tulajdonság duálisának érvényessége is a Papposz-féle projektív síkokon.

Tétel. *Papposz-féle síkban teljesül a dualitás.*

A Desargues-féle projektív síkokat adó $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}$ projektív síkokban az $\mathbb{F}$ (ferde)test elemszáma akár véges is lehet, mint például a p prím maradékosztályai által alkotott test esetében, és akkor a $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}$ projektív síknak „csak” véges sok pontja van. A véges projektív síkok és terek vizsgálata nem célunk, az érdeklődő olvasónak a [Kiss–Szőnyi: Véges geometriák] könyvet ajánljuk, azonban egyetlen, a továbbiakban

számunkra fontos példát bemutatunk. A *Fano-sík* úgy áll elő, hogy a 2 maradékosztályai által alkotott testet vesszük alapul, mellyel a rajzon homogén koordinátákkal látható véges projektív geometriát nyerjük.



A Fano-sík érdekessége abban áll, hogy egy teljes négyszög alkotja (a rajzon ennek hat csúcsa $[0, 0, 1]$, $[0, 1, 1]$, $[1, 1, 1]$, $[1, 0, 1]$ és $[0, 1, 0]$, $[1, 0, 0]$), melynek azonban mindhárom átlója egyetlen átlóspontra (a rajzon ez $[1, 1, 0]$) illeszkedik.

Azt mondjuk, hogy a projektív síkban egy teljes négyszög *Fano-típusú*, ha átlós pontjai egy egyenesre esnek (ekkor persze szükségképpen egybe is esnek az átlóspontok, hiszen mindegyik átlóra két átlóspont esik, és az átlók nem esnek egybe).

Tétel. *A $\mathbb{P}_F$ projektív síkban akkor és csak akkor létezik Fano-típusú teljes négyszög, ha $\text{Char } F = 2$. Ha $\text{Char } F = 2$, akkor minden teljes négyszög Fano-típusú.*

Bizonyítás. A $\mathbb{P}_F$ projektív síkban egy $\mathcal{N}$ teljes négyszög pontjai homogén koordinátáinak kiszámításához válasszuk úgy a koordinátázást az F^3 térben, hogy az $\mathcal{N}$ négyszög négy csúcsa $C_{001} = [0, 0, 1]$, $C_{011} = [0, 1, 1]$, $C_{111} = [1, 1, 1]$ és $C_{101} = [1, 0, 1]$ legyen. Ekkor az $\mathcal{N}$ négyszög további két csúcsának homogén koordinátái

$$\begin{aligned} C_{100} &= ([0, 0, 1] \times [1, 0, 1]) \times ([1, 1, 1] \times [0, 1, 1]) = [0, 1, 0] \times [0, -1, 1] \\ &= [1, 0, 0], \text{ és} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{010} &= ([0, 0, 1] \times [0, 1, 1]) \times ([1, 1, 1] \times [1, 0, 1]) = [-1, 0, 0] \times [-1, 0, -1] \\ &= [0, 1, 0]. \end{aligned}$$

Ebből az átlós pontokra

$$\begin{aligned} A_1 &= (C_{001} \times C_{111}) \times (C_{100} \times C_{010}) = [-1, 1, 0] \times [0, 0, 1] = [1, 1, 0] \\ A_2 &= (C_{001} \times C_{111}) \times (C_{101} \times C_{011}) = [-1, 1, 0] \times [-1, -1, 1] = [1, 1, 2] \\ A_3 &= (C_{100} \times C_{010}) \times (C_{101} \times C_{011}) = [0, 0, 1] \times [-1, -1, 1] = [1, -1, 0] \end{aligned}$$

adódik. Ezek pontosan akkor kollineárisak, ha $[1, 1, 2] \perp ([1, 1, 0] \times [1, -1, 0]) = [0, 0, 1]$, ami pontosan akkor teljesül, amikor $0 = \langle (1, 1, 2), (0, 0, 1) \rangle = 2 = 1 + 1$. Eszerint, ha a $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}$ projektív síkban létezik Fano-típusú teljes négyoldal, akkor $\text{Char } \mathbb{F} = 2$. Ha pedig $\text{Char } \mathbb{F} = 2$, akkor $1 + 1 = 0$, és így fenti számolásunk alapján minden teljes négyoldal átlóspontjai egybeesnek. ■

5.2. Projektív terek és homogén koordináták

Az axiómarendszer megfelelő módosításával magasabb dimenziós projektív terek vizsgálata is lehetővé válik, de az egyszerűség és gyorsaság érdekében ezen terek vizsgálatát a projektív sík eredeti konstrukciójának gondolatát általánosító altermodellel végezzük.

Legyen $\mathbb{F}$ egy test a $+$ és $\cdot$ műveletekkel, ahol $\mathbb{F}$ a $+$ művelettel kommutatív csoportot alkot, melynek nulleleme a 0 , valamint $\mathbb{F} \setminus \{0\}$ is kommutatív csoportot alkot a $\cdot$ művelettel.

Az $\mathbb{F}$ elemeiből készített $n \in \mathbb{N}$ elemű sorozatok $\mathbb{F}^n$ halmaza egy n -dimenziós vektortér az $\mathbb{F}$ test felett. Jelölje $\mathbb{F}_k^n$ az $\mathbb{F}^n$ vektortér k -dimenziós altereinek halmazát. Ezt a halmazt *Grassmann-sokaságnak* nevezik.

Definíció. A $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^n = (\mathbb{F}_1^{n+1}, \mathbb{F}_2^{n+1}, \dots, \mathbb{F}_n^{n+1}; \subseteq)$ rendszert az $\mathbb{F}$ test feletti n -dimenziós *projektív térnek* nevezzük, ahol $\mathbb{F}_1^{n+1}$ elemeit pontoknak, $\mathbb{F}_2^{n+1}$ elemeit egyeneseknek, $\mathbb{F}_k^{n+1}$ elemeit ($3 \leq k$) síkoknak, $n \geq 4$ esetén az $\mathbb{F}_n^{n+1}$ elemeit hipersíkoknak, az alterek tartalmazását jelentő $\subseteq$ relációt pedig az elemek illeszkedésének mondjuk. ▲

A $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^n$ projektív teret tekinthetjük az $\mathbb{F}^n$ affin tér projektivizáltjának, amennyiben elemeinek az $\mathbb{F}^{n+1}$ térbeli $x_{n+1} = 1$ hipersíkkal (amely nyilván izomorf az $\mathbb{F}^n$ affin térrel) vett metszeteit feleltetjük meg, és az $\mathbb{F}^{n+1}$ térbeli $(n+1)$ -edik tengelyre merőleges elemeket végtelen távoli elemeknek tekintjük, amivel az $\mathbb{F}^n$ affin teret kibővítjük.

Tétel. A $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^n$ projektív térben akkor és csak akkor létezik Fano-típusú teljes négyoldal, és akkor minden teljes négyoldal Fano-típusú, ha $\text{Char } \mathbb{F} = 2$.

Bizonyítás. Minthogy a $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2$ projektív sík a $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^n$ projektív térben $\mathbb{F}_3^{n+1}$ egy elem, vagyis projektív sík, és egy teljes négyoldal mindig egy projektív síkban helyezkedik el, az állítás következik az $n = 2$ esetben igazolt tételből. ■

A teljes négyoldalak Fano-típusának elkerülése érdekében a továbbiakban kizárjuk a kettő karakterisztikájú $\mathbb{F}$ testeket, vagyis $\text{Char } \mathbb{F} \neq 2$.

Világos, hogy a korábbi fejezetekben felfedezett projektív sík éppen $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, hiszen az 1-dimenziós alterek éppen az origóra illeszkedő egyenesek, a 2-dimenziós alterek

pedig az origóra illeszkedő síkok, és ezek illeszkedését éppen a $\subseteq$ tartalmazási reláció határozza meg. A $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ projektív teret n -dimenziós *valós projektív térnek* nevezzük.

A valós projektív sík vizsgálatának elején, egy korábbi fejezetben láttuk, hogy a valós projektív sík megegyezik az előző szakaszban bevezetett $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}$ projektív síkkal, vagyis $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}$.

Ez felveti az $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^n$ projektív terek *homogén koordinátázhatóságának* kérdését, melyet a továbbiakban vizsgálunk.

Az $\mathbb{F}^{n+1}$ vektortérben a nullvektor kivételével két vektort egymással arányosnak nevezünk, ha van az $\mathbb{F}$ testben olyan nem nulla elem, amivel az egyik vektort megszorozva, a másikat kapjuk. Az arányosság nyilván ekvivalencia-reláció.

Egy $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_{n+1}) \in \mathbb{F}^{n+1}$ nem nulla vektor arányosság szerinti ekvivalencia-osztályát $[\mathbf{v}]$ jelöli. Ezeket az arányossági osztályokat *homogén koordinátáknak* nevezzük, halmazukat pedig $[\mathbb{F}^{n+1}]$ jelöli.

Legyen $1 \leq k < n+1$ természetes szám, és tekintsük az $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k$ vektorokat. Ezek pontosan akkor alkotnak lineárisan független rendszert, ha az

$$\mathbf{M}_{\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k} := \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \cdots & u_{n+1}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^k & u_2^k & \cdots & u_{n+1}^k \end{pmatrix}$$

mátrix rangja k , ami pontosan akkor teljesül, ha van egész számokból álló $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n+1$ sorozat, melyre

$$\det_{i_1, \dots, i_k}(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k) := \det_{i_1, \dots, i_k} \mathbf{M}_{\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k} := \det \begin{pmatrix} u_{i_1}^1 & \cdots & u_{i_k}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{i_1}^k & \cdots & u_{i_k}^k \end{pmatrix} \neq 0.$$

Minthogy $n+1$ oszlopból k oszlopot $\binom{n+1}{k}$ módon választhatunk, ilyen $\det_{i_1, \dots, i_k}$ leképezésből éppen $\binom{n+1}{k}$ darab van. Legyen $\mathcal{I}_k = \{(i_1, \dots, i_k) : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n+1\}$. Ennek $\binom{n+1}{k}$ eleme van, ezért van rá bijektív leképezés az első $\binom{n+1}{k}$ pozitív természetes szám halmazáról.

Tétel. Legyen $\sigma: \{1, 2, \dots, \binom{n+1}{k}\} \rightarrow \mathcal{I}_k$ egy bijektív leképezés, a $p_\sigma: (\mathbb{F}^{n+1})^k \rightarrow \mathbb{F}^{\binom{n+1}{k}}$ leképezés pedig olyan, melyre

$$p_\sigma: (\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k) \mapsto (\det_{\sigma(1)}(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k), \dots, \det_{\sigma(\binom{n+1}{k})}(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k)).$$

Ekkor a nem nulla $p_\sigma(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k) \in \mathbb{F}^{\binom{n+1}{k}}$ vektor akkor és csak akkor arányos a $p_\sigma(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k) \in \mathbb{F}^{\binom{n+1}{k}}$ vektorral, ha az $(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k)$ és $(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k)$ vektorrendszer is független vektorokból áll és ugyanazt a k -dimenziós alteret feszítik az $\mathbb{F}^{n+1}$ vektortérben.

Bizonyítás. Előbb az „akkor” irányt igazoljuk. Ha az $\{\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k\}$ és $\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\}$ vektorrendszer ugyanazt az $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_k^{n+1}$ alteret feszítik, akkor léteznek olyan $\lambda_{ij} \in \mathbb{F}$ együtthatók, melyekre

$$\mathbf{u}^m = \lambda_{m1}\mathbf{v}^1 + \dots + \lambda_{mk}\mathbf{v}^k, \quad (1 \leq m \leq k),$$

és az $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{k1} & \dots & \lambda_{kk} \end{pmatrix}$ mátrix nem elfajuló. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{M}_{\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k} = \mathbf{L}\mathbf{M}_{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k}$, amiből

$$\det_{i_1, \dots, i_k}(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k) = \det_{i_1, \dots, i_k}(\mathbf{L}\mathbf{M}_{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k}) = \det \mathbf{L} \det_{i_1, \dots, i_k}(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k).$$

Ez bizonyítja a tétel „akkor” állítását.

Most a „csak akkor” irányt vizsgáljuk. Tegyük fel, hogy $p_\sigma(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k)$ nem nulla és arányos a $p_\sigma(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k)$ vektorral, vagyis létezik egy olyan $0 \neq \ell \in \mathbb{F}$ együttható, melyre minden $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n+1$ sorozat esetén

$$\det_{i_1, \dots, i_k}(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k) = \ell \det_{i_1, \dots, i_k}(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k).$$

Mintegy $p_\sigma(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k)$ nem nulla, van olyan $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n+1$ sorozat, melyre $\det_{i_1, \dots, i_k}(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k)$ nem nulla, amiből következik, hogy $\mathbf{M}_{\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k}$ rangja éppen k , amiért az $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k$ vektorok független rendszert alkotnak. Az arányosság miatt $\det_{i_1, \dots, i_k}(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k)$ sem nulla, amiért a $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k$ vektorok is független rendszert alkotnak. Az általánosság sérelme nélkül, az egyszerűség kedvéért feltehetjük, hogy $i_1 = 1, \dots, i_k = k$.

Eszerint létezik olyan nem elfajuló $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{k1} & \dots & \lambda_{kk} \end{pmatrix}$ mátrix, melyre

$$\begin{pmatrix} u_1^1 & \dots & u_k^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^k & \dots & u_k^k \end{pmatrix} = \mathbf{L} \begin{pmatrix} v_1^1 & \dots & v_k^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^k & \dots & v_k^k \end{pmatrix},$$

és így $\det \mathbf{L} = \ell$. Ugyanakkor bármely $\bar{\mathbf{u}}_m = (u_m^1, \dots, u_m^k)^T$ és $\bar{\mathbf{v}}_m = (v_m^1, \dots, v_m^k)^T$ vektorhoz léteznek olyan κ_i^m és μ_j^m együtthatók, hogy

$$\bar{\mathbf{u}}_m = \kappa_1^m \bar{\mathbf{u}}_1 + \dots + \kappa_k^m \bar{\mathbf{u}}_k \quad \text{és} \quad \bar{\mathbf{v}}_m = \mu_1^m \bar{\mathbf{v}}_1 + \dots + \mu_k^m \bar{\mathbf{v}}_k,$$

amiért

$$\begin{aligned} \kappa_k^m \ell \det(\bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \bar{\mathbf{v}}_k) &= \kappa_k^m \det(\bar{\mathbf{u}}_1, \dots, \bar{\mathbf{u}}_k) = \det(\bar{\mathbf{u}}_1, \dots, \bar{\mathbf{u}}_{k-1}, \bar{\mathbf{u}}_m) \\ &= \ell \det(\bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \bar{\mathbf{v}}_{k-1}, \bar{\mathbf{v}}_m) = \ell \mu_k^m \det(\bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \bar{\mathbf{v}}_k), \end{aligned}$$

amiből $\kappa_k^m = \mu_k^m$ következik. A k index helyébe bármely $1 \leq i \leq k$ indexet választva ugyanígy adódik $\kappa_i^m = \mu_i^m$, amiből viszont

$$\bar{\mathbf{u}}_m = \kappa_1^m \bar{\mathbf{u}}_1 + \cdots + \kappa_k^m \bar{\mathbf{u}}_k = \mu_1^m \mathbf{L} \bar{\mathbf{v}}_1 + \cdots + \mu_k^m \mathbf{L} \bar{\mathbf{v}}_k = \mathbf{L} \bar{\mathbf{v}}_m$$

következik. Eszerint minden $1 \leq i \leq n+1$ esetén $\mathbf{u}^i = \lambda_{i1} \mathbf{v}^1 + \cdots + \lambda_{ik} \mathbf{v}^k$, ami bizonyítja a „csak akkor” esetet. ■

Vegyük észre, hogy az $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k$ vektorok pontosan akkor alkotnak lineárisan független rendszert, ha $\mathbb{F}_k^{n+1}$ egy elemét feszítik (generálják).

Definíció. Rögzítsünk egy $\sigma: \{1, 2, \dots, \binom{n+1}{k}\} \rightarrow \mathcal{I}_k$ bijekciót.

Azt a $\mathbf{p}_\sigma: \mathbb{F}_k^{n+1} \rightarrow [\mathbb{F}^{\binom{n+1}{k}}]$ leképezést ($0 < k < n+1$), melyre $\mathbf{p}_\sigma(\mathcal{S}) = [p_\sigma(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k)]$, ahol $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k$ az $\mathcal{S} \in \mathbb{F}_k^{n+1}$ alteret generáló vektorok, *Plücker-beágyazásnak* nevezzük.

Az $[\mathcal{S}] := \mathbf{p}_\sigma(\mathcal{S})$ homogén koordinátát a $k = 2$ esetben az $\mathcal{S}$ altér *Plücker-koordinátájának*, általában inkább *Grassman-koordinátájának* mondjuk. ▲

Definiáljuk a $\bar{p}_\sigma: (\mathbb{F}^{n+1})^k \rightarrow \mathbb{F}^{\binom{n+1}{k}}$ leképezést, úgy, hogy ha $p_\sigma(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k) = \mathbf{p} = (\dots, p_{i_1, \dots, i_k}, \dots) \in \mathbb{F}^{\binom{n+1}{k}}$, akkor

$$\bar{p}_\sigma: (\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k) \mapsto (\text{sign}(\sigma(1))p_{\sigma(1)}, \dots, \text{sign}(\sigma(\binom{n+1}{k}))p_{\sigma(\binom{n+1}{k})}),$$

ahol $\text{sign}: \bigcup_{k=1}^{n+1} \mathcal{I}_k \rightarrow \{-1, +1\}$, melyre

$$\text{sign}(i_1, \dots, i_k) = \begin{cases} -1 & \text{ha } \sum_{m=1}^k (i_m - m) \text{ páratlan,} \\ 1 & \text{ha } \sum_{m=1}^k (i_m - m) \text{ páros.} \end{cases}$$

Az ezzel adott $[\bar{\mathcal{S}}] := \bar{\mathbf{p}}_\sigma(\mathcal{S}) := [\bar{p}_\sigma(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k)]$ homogén koordinátát a $k = 2$ esetben az $\mathcal{S}$ altér *duális Plücker-koordinátájának*, általában inkább *duális Grassman-koordinátájának* nevezzük. Jegyezzük meg, hogy a duális Plücker-koordináta kapcsolatát a Plücker-koordinátával egy olyan $\binom{n+1}{k} \times \binom{n+1}{k}$ -típusú diagonális $\mathbf{T} = (t_{i,j})$ mátrix írja le, melynek a főátló m -edik elemére $t_{m,m} = \text{sign}(\sigma(m))$.

Példaképpen két konkrét esetben kiszámítjuk a Plücker-koordinátákat.

A $k = 1$ esetben a Plücker-koordináták kiszámításához valójában nincsen szükség számolásra, hiszen egy $\mathcal{W} = \{\lambda \mathbf{u} : \lambda \in \mathbb{F}\}$ origón átmenő egyenes (1-dimenziós altér) $[\mathcal{W}] = [\mathbf{w}]$ Plücker-koordinátáira $w_i = \det_i(\mathbf{u}) = u_i$, vagyis $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ teljesül. Ez könnyűvé teszi az $\mathbb{F}^n$ affin tér projektivizálását, csak vennünk kell azt a $\pi: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}_1^{n+1}$ leképezést, melyre $[\pi(u_1, \dots, u_n)] = [(u_1, \dots, u_n, 1)]$.

Az $n = k = 2$ esetben a Plücker-koordináták kiszámításához feszítsék az $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektorok az $\mathcal{S} \in \mathbb{F}_2^3$ síkot. Ekkor az $\mathcal{S}$ sík $[\mathcal{S}] = [\mathbf{s}]$ Plücker-koordinátája

$$s_{ij} = \det_{i,j} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} u_1 v_2 - u_2 v_1 & \text{ha } i = 1 \text{ és } j = 2, \\ u_1 v_3 - u_3 v_1 & \text{ha } i = 1 \text{ és } j = 3, \\ u_2 v_3 - u_3 v_2 & \text{ha } i = 2 \text{ és } j = 3. \end{cases}$$

Eszerint $[\overline{\mathcal{S}}] = (p_{1,2}, -p_{1,3}, p_{2,3}) = [\mathbf{u}] \times [\mathbf{v}]$ az $\mathcal{S}$ sík duális Plücker-koordinátája. Mivel a $\mathbf{w}$ nem nulla vektor által feszített 1-dimenziós $\mathcal{W}$ altér (vagyis egyenes) homogén koordinátája $[\mathbf{w}]$, azonnal adódik, hogy $\mathcal{W} \subset \mathcal{S}$ akkor és csak akkor, ha $\langle [\mathcal{W}], [\overline{\mathcal{S}}] \rangle = 0$. Minthogy a Plücker-koordináták és a duális Plücker-koordináták közötti kapcsolat lineáris, amit a $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix ír le, az $\mathbb{F}^3$ tér 2-dimenziós $\mathcal{S}$ altereihez a duális homogén koordinátákat rendelve megkapjuk a $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}$ projektív síkot, ami bizonyítja a következőt.

Tétel. Az $\iota: \mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{F}}$ leképezés, ahol $\iota|_{\mathbb{F}_2^3}: \mathcal{S} \mapsto [\overline{\mathcal{S}}]$ és $\iota|_{\mathbb{F}_1^3}: \mathcal{W} \mapsto [\mathcal{W}]$, bijektív és illeszkedést tartó, izomorfia.

A $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}$ pontjainak és egyeneseinek illeszkedésére érvényes egyszerű formula általánosítható magasabb dimenzióra is. Ennek érdekében rögzítünk néhány leképezést.

Definiáljuk a $\delta: \bigcup_{k=1}^{n+1} \mathcal{I}_k \rightarrow \bigcup_{k=1}^{n+1} \mathcal{I}_k$ transzformációt úgy, hogy $\delta(i_1, \dots, i_k) := (i_{k+1}, \dots, i_{n+1}) \in \mathcal{I}_{n+1-k}$, ahol $\{i_1, \dots, i_{n+1}\} = \{1, \dots, n+1\}$. A δ transzformáció nyilván nem identikus, miközben $\delta \circ \delta$ identikus, vagyis δ involutív bijektivitás. Világos, hogy $\delta_k := \delta|_{\mathcal{I}_k}: \mathcal{I}_k \rightarrow \mathcal{I}_{n+1-k}$ is bijektív, és $\delta_{n+1-k} \circ \delta_k$ az $\mathcal{I}_k$ halmaz identikus transzformációja.

Válasszunk minden $1 \leq k \leq n$ egész számra egy $\sigma_k: \{1, 2, \dots, \binom{n+1}{k}\} \rightarrow \mathcal{I}_k$ bijekciót és legyen $\bar{\sigma}_{n+1-k} = \delta \sigma_k$ minden $1 \leq k \leq n$ egész számra. A jövőbeni egyszerűség kedvéért rögzítsük a $\sigma_1(i) := (i)$ és $\sigma_n := \delta \sigma_1$ választásokat, valamint minden $1 \leq i \leq n+1$ egészre legyen $\mathbf{e}^i \in \mathbb{F}^{n+1}$ az a vektor, melynek minden együtthatója nulla, kivéve az i sorszámút, mely pontosan 1.

Tétel. Ha $\mathcal{S} \in \mathbb{F}_k^{n+1}$ és $\mathcal{T} \in \mathbb{F}_{n+1-k}^{n+1}$ ($1 \leq k \leq n$) egymás ortogonális kiegészítő alterei, akkor $\bar{\mathbf{p}}_{\sigma_k}(\mathcal{S}) = \mathbf{p}_{\bar{\sigma}_{n+1-k}}(\mathcal{T})$.

Bizonyítás. Válasszunk az $\mathcal{S} \in \mathbb{F}_k^{n+1}$ altérben egy $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k$ bázist. Ekkor $\mathbf{p}_{\sigma_k}(\mathcal{S}) = [p_{\sigma_k}(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k)]$.

Válasszuk az $\mathbf{u}^{k+1}, \dots, \mathbf{u}^{n+1}$ vektorokat úgy, hogy az $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^{n+1}$ vektorok az $\mathbb{F}^{n+1}$ tér egy bázisát alkossák.

Legyen $U = M_{\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^{n+1}}$, és

$$\mathbf{v}^m := ((-1)^{m+1} \overline{\det}_m^1 U, \dots, (-1)^{m+n+1} \overline{\det}_m^{n+1} U) \in \mathbb{F}^{n+1}$$

minden $k+1 \leq m \leq n+1$ esetén. Ekkor a ferde kifejtés tétele értelmében a $\mathbf{v}^{k+1}, \dots, \mathbf{v}^{n+1}$ vektorok a $\mathcal{T}$ altér egy bázisát adják, ezért $\mathfrak{p}_{\bar{\sigma}_{n+1-k}}(\mathcal{T}) = [p_{\bar{\sigma}_{n+1-k}}(\mathbf{v}^{k+1}, \dots, \mathbf{v}^{n+1})]$, valamint ugyancsak a ferde kifejtés tétele miatt

$$M_{\bar{\mathbf{u}}^1, \dots, \bar{\mathbf{u}}^k, \det U \mathbf{e}^{k+1}, \dots, \det U \mathbf{e}^{n+1}} = M_{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^k, \mathbf{v}^{k+1}, \dots, \mathbf{v}^{n+1}} U^T,$$

ahol $\bar{\mathbf{u}}^i$ az U mátrix i -edik oszlopvektora. Ebből

$$\begin{aligned} (\det U)^{n-k+1} \det_{1, \dots, k} M_{\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k} &= \det(\bar{\mathbf{u}}^1, \dots, \bar{\mathbf{u}}^k, \det U \mathbf{e}^{k+1}, \dots, \det U \mathbf{e}^{n+1}) \\ &= \det(\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^k, \mathbf{v}^{k+1}, \dots, \mathbf{v}^{n+1}) \det U \\ &= \det_{k+1, \dots, n+1} M_{\mathbf{v}^{k+1}, \dots, \mathbf{v}^{n+1}} \det U \end{aligned}$$

következik. Figyelembe véve, hogy a vektorok indexelését tetszőlegesen választhatjuk, ez azt jelenti, hogy

$$(-1)^d (\det U)^{n-k} \det_{i_1, \dots, i_k} M_{\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k} = \det_{i_{k+1}, \dots, i_{n+1}} M_{\mathbf{v}^{k+1}, \dots, \mathbf{v}^{n+1}}$$

ahol $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{I}_k$, $(i_{k+1}, \dots, i_{n+1}) = \delta(i_1, \dots, i_k)$, és $d = \sum_{m=1}^k (i_m - m)$.

A $\bar{p}_{\sigma_k}(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k)$ vektor m -edik koordinátája $\text{sign}(\sigma_k(m)) \det_{\sigma_k(m)} M_{\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k}$, aminek eredményünk szerint $\det_{\bar{\sigma}_{n+1-k}(m)} M_{\mathbf{v}^{k+1}, \dots, \mathbf{v}^{n+1}}$ a $(\det U)^{n-k}$ konstanssal vett szorzata. Utóbbi viszont éppen a $p_{\bar{\sigma}_{n+1-k}}(\mathbf{v}^{k+1}, \dots, \mathbf{v}^{n+1})$ vektor m -edik koordinátája, tehát

$$\bar{\mathfrak{p}}_{\sigma_k}(\mathcal{S}) = [\bar{p}_{\sigma_k}(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k)] = [p_{\bar{\sigma}_{n+1-k}}(\mathbf{v}^{k+1}, \dots, \mathbf{v}^{n+1})] = \mathfrak{p}_{\bar{\sigma}_{n+1-k}}(\mathcal{T})$$

ami bizonyítja a tételt. ■

Eredményünk birtokában két módon is általánosíthatjuk a pont és egyenes illeszkedésére megismert formulánkat. Ezek az *illeszkedési tételek*.

Tétel. Legyen $1 \leq k \leq n$. Az $\mathcal{S} \in \mathbb{F}_k^{n+1}$ és $\mathcal{T} \in \mathbb{F}_{n+1-k}^{n+1}$ alterek akkor és csak akkor metszik egymást az origón kívül is, ha $\langle [\mathcal{S}], [\overline{\mathcal{T}}] \rangle = 0$.

Bizonyítás. Válasszunk az $\mathcal{S} \in \mathbb{F}_k^{n+1}$ altérben egy $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k$ bázist, a $\mathcal{T} \in \mathbb{F}_{n+1-k}^{n+1}$ altérben egy $\mathbf{v}^{k+1}, \dots, \mathbf{v}^{n+1}$ bázist.

Az $\mathcal{S}$ és $\mathcal{T}$ alterek akkor és csak akkor metszik egymást az origón kívül is, ha

$$0 = \det(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k, \mathbf{v}^{k+1}, \dots, \mathbf{v}^{n+1}).$$

Az első k sorra alkalmazva a Laplace-féle kifejtési tételt, kapjuk a tétel állítását. ■

A formulák egyszerűsítése érdekében a továbbiakban azt az indexet, amelyet úgy kapunk az $(1, \dots, k) \in \mathcal{I}_k$ indexből, hogy elhagyjuk az egyik elemet, az elhagyandó elem fölé helyezett ^ szimbóllummal jelöljük. Például $(1, \dots, k-1, \hat{k}) = (1, \dots, k-1)$, $(\hat{1}, \dots, k) = (2, \dots, k)$ valamint $(1, 2, \hat{3}, 4) = (1, 2, 4)$.

Tétel. Legyen $1 \leq k \leq n$, $\mathcal{S} \in \mathbb{F}_k^{n+1}$ és $[\mathbf{s}] = [\mathcal{S}]$ valamely $\mathbf{s} \in \mathbb{F}^{\binom{n+1}{k}}$ vektorra, valamint $\mathcal{X} \in \mathbb{F}_1^{n+1}$ és $[\mathbf{x}] = [\mathcal{X}]$ valamely $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^{n+1}$ vektorra. Az $\mathcal{X}$ altér akkor és csak akkor az $\mathcal{S}$ altér része, ha minden $(i_1, \dots, i_{k+1}) \in \mathcal{I}_{k+1}$ esetén

$$x_{i_1} s_{i_2, i_3, \dots, i_k, i_{k+1}} + \dots + (-1)^{m-1} x_{i_m} s_{i_1, \dots, \hat{i}_m, \dots, i_k} + \dots + (-1)^k x_{i_{k+1}} s_{i_1, i_2, \dots, i_k} = 0.$$

Bizonyítás. Válasszunk az $\mathcal{S} \in \mathbb{F}_k^{n+1}$ altérben egy $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k$ bázist. Ekkor $[\mathbf{s}] = [p_{\sigma_k}(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k)]$.

Az $\mathcal{X} = \{\lambda \mathbf{x} : 0 \neq \lambda \in \mathbb{F}\}$ altér akkor és csak akkor része az $\mathcal{S}$ altérnek, ha az $\mathbf{M}_{\mathbf{x}, \mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k}$ mátrix rangja k . Mivel az $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k$ vektorok függetlenek, ez akkor és csak akkor teljesül, ha minden $(i_1, \dots, i_{k+1}) \in \mathcal{I}_{k+1}$ esetén $0 = \det_{i_1, \dots, i_{k+1}} \mathbf{M}_{\mathbf{x}, \mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k}$. A determinánst az első sora szerint kifejtve éppen az állítást kapjuk. ■

A Plücker-koordináták definiálását lehetővé tévő tétel már megmutatta, hogy a Plücker-beágyazás minden $1 \leq k \leq n+1$ esetében injektív. A szürjektivitás azonban csak a $k=1$ és $k=n$ esetben teljesül.

Tétel. A Plücker-beágyazás bijektív a $\mathbb{F}_1^{n+1}$ projektív tér $\mathbb{F}_1^{n+1}$ pontjainak és $\mathbb{F}_n^{n+1}$ hipersíkjainak halmazán. A Plücker-beágyazás injektív, de nem szürjektív az altérek $\mathbb{F}_k^{n+1}$ halmazán, ha $1 < k < n$.

Bizonyítás. Azt már tudjuk, hogy a Plücker-beágyazás minden esetben injektív.

Ha $[\mathbf{u}] \in [\mathbb{F}^{\binom{n+1}{1}}] = [\mathbb{F}^{n+1}]$, ahol $\mathbf{u} \in \mathbb{F}^{n+1}$ egy tetszőleges nem nulla vektor, akkor az $\mathcal{U} = \{\lambda \mathbf{u} : \lambda \in \mathbb{F}\} \in \mathbb{F}_1^{n+1}$, homogén koordinátája a definíciónk értelmében $[\mathcal{U}] = [\mathbf{u}]$, vagyis a Plücker-beágyazás szürjektív az $\mathbb{F}_1^{n+1}$ halmazon.

Ha $[\mathbf{w}] \in [\mathbb{F}^{\binom{n+1}{n}}] = [\mathbb{F}^{n+1}]$, ahol $\mathbf{w} \in \mathbb{F}^{n+1}$ egy tetszőleges nem nulla vektor, akkor legyen $\mathbf{v} = (w_1, -w_2, \dots, (-1)^n w_{n+1})$, és $\mathbf{v}^\perp = \{\mathbf{u} \in \mathbb{F}^{n+1} : \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0\} \in \mathbb{F}_n^{n+1}$. Ekkor $\mathbf{v}^\perp$ homogén koordinátája az ortogonális kiegészítője, vagyis $\mathcal{V} = \{\lambda \mathbf{v} : \lambda \in \mathbb{F}\} \in \mathbb{F}_1^{n+1}$ duális homogén koordinátája, ami $[v_1, -v_2, \dots, (-1)^n v_{n+1}] = [\mathbf{w}]$, vagyis $[\mathbf{v}^\perp] = [\mathbf{w}]$, tehát a Plücker-beágyazás szürjektív az $\mathbb{F}_n^{n+1}$ halmazon.

Legyen $1 \leq k \leq n$. Világos, hogy $[\mathbb{F}^{\binom{n+1}{k}}]$ egy elemének meghatározásához pontosan $\binom{n+1}{k} - 1$ együttható szükséges az $\mathbb{F}$ testből. Most igazoljuk, hogy $\mathbb{F}_k^{n+1}$ egy elemének megadásához az $\mathbb{F}$ testből $k(n+1-k)$ együttható elégséges. Ez igazolja a szürjektivitás lehetetlenségét, hiszen $\binom{n+1}{k} - 1 > k(n+1-k)$, ha k nem 1 és nem n . (Az egyenlőtlenség bizonyítása az olvasóra marad.)

Vegyünk egy ortogonális $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^{n+1}$ bázist az $\mathbb{F}^{n+1}$ térben, és tekintsük az $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k$ vektorok által feszített k -dimenziós $\mathcal{S}_0$ alteret, valamint ennek $\mathcal{R}$ ortogonális komplementumát, mely nyilván az az $(n+1-k)$ -dimenziós altér, melyet az $\mathbf{u}^{k+1}, \dots, \mathbf{u}^{n+1}$ vektorok feszítenek. Minden $\mathcal{S} \in \mathbb{F}_k^{n+1}$ altér, amely nem merőleges az $\mathcal{S}_0$ altérre, pontosan egy pontban metszi az $\mathcal{R}_j = \mathbf{u}^j + \mathcal{R}$ ($1 \leq j \leq k$) affin altereket. Két ilyen $\mathcal{S} \in \mathbb{F}_k^{n+1}$ altér pontosan akkor esik egybe, ha ugyanazon pontokban metszi az összes $\mathcal{R}_j$ ($1 \leq j \leq k$) affin alteret. Minden metszéspontot $n+1-k$ együttható határoz meg, összesen k darab térben, összességében tehát az $\mathbb{F}$ testből vett $k(n+1-k)$ elem adja meg bijektíven az $\mathcal{S}_0$ altérre nem merőleges $\mathcal{S} \in \mathbb{F}_k^{n+1}$ altereket. Az $\mathcal{S}_0$ altérre merőleges $\mathcal{S} \in \mathbb{F}_k^{n+1}$ alterek az $\mathcal{R}$ altérben vannak, melynek dimenziója $n+1-k$, így iménti eljárásunkat megismételve most erre a vektortérre, az adódik, hogy az első k báziselem által feszített k -dimenziós altérre nem merőleges k -dimenziós alterek összességében $k(n+1-k-k)$ adattal adhatóak meg. Világos tehát, hogy legfeljebb $k(n+1-k)$ testelem minden k -dimenziós alteret meghatároz, és ennyire szükség is van. ■

Mivel a Plücker-beágyazás az $1 < k < n$ esetekben nem szürjektív a $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^n$ téren, felmerül az igény a képtérének jellemzésére.

Az alábbiakban bebizonyítjuk, hogy egy $[\mathbf{p}] \in [\mathbb{F}^{\binom{n+1}{k}}]$ homogén koordináta akkor és csak akkor valamely k -dimenziós altér Plücker-koordinátája, ha koordinátái teljesítenek bizonyos másodfokú egyenleteket, melyeket *Plücker-összefüggéseknek* vagy Plücker-egyenleteknek neveznek.

A formulák egyszerűsítése érdekében vezessük be a bármely $\mathbf{p} \in \mathbb{F}^{\binom{n+1}{k}}$ vektor esetén a determinánsból származással jó összhangban lévő

$$\check{p}_{j,i_1,\dots,i_{k-1}} = \begin{cases} 0, & \text{ha } j \in \{i_1, \dots, i_{k-1}\}, \\ p_{j,i_1,\dots,i_{k-1}} & \text{ha } j < i_1, \\ (-1)^m p_{i_1,\dots,j,\dots,i_{k-1}} & \text{ha } i_m < j < i_{m+1} \text{ valamely } m \text{ esetén,} \\ (-1)^{k-1} p_{i_1,\dots,i_{k-1},j} & \text{ha } i_{k-1} < j. \end{cases}$$

jelölést.

Tétel. Legyen $1 \leq k \leq n$, $\mathcal{S} \in \mathbb{F}_k^{n+1}$ és $[\mathbf{s}] = [\mathcal{S}]$ valamely $\mathbf{s} \in \mathbb{F}^{\binom{n+1}{k}}$ vektorra, valamint legyen $(j_k, \dots, j_{n+1}) \in \mathcal{I}_{n+2-k}$, $\mathcal{E} = \text{span}(\mathbf{e}^{j_k}, \dots, \mathbf{e}^{j_{n+1}})$ és $(j_1, \dots, j_{k-1}) = \delta(j_k, \dots, j_{n+1})$. Ha $\mathcal{X} = \mathcal{S} \cap \mathcal{E}$ dimenziója 1, akkor

$$[\mathcal{X}] = [\check{s}_{1,j_1,\dots,j_{k-1}}, \check{s}_{2,j_1,\dots,j_{k-1}}, \dots, \check{s}_{n+1,j_1,\dots,j_{k-1}}].$$

Bizonyítás. Mivel $\mathcal{X}$ dimenziója 1, akkor valamely nem nulla $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{F}^{n+1}$ vektorra $[\mathcal{X}] = [\mathbf{x}]$. Minthogy $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$, $x_i \neq 0$ valamely $i \in \{j_k, \dots, j_{n+1}\}$ indexre. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy mondjuk $i = j_k$, és legyen $\mathcal{F} = \text{span}(\mathbf{e}^{j_{k+1}}, \dots, \mathbf{e}^{j_{n+1}})$.

Az $\mathcal{F}$ altér csak az origóban metszi az $\mathcal{S}$ alteret, így első illeszkedési tételünk értelmében $0 \neq \langle [\mathcal{S}], [\overline{\mathcal{F}}] \rangle$. Az $[\overline{\mathcal{F}}]$ duális Plücker-koordináta minden eleme 0, kivéve a $(j_{k+1}, \dots, j_{n+1}) \in \mathcal{I}_{n+1-k}$ indexhez tartozót, mely nyilván éppen 1. Eszerint $0 \neq \langle [\mathcal{S}], [\overline{\mathcal{F}}] \rangle = s_{h_1, \dots, h_k}$, ahol $(h_1, \dots, h_k) = \delta(j_{k+1}, \dots, j_{n+1})$, és $h_\ell = i$.

Válasszunk az $\mathcal{S} \in \mathbb{F}_k^{n+1}$ altérben egy $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k$ bázist. Ekkor $[\mathbf{s}] = [p_{\sigma_k}(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k)]$, amiből $\det_{h_1, \dots, h_k}(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k) \neq 0$.

Mivel $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{S}$, vannak olyan λ_m nem mind nulla együtthatók, hogy $\mathbf{x} = \sum_{m=1}^k \lambda_m \mathbf{u}^m$. Eszerint teljesül az

$$(x_{h_1}, \dots, x_{h_\ell}, \dots, x_{h_k}) = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \begin{pmatrix} u_{h_1}^1 & \cdots & u_{h_\ell}^1 & \cdots & u_{h_k}^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_{h_1}^m & \cdots & u_{h_\ell}^m & \cdots & u_{h_k}^m \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_{h_1}^k & \cdots & u_{h_\ell}^k & \cdots & u_{h_k}^k \end{pmatrix}$$

egyenlet, melyben ugyanakkor $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{E}$ miatt minden $h \in \{j_1, \dots, j_{k-1}\}$ esetén $x_h = 0$, és kiválasztása miatt $x_{h_\ell} = x_i \neq 0$ teljesül. Minthogy $0 \neq \det_{h_1, \dots, h_k}(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k)$, ebből kiszámíthatók a $\lambda_m \in \mathbb{F}$ együtthatók, mégpedig a ferde kifejtés tétele értelmében

$$\begin{aligned} \lambda_m &= \frac{x_{h_\ell}(-1)^{m+\ell}}{\det_{h_1, \dots, h_k}(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k)} \overline{\det}_m^\ell \begin{pmatrix} u_{h_1}^1 & \cdots & u_{h_\ell}^1 & \cdots & u_{h_k}^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_{h_1}^m & \cdots & u_{h_\ell}^m & \cdots & u_{h_k}^m \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_{h_1}^k & \cdots & u_{h_\ell}^k & \cdots & u_{h_k}^k \end{pmatrix} \\ &= \frac{x_i(-1)^{m+\ell}}{\det_{h_1, \dots, h_k}(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k)} \det_{j_1, \dots, j_{k-1}}(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^{m-1}, \mathbf{u}^{m+1}, \dots, \mathbf{u}^k) \end{aligned}$$

minden $1 \leq m \leq k$ esetén. Eszerint

$$\frac{\lambda_m(-1)^m}{\det_{j_1, \dots, j_{k-1}}(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^{m-1}, \mathbf{u}^{m+1}, \dots, \mathbf{u}^k)} = \frac{x_i(-1)^\ell}{\det_{h_1, \dots, h_k}(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k)},$$

amiért a csak az m indextől függő baloldal valójában nem függ az m indextől, vagyis konstans, mondjuk μ . Ebből viszont átrendezéssel a bizonyítandó $x_i = \mu(-1)^\ell \det_{h_1, \dots, h_k}(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k) = \mu \check{s}_{i, j_1, \dots, j_{k-1}}$ összefüggést kapjuk. ■

Plücker-egyenletek. Legyen $2 \leq k \leq n$. Ha $\mathcal{S} \in \mathbb{F}_k^{n+1}$ és $[\mathbf{s}] = [\mathcal{S}]$, ahol $\mathbf{s} \in \mathbb{F}^{\binom{n+1}{k}}$, akkor minden $(i_1, \dots, i_k), (j_1, \dots, j_k) \in \mathcal{I}_k$ index és $1 \leq r \leq k$ esetén

$$s_{i_1, \dots, i_k} s_{j_1, \dots, j_k} = \sum_{m=1}^k (-1)^{m-1} \check{s}_{i_m, j_1, \dots, \hat{j}_r, \dots, j_k} \check{s}_{j_r, i_1, \dots, \hat{i}_m, \dots, i_k}.$$

Bizonyítás. Legyen $(j_{k+1}, \dots, j_{n+1}) = \delta(j_1, j_2, \dots, j_k) \in \mathcal{I}_{n+1-k}$, és tekintsük az $\mathcal{E} = \text{span}(\mathbf{e}^{j_r}, \mathbf{e}^{j_{k+1}}, \dots, \mathbf{e}^{j_{n+1}})$ alteret ($1 \leq r \leq k$). Ekkor az $\mathcal{X} = \mathcal{S} \cap \mathcal{E}$ altér dimenziója legalább 1.

Ha $\mathcal{X}$ dimenziója nagyobb mint 1, akkor az $\mathcal{F} = \text{span}(\mathbf{e}^{j_{k+1}}, \dots, \mathbf{e}^{j_{n+1}})$ altér $\mathcal{Y} = \mathcal{S} \cap \mathcal{F}$ metszete az $\mathcal{S}$ altérrel legalább 1-dimenziós, így az első illeszkedési tételünk szerint $0 = \langle [\mathcal{S}], [\overline{\mathcal{F}}] \rangle$. Az $[\overline{\mathcal{F}}]$ duális Plücker-koordináta minden eleme 0, kivéve a $(j_{k+1}, \dots, j_{n+1}) \in \mathcal{I}_{n+1-k}$ indexhez tartozót, mely nyilván éppen 1, így $0 = \langle [\mathcal{S}], [\overline{\mathcal{F}}] \rangle = s_{j_1, \dots, j_k}$. Ugyanígy kapjuk, hogy $0 = \check{s}_{j_{k+1}, j_1, \dots, \hat{j}_r, \dots, j_k} = \dots = \check{s}_{j_{n+1}, j_1, \dots, \hat{j}_r, \dots, j_k}$, vagyis $0 = \check{s}_{i, j_1, \dots, \hat{j}_r, \dots, j_k}$ minden $1 \leq i \leq n+1$ esetén, amiből

$$s_{j_1, j_2, \dots, j_k} s_{i_1, \dots, i_k} - \sum_{m=1}^k (-1)^{m-1} \check{s}_{i_m, j_2, \dots, j_k} s_{j_1, i_1, \dots, \hat{i}_m, \dots, i_k} = 0,$$

ami éppen a bizonyítandó egyenlet.

Ha $\mathcal{X}$ dimenziója 1, akkor előbbi tételünk értelmében az

$$\mathbf{x} = (\check{s}_{1, j_1, \dots, \hat{j}_r, \dots, j_k}, \check{s}_{2, j_1, \dots, \hat{j}_r, \dots, j_k}, \dots, \check{s}_{n+1, j_1, \dots, \hat{j}_r, \dots, j_k})$$

vektorra $[\mathcal{X}] = [\mathbf{x}]$.

Ha $j_r \in \{i_1, \dots, i_k\}$, mondjuk $j_r = i_h$, akkor

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^k (-1)^{m-1} \check{s}_{i_m, j_1, \dots, \hat{j}_r, \dots, j_k} \check{s}_{j_r, i_1, \dots, \hat{i}_m, \dots, i_k} &= \check{s}_{i_h, j_1, \dots, \hat{j}_r, \dots, j_k} \check{s}_{j_r, i_1, \dots, \hat{i}_h, \dots, i_k} \\ &= s_{i_1, \dots, i_k} s_{j_1, \dots, j_k}, \end{aligned}$$

vagyis az egyenlet teljesül.

Ha $j_r \notin \{i_1, \dots, i_k\}$, akkor legyen $(h_1, \dots, h_{k+1}) \in \mathcal{I}_{k+1}$ olyan, hogy $\{h_1, \dots, h_{k+1}\} = \{j_r, i_1, \dots, i_k\}$, és ebben mondjuk $h_\ell = j_r$. A második illeszkedési tételünk szerint ekkor

$$\begin{aligned} 0 &= x_{h_1} s_{h_2, \dots, h_{k+1}} + \dots + (-1)^{m-1} x_{h_m} s_{h_1, \dots, \hat{h}_m, \dots, h_{k+1}} + \dots + (-1)^k x_{h_{k+1}} s_{h_1, \dots, h_k} \\ &= \sum_{m=1}^{k+1} (-1)^{m-1} \check{s}_{h_m, j_1, \dots, \hat{j}_r, \dots, j_k} s_{h_1, \dots, \hat{h}_m, \dots, h_{k+1}} \\ &= (-1)^{\ell-1} \check{s}_{h_\ell, j_1, \dots, \hat{j}_r, \dots, j_k} s_{h_1, \dots, \hat{h}_\ell, \dots, h_{k+1}} + \\ &\quad + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq \ell}}^{k+1} (-1)^{m-1} \check{s}_{h_m, j_1, \dots, \hat{j}_r, \dots, j_k} s_{h_1, \dots, \hat{h}_m, \dots, h_{k+1}} \\ &= s_{j_1, \dots, j_k} s_{i_1, \dots, i_k} + \sum_{m=1}^{\ell-1} (-1)^{m-\ell} \check{s}_{h_m, j_1, \dots, \hat{j}_r, \dots, j_k} s_{h_1, \dots, \hat{h}_m, \dots, h_{k+1}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=\ell+1}^{k+1} (-1)^{m-\ell} \check{s}_{h_m, j_1, \dots, \hat{j}_r, \dots, j_k} s_{h_1, \dots, \hat{h}_m, \dots, h_{k+1}} \\
& = s_{j_1, \dots, j_k} s_{i_1, \dots, i_k} + \sum_{m=1}^{\ell-1} (-1)^{m-\ell} \check{s}_{i_m, j_1, \dots, \hat{j}_r, \dots, j_k} s_{i_1, \dots, \hat{i}_m, \dots, i_{\ell-1}, j_r, i_\ell, \dots, i_k} + \\
& \quad + \sum_{m=\ell+1}^{k+1} (-1)^{m-\ell} \check{s}_{i_{m-1}, j_1, \dots, \hat{j}_r, \dots, j_k} s_{i_1, \dots, i_{\ell-1}, j_r, i_\ell, \dots, \hat{i}_{m-1}, \dots, i_k} \\
& = s_{j_1, \dots, j_k} s_{i_1, \dots, i_k} + \sum_{m=1}^{\ell-1} (-1)^{m-\ell} \check{s}_{i_m, j_1, \dots, \hat{j}_r, \dots, j_k} s_{i_1, \dots, \hat{i}_m, \dots, i_{\ell-1}, j_r, i_\ell, \dots, i_k} + \\
& \quad + \sum_{m=\ell}^k (-1)^{m-\ell+1} \check{s}_{i_m, j_1, \dots, \hat{j}_r, \dots, j_k} s_{i_1, \dots, i_{\ell-1}, j_r, i_\ell, \dots, \hat{i}_m, \dots, i_k} \\
& = s_{j_1, \dots, j_k} s_{i_1, \dots, i_k} - \sum_{m=1}^k (-1)^{m-1} \check{s}_{i_m, j_1, \dots, \hat{j}_r, \dots, j_k} \check{s}_{j_r, i_1, \dots, \hat{i}_m, \dots, i_k},
\end{aligned}$$

ami éppen a bizonyítandó egyenlet.

A tétel állítását beláttuk. ■

A Plücker-egyenletek nem csak jellemzik a Plücker-beágyazás képterét, hanem meg is határozzák.

Tétel. Legyen $2 \leq k \leq n$ és $\mathbf{p} \in \mathbb{F}^{\binom{n+1}{k}}$ nem nulla vektor. A $\mathbf{p}$ elemeit $\mathcal{I}_k$ elemeivel indexelve tegyük fel, hogy minden $(i_1, \dots, i_k), (j_1, \dots, j_k) \in \mathcal{I}_k$ index és $1 \leq r \leq k$ esetén

$$p_{i_1, \dots, i_k} p_{j_1, \dots, j_k} = \sum_{m=1}^k (-1)^{m-1} \check{p}_{i_m, j_1, \dots, \hat{j}_r, \dots, j_k} \check{p}_{j_r, i_1, \dots, \hat{i}_m, \dots, i_k}.$$

Ekkor pontosan egy olyan $\mathcal{S} \in \mathbb{F}_k^{n+1}$ altér van, melyre $[\mathbf{p}] = [\mathcal{S}]$.

Bizonyítás. A $\mathbf{p} \in \mathbb{F}^{\binom{n+1}{k}}$ nem nulla vektor valamely eleme nem nulla. Mondjuk $p_{1,2,\dots,k} \neq 0$.

A Plücker-egyenletek előtti tétel adja az ötletet, hogy az

$$\mathbf{u}^i = (-1)^{i-1} (\check{p}_{1,1,\dots,\hat{i},\dots,k}, \check{p}_{2,1,\dots,\hat{i},\dots,k}, \dots, \check{p}_{n+1,1,\dots,\hat{i},\dots,k}), \quad 1 \leq i \leq k,$$

vektorokat tekintsük. Ezek a vektorok függetlenek, mert $1 \leq j \leq k$ esetén

$$\mathbf{u}_j^i = \check{p}_{j,1,\dots,\hat{i},\dots,k} = \begin{cases} 0 & \text{ha } j \neq i, \\ p_{1,\dots,k} \neq 0 & \text{ha } j = i. \end{cases}$$

Azt állítjuk, hogy az $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k$ vektorok által feszített $\mathcal{S}$ altér olyan, hogy az $\mathbf{s} = p_\sigma(\mathcal{S})$ vektorra $[\mathbf{p}] = [\mathbf{s}]$. A fentiekből azonnal látszik, hogy

$$s_{1,\dots,k} = \det_{1,\dots,k}(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k) = \det \begin{pmatrix} p_{1,\dots,k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_{1,\dots,k} \end{pmatrix} = p_{1,\dots,k}^k,$$

és $1 \leq i \leq k < k+1 \leq j \leq n+1$ esetén

$$\begin{aligned} s_{1,\dots,\hat{i},\dots,k,j} &= \det_{1,\dots,\hat{i},\dots,k,j}(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k) = (-1)^{k-i} \det_{1,\dots,\hat{i},j,\dots,k}(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k) \\ &= (-1)^{k-i} p_{1,\dots,k}^{k-1} \mathbf{u}_j^i = (-1)^{k-i} p_{1,\dots,k}^{k-1} (-1)^{i-1} \check{p}_{j,1,\dots,\hat{i},\dots,k} \\ &= (-1)^{k-1} p_{1,\dots,k}^{k-1} (-1)^{k-1} p_{1,\dots,\hat{i},\dots,k,j} = p_{1,\dots,k}^{k-1} \cdot p_{1,\dots,\hat{i},\dots,k,j}, \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy $m = 0$ és $m = 1$ esetén teljesül a következő állítás: *Ha $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{I}_k$ olyan, hogy az $\{i_1, \dots, i_k\}$ halmaznak m darab k -nál nagyobb eleme van, akkor $s_{i_1,\dots,i_k} = p_{1,\dots,k}^{k-1} \cdot p_{i_1,\dots,i_k}$.* Teljes indukcióval igazoljuk ennek általános érvényességét.

Tegyük fel, hogy valamely $0 \leq m-1 < m < k$ esetén teljesül az állítás. Legyen $1 \leq i_1 < \dots < i_{k-m} \leq k < i_{k-m+1} < \dots < i_k \leq n+1$. Mivel $m > 1$, az első k pozitív egész között van olyan, amely nem az $\{i_1, \dots, i_k\}$ halmaz eleme. Legyen ezek legkisebbike ℓ ($1 \leq \ell \leq k$).

A Plücker-egyenletek, valamint az indukciós feltétel miatt

$$\begin{aligned} s_{i_1,\dots,i_k} \cdot p_{1,\dots,k}^k &= s_{i_1,\dots,i_k} \cdot s_{1,\dots,k} = \sum_{h=1}^k (-1)^{h-1} \check{s}_{i_h,1,\dots,\hat{\ell},\dots,k} \cdot \check{s}_{\ell,i_1,\dots,\hat{i}_h,\dots,i_k} \\ &= \sum_{h=k-m+1}^k (-1)^{h-1} \check{s}_{i_h,1,\dots,\hat{\ell},\dots,k} \cdot \check{s}_{\ell,i_1,\dots,\hat{i}_h,\dots,i_k} \\ &= \sum_{h=k-m+1}^k (-1)^{h+k-2} (p_{1,\dots,k}^{k-1} \cdot \check{p}_{i_h,1,\dots,\hat{\ell},\dots,k}) (p_{1,\dots,k}^{k-1} \cdot \check{p}_{\ell,i_1,\dots,\hat{i}_h,\dots,i_k}) \\ &= p_{1,\dots,k}^{2k-2} \sum_{h=k-m+1}^k (-1)^{h+k-2} \check{p}_{i_h,1,\dots,\hat{\ell},\dots,k} \cdot \check{p}_{\ell,i_1,\dots,\hat{i}_h,\dots,i_k} \\ &= p_{1,\dots,k}^{2k-2} \sum_{h=1}^k (-1)^{h-1} \check{p}_{i_h,1,\dots,\hat{\ell},\dots,k} \cdot \check{p}_{\ell,i_1,\dots,\hat{i}_h,\dots,i_k} \\ &= p_{1,\dots,k}^{2k-2} \cdot p_{i_1,\dots,i_k} \cdot p_{1,\dots,k} = p_{1,\dots,k}^{2k-1} \cdot p_{i_1,\dots,i_k}, \end{aligned}$$

ami igazolja a teljes indukció állítását.

Eszerint minden $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{I}_k$ esetén $s_{i_1, \dots, i_k} = p_{1, \dots, k}^{k-1} \cdot p_{i_1, \dots, i_k}$, amiért $[\mathbf{s}] = [\mathbf{p}]$, ami a tétel állítása. ■

Habár a fentiek szerint immár pontosan tudjuk, hogy a projektív terek elemeihez (pont, egyenes, síkok, hipersíkok) a homogén koordináták miféle halmazát rendeljük (ez a Plücker-beágyazás képtere), az egyes elemek illeszkedéseinek homogén koordinátákban való vizsgálata és meghatározása lenne szükséges ahhoz, hogy a projektív tereknek a $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2$ esetéhez hasonló, kizárólag a homogén koordinátákra épülő algebrai leírását adhassuk.

5.3. A Klein-megfeleltetés

Ebben a szakaszban a projektív terek egyeneseseinek illeszkedéseit vizsgáljuk homogén koordinátákban, főleg a $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^3$ téren.

Tekintve a projektív egyenesek fontosságát, először egy némileg egyszerűbb bizonyítást adunk a Plücker-összefüggések ezen esetére.

Tétel. Egy $[\mathbf{p}] \in [\mathbb{F}^{\binom{n+1}{2}}]$ homogén koordináta akkor és csak akkor az $\mathbb{F}^{n+1}$ vektortér valamely 2-dimenziós alterének Plücker-koordinátája, ha $n = 2$, vagy $n \geq 3$ és

$$p_{i_1 i_2} p_{i_3 i_4} - p_{i_1 i_3} p_{i_2 i_4} + p_{i_1 i_4} p_{i_2 i_3} = 0$$

minden $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq n+1$ sorozat esetén.

Bizonyítás. Az $n = 2$ esetre valójában már igazoltuk az állítást, hiszen ilyenkor a 2-dimenziós alterek komplementuma 1-dimenziós, de a konkrét számolás bemutatása kedvéért itt most másként bizonyítunk. Ha adott egy $[\mathbf{p}] \in [\mathbb{F}^3]$ homogén koordináta és mondjuk $p_{12} \neq 0$, akkor az $\mathbf{u} = (p_{12}, 0, -p_{23})$ és $\mathbf{v} = (0, p_{12}, p_{13})$ vektorok által feszített $\mathcal{S} \in \mathbb{F}_2^3$ sík $[\mathbf{s}]$ Plücker-koordinátájára

$$s_{ij} = \det_{i,j} \begin{pmatrix} p_{12} & 0 & -p_{23} \\ 0 & p_{12} & p_{13} \end{pmatrix} = \begin{cases} p_{12}p_{12} - 00 = p_{12}^2 & \text{ha } (i, j) = (1, 2), \\ p_{12}p_{13} - 00 = p_{12}p_{13} & \text{ha } (i, j) = (1, 3), \\ 00 - p_{12}(-p_{23}) = p_{12}p_{23} & \text{ha } (i, j) = (2, 3), \end{cases}$$

vagyis $[\mathcal{S}] = [\mathbf{s}] = [p_{12}\mathbf{p}] = [\mathbf{p}]$, ami igazolja állításunk.

Innentől feltesszük, hogy $n \geq 3$.

Előbb a feltétel szükségességességét igazoljuk. Legyenek $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ független vektorok az $\mathbb{F}^{n+1}$ vektortérben. Ekkor az általuk feszített 2-dimenziós alter Plücker-koordinátája az

$$\mathbf{M}_{\mathbf{u}, \mathbf{v}} = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_k & \cdots & u_{n+1} \\ v_1 & \cdots & v_k & \cdots & v_{n+1} \end{pmatrix}$$

együttható-mátrix 2×2 -típusú aldeterminánsaiból áll össze, vagyis $p_{i_1 i_2} = \det \begin{pmatrix} u_{i_1} & u_{i_2} \\ v_{i_1} & v_{i_2} \end{pmatrix}$. Világos, hogy az állított formulát elegendő megmutatni az $\mathbf{M}_{\mathbf{u}, \mathbf{v}}$ mátrix első négy oszlopára, amire viszont

$$\begin{aligned} & p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} \\ &= \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} p_{34} - \det \begin{pmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{pmatrix} p_{24} + \det \begin{pmatrix} u_1 & u_4 \\ v_1 & v_4 \end{pmatrix} p_{23} \\ &= (u_1 v_2 - v_1 u_2) p_{34} - (u_1 v_3 - v_1 u_3) p_{24} + (u_1 v_4 - v_1 u_4) p_{23} \\ &= u_1 (v_2 p_{34} - v_3 p_{24} + v_4 p_{23}) - v_1 (u_2 p_{34} - u_3 p_{24} + u_4 p_{23}) \\ &= \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

igazolja a szükségességet.

A feltétel elégségességének igazolásához legyen $[\mathbf{p}] \in [\mathbb{F}^{\binom{n+1}{2}}]$ olyan, mely teljesíti a Plücker-összefüggéseket. A $\mathbf{p}$ egyik eleme — mondjuk p_{12} — nem nulla. Tekintsük az $\mathbf{u} = (p_{12}, 0, -p_{13}, -p_{14}, \dots, -p_{1, n+1})$ és $\mathbf{v} = (0, p_{12}, p_{23}, p_{24}, \dots, p_{2, n+1})$ vektorok által feszített $\mathcal{S} \in \mathbb{F}_k^{n+1}$ alteret. Ennek s_{ij} Plücker-koordinátáira

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \det_{i,j} \begin{pmatrix} p_{12} & 0 & -p_{23} & -p_{24} & \cdots & -p_{2, n+1} \\ 0 & p_{12} & p_{13} & p_{14} & \cdots & p_{1, n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{cases} p_{12}p_{1j} & \text{ha } i = 1 \text{ és } j > i, \\ p_{12}p_{2j} & \text{ha } i = 2 \text{ és } j > i, \\ -p_{2i}p_{1j} + p_{1i}p_{2j} = p_{12}p_{ij} & \text{ha } i > 2 \text{ és } j > i, \end{cases} \end{aligned}$$

ahol az utolsó egyenlőséget a Plücker-összefüggésből nyertük. Eszerint az $\mathcal{S}$ Plücker-koordinátája éppen $[\mathcal{S}] = [\mathbf{s}] = [p_{12}\mathbf{p}] = [\mathbf{p}]$, ami igazolja a feltétel elégségességét.

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. ■

Figyeljük meg, hogy a $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^3$ projektív tér egyeneseihez tartozó Plücker-koordináták épp úgy az $[\mathbb{F}^6]$ térben vannak, mint a $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^5$ projektív tér pontjainak homogén koordinátái. Ez lehetővé teszi a $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^3$ projektív tér egyenesei halmazának a $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^5$ projektív térbe képezését.

Az $[\mathbb{F}^6]$ tér $[\mathbf{p}]$ elemeit a most következőkben $\mathbf{p} = (p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34})$ vektorok formájában kezeljük.

Klein-megfeleltetés. *A $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^3$ egyenesének a $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^5$ pontosan azon pontjai felelnek meg, melyek $[\mathbf{p}]$ homogén koordinátájára $p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0$ teljesül.*

A Klein-megfeleltetés előbbi tételünk speciális esete, részletes átgondolása az olvasóra marad. Vegyük észre, hogy az egyenesek duális Plücker koordinátáit feleltetve meg a pontoknak, a $\bar{p}_{12}\bar{p}_{34} + \bar{p}_{13}\bar{p}_{24} + \bar{p}_{14}\bar{p}_{23} = 0$ egyenlet adódik. Természetesen

ezen egyenlet megoldásait adó pontok halmaza megfelelő kollineációval — vagyis amelynek diagonális mátrixában minden elem 1, kivéve egyet, mely -1 — a másik megoldásait adó pontok halmazába vihető.

Definíció. A $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^5$ projektív tér azon pontjainak halmazát, melyek homogén koordinátájára $p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0$ teljesül, *Klein-felületnek* nevezzük. ▲

A Klein-felület tehát a Klein-megfeleltetés képtere, mely az 5-dimenziós $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^5$ térben egy 4-dimenziós hiperfelület. A $p_{12} = q_{12} - q_{34}$, $p_{34} = q_{34} + q_{12}$, $p_{13} = q_{13} - q_{24}$, $p_{24} = q_{24} + q_{13}$, $p_{14} = q_{14} - q_{23}$ és $p_{23} = q_{23} + q_{14}$ helyettesítéssel a Klein-felületet definiáló egyenlet az $q_{12}^2 + q_{24}^2 + q_{14}^2 = q_{34}^2 + q_{13}^2 + q_{23}^2$ alakot veszi fel. Megmutatjuk, hogy ez az egyköpenyű hiperboloid két közös elemet nem tartalmazó síkseregnek is az uniója.

Tétel.

- (1) *Két egyenes a $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^3$ projektív térben akkor és csak akkor metszi egymást, ha a Klein-felületen nekik megfeleltetett pontokat összekötő egyenes teljes egészében a Klein-felületben marad.*
- (2) *A Klein-felületben lévő egyenes pontjainak megfeleltetett egyenesek a $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^3$ térben egy síkbeli sugársort alkotnak. A kapcsolat a sugársor elemei és az egyenes pontjai között bijektív.*

Bizonyítás. Az első állítással kezdjük.

Legyen adott az e és f egyenes az $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^3$ projektív térben. Ekkor $e, f \in \mathbb{F}_2^4$, így vannak olyan független

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^e &= (u_1^e, u_2^e, u_3^e, u_4^e), & \mathbf{v}^e &= (v_1^e, v_2^e, v_3^e, v_4^e), \text{ és} \\ \mathbf{u}^f &= (u_1^f, u_2^f, u_3^f, u_4^f), & \mathbf{v}^f &= (v_1^f, v_2^f, v_3^f, v_4^f) \end{aligned}$$

vektorpárok, melyek rendre kifeszítik a 2-dimenziós e és f altereket az $\mathbb{F}^4$ vektortérben.

Világos, hogy e és f pontosan akkor metszi egymást, ha van egy olyan $\mathbf{x}$ nem nulla vektor, mely előáll az $\mathbf{u}^e$ és $\mathbf{v}^e$ vektorok, és ugyanakkor az $\mathbf{u}^f$ és $\mathbf{v}^f$ vektorok nem triviális lineáris kombinációjaként is. Ez pontosan akkor teljesül, ha $\{\mathbf{u}^e, \mathbf{v}^e, \mathbf{u}^f, \mathbf{v}^f\}$ lineárisan függő rendszer. Ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy $\det(\mathbf{u}^e, \mathbf{v}^e, \mathbf{u}^f, \mathbf{v}^f) = 0$ legyen. A Laplace-féle kifejtési tétel alapján (közvetlenül is számolható az alacsony dimenzió miatt) ez ekvivalens azzal, hogy

$$0 = \det \begin{pmatrix} u_1^e & u_2^e & u_3^e & u_4^e \\ v_1^e & v_2^e & v_3^e & v_4^e \\ u_1^f & u_2^f & u_3^f & u_4^f \\ v_1^f & v_2^f & v_3^f & v_4^f \end{pmatrix} = e_{12}f_{34} - e_{13}f_{24} + e_{14}f_{23} + e_{23}f_{14} - e_{24}f_{13} + e_{34}f_{12},$$

ahol $(e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34})$ és $(f_{12}, f_{13}, f_{14}, f_{23}, f_{24}, f_{34})$ rendre az e és f egyenes homogén koordinátái.

Vezessük be az $\mathbb{F}^6$ vektortéren a nyilván szimmetrikus és bilineáris

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle := p_{12}q_{34} - p_{13}q_{24} + p_{14}q_{23} + p_{23}q_{14} - p_{24}q_{13} + p_{34}q_{12}$$

funkcionált. Azt látjuk, hogy egy $[\mathbf{p}] \in [\mathbb{F}^6]$ homogén koordináta akkor és csak akkor felel meg egyenesnek, vagyis akkor és csak akkor van rajta a $\mathcal{K}$ Klein-felületen, ha $\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = 0$ ($\text{Char } \mathbb{F} \neq 2$), továbbá a $\mathcal{K}$ Klein-felület $[\mathbf{p}]$ és $[\mathbf{q}]$ pontja akkor és csak akkor reprezentálja $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^3$ két metsző egyenesét, ha $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 0$.

A $\mathcal{K}$ Klein-felület $[\mathbf{p}]$ és $[\mathbf{q}]$ pontjainak közös egyenese pontosan a $[\lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q}]$ pontokból áll, ahol $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ és $\lambda\mu \neq 0$. Ezek a pontok pontosan akkor esnek mind a $\mathcal{K}$ Klein-felületre, ha

$$0 = \langle \lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q}, \lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q} \rangle = \lambda^2 \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle + \mu^2 \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle + 2\lambda\mu \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$$

minden $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ és $\lambda\mu \neq 0$ esetén, vagyis $\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 0$ ($\text{Char } \mathbb{F} \neq 2$), ami éppen az (1) állítást jelenti.

Rátérünk a második állításra, és innentől $\hat{e}$ jelöli az e egyenes Klein-megfeleltetés szerinti képét.

Tekintsük a Klein-felület $\hat{e}\hat{f} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{F}}^5$ egyenesét, és azon a $\hat{g}$ pontot.

Legyen $[e], [f]$ és $[g]$ rendre az e, f és g egyenesek homogén koordinátája, továbbá a fentebb megadott $\mathbf{u}^e, \mathbf{v}^e, \mathbf{u}^f$ és $\mathbf{v}^f$ feszítő vektorokon túl legyen $\mathbf{u}^g$ és $\mathbf{v}^g$ a g alteret feszítő vektorok. Mivel e és f metszi egymást, feltehetjük, hogy a feszítő vektoraik egyike közös: mondjuk $\mathbf{u}^e = \mathbf{u}^f = \mathbf{u}$.

A feltétel szerint $\kappa\mathbf{g} = \lambda\mathbf{e} + \mu\mathbf{f}$ valamely nem nulla $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{F}$ esetén, és (1) miatt a $g \subset \mathbb{P}_{\mathbb{F}}^3$ egyenes metszi az e és f egyenest is.

Ha a g egyenes nem megy át az e és f közös pontján, akkor válasszuk úgy meg a $\mathbf{v}^e$ és $\mu\mathbf{v}^f$ feszítő vektorokat, hogy azok kifeszítik a g alteret, vagyis $\mathbf{u}^g = \mathbf{v}^e$ és $\mathbf{v}^g = \mu\mathbf{v}^f$. Ekkor minden $1 \leq i < j \leq 4$ esetén

$$\lambda e_{ij} + \mu f_{ij} = \kappa g_{ij} = \kappa \det_{ij}(\mathbf{u}^g, \mathbf{v}^g) = \kappa \det_{ij}(\mathbf{v}^e, \mu\mathbf{v}^f),$$

amiből

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda e_{ij} + \mu f_{ij} - \kappa \det_{ij}(\mathbf{v}^e, \mu\mathbf{v}^f) \\ &= \det_{ij}(\mathbf{u}, \lambda\mathbf{v}^e) + \det_{ij}(\mathbf{u}, \mu\mathbf{v}^f) - \det_{ij}(\kappa\mathbf{v}^e, \lambda\mathbf{v}^e + \mu\mathbf{v}^f) \\ &= \det_{ij}(\mathbf{u}, \lambda\mathbf{v}^e + \mu\mathbf{v}^f) - \det_{ij}(\kappa\mathbf{v}^e, \lambda\mathbf{v}^e + \mu\mathbf{v}^f) = \det_{ij}(\mathbf{u} - \kappa\mathbf{v}^e, \lambda\mathbf{v}^e + \mu\mathbf{v}^f). \end{aligned}$$

Ez azt mutatja, hogy $\mathbf{u}$ lineárisan függ a $\mathbf{v}^e, \mathbf{v}^f$ vektoroktól, vagyis a g altérben van. Ez ellentmond a kiindulási feltételünknek, tehát a g altér tartalmazza az e és f alterek metszetét.

Eszerint $\mathbf{u}^g = \mathbf{u}$, amiből $\lambda \mathbf{e}_{ij} + \mu \mathbf{f}_{ij} = \kappa \mathbf{g}_{ij}$ miatt

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda \mathbf{e}_{ij} + \mu \mathbf{f}_{ij} - \kappa \mathbf{g}_{ij} = \det_{ij}(\mathbf{u}, \lambda \mathbf{v}^e) + \det_{ij}(\mathbf{u}, \mu \mathbf{v}^f) - \det_{ij}(\kappa \mathbf{u}, \mathbf{v}^g) \\ &= \det_{ij}(\mathbf{u}, \lambda \mathbf{v}^e + \mu \mathbf{v}^f) - \det_{ij}(\kappa \mathbf{u}, \mathbf{v}^g) \\ &= \det_{ij}(\kappa \mathbf{u}, \kappa(\lambda \mathbf{v}^e + \mu \mathbf{v}^f)) - \det_{ij}(\kappa \mathbf{u}, \mathbf{v}^g) = \det_{ij}(\kappa \mathbf{u}, \kappa(\lambda \mathbf{v}^e + \mu \mathbf{v}^f) - \mathbf{v}^g). \end{aligned}$$

Eszerint a $\mathbf{v}^g$ vektor az $\mathbf{u}, \mathbf{v}^e, \mathbf{v}^f$ vektorok nem triviális lineáris kombinációja, vagyis az e és f alterek által feszített 3-dimenziós altér eleme, tehát benne van a $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^3$ azon projektív síkjában, melyet e és f feszít. ■

Ha az $e, f \subset \mathbb{P}_{\mathbb{F}}^3$ egyenesek metszők, akkor eredményünk szerint az $\hat{e}\hat{f} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{F}}^5$ egyenes pontjai az e, f közös síkjában lévő közös sugársorának egyeneseit reprezentálja.

Minthogy $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^3$ bármely három, páronként metsző egyenesét a Klein-megfeleltetés három olyan pontba viszi, melyeket összekötő egyenesek a Klein-felületben vannak, és a három egyenes közös síkja minden egyenesének mindhárom egyenessel van közös sugársora, a Klein-megfeleltetés bármely sík minden egyenesét egy olyan síkba viszi, ami teljes egészében a Klein-felületben van. Ezeket a síkokat a Klein-felületben *görög síknak* nevezzük.

Vegyünk most egy $\check{P}$ sugársort az $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^3$ térben, legyen e, f, g, h ennek négy egyenesé. Az ezeknek megfelelő $\hat{e}, \hat{f}, \hat{g}, \hat{h}$ pontok akkor és csak akkor vannak közös síkban, ha az ezek által meghatározott $\hat{e}\hat{f}, \hat{f}\hat{g}, \hat{g}\hat{h}, \hat{h}\hat{e}, \hat{e}\hat{g}, \hat{f}\hat{h}$ egyenesek mind metszik egymást. Ezen egyenesek minden pontja a pontjainak megfelelő egyenesek közös síkjában lévő közös sugársor egyenesének felel meg, márpedig bármely két közös ponttal rendelkező sík közös egyenessel is rendelkezik, tehát bármely két síksugársornak van közös egyenese, vagyis a megadott hat egyenes mindegyike metszi egymást. Azt a síkot, mely egy térbeli sugársor képe a Klein-felületben *latin síknak* nevezzük.

Világos, hogy a Klein-felület a görög-síkoknak éppúgy uniója, akár a latin-síkoknak, ugyanakkor a görög-síkok nem esnek egybe a latin-síkokkal, mert előbbiek egy sík egyenesének képei, utóbbiak viszont nem egy síkra illeszkedő egyenesek képi.



Függelék

A geometriák tárgyalása közben gyakran merülnek fel kérdések, melyek nem a közvetlen cél irányába mutatnak, sokszor pedig olyan ismeretek szükségesek, melyek nem tartoznak szorosan a tárgyhoz. Ebben a fejezetben néhány érdekes, de nem a könyv közvetlen céljához tartozó eredmény, valamint pár fontosabb, egyszerűen leírható, nem közvetlenül a tárgyhoz tartozó ismeret kerül bemutatásra.

F.1. Geometriák és csoportok

Felix Klein XIX. század végén Erlangenben született elgondolása nyomán — az „erlangeni program” — a geometriákat mint különböző csoportok hatására invariáns elméleteket is felfoghatjuk. A geometriát ebben a felfogásban az öt invariánsan hagyó összes transzformáció csoportja — amit a másik irányból megközelítve szimmetria-csoportnak hívunk — határozza meg.

Az $\mathbb{R}^{n+1}$ vektortér összes bijektív lineáris transzformációjának csoportját $GL(n+1)$ jelöli, és $(n+1)$ -dimenziós *általános lineáris csoportnak* nevezzük.

A sík esetéhez hasonlóan látható, hogy a $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ projektív tér κ kollineációi $[x] \rightarrow [x\mathbf{L}]$ alakúak, ahol $\mathbf{L}$ az $\mathbb{R}^{n+1}$ egy bijektív lineáris transzformációja. Világos, hogy a $\mathbf{L}$ és $\mathbf{L}'$ bijektív lineáris transzformációk pontosan akkor hatnak egyformán a $\mathbb{P}^n$ projektív téren, ha van olyan $k \in \mathbb{R}$ konstans, melyre $\mathbf{L} = k\mathbf{L}'$, vagyis $[\mathbf{L}] = [\mathbf{L}']$. Az ezen relációt teljesítő lineáris transzformációkat homogén ekvivalensnek nevezük. A bijektív lineáris transzformációk homogén ekvivalencia-relációhoz tartozó ekvivalencia osztályai által alkotott csoportot, mely a $\mathbb{P}^n$ projektív tér kollineációinak csoportja, $PGL(n)$ jelöli, és n -dimenziós *projektív általános lineáris csoportnak* nevezzük. A fentiekből világos, hogy $PGL(n) \cong [GL(n+1)]$.

Rögzítsünk most egy h hipersíkot a $\mathbb{P}^n$ projektív térben, és tekintsük $PGL(n)$ azon elemeinek $\mathfrak{G}$ részcsoportját, melyek invariánsan hagyják a h hipersíkot. Válasszunk egy olyan $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{n+1}$ bázist az $\mathbb{R}^{n+1}$ térben, melyre h éppen az $\mathbf{u}_{n+1}$ kiegészítő tere, vagyis $h = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{u}_i : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$. Ekkor minden $i = 1, \dots, n$ és $\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$ esetén $\mathfrak{g}(\mathbf{u}_i) \in h$ és $\mathfrak{g}$ bijektivitása miatt a $\mathfrak{g}(\mathbf{u}_i)$ vektorok függetlenek, így $\mathfrak{g}$ a h hipersíkot bijektíven képezi önmagába, amiért $\mathfrak{g}(\mathbf{u}_{n+1}) \notin h$. Eszerint a $\mathfrak{g}$ lineáris transzformáció mátrix reprezentációja az $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n+1}$ bázisban $\mathbf{G} =$

$$\begin{pmatrix} g_{1,1} & \cdots & g_{1,n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{n,1} & \cdots & g_{n,n} & 0 \\ g_{n+1,1} & \cdots & g_{n+1,n} & 1 \end{pmatrix}$$
 alakú. Ebben a $\mathbf{G}' = \begin{pmatrix} g_{1,1} & \cdots & g_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n,1} & \cdots & g_{n,n} \end{pmatrix}$ mátrix sem elfajuló, hiszen $\mathbf{g}$ bijektív. Az $\mathbb{A} = \mathbb{P}^n \setminus h$ halmaz pontjainak ezen bázisban vett homogén koordinátái $[v_1, \dots, v_n, 1]$ alakúak, így $\mathbb{A}$ pontjai koordinátázhatóak a $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ vektorokkal. Ebben a koordinátázásban a $\mathbf{g}: [v_1, \dots, v_n, 1] \mapsto [w_1, \dots, w_n, 1]$ hozzárendelés meghatározza a $\mathbf{g}': (v_1, \dots, v_n) \mapsto (w_1, \dots, w_n)$ hozzárendelést, mely természetesen meghatározza a $\mathbf{g}$ transzformációt. A

$$\begin{aligned} \mathbf{g}([v_1, \dots, v_n, 1]) &= [(v_1, \dots, v_n, 1)\mathbf{G}] = [(v_1, \dots, v_n, 0)\mathbf{G} + (0, \dots, 0, 1)\mathbf{G}] \\ &= [(v_1, \dots, v_n, 0)\mathbf{G} + (g_{n+1,1}, \dots, g_{n+1,n}, 1)] \end{aligned}$$

összefüggés alapján $\mathbf{g}': \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ olyan, hogy

$$\mathbf{g}': (v_1, \dots, v_n) \mapsto (v_1, \dots, v_n)\mathbf{G}' + (g_{n+1,1}, \dots, g_{n+1,n}).$$

Eszerint $PGL(n)$ azon elemeinek $\mathfrak{G}$ részcsoportja, amelyek egy h hipersíkot invariánsan hagynak, izomorf az $\mathbb{R}^n$ koordinátatér

$$\mathbf{g}'(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\mathbf{G}' + \mathbf{g}'$$

alakú transzformációival, ahol $\mathbf{G}' \in GL(n)$ és $\mathbf{g}' \in \mathbb{R}^n$. Az összes ilyen transzformáció csoportját $GA(n)$ jelöli, és n -dimenziós *általános affin csoportnak* nevezzük. A fentiekből világos, hogy $GA(n) \cong \mathfrak{G} \subset PGL(n)$.

A $GA(n) \cong \mathfrak{G}$ általános affin csoport azon elemei, melyek a h hipersík minden pontját fixen hagyják, az n -dimenziós $N(n)$ *nyújtás-csoportot* alkotják. Ezek

$$\mathbf{g}': \mathbf{v} \mapsto \lambda \mathbf{v} + \mathbf{g}', \quad 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$$

alakú transzformációk, hiszen $\mathbf{G}'$ fixálja a h minden elemét, így a bázisát is, amiért minden $i \neq j$ esetén $g_{i,j} = 0$, és $[(\lambda \mathbf{u}_i + \mu \mathbf{u}_j)\mathbf{G}'] = [\lambda g_{i,i}\mathbf{u}_i + \mu g_{j,j}\mathbf{u}_j]$ is teljesül minden $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ esetén, amiből $g_{i,i} = g_{j,j}$ következik.

Az $\mathbb{A}$ affin téren rögzítve egy $f: (\mathbb{A})^n \rightarrow \mathbb{R}$ térfogatformát (determináns, n -változós alternáló forma) [Kurusa: Euklidészi geometria], a $GA(n)$ affin csoport e térfogatformát invariánsan hagyó $\mathbf{g}'$ elemeinek, vagyis amelyekre $f(\mathbf{g}(\mathbf{u}_1), \dots, \mathbf{g}(\mathbf{u}_n)) = f(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$, alakja

$$\mathbf{g}': \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}\mathbf{G}' + \mathbf{g}', \quad \det(\mathbf{G}') = 1.$$

Ezek alkotját az n -dimenziós $SA(n)$ *speciális affin csoportot*.

Az $SA(n)$ speciális affin csoport azon elemeinek halmaza, melyek fixen hagyják az origót, az n -dimenziós $SL(n)$ *speciális lineáris csoportot* alkotja. Ennek elemei

$$\mathbf{g}' : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}\mathbf{G}', \quad \det(\mathbf{G}') = 1$$

alakúak. Természetesen $SL(n) \cong GL(n) \cap SA(n)$ is teljesül.

Az $N(n)$ nyújtás-csoport azon elemeinek halmaza, melyek az $SA(n)$ speciális affin csoportnak is elemei, az n -dimenziós $E(n)$ *eltolás-csoportot* alkotja, aminek elemei

$$\mathbf{g}' : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{g}',$$

alakúak.

Az $\mathbb{A}$ affin téren rögzítve egy $\langle \cdot, \cdot \rangle$ euklidészi szorzást (pozitív definit bilineáris funkcionál) [Kurusa: Euklidészi geometria], a $GA(n)$ affin csoport $\langle \cdot, \cdot \rangle$ euklidészi szorzást invariánsan hagyó $\mathbf{g}'$ elemeinek, vagyis amelyekre $\langle \mathbf{g}(\mathbf{u}), \mathbf{g}(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, alakja

$$\mathbf{g}' : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}\mathbf{G}' + \mathbf{g}', \quad \mathbf{G}'(\mathbf{G}')^T = 1.$$

Ezek alkotját az n -dimenziós $GM(n)$ *általános izometria-csoportot*. Az $O(n) = GM(n) \cap GL(n)$ csoportot *ortogonális csoportnak* nevezzük.

Mint ahogy a

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \mapsto \text{sign}(\det(\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle)) \sqrt{\det(\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle)}$$

leképezés egy térfogatforma, minden $\mathbf{G} \in O(n)$ leképezésre $\det \mathbf{G} = \pm 1$. A $\det \mathbf{G} = 1$ feltételnek eleget tévők alkotját az $SM(n) := GM(n) \cap SA(n)$ *mozgáscsoportot* azok közül az origót fixen hagyók a $SO(n) := O(n) \cap SL(n)$ *speciális irányítástartó ortogonális csoportot*.

Ahhoz, hogy megtaláljuk a Bolyai-síkot meghatározó összes transzformáció csoportját a $PGL(2)$ részcsoporthaként, válasszuk azt a $\mathcal{K}$ kúpszeletet a $\mathbb{P}^2$ projektív síkban, melynek egyenesei olyan körkúpot alkotnak, melynek tengelye a szokásos koordinátázásban a z -tengely, alkotói pedig $\pi/4$ szöget zárnak be a z -tengellyel. A $\mathcal{K}$ kúpszelet pontjainak $[x, y, z]$ homogén koordinátáira ekkor nyilván $x^2 + y^2 = z^2$ teljesül, és a $[\mathbf{G}] = \left[\begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} & g_{1,3} \\ g_{2,1} & g_{2,2} & g_{2,3} \\ g_{3,1} & g_{3,2} & g_{3,3} \end{pmatrix} \right] \in PGL(2)$ akkor és csak akkor hagyja a $\mathcal{K}$ kúpszeletet invariánsan, ha $x^2 + y^2 = z^2$ esetén az $(x_g, y_g, z_g) = (x, y, z)\mathbf{G}$ vektorra is $x_g^2 + y_g^2 = z_g^2$ teljesül, vagyis

$$(xg_{1,1} + yg_{2,1} + zg_{3,1})^2 + (xg_{1,2} + yg_{2,2} + zg_{3,2})^2 = (xg_{1,3} + yg_{2,3} + zg_{3,3})^2.$$

Elvégezve a négyzetre emeléseket és csoportosítva a tagokat, ez ekvivalens azzal, hogy

$$\begin{aligned} & x^2(g_{1,1}^2 + g_{1,2}^2 - g_{1,3}^2) + y^2(g_{2,1}^2 + g_{2,2}^2 - g_{2,3}^2) + z^2(g_{3,1}^2 + g_{3,2}^2 - g_{3,3}^2) + \\ & + 2xy(g_{1,1}g_{2,1} + g_{1,2}g_{2,2} - g_{1,3}g_{2,3}) + 2xz(g_{1,1}g_{3,1} + g_{1,2}g_{3,2} - g_{1,3}g_{3,3}) + \\ & + 2yz(g_{2,1}g_{3,1} + g_{2,2}g_{3,2} - g_{2,3}g_{3,3}) \\ & = 0. \end{aligned}$$

Az

$$(x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz) = \begin{cases} (0, 1, 1, 0, 0, 1) & \text{ha } x = 0, y = 1, z = 1, \\ (0, 1, 1, 0, 0, -1) & \text{ha } x = 0, y = -1, z = 1, \\ (1, 0, 1, 0, 1, 0) & \text{ha } x = 1, y = 0, z = 1, \\ (1, 0, 1, 0, -1, 0) & \text{ha } x = -1, y = 0, z = 1, \\ (1, 1, 2, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}) & \text{ha } x = 1, y = 1, z = \sqrt{2}, \\ (1, 1, 2, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}) & \text{ha } x = 1, y = -1, z = \sqrt{2}, \end{cases}$$

speciális esetek közül az első kettőből következik, hogy yz együtthatója 0, a harmadik és negyedik párosából xz együtthatójára kapjuk, hogy 0. Az ötödik és hatodik esetet eddigi eredményeinkkel együtt tekintve az xy együtthatójára is 0 adódik. Végül az $x = 0$ és $y = z$ alapján y^2 és z^2 , $x = z$ és $y = 0$ alapján pedig x^2 és z^2 , együtthatóinak összegére adódik 0, amiből x^2 és y^2 együtthatóinak egyenlősége következik, amiért z^2 együtthatója ezek -1 -szerese. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{G}$ választható úgy, hogy a $\mathbf{g}_i = (g_{i,1}, g_{i,2}, g_{i,3})$ sorvektorokra minden $i, j \in \{1, 2, 3\}$ esetén

$$\prec \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j \succ := g_{i,1}g_{j,1} + g_{i,2}g_{j,2} - g_{i,3}g_{j,3} = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j, \\ 1, & \text{ha } i = j. \end{cases}$$

A vektorok itt definiált bilineáris $\prec \cdot, \cdot \succ$ leképezését hiperbolikus szorzatnak nevezzük. Azon $\mathbf{G}$ transzformációk csoportját, amelyek tartják a hiperbolikus szorzatot, $HGM(3)$ jelöli. Ezek homogén-ekvivalencia szerinti osztályainak $HM(2) = [HGM(3)]$ csoportját *általános hiperbolikus izometria-csoportnak* nevezzük. Jegyezzük meg, hogy e csoport magasabb dimenziós megfelelője, tehát a vektorok $\prec \mathbf{u}, \mathbf{v} \succ := u_1v_1 + \dots + u_nv_n - u_{n+1}v_{n+1}$ hiperbolikus szorzatát tartó lineáris leképezések $HGM(n+1)$ csoportja lehetőséget biztosít a hiperbolikus geometria magasabb dimenziókra való általánosítására azzal, ha vesszük a $HM(n) = [HGM(n+1)]$ csoportra invariáns elméletet.

Érdeemes felfigyelni rá, hogy $GHM(n+1)$ elemei invariánsan tartják azon $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n+1}$ vektorok kétköpenyű forgáshiperboloidját, melyekre $\prec \mathbf{u}, \mathbf{u} \succ = 1$. Az invariancia miatt a hiperbolikus szorzat által definiált metrikával ennek bármely köpenye alkalmas a hiperbolikus geometria modelljének [Kurusa: Bevezetés a differenciálgeometriába], melyet Weierstrass-modellnek is hívnak.

F.2. Geometriák és metrikák

Az összes projektív metrika meghatározásának és osztályozásának problémáját David Hilbert vetette fel 1900-ban (mivel egyúttal összesen 23 problémát fogalmazott meg, és ez ezek közül a negyedik volt, e kérdéskört a világ ma is Hilbert IV. problémájaként is emlegeti).

E könyv projektív metrizálással foglalkozó fejezetében összesen három eljárást adtunk meg különféle projektív metrikák előállítására. Most — ha nem is teljes mélységében, és néhol kellő a precizitásból is engedve, de — megmutatjuk, hogy projektív metrikákból szinte áttekinthetetlenül sok létezik.

Tekintsük most a valós projektív síkot mint az ideális elemekkel [Kurusa: Euklidészi geometria] kiegészített valós affin síkot, melyet a továbbiakban csak $\mathcal{S}$ síknak hívunk, a szokásos térbeli (x, y, z) ortogonális koordinátarendszerben a $z = 1$ egyenlettel adunk meg, és rögzítjük az $\mathbf{m} = (0, 0, 1)$ normálisát.

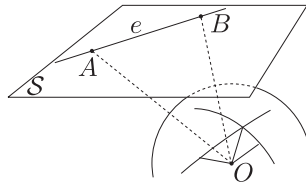
Az $\mathcal{S}$ sík minden $\mathbf{i}_e$ irányvektorú irányított e egyenesét meghatározza a rá és az origóra egyszerre illeszkedő sík és a síknak az az $\mathbf{m}_e$ normálisa, mely az egyenes origóba mutató $\mathbf{n}_e$ normálisával és $\mathbf{i}$ irányvektorával jobbsodrású ortonormált bázist alkot, vagyis $\mathbf{m}_e = \mathbf{i}_e \times \mathbf{n}_e$. Jelölje $\chi: e \mapsto \{\mathbf{m}_e, -\mathbf{m}_e\}$ azt a hozzárendelést, mely az affin sík irányítatlan egyeneseihez az egységgömb $\partial\mathcal{B}$ felületének átellenes pontpárjait rendeli. A χ leképezés nyilván bijektív.

Az $\mathcal{S}$ sík ugyanazon P pontján átmenő egyenesek $\check{P}$ halmazát a χ leképezés abba a $\chi(\check{P})$ főkörbe viszi, melynek síkja merőleges a P pontot az origóval összekötő p egyenesre, hiszen $\check{P}$ minden egyenesének origóval közös síkja tartalmazza a p egyenest.

Vegyünk most egy $\mathcal{I} = \overline{AB}$ zárt szakaszt az $\mathcal{S}$ sík valamely e egyenesén, és jelölje $\check{\mathcal{I}}$ az ezt metsző egyenesek halmazát. Ekkor

$$\chi(\check{\mathcal{I}}) = \chi\left(\bigcup_{P \in \mathcal{I}} \check{P}\right) = \bigcup_{P \in \mathcal{I}} \chi(\check{P}).$$

A $\chi(\check{P})$ főkörök mindegyike tartalmazza a $\chi(e)$ pontot, hiszen $e \in \check{P}$ minden $P \in \mathcal{I}$ esetén, így a $\chi(\check{\mathcal{I}})$ halmaz a gömbön egy kétszög.



Két közös végpontú zárt szakaszt egyszerre metsző egyenesek halmazát eszerint a χ a gömbfelület két kétszögének metszetébe képezi, ami egy origó csúcsú négyszög alapú gúla metszete a $\partial\mathcal{B}$ gömbfelülettel.

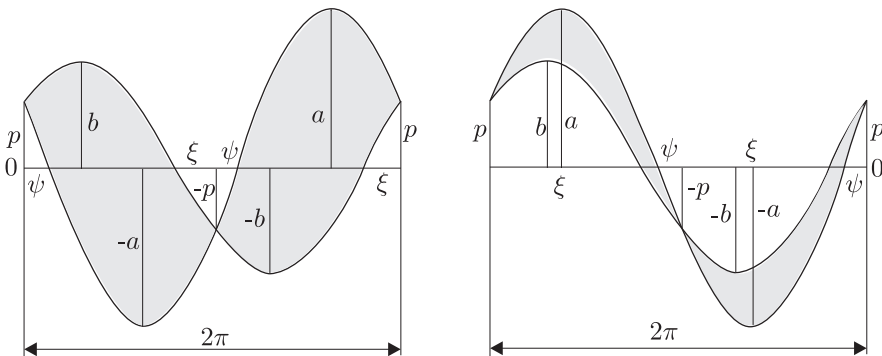
Legyen $\mathcal{E}_C$ az $\mathcal{S}$ sík összes nem ideális egyenesének halmaza, és legyen $e \in \mathcal{E}_C$. Vegyük most az $\chi(e)$ két pontjára illeszkedő egyenes metszetét azzal a végtelen $\partial\mathcal{C}$ hengerpalásttal, melynek tengelye a z koordinátatengely, a $z = 0$ síkban lévő alkörének sugara pedig 1. Világos, hogy ez a most megadott $\chi_C: \mathcal{E}_C \mapsto \partial\mathcal{C}$ leképezés olyan, hogy az $\mathcal{S}$ síkban a z tengelytől $p \geq 0$ távolságra lévő egyenest éppen a $\pm p\mathbf{n}_e$ pontpárba képezi, vagyis $\chi_C(e) = \{p\mathbf{m}_e, -p\mathbf{m}_e\}$.

A fentiek alapján világos, hogy χ_C a közös pontra illeszkedő egyeneseket a $\partial\mathcal{C}$ hengerpalástnak egy origón átmenő síkkal vett metszetébe, az $\mathcal{I} \subset e \subset \mathcal{S}$ zárt szakaszt metsző egyeneseket pedig a $\partial\mathcal{C}$ hengerpalást két origón átmenő sík közötti pontjainak halmazába képezi.

Tétel. *Egy szakasz χ_C melletti képeinek felszíne a szakasz hosszának négyszerese.*

Bizonyítás. Tekintsük az A és B pontokat az $\mathcal{S}$ síkon. Ezek közös e egyenesének z -tengelyhez legközelebbi pontja legyen E , melynek távolsága a z -tengelytől legyen $p \geq 0$.

Az A ponton átmenő egyenesek χ_C képeinek halmazát az az origón átmenő sík metszi ki a $\partial\mathcal{C}$ hengerpalástból, melymerőleges az $\vec{OA}$ vektorra. E síkmetszet legnagyobb z -koordinátájú pontjának z -koordinátája a korábbiak szerint megegyezik az A pont z -tengelytől vett a távolságával. Ugyanígy a B ponthoz tartozó síkmetszet legnagyobb z -koordinátájú pontjának z -koordinátája megegyezik a B pont z -tengelytől vett b távolságával. Tegyük fel, hogy $b \leq a$, amiért $p \leq b \leq a$. Vágjuk el a henger palástját a $p\mathbf{m}_e$ pontján átmenő alkotója mentén, majd „terítsük ki” síkba.



Minthogy a henger alapkörének sugara 1, a kiterítés után egy 2π szélességű, párhuzamosok által határolt „sávot” kapunk a síkban, melyben két koszinuszgörbe közti tartomány tartozik az $\overline{AB}$ szakaszt metsző egyenesek halmazához.

A tartomány t területét az ábrán bevezetett $0 \leq \psi \leq \pi/2$ és $0 \leq \xi \leq \pi$ szögek segítségével a

$$\begin{aligned} t &= 2 \int_0^\pi a \sin x \, dx + 2 \int_0^\pi b \sin x \, dx - 4 \int_0^\psi a \sin x \, dx - 4 \int_0^\xi b \sin x \, dx \\ &= 2[-a \cos x]_0^\pi + 2[-b \cos x]_0^\pi - 4[-a \cos x]_0^\psi - 4[-b \cos x]_0^\xi \\ &= 4(a \cos \psi + b \cos \xi) = 4(a\sqrt{1 - \sin^2 \psi} + b \operatorname{sign}(\cos \xi)\sqrt{1 - \sin^2 \xi}) \\ &= 4(\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \psi} + \operatorname{sign}(\cos \xi)\sqrt{b^2 - b^2 \sin^2 \xi}) \\ &= 4(\sqrt{a^2 - p^2} + \operatorname{sign}(\cos \xi)\sqrt{b^2 - p^2}) = 4d(A, B) \end{aligned}$$

formula adja, ahol az utolsó egyenlőség Pitagorasz tételének az AEO és BEO háromszögekre való alkalmazásából adódik. ■

E tétel eredményét fordítva szemlélve, lehetőség nyílik az $\mathcal{S}$ síkban lévő pontok távolságának megadására a $\chi_{\mathcal{C}}$ leképezést használva: Legyen $d_{\mathcal{C}}: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan, hogy $d_{\mathcal{C}}: (A, B) \mapsto f(\chi_{\mathcal{C}}(\overline{AB}))/4$, ahol f a $\partial\mathcal{C}$ hengerpaláston lévő ponthalmaz felszíne. Tételünk alapján ez a szokásos euklidészi d metrikát adja.

A projektív metrikák meghatározásához a távolság most mutatott megadását általánosítjuk a henger helyett más testeket használva.

Egy origót ponthalmazt az origóra nézve csillagszerűnek mondunk, ha minden az origón átmenő egyenest egy zárt szakaszban vagy félegyenesben metsz, vagy a teljes egyenest tartalmazza. Egy origóra csillagszerű $\mathcal{M}$ ponthalmaz $\partial\mathcal{M}$ határán azon pontjai halmazát értjük, melyek valamely origón átmenő egyenessel vett metszetének végpontjai. Egy origóra csillagszerű ponthalmazt megengedettnak nevezünk, ha határának minden korlátos részhalmazán van véges felszínmérés. Megengedett test eszerint például a féltér, a gömb, a henger, a hiperboloid, az ellipszoid, de nem megengedett a tér.

Legyen most $\mathcal{M}$ egy megengedett ponthalmaz, $\partial\mathcal{M}$ ennek határa, $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ pedig jelölje az $\mathcal{S}$ sík azon e egyeneseinek halmazát, melyre $\{\lambda \mathbf{m}_e: \lambda \in \mathbb{R}\} \cap \partial\mathcal{M} \neq \emptyset$, és definiáljuk a $\chi_{\mathcal{M}}: \mathcal{E}_{\mathcal{M}} \rightarrow \partial\mathcal{M}$ leképezést úgy, hogy $\chi_{\mathcal{M}}(e) = \{\lambda \mathbf{n}_e: \lambda \in \mathbb{R}\} \cap \partial\mathcal{M}$.

Legyen $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ azon P pontok halmaza, melyre $\check{P} \subset \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$. Definiáljuk a $d_{\mathcal{M}}: \mathcal{S}_{\mathcal{M}} \times \mathcal{S}_{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy $d_{\mathcal{M}}(A, B) := f(\chi_{\mathcal{M}}(\overline{AB}))/4$, ahol f az $\partial\mathcal{M}$ határon létező felszínmérés.

Tétel. Az $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ síkbeli tartományon a $d_{\mathcal{M}}$ függvény projektív metrika.

Bizonyítás. Világos, hogy $d_{\mathcal{M}}$ nem negatív (ez a pozitivitás), és $d_{\mathcal{M}}(P, Q) = 0$ kizárólag $P = Q$ esetén (ez a definités), hiszen a $\partial\mathcal{M}$ határ két sík közé eső része csak $P = Q$ esetén fajul egyetlen görbévé.

A $d_{\mathcal{M}}$ függvény szimmetrikus is, hiszen a pontok sorrendje csak a $\partial\mathcal{M}$ határt metsző két sík sorrendjét határozza meg.

Tekintsük az $A, B, C \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ pontok által meghatározott szakaszokat. A Pasch-axioma szerint az ABC háromszög egyik oldalát metsző egyenesek mindegyike az ABC háromszögnek pontosan egy másik oldalát metszi, így az f felszínmérés additivitása és pozitivitása miatt

$$\begin{aligned} 4d_{\mathcal{M}}(A, B) &= f(\chi_{\mathcal{M}}(\overline{AB})) = f(\chi_{\mathcal{M}}(\overline{AB}) \cap \chi_{\mathcal{M}}(\overline{BC})) + f(\chi_{\mathcal{M}}(\overline{AB}) \cap \chi_{\mathcal{M}}(\overline{CA})) \\ &\leq f(\chi_{\mathcal{M}}(\overline{AB}) \cap \chi_{\mathcal{M}}(\overline{BC})) + f(\chi_{\mathcal{M}}(\overline{BC}) \cap \chi_{\mathcal{M}}(\overline{CA})) + \\ &\quad + f(\chi_{\mathcal{M}}(\overline{AB}) \cap \chi_{\mathcal{M}}(\overline{CA})) + f(\chi_{\mathcal{M}}(\overline{BC}) \cap \chi_{\mathcal{M}}(\overline{CA})) \\ &= f(\chi_{\mathcal{M}}(\overline{BC})) + f(\chi_{\mathcal{M}}(\overline{CA})) = 4d_{\mathcal{M}}(B, C) + 4d_{\mathcal{M}}(C, A) \end{aligned}$$

igazolja a háromszög-egyenlőtlenséget.

A metrika additivitása (projektivitása) azonnal következik, abból, hogy amint már láttuk, két közös végpontú zárt szakaszt egyszerre metsző egyenesek halmazának képét egy origó csúcsú négyszög alapú gúla metszi ki a $\partial\mathcal{M}$ határból, ami ezért tartalmazza $\partial\mathcal{M}$ egy nyílt részhalmazát, melynek felszíne pozitív. ■

Az már láttuk, hogy $\mathcal{C}$ megengedett henger esetén $d_{\mathcal{C}}$ az euklidészi metrika. Mivel a gömbi kétszögek felszíne csak a csúcshögtől függ, adódik, hogy ha $\mathcal{B}$ egy megengedett gömb, akkor $d_{\mathcal{B}}$ az elliptikus metrika.

F.3. Törtlineáris leképezések

A $z = a + bi \in \mathbb{C}$ komplex számban, ahol i a képzetes egység ($i^2 = -1$), a $\operatorname{Re}(z) = a$ valós számot a z komplex szám valós, az $\operatorname{Im}(z) = b$ valós számot a z komplex szám képzetes részének nevezzük. A $\bar{z} = a - bi$ komplex számot a z konjugáltjának, a $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ valós számot a z abszolút értékének mondjuk. Ha $z = |z|(\cos \zeta + i \sin \zeta) \neq 0$, akkor a $\zeta = \arg z \in (-\pi, \pi]$ valós számot a z nem nulla komplex szám argumentumának nevezzük. Világos, hogy bármely $k \in \mathbb{Z}$ egész számra a $\zeta' = \arg z + 2k\pi$ szögre is teljesül $z = |z|(\cos \zeta' + i \sin \zeta')$. Ezen $\zeta' = \arg z + 2k\pi$ számok halmazát $\arg^* z$ jelöli. A komplex számok szorzásából és a szögfüggvények addíciós tételéből

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| (\cos \zeta_1 + i \sin \zeta_1) (\cos \zeta_2 + i \sin \zeta_2) \\ &= |z_1| |z_2| ((\cos \zeta_1 \cos \zeta_2 - \sin \zeta_1 \sin \zeta_2) + i (\sin \zeta_1 \cos \zeta_2 + \cos \zeta_1 \sin \zeta_2)) \\ &= |z_1| |z_2| (\cos(\zeta_1 + \zeta_2) + i \sin(\zeta_1 + \zeta_2)) \end{aligned}$$

adódik, amiért $\arg z_1 + \arg z_2 \in \arg^*(z_1 z_2)$.

A $\mathbb{C}$ komplex számsík különböző z_1, z_2, z_3, z_4 pontjainak *komplex kettősviszonyán* a $(z_1 z_2 z_3 z_4) := \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3} : \frac{z_4 - z_1}{z_2 - z_4}$ komplex számot értjük.

Egy különböző komplex számokból álló z_1, z_2, z_3 ponthármaszt pozitív illetve negatív irányításúnak mondunk, ha $\arg \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} > 0$ illetve $\arg \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} < 0$.

Tétel. *A komplex kettősviszony akkor és csak akkor valós szám, ha a komplex számok egy egyenesen vagy egy körön helyezkednek el.*

Bizonyítás. A z_1, z_2, z_3, z_4 komplex számok $(z_1 z_2 z_3 z_4)$ kettősviszonya akkor és csak akkor valós szám, ha $0 = \arg(z_1 z_2 z_3 z_4)$, vagyis

$$0 \in \arg^* \left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3} : \frac{z_4 - z_1}{z_2 - z_4} \right) \ni \arg(z_3 - z_1) - \arg(z_2 - z_3) - \arg(z_4 - z_1) + \arg(z_2 - z_4),$$

ami azt jelenti, hogy a z_3 pontból a z_1 és z_2 pontok szakasza ugyanakkora szög alatt látszik, mint a z_4 pontból. Ez a látószög-tétel miatt éppen a tétel állítását adja. ■

Az $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ alakú $f: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ függvényeket, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad \neq bc$, $f(\infty) = a/c$ és $f(-c/d) = \infty$, *törtlineáris leképezésnek* vagy *Möbius-transzformációnak* nevezzük.

Tétel. *A törtlineáris leképezések bijektívek és a leképezések szorzásának műveletével csoportot alkotnak, melyet az*

$$\alpha_a(z) = a + z, \quad \mu_m(z) = mz, \quad \text{és} \quad \iota(z) = 1/z$$

törtlineáris leképezések generálnak.

A tételben említett speciális törtlineáris leképezéseket a még bizonyítandó tulajdonságuk alapján generáló törtlineáris leképezéseknek nevezzük.

Bizonyítás. Legyen f egy törtlineáris leképezés, vagyis valamely $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ komplex számokra $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Ekkor

$$f(z) = \begin{cases} \frac{a}{c} + \frac{b - (ad/c)}{cz + d} = \alpha_{a/c} \circ \mu_{(cb-ad)/c} \circ \iota \circ \alpha_d \circ \mu_c(z), & \text{ha } c \neq 0, \\ \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = \alpha_{b/d} \circ \mu_{a/d}(z), & \text{ha } c = 0 \text{ és } d \neq 0, \end{cases}$$

ami azt mutatja, hogy a megadott törtlineáris leképezésekből minden törtlineáris leképezés előáll a leképezések szorzásának műveletével.

Eszerint a törtlineáris leképezések bijektivitását elég látni a generáló törtlineáris leképezésekre, ami viszont nyilvánvaló. A bijektivitáson túl az is azonnal látszik, hogy az f törtlineáris leképezés inverze nyilván az

$$\bar{f}(z) = \begin{cases} \mu_{1/c} \circ \alpha_{-d} \circ \iota \circ \mu_{c/(bc-ad)} \circ \alpha_{-a/c}(z), & \text{ha } c \neq 0, \\ \mu_{d/a} \circ \alpha_{-b/d}(z), & \text{ha } c = 0 \text{ és } d \neq 0, \end{cases}$$

törtlineáris leképezés.

A csoport-tulajdonság igazolásához a bijektív leképezések csoport-tulajdonsága alapján elég látni, hogy

- (i) két törtlineáris leképezés szorzata törtlineáris,
- (ii) egy törtlineáris leképezés inverze is törtlineáris, és
- (iii) az identitás törtlineáris leképezés.

A (iii) állítás triviális, a (ii) állítást pedig épp az imént igazoltuk.

Az (i) tulajdonságot bizonyítja, hogy az $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ és $g(z) = \frac{pz+q}{rz+s}$ törtlineáris leképezésekre

$$f(g(z)) = \frac{a \frac{pz+q}{rz+s} + b}{c \frac{pz+q}{rz+s} + d} = \frac{a(pz+q) + b(rz+s)}{c(pz+q) + d(rz+s)} = \frac{(ap+br)z + (aq+bs)}{(cp+dr)z + (cq+ds)},$$

$$\text{és } (ap+br)(cq+ds) - (aq+bs)(cp+dr) = (ad-bc)(ps-qr) \neq 0.$$

Ezzel a tételt beláttuk. ■

Tétel. Az $f: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ leképezés akkor és csak akkor tartja a komplex kettősviszonyt, ha törtlineáris.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy f tartja a kettősviszonyt. Legyen z_1, z_2, z_3, z tetszőleges komplex szám, és legyen $z'_1 = f(z_1)$, $z'_2 = f(z_2)$ és $z'_3 = f(z_3)$. Ekkor feltételünk szerint $(z_1 z_2 z_3 z) = (z'_1 z'_2 z'_3 f(z))$, így

$$\frac{f(z) - z'_1}{z'_2 - f(z)} \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3} = \frac{z - z_1}{z_2 - z} \frac{z'_3 - z'_1}{z'_2 - z'_3}$$

amit átrendezve

$$f(z) = \frac{(z_2 - z_3)z'_2(z'_3 - z'_1)(z - z_1) + (z'_2 - z'_3)z'_1(z_3 - z_1)(z_2 - z)}{(z'_2 - z'_3)(z_3 - z_1)(z_2 - z) + (z_2 - z_3)(z'_3 - z'_1)(z - z_1)}$$

adódik. Ez bizonyítja az állítás „akkor” részét.

A kettősviszony megmaradását elegendő a generáló α_a, μ_m és ι törtlineáris leképezésekre igazolni:

$$(\alpha_a(z_1)\alpha_a(z_2)\alpha_a(z_3)\alpha_a(z_4))$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(a+z_3)-(a+z_1)}{(a+z_2)-(a+z_3)} : \frac{(a+z_4)-(a+z_1)}{(a+z_2)-(a+z_4)} = \frac{z_3-z_1}{z_2-z_3} : \frac{z_4-z_1}{z_2-z_4} = (z_1 z_2 z_3 z_4), \\
&(\mu_m(z_1)\mu_m(z_2)\mu_m(z_3)\mu_m(z_4)) \\
&= \frac{mz_3-mz_1}{mz_2-mz_3} : \frac{mz_4-mz_1}{mz_2-mz_4} = \frac{z_3-z_1}{z_2-z_3} : \frac{z_4-z_1}{z_2-z_4} = (z_1 z_2 z_3 z_4), \\
&(\iota(z_1)\iota(z_2)\iota(z_3)\iota(z_4)) \\
&= \frac{1/z_3-1/z_1}{1/z_2-1/z_3} : \frac{1/z_4-1/z_1}{1/z_2-1/z_4} = \frac{(z_1-z_3)z_2z_3}{(z_3-z_2)z_3z_1} : \frac{(z_1-z_4)z_2z_4}{(z_4-z_2)z_4z_1} = (z_1 z_2 z_3 z_4).
\end{aligned}$$

Ezzel a tételt bizonyítottuk. ■

Tétel. Legyenek adottak a tetszőleges különböző z_1, z_2, z_3 és z'_1, z'_2, z'_3 komplex számok. Ekkor pontosan egy olyan f törtlineáris leképezés létezik, melyre $z'_1 = f(z_1)$, $z'_2 = f(z_2)$ és $z'_3 = f(z_3)$.

Bizonyítás. Az előbbi tételünkben kiszámított

$$f(z) = \frac{(z_2-z_3)z'_2(z'_3-z'_1)(z-z_1) + (z'_2-z'_3)z'_1(z_3-z_1)(z_2-z)}{(z'_2-z'_3)(z_3-z_1)(z_2-z) + (z_2-z_3)(z'_3-z'_1)(z-z_1)}$$

leképezésről egyszerű helyettesítéssel látható, hogy pont olyan, mint amit ez a tétel állít. Mivel egy törtlineáris leképezés tartja a kettősviszonyt, előbbi tételünk szerint csak ez az f leképezés felel meg a feltételeinknek. ■

Tétel. Nem identikus f törtlineáris leképezésnek pontosan egy vagy pontosan kettő fixpontja van.

Bizonyítás. A z pontosan akkor fixpontja az $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ törtlineáris leképezésnek, ha $z = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, vagyis $cz^2 + (d-a)z - b = 0$, ami másodfokú egyenlet, melynek $c \neq 0$ esetén pontosan kettő, esetleg egybeeső megoldása van, $c = 0$ esetén pedig pontosan egy megoldása van. ■

Tétel. Az $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ törtlineáris leképezés akkor és csak akkor bijektív leképezés a $\mathbb{C}$ komplex számsík nyílt $\mathbb{C}_{0 < \text{Im}(z)}$ félsíkja és a nyílt $\mathbb{C}_{|z| < 1}$ komplex egységkör lap között, ha $f(z) = k \frac{z-\ell}{z-\bar{\ell}}$, ahol $|k| = 1$ és $\text{Im}(\ell) > 0$.

Bizonyítás. „Csak akkor”. Ha $c = 0$, akkor minden egyenes képe egyenes, amiért f képtere nem lehet korlátos, tehát $c \neq 0$.

Ha $a = 0$, akkor $ad - bc \neq 0$ miatt $bc \neq 0$ és $f(z) = \frac{b}{c} \frac{1}{z+d/c}$, így $\text{Im}(-d/c) \geq 0$ esetén f képtere nem korlátos, amiért $\text{Im}(-d/c) < 0$ teljesül. Elegendően kicsi $\delta > 0$ valós számra $\delta \frac{b}{c} \in \mathbb{C}_{|z| < 1}$, ezért ekkor a $z = \frac{1}{\delta} - \frac{d}{c} \in \mathbb{C}_{0 < \text{Im}(z)}$, hiszen $f(z) = \delta \frac{b}{c}$. Ez ellentmondás, hiszen $\text{Im}(z) = \text{Im}(\frac{1}{\delta} - \frac{d}{c}) = \text{Im}(-d/c) < 0$. Tehát $a \neq 0$.

Eszerint $f(z) = \frac{a}{c} \frac{z+(b/a)}{z+(d/c)} = k \frac{z-\ell}{z-e}$ alkalmas k, ℓ és e valós számokra.

Ha $t \rightarrow \infty$, akkor $a f(it) \rightarrow k$ és $f(-it) \rightarrow k$, amiért $|k| \leq 1$ és $|k| \geq 1$, hiszen előbbi a körleapon belül, utóbbi pedig a bijektivitás miatt a körleapon kívül kell legyen. Eszerint $|k| = 1$.

Mint hogy minden t valós szám minden környezetében van a $\mathbb{C}_{0 < \text{Im}(z)}$ félsíknak és a $\mathbb{C}_{\text{Im}(z) < 0}$ félsíknak is pontja, $f(t)$ olyan pont kell legyen, melynek minden környezetében van a $\mathbb{C}_{|z| < 1}$ komplex egységkörleapnak és a $\mathbb{C}_{1 < |z|}$ ponthalmaznak is pontja, amiért $|f(t)| = 1$ minden valós t számra. Ebből $|t - \ell| = |t - e|$ következik minden valós t számra, vagyis ℓ és e egybeesik, vagy a valós tengelyre nézve egymás tükörképei. Mivel $\ell = e$ esetén f egyedül a k értéket veszi fel, $\ell \neq e$, amiért $\ell = e$. Eszerint $f(z) = k \frac{z-\ell}{z-\ell}$ és $|k| = 1$.

Mivel $f(\ell) = 0 \in \mathbb{C}_{|z| < 1}$, kapjuk, hogy $\ell \in \mathbb{C}_{0 < \text{Im}(z)}$, amivel a tétel ezen irányát bizonyítottuk.

Lássuk az „akkor” állítást. Mivel $f(z) = k \frac{z-\ell}{z-\ell}$, ahol $|k| = 1$ és $\text{Im}(\ell) > 0$, f nem identikus leképezés, tehát bijektív, és

$$\begin{aligned} |f(z)|^2 &= f(z) \overline{f(z)} = k \bar{k} \frac{z - \ell}{z - \ell} \frac{\bar{z} - \bar{\ell}}{\bar{z} - \bar{\ell}} = \frac{(z - \ell)(\bar{z} - \bar{\ell})}{(z - \ell)(\bar{z} - \bar{\ell})} = \frac{z\bar{z} - z\bar{\ell} - \ell\bar{z} + \ell\bar{\ell}}{z\bar{z} - z\bar{\ell} - \ell\bar{z} + \ell\bar{\ell}} \\ &= 1 + \frac{z\ell + \bar{\ell}\bar{z} - z\bar{\ell} - \ell\bar{z}}{z\bar{z} - z\bar{\ell} - \ell\bar{z} + \ell\bar{\ell}} = 1 + \frac{(z - \bar{z})(\ell - \bar{\ell})}{|z - \bar{\ell}|^2} = 1 - \frac{4 \text{Im}(z) \text{Im}(\ell)}{|z - \bar{\ell}|^2} \end{aligned}$$

miatt $|f(z)| < 1$ akkor és csak akkor, ha $\text{Im}(z) > 0$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

Tétel. Az $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ törtlineáris leképezés akkor és csak akkor bijektív leképezés a $\mathbb{C}$ komplex számsík nyílt $\mathbb{C}_{|z| < 1}$ komplex egységkörleapja és a nyílt $\mathbb{C}_{|z| < 1}$ komplex egységkörleap között, ha $f(z) = k \frac{z-\ell}{1-\bar{z}\ell}$, ahol $|k| = 1$ és $|\ell| < 1$.

Bizonyítás. „Csak akkor”. Ha $d = 0$, akkor $ad - bc \neq 0$ miatt $b \neq 0$, és így $f(0) = \infty$, holott $f(0) \in \mathbb{C}_{|z| < 1}$. Tehát $d \neq 0$.

Ha $a = 0$, akkor $ad - bc \neq 0$ miatt $c \neq 0$ és $b \neq 0$, és így $f(z) = \frac{b}{cz+d}$, amiért $f(\infty) = 0$, holott $\infty \notin \mathbb{C}_{|z| < 1}$ és így a bijektivitás miatt $f(\infty) \notin \mathbb{C}_{|z| < 1}$. Tehát $a \neq 0$.

Eszerint $f(z) = \frac{a}{d} \frac{z+(b/a)}{(c/d)z+1} = k \frac{z-\ell}{1-\bar{z}\ell}$ alkalmas k, ℓ és e valós számokra.

Mint hogy $f(\ell) = 0$, a bijektivitás alapján $|\ell| < 1$. Ugyanígy $f(1/\bar{e}) = \infty$ miatt $|1/\bar{e}| > 1$, vagyis $|e| < 1$.

Mivel minden egységnyi abszolút értékű z komplex szám minden környezetében van a $\mathbb{C}_{|z| < 1}$ egységkörleapnak és az $\mathbb{C}_{1 < |z|}$ halmaznak is pontja, $f(z)$ olyan pont kell legyen, melynek minden környezetében van a $\mathbb{C}_{|z| < 1}$ komplex egységkörleapnak

és a $\mathbb{C}_{1<|z|}$ ponthalmaznak is pontja, amiért $|f(z)| = 1$ minden egységnyi abszolút értékű z komplex számra.

Tegyük fel, hogy $e \neq \ell$, és legyen z_1 az ℓ és e pontok által meghatározott szakasz felezőmerőlegesének, a z_2 pedig legyen az ℓ és e pontok közös egyenesének metszete az egységkörrel.

Ekkor $|z_1 - \ell| = |z_1 - e| = |z_1||\bar{z}_1 - \bar{e}| = |1 - z_1\bar{e}|$ és így $|f(z_1)| = k$, amiért $|k| = 1$. Ebből $1 = f(z_2)$ miatt $|z_2 - \ell| = |1 - z_2\bar{e}| = |z_2||\bar{z}_2 - \bar{e}| = |z_2 - e|$, ami ellentmondás, hiszen $|z_2 - \ell| = |z_2 - e|$ csak $e = \ell$ esetén lehetne. Tehát $e = \ell$.

Tekintve, hogy $f(z) = k \frac{z-\ell}{1-\bar{z}\ell}$ és

$$\begin{aligned} |z - \ell|^2 - |1 - z\bar{\ell}|^2 &= (z - \ell)(\bar{z} - \bar{\ell}) - (1 - z\bar{\ell})(1 - \bar{z}\ell) = |z|^2 + |\ell|^2 - 1 - |z|^2|\ell|^2 \\ &= (|\ell|^2 - 1)(1 - |z|^2), \end{aligned}$$

a minden egységnyi z komplex számra érvényes $|f(z)| = 1$ egyenlőség miatt $|k| = 1$ adódik, amiből a $|z| < 1$ esetben érvényes $|f(z)| < 1$ egyenlőtlenség alapján $|\ell| < 1$ következik. Ezzel a „csak akkor” állítást bebizonyítottuk.

Most rátérünk az „akkor” állítás igazolására. Mivel $f(z) = k \frac{z-\ell}{1-\bar{z}\ell}$, ahol $|k| = 1$ és $|\ell| < 1$, f nem identikus leképezés, tehát bijektív, továbbá

$$|f(z)|^2 = \frac{|z - \ell|^2}{|1 - z\bar{\ell}|^2} = 1 + \frac{|z - \ell|^2 - |1 - z\bar{\ell}|^2}{|1 - z\bar{\ell}|^2} = 1 + \frac{(|\ell|^2 - 1)(1 - |z|^2)}{|1 - z\bar{\ell}|^2}$$

miatt $|f(z)| < 1$ akkor és csak akkor, ha $|z| < 1$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

Az egyenesek és körök halmazainak unióját a *kögyenesek* halmazának nevezzük. Mivel a komplex kettősviszony kizárólag ennek elemein, a kögyeneseken valós szám, és a komplex kettősviszonyt a törtlineáris leképezések megtartják, kimondhatjuk, hogy a törtlineáris leképezések tartják a kögyeneseket. Fordítva ez nem igaz, de a konjugálás bevezetése segít, hiszen a komplex számok konjugálása ugyan nem törtlineáris leképezés, de tartja a valós kettősviszonyokat, mert ebben az esetben

$$(\bar{z}_1\bar{z}_2\bar{z}_3\bar{z}_4) = \overline{(z_1z_2z_3z_4)} = (z_1z_2z_3z_4).$$

Tétel. *Bármely $f: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ leképezés akkor és csak akkor tartja a valós kettősviszonyt, ha $f = g$ vagy $f = g \circ \kappa$, ahol g törtlineáris leképezés, κ pedig a konjugálás.*

Bizonyítás. Iménti megjegyzésünk értelmében ha f vagy a konjugáltja $\bar{f}$ törtlineáris, akkor tartják a valós kettősviszonyt.

A fordított irány bizonyításához tekintsünk egy $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ leképezést, mely tartja a valós kettősviszonyt.

Az f injektív, mert $f(z_1) = f(z_2)$ és $z_1 \neq z_2$ esetén a z_1 és z_2 pontok közös egyenesén felvett bármely további különböző x_3 és x_4 pontra $(z_3 z_4 z_1 z_2) = (f(z_3)f(z_4)f(z_1)f(z_2)) = 1$ miatt $z_1 = z_2$ következik.

Tekintsük a $\mathcal{Z}$ egységkörre illeszkedő, különböző z_1, z_2, z_3 komplex számokat.

Legyen g az az egyértelmű törtlineáris leképezés, melyre $z_1 = g(z'_1)$, $z_2 = g(z'_2)$ és $z_3 = g(z'_3)$, ahol $z'_1 = f(z_1)$, $z'_2 = f(z_2)$ és $z'_3 = f(z_3)$. Ekkor a $h = g \circ f$ olyan, hogy a nem kollineáris z_1, z_2, z_3 komplex számokat fixen hagyja, és tartja a valós kettősviszonyt.

Ha $z \in \mathcal{Z}$, akkor $(z_1 z_2 z_3 z) = (h(z_1)h(z_2)h(z_3)h(z)) = (z_1 z_2 z_3 h(z))$ miatt $z = h(z)$, vagyis a $\mathcal{Z}$ kör minden pontja fix.

Tekintsünk egy tetszőleges nem fix $z \notin \mathcal{Z}$ pontot, és legyen $z' = h(z)$. A z és z' pontoknak végtelen sok olyan közös $\mathcal{K}$ köre létezik, mely pontosan kettő — mondjuk z_1 és z_2 — pontban metszi a $\mathcal{Z}$ kört, és ezek mind invariánsak a h leképezésre, hiszen a z', z_1, z_2 pontok a $h(\mathcal{K})$ kögyenesen vannak, és nem esnek egy egyenesre, amiért $h(\mathcal{K})$ a z', z_1, z_2 pontokra illeszkedő kör, vagyis $h(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$. Ezen invariáns körök $\{z, z'\}$ metszete is invariáns, amiért $h(\{z, z'\}) = \{z, z'\}$. Viszont h injektív, és $z' = h(z)$, így $z = h(z')$ is teljesül.

Tehát a $\mathbb{C}$ számsíkon a h leképezés identikus vagy involutív, ahol utóbbit azt jelenti, hogy valamely $z_0 \in \mathbb{C}$ esetén $z_0 \neq h(z_0)$, de minden $z \in \mathbb{C}$ számra $z = h(h(z))$. Ebből h bijektivitása nyilvánvaló.

Ha $h(0) = 0$, akkor az origón átmenő minden e egyenesen a h leképezésnek három fixpontja is van, amiért az ilyen egyenesek minden pontja fix, vagyis h az identitás, és ezzel be is bizonyítottuk, hogy $f = g^{-1}$ egy törtlineáris leképezés.

A továbbiakban feltesszük, hogy $h(0) \neq 0$.

Ha $|h(0)| < \infty$, akkor legyen z_1 és z_2 a 0 és $h(0)$ közös egyenesének két metszéspontja a $\mathcal{Z}$ komplex egységkörrel. Ekkor $(z_1 z_2 0 h(0)) = (h(z_1)h(z_2)h(0)0) = (z_1 z_2 h(0)0)$, amiért $-1 = (z_1 z_2 0 h(0))$, amiből $z_1 + z_2 = 0$ miatt

$$-1 = \frac{-z_1}{z_2} : \frac{h(0) - z_1}{z_2 - h(0)} = \frac{-z_1(z_2 - h(0))}{z_2(h(0) - z_1)} = \frac{z_2(z_2 - h(0))}{z_2(h(0) + z_2)} = -1 + \frac{2z_2}{h(0) + z_2},$$

vagyis $z_2 = 0$ következik. Ez ellentmondás, tehát $h(0) = \infty$.

Most tekintsük a $\mathcal{Z}$ komplex egységkörre vonatkozó $\kappa \circ \iota: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ inverziót, és vizsgáljuk az $i = \kappa \circ \iota \circ h$ leképezést. Az i leképezésnél a $\mathcal{Z}$ kör minden pontja, és $h(0) = \infty$ miatt az origó is fix. Ugyanakkor i tartja a valós kettősviszonyt, mert h és az $\kappa \circ \iota$ inverzió is ezt teszi, hiszen a κ konjugálás őrzi a valós kettősviszonyt, az ι pedig tartja a komplex kettősviszonyt. Fentebbi érvelésünk alapján tehát i az identitás, amiért $h = \iota \circ \kappa$, és ezzel be is bizonyítottuk a tételt, hiszen $g^{-1} \circ \iota$ egy törtlineáris leképezés, és $f = (g^{-1} \circ \iota) \circ \kappa$. ■

F.4. Az algebra néhány alapfogalma

A $\mathcal{H}$ halmaz valamely kétváltozós $\alpha: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \{0, 1\}$ leképezését *relációnak* nevezzük. Ha a $\mathcal{H}$ halmaz a és b eleméhez rendelt érték 1, azt az $a \alpha b$ formulával jelöljük. A α reláció *reflexív*, ha $a \alpha a$, *szimmetrikus*, ha $a \alpha b$ esetén $b \alpha a$ következik, *antiszimmetrikus*, ha $a \alpha b$ és $b \alpha a$ esetén $a = b$ következik, *transzitiv*, ha $a \alpha b$ és $b \alpha c$ esetén $a \alpha c$ következik minden $a, b, c \in \mathcal{H}$ elemre.

Az olyan relációt, amely reflexív, szimmetrikus és transzitiv, *ekvivalenciának* vagy *ekvivalencia-relációnak* nevezzük. Ilyen ekvivalencia például a szokásos = egyenlőség is.

Egy relációt (szigorú) *rendezésnek* nevezzük, ha antiszimmetrikus és transzitiv.

Egy kétváltozós $\diamond: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ függvényt a $\mathcal{H}$ halmazon *műveletnek* nevezzük. Ha a $\diamond$ művelet értékkészlete a $\mathcal{H}$ része, vagyis $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$, akkor a $\diamond$ műveletet *zártnak* mondjuk (a zártasgot sokszor beleértik a „művelet” fogalmába). A műveletek alkalmazásakor gyakran használják az $a \diamond b := \diamond(a, b)$ jelölési módot.

A $\diamond$ művelet *kommutatív*, ha $a \diamond b = b \diamond a$, *asszociatív*, ha $(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c)$ teljesül minden $a, b, c \in \mathcal{H}$ elemre. Valamely $e \in \mathcal{H}$ elemet a $\diamond$ művelet *neutrális elemének* mondunk, ha minden $a \in \mathcal{H}$ elemre $a \diamond e = e \diamond a = a$ teljesül. Ha e_1 és e_2 is a $\diamond$ művelet neutrális eleme, akkor $e_1 = e_2 \diamond e_1 = e_2$, tehát csak egy neutrális elem lehetséges. Ha a $\diamond$ művelet szorzásra vagy összeadásra emlékeztet, akkor a neutrális elemet inkább *egységelemnek* vagy *egynek*, illetve *nullelemnek*, vagy *nullának* nevezik.

Ha a $\diamond$ műveletnek van e neutrális eleme, akkor valamely h elem bal- illetve jobboldali *inverzén* olyan $\bar{h}$ elemet értünk, amelyre $\bar{h} \diamond h = e$ illetve $h \diamond \bar{h} = e$ érvényes. Ha a $\diamond$ művelet asszociatív és $\bar{h}_b$ illetve $\bar{h}_j$ a h bal- illetve jobboldali inverze, akkor $\bar{h}_b = \bar{h}_b \diamond e = \bar{h}_b \diamond (h \diamond \bar{h}_j) = (\bar{h}_b \diamond h) \diamond \bar{h}_j = e \diamond \bar{h}_j = \bar{h}_j$ miatt a h elem összes inverze egybeesik. Ha az a elemnek van kétoldali inverze, akkor a b elem a elem szerinti *konjugáltján* az $a \diamond b \diamond \bar{a}$ elemet értjük.

Egy $(\mathcal{H}, \diamond)$ rendszert *csoportnak* nevezzük, ha a kétváltozós $\diamond$ művelet zárt, asszociatív, létezik neutrális eleme és bármely elemének létezik (mindkét oldali) inverze. Ha a művelet kommutatív, akkor *kommutatív csoportról* vagy *Abel-csoportról* beszélünk.

Egy $(\mathbb{F}, \diamond, \star)$ rendszert *ferdetestnek* nevezzük, ha $(\mathbb{F}, \diamond)$ kommutatív csoport a 0 nullelemmel (amit nullának hívunk), $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \star)$ pedig csoport az 1 egységelemmel (amit egységnek nevezzük), és teljesül az $a \star (b \diamond c) = (a \star b) \diamond (a \star c)$ és $(b \diamond c) \star a = (b \star a) \diamond (c \star a)$, vagyis rendre a bal- és jobboldali *disztributivitás*. Ha az $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \star)$ csoport kommutatív, akkor *testről* beszélünk.

Egy $\mathbb{F}$ ferdetest *karakteristikájának* nevezzük az egység additív csoportbe-

li rendjét, vagyis a legkisebb olyan pozitív $\text{Char } \mathbb{F} := k$ egész számot, melyre $\underbrace{1 \diamond \cdots \diamond 1}_k = 0$. Azt mondjuk, hogy a karakterisztika 0, ha nincs ilyen pozitív k egész szám.

A $\{\mathcal{V}; \oplus, \{\lambda \cdot\}_{\lambda \in \mathbb{F}}\}$ rendszert az $\mathbb{F}$ (ferde)test feletti *vektortérnek* nevezzük, ha $\{\mathcal{V}; \oplus\}$ Abel-csoport, és minden $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$, valamint $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ esetén

$$(\lambda\mu)\mathbf{u} = \lambda(\mu\mathbf{u}), \quad (\lambda + \mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \oplus \mu\mathbf{u}, \quad \lambda(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} \oplus \lambda\mathbf{v}.$$

Jelölje $\mathbf{0}$ a $\{\mathcal{V}; \oplus\}$ Abel-csoport nullelemét. A definícióból azonnal következik, hogy $\mathbf{0}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{1}\mathbf{v} = \mathbf{v}$ minden $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektor esetében.

A vektortér egy $\lambda_1\mathbf{u}_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_k\mathbf{u}_k$ elemét az $\mathbf{u}_i$ vektorok *lineáris kombinációjának* nevezzük, és triviálisnak mondjuk, ha minden λ_i együttható 0.

Az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$ vektorokat *lineárisan függetlennek* nevezzük, ha a $\mathbf{0}$ vektor ezekből a vektorokból csak triviális lineáris kombinációval állhat elő.

Az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ vektorrendszert *bázisnak* mondjuk, ha lineárisan függetlenek, és minden vektor előáll ezek lineáris kombinációként. A báziselemek száma egyértelműen meghatározott. Ezt a számot a vektortér *dimenziójának* nevezzük.

A vektortér elemeinek egy $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ halmaza által generált $\{\bigoplus_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{u}_i : \lambda_i \in \mathbb{F}\}$ részhalmazát az $\mathbf{u}_i$ vektorok *lineáris alterének* nevezzük, amit gyakran úgy fejezünk ki, hogy ezek a vektorok ezt az alteret feszítik ki. A lineáris altér nyilván zárt a lineáris kombináció képzésére, ezért minden altér egy vektortér, melynek dimenziója nem nagyobb, mint generáló elemeinek száma, így ha a generáló elemek függetlenek, akkor az altér dimenziója éppen a generáló elemek számával egyezik meg, és a generáló elemek bázist alkotnak benne.

A vektortér elemeinek egy $\mathcal{U}$ részhalmazát *affin altérnek* nevezzük, ha van olyan $\mathbf{u}$ vektor és $\mathcal{V}'$ altér, hogy $\mathcal{U} = \{\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} : \mathbf{v} \in \mathcal{V}'\}$. Ha az $\mathcal{U}$ affin altér dimenziója pontosan eggyel kisebb a $\mathcal{V}$ vektortér dimenziójánál, akkor *hipersíkról* beszélünk. Fontos megfigyelni, hogy az affin altér csak akkor altér, ha tartalmazza a $\mathbf{0}$ vektort.

Az $\mathbb{F}$ elemeiből készített $n \in \mathbb{N}$ elemű sorozatok $\mathbb{F}^n$ halmaza egy n -dimenziós vektortér az $\mathbb{F}$ test felett.

Egy $\mathbb{F}$ test feletti $m \times n$ típusú $\mathbf{M}$ mátrix sorait illetve oszlopait az $\mathbb{F}$ test feletti $\mathbb{F}^m$ illetve $\mathbb{F}^n$ vektoraiként felfogva, azokat sor- illetve oszlopvektoroknak nevezzük.

$$\text{Egy } \mathbb{F} \text{ test feletti } k \times k \text{ típusú } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{k,1} & \cdots & m_{k,k} \end{pmatrix} \text{ mátrix determinánsán}$$

az $|\mathbf{M}| = \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^k m_{i,\sigma(i)}$ összeget értjük, ahol S_k a k -elemű halmaz összes permutációjának csoportja, sign pedig ezen permutáció paritása szerint $+1$

illetve -1 aszerint, hogy a permutáció páros vagy páratlan. Eszerint a $k = 1$ esetben $|\mathbf{M}| = m_{1,1}$, a $k = 2$ esetben $|\mathbf{M}| = m_{1,1}m_{2,2} - m_{1,2}m_{2,1}$, a $k = 3$ esetben $|\mathbf{M}| = m_{1,1}m_{2,2}m_{3,3} + m_{1,2}m_{2,3}m_{3,1} + m_{1,3}m_{2,1}m_{3,2} - m_{1,1}m_{2,3}m_{3,2} - m_{1,2}m_{2,1}m_{3,3}$, másrészt a definícióból világos, hogy a determináns értéke nem változik, ha a mátrixot transzponáljuk. A szorzat elemeinek vizsgálataé bizonyítható, hogy mátrixok szorzatának determinánsa egyenlő a mátrixok determinánsainak szorzatával, amiből következik, hogy a mátrix determinánsa nem változik, ha invertálható mátrixszal konjugáljuk.

Az $\mathbb{F}$ test feletti $m \times n$ típusú $\mathbf{M}$ mátrixból kiválasztott k sor és k oszlop metszéspontjaiban álló elemekből alkotott mátrix $\det_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k} \mathbf{M}$ determinánsát az $\mathbf{M}$ mátrix k -rendű *aldeterminánsának* nevezzük, ahol $0 < i_1 < i_2 < \dots < i_k$ a kiválasztott sorok, $0 < j_1 < j_2 < \dots < j_k$ pedig a kiválasztott oszlop sorszáma. Ha az $\mathbf{M}$ mátrix négyzetes alakú, vagyis ugyanannyi sora van mint oszlopa ($m = n$), akkor ugyancsak négyzetes mátrixot kapunk a kiválasztott sorok elhagyásával, melynek determinánsát komplementer aldeterminánsnak nevezzük. Ennek jelölése $\overline{\det}_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k} \mathbf{M}$.

Laplace-féle kifejtési tétel. Legyen $\mathbf{M}$ egy $n \times n$ -típusú mátrix, és $0 < k < n$ egy rögzített egész szám, valamint $0 < i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ további egész számok. Ekkor

$$\det \mathbf{M} = \sum_{0 < j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} (-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k} \det_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k} \mathbf{M} \overline{\det}_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k} \mathbf{M}.$$

Ferde kifejtés tétele. Legyen $\mathbf{M} = (m_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ egy $n \times n$ -típusú mátrix, és $1 \leq k, \ell \leq n$ egész számok. Ekkor

$$\sum_{i=1}^n m_{i,k} (-1)^{i+\ell} \overline{\det}_i^\ell \mathbf{M} = \sum_{j=1}^n m_{k,j} (-1)^{\ell+j} \overline{\det}_\ell^j \mathbf{M} = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \neq \ell, \\ \det \mathbf{M}, & \text{ha } k = \ell. \end{cases}$$

Mátrix rangján a legnagyobb nem eltűnő aldeterminánsának sor- vagy oszlop-számát értjük.

A mátrix rangja megegyezik a sorvektoraiból kiválasztható maximális független vektorrendszer elemszámával, és ugyanez az oszlopokra is igaz, vagyis a mátrix rangja megegyezik az oszlopvektoraiból kiválasztható maximális független vektorrendszer elemszámával is. Egy $n \times n$ -típusú mátrix rangja pontosan akkor n , ha determinánsa nem nulla. A ferde kifejtés tétele értelmében pedig ekkor a mátrix inverze i -edik sorának j -edik eleme $(-1)^{i+j} \overline{\det}_j^i \mathbf{M} / \det \mathbf{M}$.

F.5. Valós mátrixokról

Az $\mathbb{R}$ valós számtest feletti mátrixokat vizsgáljuk.

A $\lambda \in \mathbb{R}$ valós számot az $n \times n$ típusú $\mathbf{M}$ mátrix *sajátértékének*, a nem nulla $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ vektort pedig *sajátvektorának* nevezzük, ha $\lambda \mathbf{u} = \mathbf{uM}$. Az $\mathbb{R}^n$ tér egy $\mathcal{U}$ alterét az $n \times n$ típusú $\mathbf{M}$ mátrix *invariáns alterének* mondjuk, ha minden $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ esetén $\mathbf{uM} \in \mathcal{U}$.

Ha $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ esetén az $n \times n$ típusú $\mathbf{M}$ mátrixra $\lambda \mathbf{u} = \mathbf{uM}$, akkor $\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}$ elfajuló mátrix, melynek determinánsa nulla. A $\det(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I})$ kifejezés a λ változó szerinti polinom, amit az $\mathbf{M}$ mátrix *karakterisztikus polinomjának* nevezünk.

A karakterisztikus polinom gyökeit az $\mathbf{M}$ mátrix karakterisztikus értékeinek hívjuk. Minden $z \in \mathbb{C}$ karakterisztikus érték esetén $\mathbf{M} - z\mathbf{I}$ elfajuló mátrix $\mathbb{C}^n$ felett, vagyis van olyan nem nulla $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ vektor, melyre $\mathbf{z}(\mathbf{M} - z\mathbf{I}) = \mathbf{0}$, amit az $\mathbf{M}$ mátrix karakterisztikus vektorának nevezünk. Valós mátrix karakterisztikus polinomja valós együtthatós, így bármely gyökének a konjugáltja is gyöke, vagyis a mátrix karakterisztikus értékeinek halmaza zárt a konjugálásra nézve. A valós mátrix sajátértékei pontosan a valós karakterisztikus értékei.

Tétel. Minden 3×3 típusú nem elfajuló valós $\mathbf{M}$ mátrixnak létezik sajátvektora és kétdimenziós invariáns altere.

Bizonyítás. Mivel $\mathbf{M}$ egy 3×3 -as mátrix, a karakterisztikus polinomja harmadfokú, így létezik valós $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ gyöke, és ahhoz tartozó $\mathbf{0} \neq (x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda) \in \mathbb{R}^3$ sajátvektora is, melyre $\lambda(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda) = (x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda)\mathbf{M}$.

Egészítsük ki az $\mathbf{u} = (x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda)$ vektort a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorokkal bázissá, és alkalmas a_v, b_v, c_v , valamint a_w, b_w és c_w valós számokra legyen

$$\mathbf{vM} = a_v \mathbf{u} + b_v \mathbf{v} + c_v \mathbf{w} \quad \text{és} \quad \mathbf{wM} = a_w \mathbf{u} + b_w \mathbf{v} + c_w \mathbf{w}.$$

Tekintsük az

$$f(x, y) = \frac{x((c_w - \lambda)a_v - c_v a_w) - y(b_w a_v - (b_v - \lambda)a_w)}{(b_v - \lambda)(c_w - \lambda) - b_w c_v}$$

függvényt. Ez homogén ($\mu f(x, y) = f(\mu x, \mu y)$), és mindkét változójában additív ($f(x + z, y + t) = f(x, y) + f(z, t)$), ezért az $\mathcal{S} = \{f(x, y)\mathbf{u} + x\mathbf{v} + y\mathbf{w} : x, y \in \mathbb{R}\}$ vektorhalmaz az $\mathbb{R}^3$ tér altere.

Vegyük észre, hogy

$$f(xb_v + yb_w, xc_v + yc_w)((b_v - \lambda)(c_w - \lambda) - b_w c_v)$$

$$\begin{aligned}
&= (xb_v + yb_w)((c_w - \lambda)a_v - c_v a_w) - (xc_v + yc_w)(b_w a_v - (b_v - \lambda)a_w) \\
&= xb_v((c_w - \lambda)a_v - c_v a_w) + yb_w((c_w - \lambda)a_v - c_v a_w) - \\
&\quad - xc_v(b_w a_v - (b_v - \lambda)a_w) - yc_w(b_w a_v - (b_v - \lambda)a_w) \\
&= x(b_v((c_w - \lambda)a_v - c_v a_w) - c_v(b_w a_v - (b_v - \lambda)a_w)) + \\
&\quad + y(b_w((c_w - \lambda)a_v - c_v a_w) - c_w(b_w a_v - (b_v - \lambda)a_w)) \\
&= x(b_v(c_w - \lambda)a_v - c_v(b_w a_v + \lambda a_w)) + \\
&\quad + y(c_w(b_v - \lambda)a_w - b_w(\lambda a_v + c_v a_w)) \\
&= x((b_v - \lambda)(c_w - \lambda)a_v + \lambda(c_w - \lambda)a_v - c_v(b_w a_v + \lambda a_w)) + \\
&\quad + y((c_w - \lambda)(b_v - \lambda)a_w + \lambda(b_v - \lambda)a_w - b_w(\lambda a_v + c_v a_w)) \\
&= x(((b_v - \lambda)(c_w - \lambda) - c_v b_w)a_v + \lambda(c_w - \lambda)a_v - c_v \lambda a_w) + \\
&\quad + y(((c_w - \lambda)(b_v - \lambda) - c_v b_w)a_w + \lambda(b_v - \lambda)a_w - b_w \lambda a_v) \\
&= xa_v((b_v - \lambda)(c_w - \lambda) - c_v b_w) + x\lambda((c_w - \lambda)a_v - c_v a_w) + \\
&\quad + ya_w((c_w - \lambda)(b_v - \lambda) - c_v b_w) + y\lambda((b_v - \lambda)a_w - b_w a_v),
\end{aligned}$$

amiből osztással

$$\begin{aligned}
&f(xb_v + yb_w, xc_v + yc_w) \\
&= xa_v + ya_w + \frac{x\lambda((c_w - \lambda)a_v - c_v a_w) + y\lambda((b_v - \lambda)a_w - b_w a_v)}{(c_w - \lambda)(b_v - \lambda) - c_v b_w}, \\
&= xa_v + ya_w + f(x, y)
\end{aligned}$$

adódik. Ennek ismeretében alkalmazva az $\mathbf{M}$ mátrixot az $\mathcal{S}$ vektorhalmaz elemeire

$$\begin{aligned}
&(f(x, y)\mathbf{u} + x\mathbf{v} + y\mathbf{w})\mathbf{M} \\
&= f(x, y)\lambda\mathbf{u} + x(a_v\mathbf{u} + b_v\mathbf{v} + c_v\mathbf{w}) + y(a_w\mathbf{u} + b_w\mathbf{v} + c_w\mathbf{w}) \\
&= (\lambda f(x, y) + xa_v + ya_w)\mathbf{u} + (xb_v + yb_w)\mathbf{v} + (xc_v + yc_w)\mathbf{w} \\
&= f(xb_v + yb_w, xc_v + yc_w)\mathbf{u} + (xb_v + yb_w)\mathbf{v} + (xc_v + yc_w)\mathbf{w}
\end{aligned}$$

adódik, ami azt jelenti, hogy az $\mathcal{S}$ altér invariáns az $\mathbf{M}$ mátrixra nézve. Az $\mathcal{S}$ dimenziója 2, mert az $f(1, 0)\mathbf{u} + \mathbf{v}$ és $f(0, 1)\mathbf{u} + \mathbf{w}$ vektorok bázist alkotnak benne. ■

Ha $z = \lambda + i\mu$ az $\mathbf{M}$ valós mátrix karakterisztikus értéke, ahol λ és μ is valós szám, akkor az iménti okfejtés miatt vannak olyan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ nem egyszerre nulla vektorok, hogy $\mathbf{z} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ az ehhez tartozó karakterisztikus vektor, vagyis $\mathbf{z}\mathbf{z} = \mathbf{z}\mathbf{M}$. Ekkor $\bar{z}\bar{z} = \bar{z}\bar{\mathbf{z}} = \overline{\mathbf{z}\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{z}}\mathbf{M}$, vagyis $\bar{z}\bar{z} = \bar{\mathbf{z}}\mathbf{M}$. Ha $\mathbf{M}$ szimmetrikus, akkor

$$z(\mathbf{u}\mathbf{u}^T + \mathbf{v}\mathbf{v}^T) = z\bar{z}\bar{\mathbf{z}}^T = \mathbf{z}\mathbf{M}\bar{\mathbf{z}}^T = \mathbf{z}(\bar{\mathbf{z}}\mathbf{M})^T = \mathbf{z}(\bar{z}\bar{\mathbf{z}})^T = \bar{z}\bar{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{z}}^T = \bar{z}(\mathbf{u}\mathbf{u}^T + \mathbf{v}\mathbf{v}^T),$$

vagyis $z = \bar{z}$. Ez azt jelenti, hogy szimmetrikus mátrix minden karakterisztikus értéke valós, vagyis sajátérték.

Főtengely-transzformáció. Minden 3×3 típusú nem elfajuló valós szimmetrikus M mátrixhoz tartozó lineáris leképezésnek létezik három ortonormált sajátvektora.

Bizonyítás. A tétel előtti indoklás alapján az M mátrixnak mind a három karakterisztikus értéke valós, tehát sajátérték. Legyenek tehát a nem nulla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ valós számok M sajátértékei, és jelölje $\mathcal{U}_i$ az összes olyan u vektor halmazát, melyre $\lambda_i u = uM$. Világos, hogy minden $\mathcal{U}_i$ legalább 1-dimenziós lineáris altér, hiszen minden sajátértékhez tartozik sajátvektor, és $\mathcal{U}_i$ zárt a lineáris kombináció képzésére.

Ha $\lambda_i \neq \lambda_j$, és $u_i \in \mathcal{U}_i$ valamint $u_j \in \mathcal{U}_j$, akkor

$$\lambda_i u_i u_j^T = u_i M u_j^T = u_i (u_j M)^T = u_i (\lambda_j u_j)^T = \lambda_j u_i u_j^T$$

miatt $u_i u_j^T = 0$, vagyis $u_i \perp u_j$.

Ha mindhárom $\mathcal{U}_i$ altér dimenziója 1, akkor mindegyikben választva egy egységnyi vektort a tétel állítását bebizonyítottuk.

Ha valamely $\mathcal{U}_i$ dimenziója 2, akkor az őt csak a nullvektorban metsző egy vagy kettő altér dimenziója 1. Az 1-dimenziós altérből egy normált vektor, a kétdimenziós altérből pedig egy ortonormált bázis elemei együtt a tételben állított ortonormált bázist alkotják.

Ha valamely $\mathcal{U}_i$ dimenziója 3, akkor mindegyik altér egybeesik ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$), és a tér bármely ortonormált bázisa bizonyítja a tételünket. ■

Egy nem elfajuló mátrix sajátértékei nem nullák, így minden nem elfajuló szimmetrikus mátrix bármely sajátértéke negatív, vagy pozitív. A sajátértékek nem változnak meg, ha a mátrixot konjugáljuk, mert a karakterisztikus polinom sem változik, ezért a sajátértékek előjeleinek eloszlása a mátrix invariáns jellemzője, melyet a mátrix *szignatúrájának* nevezünk.

A szimmetrikus mátrixot elliptikusnak nevezzük, ha minden sajátértékének előjele egyforma. Hiperbolikusnak mondjuk a szimmetrikus mátrixot, ha egy sajátértékének az előjele különbözik az össze többiétől.

F.6. Egyebek

A valós számok halmazán értelmezett

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ (szinusz-hiperbolikusz),}$$

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ (koszinusz-hiperbolikusz), és}$$

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} \text{ (tangens-hiperbolikusz)}$$

függvényeket *hiperbolikus szögfüggvényeknek* nevezzük.

Ezekre teljesülnek a

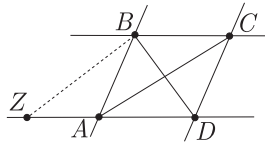
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ (hiperbolikus Pitagorasz-formula),
- $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$,
- $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$,
- $\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$,
- $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ és $\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$,
- $\cosh^2(x/2) = (\cosh x + 1)/2$ és $\sinh^2(x/2) = (\cosh x - 1)/2$

azonosságok, melyeket a definiáló formulákból egyszerű számolás bizonyít.

A következő tételek bizonyítása megtalálható a [Kurusa: Euklidészi geometria] könyvben, de az első olyan fontos a Fano-típusú teljes négyoldalak „elhárításában”, hogy itt is bizonyítjuk.

Tétel. *Nem elfajuló paralelogramma átlói metszik egymást.*

Bizonyítás. Tekintsük az $ABCD$ paralelogrammát az $\mathfrak{S}$ síkban.



010. ábra

Figyeljük meg, hogy a párhuzamosságok miatt a C és D pontok AB -partosak, C és B pedig AD -partosak, amiért a C pont benne van az AB egyenes D pontot és az AD egyenes B pontot tartalmazó $\mathcal{S}_{AB}^D$ illetve $\mathcal{S}_{AD}^B$ félsíkjainak metszetében, vagyis $AC \subset (\mathcal{S}_{AB}^D \cap \mathcal{S}_{AD}^B) \cup (\mathfrak{S} \setminus (\mathcal{S}_{AB}^D \cup \mathcal{S}_{AD}^B)) = \mathcal{S}^*$. Vegyünk most egy olyan Z pontot az AD egyenesen, melyre $A \in \overline{ZD}$. Ekkor a ZBD háromszög $\overline{ZB}$ oldalát nem metszi az AC egyenes, mert $\overline{ZB} \subset \mathcal{S}_{AD}^B \cap (\mathfrak{S} \setminus \mathcal{S}_{AB}^D) = \mathcal{S}^+$ és nyilván $\mathcal{S}^+ \cap \mathcal{S}^* = \emptyset$. Pasch axiómája miatt tehát $AC \cap \overline{BD}$ nem üres.

Eszerint a két átló egyenese az egyik átlón metszi egymást, amiből ugyanezt a másik átlóra is következtethetjük, és így az átlók metszését igazoltuk. ■

Egy $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *additív*nak illetve *homogén*nek mondunk, ha $f(x) + f(y) = f(x+y)$ illetve $\lambda f(x) = f(\lambda x)$ teljesül minden $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$ esetén.

Tétel. *Ha az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{R}_{0 \leq} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény additív és*

- (1) *f folytonos valamely intervallumon, vagy*
- (2) *f monoton valamely intervallumon,*

akkor f homogén is.

Kifejtési tétel. *Az $\mathbb{R}^3$ minden u, v és w vektorára $(u \times v) \times w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u$.*

Irodalomjegyzék

- [1] H. S. M. COXETER, *A geometriák alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.
- [2] H. S. M. COXETER, *Projektív geometria*, Gondolat, Budapest, 1986.
- [3] H. S. M. COXETER és S. L. GREITZER, *Az újra felfedezett geometria*, Gondolat, Budapest, 1977.
- [4] HAJÓS GYÖRGY, *Bevezetés a geometriába*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.
- [5] J. W. P. HIRSCHFELD and J. A. THAS, *General Galois Geometries*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1991.
- [6] KISS GYÖRGY és SZŐNYI TAMÁS, *Véges geometriák*, Polygon, Szeged, 2001.
- [7] A. G. KUROS, *Felsőbb algebra*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
- [8] KURUSA ÁRPÁD, *Bevezetés a differenciálgeometriába*, Polygon, Szeged, 1999.
- [9] KURUSA ÁRPÁD, *Euklidészi geometria*, Polygon, Szeged, 2008.
- [10] LOVÁSZ LÁSZLÓ, *Projektív geometria*, Szóbeli egyetemi előadás Kincses János jegyzetelésében, Szeged, 1976.
- [11] SZABÓ ZOLTÁN, *Projektív geometria*, Szóbeli egyetemi előadás Kurusa Árpád jegyzetelésében, Szeged, 1982.

Jelölések és konvenciók

$\cdot$ és $\langle \cdot, \cdot \rangle$	– euklidészi belső szorzás
$\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$	– természetes, racionális és egész számok halmaza
$\mathbb{R}, \mathbb{R}_{\leq}$	– valós számok és nem negatív valós számok halmaza
$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$	– valós sík és tér
$\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^2, \mathbb{P}^3$	– valós projektív egyenes, sík és tér
$\mathbb{F}, \mathbb{F}^n$	– (ferde)test és n -dimenziós vektortér felette
$\mathbb{F}_k^n$	– (ferde)test feletti $\mathbb{F}^n$ vektortér k -dimenziós alttereinek halmaza
$[\mathbb{F}^{n+1}]$	– homogén koordináták (ferde)test feletti n -dimenziós tere
$\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^1, \mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2, \mathbb{P}_{\mathbb{F}}^3$	– (ferde)test feletti projektív egyenes, sík és tér
κ, λ, μ	– valós számok görög kisbetűvel
x, y, z	– valós számok dőlt kisbetűvel
q, r, s	– racionális számok dőlt kisbetűvel
i, j, k	– természetes vagy egész számok dőlt kisbetűvel
$(i_1, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_k)$	– a k -indexből a j -edik elhagyásával keletkező $(k-1)$ -index
$\mathcal{V}, \mathcal{H}$	– vektorterek, halmazok és tartományok írott nagybetűvel
$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$	– vektorok félkövér kisbetűvel
$\mathbf{e}^m$	– olyan vektor, amelynek minden koordinátája 0, de az m -edik az 1
$\mathbf{M}$	– mátrix
$\det, \det_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k}, \overline{\det}_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k}$	– determináns, aldetermináns és komplementer aldetermináns
P, Q, R	– pontok dőlt nagybetűvel
$\overline{PQ}$	– pontpár szakasza
(P, Q)	– rendezett pontpár kötött vektora
$\overline{PQ}$	– rendezett pontpár által reprezentált szabad vektor
φ, ψ, ϕ	– leképezések görög kisbetűvel
e, f, g, h	– egyenesek dőlt kisbetűvel
α, β, γ	– szögek görög kisbetűvel
$\dot{P}$	– a P pont sugársora
$d(\cdot, \cdot)$	– metrika
$ \cdot $	– abszolútérték, norma, vektorok hossza
$\mathcal{S}_{geom}$	– a <i>geom</i> geometriai objektumok által meghatározott sík
$\partial \mathcal{D}$	– a $\mathcal{D}$ ponthalmaz határa

Görög betűk

név	kisbetű	nagybetű	verzió	név	kisbetű	nagybetű	verzió
alfa	α			nű	ν		
béta	β			kszí	ξ	Ξ	
gamma	γ	Γ		pí	π	Π	ϖ
delta	δ	Δ		ró	ρ		ϱ
epsilon	ϵ		ε	szigma	σ	Σ	ς
zéta	ζ			tau	τ		
éta	η			üpszilon	υ	Υ	
theta	θ	Θ	ϑ	fi	ϕ	Φ	φ
iota	ι			chi	χ		
kappa	κ		κ	pszí	ψ	Ψ	
lambda	λ	Λ		omega	ω	Ω	
mű	μ						

Gótikus betűk

név	kisbetű	nagybetű	név	kisbetű	nagybetű
a	a	A	n	n	N
b	b	B	o	o	O
c	c	C	p	p	P
d	d	D	q	q	Q
e	e	E	r	r	R
f	f	F	s	s	S
g	g	G	t	t	T
h	h	H	u	u	U
i	i	I	v	v	V
j	j	J	w	w	W
k	k	K	x	x	X
l	l	L	y	y	Y
m	m	M	z	z	Z

Héber betűk

név	betű
alef	א

Név- és tárgymutató

A

Abel-csoport, 183
additív, 189
affin
 altér, 184
 kollineáció, 17
 koordinátázás, 146
alaptétel
 kollineációké, 39
 korrelációké, 55
 kúpszeleteké, 64
 perspektív kollineációké, 45
 projektivitásoké, 30
aldetermináns, 185
antiszimmetrikus, 183
aszimptotikus
 egyenes, 78
 háromszög, 119
asszociatív, 183

Á

általános helyzet
 pontoké, 25
 egyeneseké, 25
általános korreláció, 52

B

bázis, 184
befogótétel
 gömbi, 8
 hiperbolikus, 122

belső, 59
Bolyai-sík, 105
Brianchon tétele, 72

C

Cayley–Klein-modell, 111
centrálisan perspektív, 47
csoport, 183

D

Desargues-tétel, 47, 135
Desargues-tulajdonság, 134
determináns, 184
dimenzió, 184
disztributivitás, 183
duális
 Plücker-koordináta, 155
 Grassman-koordináta, 155
dualitás, 24
 axiomáké, 134
 tétele, 24

E

egybevagóság
 gömbön, 6
 hiperbolikus síkon, 110
egységelem, 183
ekvivalencia, 183
 -reláció, 183
egyenes
 aszimptotikus +, 78

hiperbolikusan merőleges +, 78
 elpattanó +, 78
 párhuzamos +, 78
 tartó, 17
 ultrapárhuzamos +, 78
 egyenestartó, 17
 eláció, 44
 elliptikus
 projektivitás, 32
 polaritás, 56
 sík, 87
 elpattanó egyenes, 78
 elválasztó, 25
 érintő, 59
 erősen fix pont, 44

F

Fano
 -sík, 151
 -típusú négyoldal, 151
 félsík, 29
 felszínmérés, 8
 ferde kifejtés tétele, 185
 karakterisztikája, 183
 fixpont-tétel
 gömbön, 5
 Bolyai-síkon, 110
 főtengely-transzformáció, 188

G

görög sík, 168
 Grassmann
 -sokaság, 152
 -koordináta, 155
 duális $\sim$ -koordináta, 155

H

harmonikus elválasztás, 25
 közös + tétele, 27
 háromszög polárisa, 2
 határhalmaz, 59
 határpont, 59
 Héron-képlet
 gömbön, 11
 Bolyai-síkon, 129
 Hilbert-sík, 103
 izometria, 107
 hiperbolikus
 centrális tükrözés, 75
 középpontos tükrözés, 75
 sík, 104
 szögmérték, 116
 szögfüggvények, 188
 tengelyes tükrözés, 75
 hipersík, 184
 homogén
 koordináta, 17
 koordináta, 153
 függvény, 189
 homológia, 44

I

illeszkedési tételek, 157
 indikátrix, 90
 inverz, 183
 involutív
 kollineáció, 50
 projektivitás, 32
 izometria
 gömbi, 5
 hiperbolikus, 109
 izometriák alaptétele, 110

K

kétszög, 1
 kettősvizony, 19, 24, 67
 komplex, 177
 Klein-felület, 166
 Klein-megfeleltetés, 165
 kollineáris, 17
 kollineáció, 17
 $\sim k$ alaptétele, 39
 involutív +, 50
 szimmetrikus +, 39
 transzponált +, 38
 mátrix-reprezentációja, 37
 kommutatív, 183
 csoport, 183
 komplex kettősvizony, 177
 konjugált, 56, 183
 koordináta-tengely, 146
 koordinátázás
 projektív síké, 137
 projektív téré, 153
 korreláció, 54
 mátrixa, 55
 természetes +, 54
 koszinusztétel
 Bolyai-síkon, 120
 gömbön oldalra, 6
 gömbön szögére, 7
 kögyenes, 181
 kúpszelet, 64
 involúció, 73
 külső pontja, 59

L

Laplace-tétel, 185
 latin sík, 168

lineáris

 altér, 184
 kombináció, 184
 an független, 184

M

mátrix
 sajátértékei, 186
 sajátvektorai, 186
 invariáns altera, 186
 karakterisztikus polinomja, 186
 merőleges, 78, 93
 metrika, 81
 projektív +, 81
 gömbön, 3
 Minkowski-, 96
 tükrözéses +, 81
 metrízálás
 elliptikus +, 85
 parabolikus +, 89
 hiperbolikus +, 102
 Minkowski-
 -sík, 96
 -metrika, 96
 Möbius-transzformáció, 177
 művelet, 183
 zártága, 183

N

négyszög, 25
 teljes +, 26
 négyszög, 25
 teljes +, 26
 neutrális elem, 183
 nullelem, 183

Ö

önkonjugált, 56

P

Papposz
 -féle hatszög, 134
 –Pascal-tétel, 31, 69
 -tétel, 18, 23
 -tulajdonság, 134
 párhuzamos
 egyenes, 78
 szelők tétele, 91
 ~sági szög, 122
 Pascal tétele, 71
 perspektivitás
 egyenesé, 29
 sugársoré, 68
 perspektív kollineáció, 42
 centruma, 46
 tengelye, 46
 síkon, 42
 Pitagorasz tétele, 99
 Pitagorasz-tétel
 euklidészi, 99
 gömbi, 8
 hiperbolikus, 122
 Plücker
 -beágyazás, 155
 -koordináta, 155
 -egyenlet, 160
 -összefüggések, 159
 duális ~koordináta, 155
 Poincaré-féle körmodell, 115
 polárháromszög, 2
 poláris, 56
 háromszög, 2, 60
 polaritás, 56
 hiperbolikus +, 56
 elliptikus +, 56
 pólus, 56
 pontsor, 23

projektív
 geometria alaptétele, 37
 sík axiómái, 133
 projektív tér, 152
 valós +, 153
 projektivitás, 19
 elliptikus +, 32
 involutív +, 32
 hiperbolikus +, 32
 parabolikus +, 32
 tengelye, 31

R

rang, 185
 reflexív, 183
 reláció, 183
 reflexív +, 183
 szimmetrikus +, 183
 transzítív +, 183
 rendezés, 183

S

sajátérték, 186
 sajátvektor, 186
 sugár
 elliptikus síké, 87
 hiperbolikus síké, 104
 Staudt tétele, 36
 Steiner tétele, 69
 sugársor, 23

Sz

szakasz
 felező merőleges, 110
 párhuzamossági szöge, 122
 szignatúra, 188
 szinusztétel
 gömbön, 7

Bolyai-síkon, 119
szomszédosság, 28
szögdefektus
gömbön, 10
Bolyai-síkon, 123

T

távolság, 81
teljes négyoldal, 26
teljes négyszög, 26
test, 183

ferde+, 183

törtlineáris leképezés, 177
tengelyesen perspektív, 47
tükrözéses metrika, 81

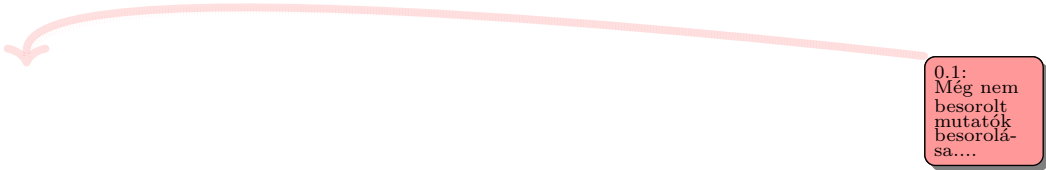
U

ultrapárhuzamos, 78

V

valós projektív tér, 153
vektortér, 184

Még nem besorolt mutatók



Tennivalók

 Még nem besorolt mutatók besorolása....	199
---	-----