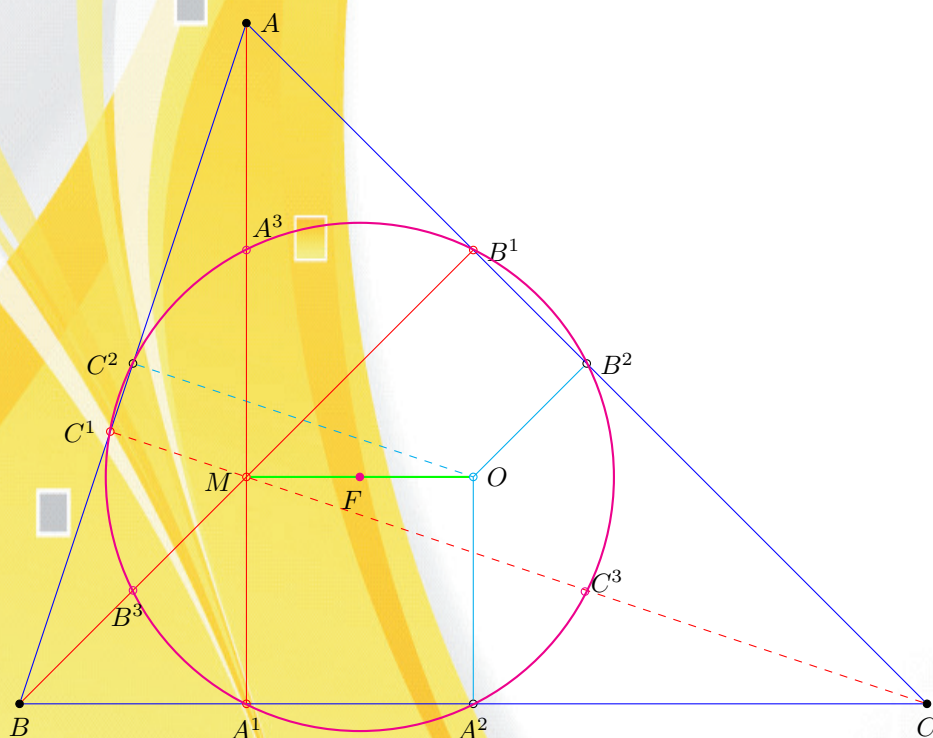


Kurusa Árpád

Bevezetés a geometriába



Kurusa Árpád

Bevezetés a geometriába

A címlapon a háromszög Feuerbach-köre és annak minden érdekes pontja látható.

Ez a könyv a Polygonnál ugyanezen címen megjelent könyv frissített és elektronizált verziója.

Ez a dokumentum

- nem köztulajdon,
- kizárólag személyes használatra tölthető le,
- másolása, sokszorosítása és terjesztése tilos,
- bemutatása, előadása vagy felhasználása más műhöz kizárólag jelen dokumentum pontos megnevezésével (szerző, cím, megjelenés éve) és a publikáció oldalra mutató url (nem a közvetlen letöltési link) megadásával engedélyezett,
- semmilyen módon sem módosítható, nem készíthető belőle se átdolgozás, se származékos mű, és
- nem használható fel kereskedelmi célra.



Előszó

Ez a könyv a 2015-ben ugyancsak „Bevezetés a geometriába” címmel a Polygon Kiadó Jegyzettár sorozatában megjelent könyv új verziója.

Ez az új verzió azonban több szempontból is jelentős előrelépés és az idő előrehaladtával remélhetőleg további fejlődést fog mutatni.

A legfontosabb változás az, hogy a tartalomban egy csomó ismert hiba korrigálása megtörtént, néhány ponton pedig javult a prezentáció és a logikai felépítés is.

A kivitelezésben is jelentős változás történt, amely többek között lehetővé teszi, hogy a tartalom fejlesztése jóval könnyebb legyen. A változások követését az igen pontos verziószámozás teszi lehetővé.

A 2021. június 30-ai verziónak a létrejöttében alapvető szerepet játszott a SARS-CoV-2 vírus miatt 2021-ben is tartó COVID-19 világjárvány elfojtására alkalmazott közösségi távolságtartás.

Szeged, 2021. június 30.

dr. Kurusa Árpád

Eredeti előszó

A könyv, amelyet az olvasó most a kezében tart, a 2008 márciusában elkészült és még ugyanazon évben meg is jelent *Euklidészi geometria* című könyv anyagának újragondolt, átrendezett, néhol kibővített, máshol szűkített új verziója. Célja változatlanul az, hogy pontos fogalmakon keresztül, csak a feltétlenül szükséges technikai apparátus bevetésével építse fel először az affin, majd erre építve az euklidészi geometriát, és azok fontos eredményeit.

Ennek érdekében a felépítés erős axiómákkal indul, amely lehetőséget teremt az affin geometria viszonylag gyors és pontos felépítésére úgy, hogy közben a *geometria* alapvető fogalmai és tételei tiszta logikai rendben kövessék egymást. A koordinátázás révén merülnek fel az affin transzformációk, végül természetesen jelennek meg a törött vonalak és a konvexitás alapismeretei.

Az euklidészi geometria először csak a síkon jelenik meg, mégpedig a „szokásos” metrikának az affin síkra való alkalmazásaként. Ez gyorsan vezet a dilatációk, tükrözések és izometriák alapos vizsgálatához. Végül a mozgások felhasználásával a szögek és szögmérések pontos elmélete, és a terület fogalmának precíz kidolgozása zárja a tárgyalást.

Felvértvezve az euklidészi sík rendszerének ismeretével, egy teljes fejezet foglalkozik annak geometriai **felfedezésével**. Ebben olyan klasszikus ismeretek is megjelennek, melyek egy része akár önállóan is érdeklődésre tarthat számot: ilyenek például a körtartó transzformációk, a kúpszeletek és a diszkrét mozgáscsoportok.

Az affin és az euklidészi teret csak ezek után és szinte csak a sík és tér különbözőségeire szorítkozó tárgyalás mutatja be. A megfelelő axiómarendszer a Desargues-tulajdonság alapos tárgyalása céljából jelenik meg, ezután az izometriák részletes ismertetése a síkbeli analógiákra épít. A politópok és szabályos testek után a térfogalom kerül terítékre. Ez utóbbi összevetése a területméréssel megmutatja az alapvető eltéréseket, és elvezet a vektoriális szorzáshoz.

A magasabb dimenziós valós affin tereknek a valós vektorterekből való felépítésének erőteljes algebrai formalizmusát a szorosan kapcsolódó konvex geometriai témák, majd a külön fejezetben tárgyalt **affin metrikák** töltik fel egyre több geometriai tartalommal.

A **Függelék**ben néhány olyan, bevezető tankönyvekben általában nem szokásos téma kerül elő, melyek a szűken értelmezett bevezetéshez nem szükségesek, de jól mutatják, hogy milyen további kérdések merülhetnek fel. Ugyanakkor a felépítéshez szükséges néhány más jellegű téma is a **Függelék**be került. Ennek esetenként eltérő

oka lehet: vagy a bevezetés logikáját megtörő ismereteket tartalmaznak, vagy csak az olvasó kényelmét szolgálják.

A könyv megírásakor számos forrásmunkára támaszkodtam, ezekre hivatkozással az irodalomjegyzékben található. Igyekeztem szabványos terminológiát, definíciókat és jelöléseket használni, ami arra vezetett, hogy a nemzetközi konvencióhoz igazodva az *Euklidészi geometria* című könyv dilatáció és homotécia fogalmainak elnevezését felcseréljem.¹

Ez a könyv a korábbi $\text{\TeX}$ -rendszer helyett már egy jóval korszerűbb $\text{\LaTeX}$ -rendszerrel készült, az ábrákat pedig a *TikZ* rajzolja. Ez lehetővé tette a tételek és hivatkozások összerendelését, és alapot teremtett a későbbi esetleges elektronikus terjesztéshez.

A könyvben szereplő geometriai gondolatmenet további útja iránt érdeklődőknek ajánlom figyelmébe a „Nemeuklidészi geometriák”, majd a „Bevezetés a differenciálgeometriába” című könyveimet, amelyekből kerek képük alakulhat ki a klasszikus, konstans görbületű geometriákról.

Ahogy minden eddigi könyvem esetében is, a nyomtatás után felfedezett hibák, korrekciók és szükségesnek vélt kiegészítések is elérhetők lesznek a <http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa> lapomon.

Köszönettel tartozom az *Euklidészi geometria* bevezetőjében már említett segítőimnek, Kozma Józsefnek, aki az ábrák mintegy harmadának gondos és precíz elkészítésével sokat javított a könyv külalakján, lektorként pedig mindent megtett, hogy csökkentse a minden könyvbe óhatatlanul bekerülő hibák számát.

Hálás vagyok feleségemnek és gyermekeimnek, hogy türelemmel viselték elvonultságomat.

Szeged, 2014. szeptember 19. – 2015. március 27.

dr. Kurusa Árpád

¹Felmerült, hogy a magyar hagyományokat követve inkább a (centrális) hasonlósági transzformáció kifejezést használjam, de úgy véltem, a hasonlósági reláció, a hasonlóság és a hasonlósági transzformáció fogalmainak a mai geometriai nyelvzetben tapasztalható keveredését nehezebb lenne tisztázni, mint inkább e viszonylag új és nemzetközibb szavakat használni.

Tartalomjegyzék

Előszó	i
Tartalomjegyzék	v
1. Affin sík	1
1.1. A sík axiómái	3
1.2. Vektorok konstruálása	10
1.2.1. Szabad vektorok	13
1.2.2. Helyvektorok	25
1.3. Koordinátázások és transzformációk	27
1.4. Kollineációk	34
1.5. Valós affin sík	41
1.6. Törött vonalak, sokszögek és konvexitás	47
1.7. Másodrendű görbék	56
2. Euklidészi sík	61
2.1. Euklidészi metrika	62
2.2. Dilatációk	69
2.3. Tengelyes tükrözés	72
2.4. Izometriák	75
2.5. Egybevágóság és hasonlóság	83
2.6. Szögek és mérésük	85
2.7. Szögfüggvények és trigonometria	101
2.8. Terület és területformák	106
3. A sík felfedezése	117
3.1. Illeszkedési tételek	117
3.2. Dilatációról bővebben	120
3.3. Háromszögek szögei és oldalai	125
3.4. Háromszögek nevezetes pontjai	129
3.5. Másodrendű görbék metrikus tulajdonságai	132
3.6. Körök, szögek és körtartó transzformációk	142
3.7. Inverzió	149
3.8. Transzformációcsoportok és szabályos pontrendszerek	152

4. A tér geometriája	165
4.1. A tér axiómái	165
4.2. Koordinátázások és transzformációk	172
4.3. Euklidészi tér	177
4.4. Konvex politópok: Euler formulája	188
4.5. Térfogat, térfogatformák és vektoriális szorzás	192
4.6. Vektorok szorzásai a térben	197
5. Affin geometria	201
5.1. Véges dimenziós affin geometriák	201
5.2. Konvexitás, konvex burok	209
5.3. Konvex politópok és poliéderek	215
6. Affin metrikák	221
6.1. Izometrikus leképezések	222
6.2. Minkowski-metrikák	225
6.3. Euklidészi metrika	234
6.4. Tükrözékes metrikák	238
6.5. Ptolemaioszi metrika	244
6.6. Ellipszis karakterizációk	248
F. Függelék	253
F.1. Egy nem Desargues-tulajdonságú affin sík	253
F.2. Kúpszeletek és a kúpok szeletei	262
F.3. Vektortér, norma, euklidészi és belső szorzás	268
F.4. Metrikus tér, folytonosság, teljesség és kontrakciók	272
F.5. Normák és indikátrixok	277
F.6. Alternáló formák: determináns	279
F.7. Konvex halmazok elválasztása	284
F.8. Görbék és hosszuk	289
F.9. Valós szögfüggvények	291
F.10. Additivitás és homogenitás	295
F.11. Az algebra néhány alapfogalma	298
F.12. Valóság és geometria	299
Irodalomjegyzék	303
Jelölések és konvenciók	305
Név- és tárgymutató	307
Tennivalók	317

1

A megoldás ... rendkívül egyszerű volt ... az alkalmas segédeszközt a matematika magas fejlettségű absztrakcióiban találtuk meg. (*Niels Bohr* [3, 129. oldal])

Affin sík

A geometria a matematika egyik legrégebbi ága. Első nyomai már a mezopotámiai és egyiptomi kultúrákban is fellelhetők. Ennek oka lehet, hogy a létező világ és az azt tartalmazó tér megismerése az ember ősi vágya, sőt – amióta a földek felosztása és az építés igénye megjelent – szükséglete.

A térre vonatkozó tapasztalati tények összességéből származó nagy tömegű ismeret rendszerezésének igénye a görögöknél merült fel. Ennek kimagasló eredménye a tizenhárom kötetes „Elemek”, melyben *Alexandriai Euklidész* i.e. 300 körül összegyűjtötte az akkori geometria összes eredményét. Az Elemek talán legnagyobb érdeme a szigorú dedukciós tárgyalási mód, mely igen nagy hatással volt a geometria és a matematika későbbi fejlődésére. A dedukció, a tiszta logika alkalmazása a görög szépségideál része volt, és Euklidész úgy találta, hogy a felhalmozott ismeretek legnagyobb része tisztán logikai úton következik a többi, alig néhány alapvető megfigyelésből. A dedukcióval nem kikövetkeztethető állításokat (valójában ezek persze más kiindulást feltételezve következtethetők lettek volna) axiómáknak nevezte, és ezek igazságát csak a tapasztalatra alapozta.

Az a tapasztalat, melyet Euklidész munkájának sikere igazol, miszerint dedukcióval következtethetünk tapasztalati tényekből más tapasztalati tényekre, olyan érdeme Euklidész munkájának, mely mind a mai napig csodálatot kelt. *Heisenberg* például úgy emlékszik [33, 0.4-9 idézet], hogy

... volt egy beszélgetésem *Niels Bohrral*, amikor ő kétségbe vonta, hogy egyáltalán találni fog-e a jelenségek számára adekvát matematikai leírást. Úgy érezte, hogy a természet esetleg annyira irracionális, hogy egyszerűen semmiféle matematikai leírás kereteibe sem szorítható bele. Így teljesen meg volt lepve, amikor az derült ki, hogy igenis van matematikai leírás ...

Az Elemek megjelenése után a tér megismerése két lépcsőssé vált: tapasztalatokból kiinduló igazságok gyűjtése, aztán ezen igazságokból a tiszta logika következtetésein keresztül újabb igazságok, ismeretek szerzése. Ez utóbbi az, amit ma axiomatikus módszernek nevezünk, de ez csak a XIX. század végére vált ilyen világossá Euklidész párhuzamossági posztulátumának vizsgálata során.

Euklidész párhuzamossági posztulátuma kilóg a többi közül, mert a párhuzamosság feltétele a metszéspont *hiánya*, így senki nem ellenőrizhette, hogy egy adott egyeneshez van-e, és ha van, akkor mennyi párhuzamos egyenes van. Sőt, a látszat (például a vonatsíneket figyelve) első pillantásra inkább azt sugná, hogy talán nincsenek is párhuzamos egyenesek. Szerencsére(?) belátható távolságon belül ellenőrizve, a párhuzamossági posztulátum mégis elfogadhatónak bizonyult. (További részletek a Függelék F.12. szakaszában.)

A XIX. században *F. Gauss* (1777–1855), *Bolyai János* (1802–1860), *N. I. Lobacsevszkij* (1792–1856), *G. F. B. Riemann* (1826–1866), *J. H. Poincaré* (1854–1912), *Félix Klein* (1849–1925) és mások axiómákat vizsgáló munkái szükségessé tették a geometria axiómarendszerének modernizálását, végső elszakítását a tapasztalástól. Ezt a munkát *D. Hilbert* (1862–1943) hajtotta végre a XX. század elején.

Az axiomatikus módszer bizonyos alapelemeket, alapfogalmakat adottnak tételhez fel, és definiálatlanul hagy, de feltételez az alapelemek között bizonyos relációkat. Az axiómák az alapelemekre vonatkozó állítások formájában éppen azt rögzítik, hogy az alapelemek között milyen összefüggések teljesülnek.

Az ilyen axiómarendszerekkel szemben természetes elvárás, hogy ne következzen belőlük olyan állítás, melynek ellenkezője is következik. Eme elvárás teljesülését nevezik az axiómarendszer ellentmondásmentességének.

Az ellentmondásmentesség vizsgálata ellentmondás felfedezése esetén igen egyszerű, de annak bizonyítása, hogy egy axiómarendszer ellentmondásmentes, már kifejezetten komoly probléma.

Amit az ellentmondásmentesség ügyében matematikai értelemben tehetünk, az az, hogy mutatunk egy olyan matematikai rendszert, melyben az axiómarendszerünk minden állítása teljesül. Az ilyen rendszereket az axiómarendszer *modelljének* nevezzük.

Ha létezik az axiómarendszernek modellje, akkor persze egy, az axiómarendszerben létező ellentmondás a modellben is ellentmondást kellene okozzon, így a modell léte igazolni látszik az axiómarendszer ellentmondásmentességét. Minthogy azonban minden matematikai rendszer valamiféle axiómarendszerből indul ki, a matematikai modell valójában csak az axiómarendszernek a modellt befogadó matematikai rendszerhez képesti *relatív ellentmondás-mentességet* jelenti.

Az 1.5. szakaszban egy modell bemutatásával igazolni fogjuk, hogy az itt bemutatásra kerülő axiómarendszer a valós számok rendszeréhez képest ellentmondásmentes.

1.1. A sík axiómái

Legyen adott egy $\mathcal{S}$ halmaz. Ennek elemeit *pontoknak* nevezzük. Legyen ugyancsak adott $\mathcal{S}$ részhalmazainak egy $\mathcal{G}$ halmaza. Ennek elemeit *egyeneseknek* nevezzük.

Ha a $g \in \mathcal{G}$ egyenesre és a $P \in \mathcal{S}$ pontra $P \in g$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a P pont *illeszkedik* a g egyenesre, vagy a g egyenes *illeszkedik* a P pontra.¹

Ha több pont közös egyenesre illeszkedik, akkor a pontokat *kollineárisnak* nevezzük. Ha két különböző egyenesnek van közös pontja, akkor *metszőnek* mondjuk őket, ha több, nem mind ugyanazon egyenes közös pontra illeszkedik, akkor azokat *konkurrensnek* hívjuk.

Illeszkedési axiómák.

- (I₀) *Létezik legalább három nem kollineáris pont.*
- (I₁) *Minden egyenesre legalább két különböző pont illeszkedik.*
- (I₂) *Két különböző pontra egy és csak egy egyenes illeszkedik.*
- (I₃) (párhuzamossági axióma) *Minden egyeneshez és rajta kívüli ponthoz pontosan egy olyan, a pontra illeszkedő egyenes létezik, melynek nincs az egyenessel közös pontja.*

Az $A \neq B$ pontokra illeszkedő egyetlen egyenest AB jelöli. Az (I₁) axióma bizonyítható az (I₀), (I₂) és (I₃) axiómák felhasználásával, így jelenlétét csak az indokolja, hogy több (ebben a könyvben egyébként nem tárgyalt) fontos geometriában az az (I₀)–(I₂) axiómák mellett az (I₃) axióma helyett más szerepel.

Definíció. Két egyenest *párhuzamosnak* mondunk, ha pontonként megegyeznek, vagy nincs közös pontjuk. A g és h egyenes párhuzamosságát $g \parallel h$ jelöli. A nem párhuzamos egyeneseket *metszőknek* nevezzük, amit $g \nparallel h$ jelöl. ▲

Tétel. *Ha az $(\mathcal{S}, \mathcal{G})$ rendszer teljesíti az illeszkedési axiómákat, akkor:*

- (1) *két egyenes vagy párhuzamos vagy pontosan egy pontban metszi egymást;?*
- (2) *a párhuzamosság ekvivalencia-reláció.*

Bizonyítás. (1) Valóban, ha a két egyenes nem párhuzamos, akkor kell legyen közös pontjuk, amiből viszont csak egy lehet, mert ellenkező esetben az (I₂) axióma miatt egybeesnének, és párhuzamosak lennének.

(2) A reflexivitás – vagyis $g \parallel g$ – és a szimmetrikusság – miszerint $g \parallel h$ következik $h \parallel g$ alapján – a definíció közvetlen következménye. A tranzitivitás

¹Tekintve, hogy a definiált fogalmakra igen sok nem definiált, de szemléletes megfogalmazás létezik, melyeket használni szeretnénk, innentől ezen megfogalmazásokat a megfelelő definiált fogalom alapján értelmezzük. Például a „ P pont a g egyenesen van”, vagy a „ g egyenes átmegy a P ponton” állításokat az itt definiált illeszkedés szinonimájaként fogadjuk el.

igazolásához tekintsünk három f , g , h egyenest, melyekre $f \parallel g$ és $g \parallel h$. Ha $f = g$ vagy $g = h$, akkor nyilván $f \parallel h$. Ha $f \neq g \neq h$ és létezik olyan P pont, melyre $P \in f \cap h$, akkor az (I_3) párhuzamossági axióma egyértelműségi kikötése miatt $f = h$. Amennyiben $f \cap h = \emptyset$, akkor nyilván $f \parallel h$. ■

A *háromszögeket* három pont halmazaként definiáljuk, ahol a pontokat csúcsoknak nevezzük. Ha a csúcsok között nem tüntetünk ki sorrendet, akkor a háromszöget *irányítatlannak*, ha pedig sorrendet tüntetünk ki közöttük, akkor *irányítottnak* mondjuk. A csúcsok két sorrendjéről azt mondjuk, hogy ugyanazt az irányítást definiálják, ha a csúcsok sorrendje páros permutációban különbözik egymástól. Azonnal látható, hogy minden háromszöghöz pontosan két irányítás vagy más szóval *körüljárás* tartozik. A későbbi szóhasználatban háromszögön mindig irányítatlant értünk és az irányítottságot külön jelezzük.

Egy háromszöget *elfajulónak* mondunk, ha csúcsai kollineárisak.

A háromszögnek a második rendezési axiómában szereplő oldalait az első rendezési axióma alapján fogjuk definiálni.

Rendezési axiómák.

- (R_1) Minden egyenesen adott két teljes rendezés, amelyek egymás megfordítottjai.
 (R_2) (Pasch-axióma) Ha egy egyenes egy háromszög egyik csúcsára sem illeszkedik, de van közös pontja valamely oldallal, akkor pontosan egy másik oldalt is metsz.

Az (R_1) axióma szemléletesen annyit jelent, hogy minden egyenes pontjai két ellentétes sorrendbe soroltak.

Irányítottnak mondunk egy egyenest, ha rögzítjük valamely rendezését. Egy irányított egyenesen a kiválasztott rendezés jelölésére a $\prec$, illetve ennek inverzére a $\succ$ jelet alkalmazzuk. Ha egy irányított egyenes P és Q pontjára $P \prec Q$ áll, ami ugyanaz mint $Q \succ P$, akkor azt mondjuk, hogy a P pont *megelőzi* a Q pontot, vagy a Q pont *követi* a P pontot a g egyenesen. Két új jelet is bevezetünk:

$$P \preceq Q = \begin{cases} P \prec Q, \\ \text{vagy} \\ P = Q, \end{cases} \quad \text{és} \quad P \succeq Q = \begin{cases} P \succ Q, \\ \text{vagy} \\ P = Q. \end{cases}$$

Egy pont minden rá illeszkedő egyenest két *nyílt félegyenesre* oszt: az egyenes valamely irányításában az egyik a pontot megelőző, a másik pedig a pontot követő pontok halmaza. A két félegyenes nyilván nem függ a rendezés megválasztásától, hiszen az irányítás megfordítása esetén csak a „követő” és „megelőző” szavak cserélődnek fel. Magát a pontot a félegyenesek *kezdőpontjának* nevezzük. A félegyeneshez a kezdőpontját is hozzávéve *zárt félegyeneset* kapunk. Az eddigi axiómákból következik, hogy legalább az egyik nyílt félegyenes nem üres, de nem bizonyítható, hogy

mindkét nyílt félegyenes tartalmaz pontot (egy olyan modell megtalálása, ahol ez tényleg nem teljesül az olvasóra marad) – ezt csak az (F_1) axióma fogja biztosítani.

Definíció. Az A és C pontok *közrefogják* a B pontot, ha az A, B és C pontok kollineárisak, és közös g egyenesük valamely irányításában $A \prec B$ és $B \prec C$ vagy $C \prec B$ és $B \prec A$ teljesül. Ilyenkor a B pontra azt is mondják, hogy B *elválasztja* az A és C pontokat. ▲

Az elválasztás nyilván nem függ az egyenes irányításának megválasztásától.

Az A és C pontokat elválasztó pontok halmazát az A, C végpontú *nyílt szakasznak* nevezzük. A végpontjaival bővített nyílt szakaszt (zárt) *szakasznak* mondjuk és az $\overline{AC}$ jellel jelöljük. Ha $A = C$, akkor *elfajuló szakaszc*ról beszélünk. Az A, C végpontú nyílt szakasz pontjaira azt mondjuk, hogy az $\overline{AC}$ *belső pontjai*.

Az ABC háromszögek *oldalainak* hívjuk az $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ és $\overline{CA}$ szakaszokat.

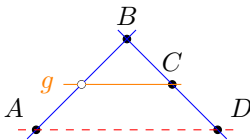
Folytonossági axiómák. Minden irányított $(g, \prec)$ egyenesen

- (F_1) (folytathatóság) minden $Q \in g$ ponthoz léteznek tőle különböző $P, R \in g$ pontok úgy, hogy $P \prec Q \prec R$, és
- (F_2) (Dedekind-axióma) minden nem üres $\mathcal{Q} \subseteq \overline{PR} \subseteq g$ ponthalmazhoz létezik olyan Q_- és Q_+ pont a $\overline{PR}$ zárt szakaszon, hogy minden $Q \in \mathcal{Q}$ esetén $Q_- \preceq Q \preceq Q_+$, és bármely, a $\mathcal{Q}$ minden pontját közrefogó $X, Y \in g$ pontpárra $X \preceq Q_-$ és $Q_+ \preceq Y$ is igaz.

Világos, hogy a Q_- és Q_+ pontok egyértelműek. Ezeket rendre $\liminf \mathcal{Q}$ és $\limsup \mathcal{Q}$ jelöli, és sorban *alsó határnak*, illetve *felső határnak*, együtt pedig *határpontoknak* nevezzük őket. A határpontok nem feltétlenül a $\mathcal{Q}$ elemei, és nyilván nem függenek az egyenes irányításától, habár az egyik irányításban alsó határként szereplő határpont a másikban felső határ, és fordítva. Valamely $Q \in \mathcal{Q}$ pontra tekintsük a $\mathcal{Q}_{\preceq Q} := \{P \in \mathcal{Q} : P \preceq Q\}$ és $\mathcal{Q}_{Q \preceq} := \{P \in \mathcal{Q} : Q \preceq P\}$ halmazokat. Ezek egyike sem üres, hiszen a Q pontot mindkettő tartalmazza, és $\liminf \mathcal{Q} = \liminf \mathcal{Q}_{\preceq Q}$, valamint $\limsup \mathcal{Q} = \limsup \mathcal{Q}_{Q \preceq}$, aminek könnyű bizonyítása az olvasóra hárul.

Tétel. A nem elfajuló szakaszok a végpontjaikon kívül is tartalmazznak pontot.

Bizonyítás. Tekintsük az $\overline{AB}$ szakaszt.



Az (I_0) axióma szerint van az AB egyenesen kívül egy C pont, az (F_1) axióma szerint pedig a BC egyenes B pontot nem tartalmazó, C által kijelölt félegyenesén is van egy D pont. A C pont nem lehet az AD egyenesen, mert ellenkező esetben az AD és BC egyeneseknek két közös pontja lenne, amiért egybeesnének, és így az A, B, C és D pontok kollineárisak

lennének, holott C az AB egyenesén kívül van. A párhuzamossági axióma miatt tehát létezik egy AD egyenessel párhuzamos g egyenes a C ponton át. Ez nem metszi az ABD háromszög AD oldalegyenesét, és a B ponton sem megy át, viszont metszi a háromszög $\overline{BD}$ oldalát, ami **Pasch axiómája** szerint csak úgy lehet, ha az $\overline{AB}$ oldalt belső pontban metszi. ■

Tekintsünk egy g egyenest és az $\mathcal{S} \setminus g$ halmazt. Ennek pontjai között vezessük be a *partossági* relációt: az $\mathcal{S}$ két pontjáról akkor mondjuk, hogy g -partosak egymással, ha az őket összekötő szakasz nem metszi a g egyenest.

Tétel. *A partosság ekvivalencia-reláció, melynek két ekvivalencia-osztálya van.*

Bizonyítás. Legyen $g \in \mathcal{G}$ egy egyenes.

A g -partosság nyilvánvalóan reflexív és szimmetrikus. A tranzitivitás abból következik, hogy amennyiben az R, P és S pontok nincsenek a g egyenesen és a g nem metszi az RPS háromszög $\overline{RP}$ és $\overline{PS}$ oldalait, akkor **Pasch axiómája** értelmében nem metszheti a $\overline{RS}$ oldalt sem. Tehát a partosság ekvivalencia-reláció.

Jelölje $\mathcal{S}^P$ a g -partosság azon ekvivalenciaosztályát, melyben a $P \notin g$ ponttal g -partos pontok vannak.

Tegyük fel, hogy $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^P \setminus g$ nem üres, és a Q, R pontok ebben vannak.

Ekkor a g egyenes a $\overline{PQ}$ és $\overline{PR}$ szakaszokat is metszi, így **Pasch axiómája** miatt a g nem metszheti az $\overline{QR}$ szakaszt, tehát a Q és R pontok g -partosak, vagyis az összes $\mathcal{S}^P \cup g$ halmazon kívüli pont a Q partossági osztályába kell tartozzon. Vagyis legfeljebb kettő g -partossági osztály van.

Vegyünk egy f egyenest, mely egyetlen O pontban metszi a g egyenest. Mivel az **(F₁)** miatt az f egyenes O pont által meghatározott nyílt félegyenesei nem üresek, és a különböző félegyeneseken lévő pontok nem lehetnek egymással g -partosak, legalább kettő g -partossági osztály van.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

Ha két pont g -partos, akkor azt is mondjuk, hogy a g egyenes ugyanazon *oldalán* vannak. Az egyenesre vonatkozó partosság ekvivalencia osztályait az egyeneshez tartozó *nyílt félsíkoknak* nevezzük.

Definíció. Az eddigi — illeszkedési, rendezési és folytonossági — axiómákat teljesítő $\mathfrak{S} = (\mathcal{S}, \mathcal{G})$ rendszereket *affin síkoknak* nevezzük. ▲

Definíció. Egy $\varphi: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ leképezést az $(\mathcal{S}, \mathcal{G})$ és $(\mathcal{S}', \mathcal{G}')$ affin síkok közti *egyenességet tartó* leképezésnek hívunk, ha bármely három kollineáris pont képe is kollineáris.

Egy egyenességet tartó leképezést *egyenestartónak* nevezzük, ha minden egyenesen szürjektív.

Egy egyenestartó leképezést *kollineációnak* hívunk, ha bijektív.

Két affin síkot *izomorf*nak mondunk, ha van köztük egy kollineáció. ▲

A $\varphi: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ leképezéseket a sík *transzformációinak* nevezzük. Egy X pontot egy φ transzformáció *fixpontjának* nevezzük, ha a transzformáció önmagába viszi, vagyis $\varphi(X) = X$. *Identikus transzformációról* vagy *identitásról* beszélünk, ha a transzformáció minden pontot helyben hagy, vagyis minden pont a transzformáció fixpontja.

Ha egy transzformáció egy egyenest önmagára képez le, akkor az egyenest *invariáns egyenesnek* nevezzük. Ha az invariáns egyenes minden pontja fix, akkor *fixegyenestől* beszélünk.

Az olyan nem identikus transzformációt, amelynek négyzete az identikus leképezés, *involutív* transzformációnak, vagy röviden *involúciónak* nevezzük.

Tétel.

- (1) A kollineációk tartják a párhuzamosságot.
- (2) Kollineáció inverze is kollineáció.
- (3) A bijektív transzformációk csoportjában a kollineációk részcsoportot alkotnak.

Bizonyítás. (1) Legyen φ kollineáció és tegyük fel, hogy mégis vannak g és h különböző párhuzamos egyenesek, melyekre a $\varphi(g)$ és $\varphi(h)$ egyenesek metszik egymást valamely P' pontban. A P' pontnak van ősképe, mert φ bijektív. Legyen ez a P pont. Mivel $P' \in \varphi(g) \cap \varphi(h)$, az ősképre $P \in g \cap h$ teljesül, ami g és h párhuzamossága miatt kizárt. Tehát φ tartja a párhuzamosságot, ami az első állítást bizonyítja.

(2) Legyen φ egy kollineáció, és tekintsük ennek φ^{-1} inverzét. Vegyük egy tetszőleges e egyenes különböző A , B és C pontjait. Ekkor az $f = \varphi^{-1}(A)\varphi^{-1}(B)$ egyenest a φ kollineáció az e egyenesbe képezi, hiszen φ egyenestartó. Mivel φ tartja a párhuzamosságot is, a $\varphi^{-1}(C)$ ponton áthaladó, f egyenessel párhuzamos g egyenes $\varphi(g)$ képe párhuzamos az $e = \varphi(f)$ egyenessel. Minthogy $C \in \varphi(g)$, a párhuzamossági axióma szerint ebből $e = \varphi(g)$ következik.

Eszerint $\varphi^{-1}(B) \in g$, így a párhuzamossági axióma szerint ebből $f = g$ következik, amiért $C \in f$, tehát φ^{-1} örzi az egyenességet.

Ha $X \in f$, akkor $\varphi^{-1}(\varphi(X)) = X$, vagyis φ^{-1} szürjektív, tehát egyenestartó.

(3) Ez a második következménye, hiszen a kollineációk szorzata nyilván kollineáció, és a bijektív transzformációk csoportot alkotnak.

Ezzel e tételt bebizonyítottuk. ■

Definíció. Az A, B, C, D pontokból álló nem kollineáris rendezett pontnégyest *paralelogrammának* mondjuk, ha az AB és CD , valamint az AC és BD egyenespárok párhuzamosak.

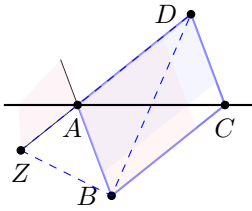
Az A, B, C, D pontok rendezett négyesét *elfajuló paralelogrammának* nevezzük, ha az A, B, C, D pontok egy egyenesre esnek, és minden nem erre az egyenesre eső

X, Y pontra $ABXY$ akkor és csak akkor paralelogramma, ha $XYDC$ is paralelogramma, vagy $A = B$ és $C = D$. ▲

Az $ABCD$ paralelogramma *átlóinak* nevezzük az $\overline{AC}$ és $\overline{BD}$ szakaszokat, *oldalainak* hívjuk az $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ és $\overline{DA}$ szakaszokat. Az A, B, C, D pontokat az $ABCD$ paralelogramma *csúcsainak* nevezzük.

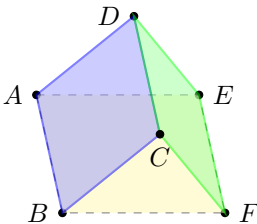
Tétel. Minden paralelogramma átlói metszik egymást.

Bizonyítás. Vegyünk egy $ABCD$ paralelogrammát.



Figyeljük meg, hogy a párhuzamosságok miatt a C és D pontok AB -partosak, C és B pedig AD -partosak, amiért az AC egyenes benne van az AB egyenes D pontot és az AD egyenes B pontot tartalmazó $\mathcal{S}_{AB}^D$ illetve $\mathcal{S}_{AD}^B$ félsíkjai metszetében, valamint ezek ellentétes félsíkjainak metszetében, vagyis $AC \subset (\mathcal{S}_{AB}^D \cap \mathcal{S}_{AD}^B) \cup (\mathcal{S} \setminus (\mathcal{S}_{AB}^D \cup \mathcal{S}_{AD}^B)) =: \mathcal{S}^*$. Vegyünk most egy olyan Z pontot az AD egyenesen, melyre $A \in \overline{ZD}$. Ekkor a ZBD háromszög $\overline{ZB}$ oldalát nem metszi az AC egyenes, mert $\overline{ZB} \subset \mathcal{S}_{AD}^B \cap (\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_{AB}^D) = \mathcal{S}^+$ és nyilván $\mathcal{S}^+ \cap \mathcal{S}^* = \emptyset$. Pasch axiómája miatt tehát $AC \cap \overline{BD}$ nem üres. Eszerint a két átló egyenese az egyik átlón metszi egymást. Ugyanezt a másik átlóval elvégezve, a tétel állítását kapjuk. ■

E tétel következtében a paralelogramma definíciójában a pontok sorrendje meghatározó: az $ABCD$ paralelogramma mellett csak a $BCDA$, $CDAB$, $DABC$ pontnégyesek paralelogrammák. Erről a négy esetről azt mondjuk, hogy ugyanazt a paralelogrammát definiálják. Ennek megfelelően az egymással párhuzamos egyeneseken fekvő oldalpárokat — $\overline{AB}$ és $\overline{DC}$, illetve $\overline{BC}$ és $\overline{AD}$ — *szemközti* oldalaknak nevezzük.

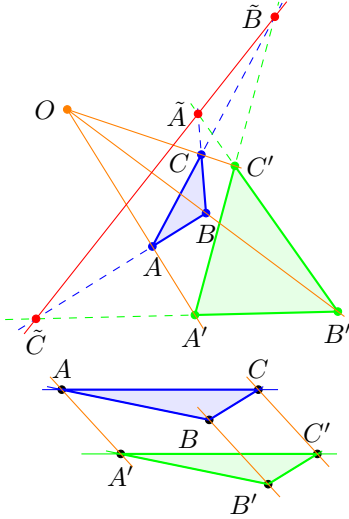


Ha $ABCD$ és $CDEF$ is paralelogramma, akkor a párhuzamosság tranzitivitása miatt $AB \parallel EF$ következik, de az eddigi axiómák alapján nem bizonyítható, hogy $ABFE$ is paralelogramma lenne, holott szemléletünk alapján az ábra ezt „igazolná”. Ezt, a tulajdonképpen a „paralelogrammaság” mint reláció tranzitivitását kifejező tulajdonságot az ábra szemléletes asszociációjáról nevezzük el.

Definíció. Egy affin síkot *nyitott könyv tulajdonságúnak* nevezünk, ha bármely $ABCD$ és $CDEF$ paralelogramma esetén $ABFE$ is paralelogramma. ▲

Látni fogjuk, hogy ez ekvivalens a **Desargues-tulajdonsággal**. Utóbbi korrekt megfogalmazásához be kell vezetnünk néhány elnevezést.

A párhuzamossági reláció osztályait *ideális pontoknak*, ezek halmazát *ideális egyenesnek* nevezzük. Két egyenes párhuzamossága azzal is kifejezhető, hogy „metszetük egy ideális pont”.



Tekintsünk olyan nem elfajuló ABC és $A'B'C'$ háromszögeket, amelyekre $A \neq A'$, $B \neq B'$ és $C \neq C'$. Az ilyen háromszögpárokat nem elfajulóknak mondjuk.

Egy nem elfajuló háromszögpárt *pontra nézve perspektívnek* mondunk, ha a háromszögek megfelelő csúcsain átmenő AA' , BB' és CC' egyenesek egy – esetleg ideális – közös pontra illeszkednek.

Egyenesre nézve perspektívnek mondunk egy nem elfajuló háromszögpárt, ha a háromszögek megfelelő oldalegyeneseinek $AB \cap A'B'$, $BC \cap B'C'$ és $CA \cap C'A'$ metszéspontjai egy – esetleg ideális – közös egyenesre illeszkednek.

Előbbi esetben a háromszögeket *perspektívnek* utóbbi esetben *tengelyesen perspektívnek* mondjuk.

Definíció. Egy affin síkot *Desargues-tulajdonságúnak* mondunk, ha nem elfajuló háromszögpárjai pontosan akkor perspektívek, ha tengelyesen perspektívek. ▲

A Desargues-tulajdonságú affin síkokat *Desargues-síknak* nevezzük.

A Függelék F.1. szakaszában konstruált modell mutatja, hogy a Desargues-tulajdonság nem következik az eddigi axiómákból, de az is ki fog derülni, hogy izomorfia erejéig csak egy Desargues-tulajdonságú affin sík van.

1.1.1. Tétel. *Ha egy affin síkban minden perspektív háromszög tengelyesen perspektív, akkor a sík Desargues-tulajdonságú.*

Bizonyítás. Azt kel igazolnunk, hogy ha az ABC és $A'B'C'$ háromszögek tengelyesen perspektívek, akkor perspektívek is.

A tengelyesen perspektivitás folytán a $\tilde{C} = AB \cap A'B'$, $\tilde{B} = CA \cap C'A'$ és $\tilde{A} = BC \cap B'C'$ (esetleg ideális) pontok egy (esetleg ideális) t egyenesre esnek. Emiatt az $AA'\tilde{C}$ és $CC'\tilde{A}$ háromszögek a $\tilde{B}$ pontra nézve perspektívek, amiért a feltétel szerint tengelyesen is perspektívek, vagyis $A'A \cap C'C =: O$, $A\tilde{C} \cap C\tilde{A} = B$ és $\tilde{C}A' \cap \tilde{A}C' = B'$ kollineáris pontok.

Eszerint az ABC és $A'B'C'$ háromszögek az O pontra nézve perspektívek. ■

Nyitott könyv tétele. *Minden Desargues-sík nyitott könyv tulajdonságú.*

Bizonyítás. Tekintettel arra, hogy az AA' és a BB' szerepe az állításban felcserélhető, elegendő csak az „akkor” irányt igazolni, az egyben a „csak akkor” állítást is igazolja.

Ha $AA'B'B$ és $B'BCC'$ is elfajuló paralelogramma, akkor vegyünk az A, A', B, B', C, C' pontok közös egyenesén kívül olyan X és Y pontokat, melyekre $AA'YX$ paralelogramma. Ekkor az elfajuló paralelogrammák definíciója szerint $BB'YX$ is paralelogramma, így ismét az elfajuló paralelogrammák definíciója szerint $CC'YX$ is paralelogramma. Eszerint ha $AA'YX$ paralelogramma, akkor $CC'YX$ is paralelogramma, és a fenti következtetéseket fordítva végigkövetve kiderül, hogy ez fordítva is igaz. Mivel ez minden megfelelő XY pontra érvényes, az elfajuló paralelogrammák definíciója szerint $AA'C'C$ is paralelogramma.

Ha $AA'B'B$ elfajuló, $B'BCC'$ pedig nem elfajuló paralelogramma, akkor az elfajuló paralelogrammák definíciója szerint $AA'C'C$ is paralelogramma.

Ha $AA'B'B$ és $B'BCC'$ egyike sem elfajuló paralelogramma, akkor az ABC és $A'B'C'$ háromszögek megfelelő csúcsain áthaladó AA' , BB' és CC' egyenesek párhuzamosak. Ugyanakkor $AB \parallel A'B'$ és $BC \parallel B'C'$ miatt $AB \cap A'B'$ és $BC \cap B'C'$ is ideális pont. A Desargues-tulajdonság miatt ebből következik, hogy $AC \cap A'C'$ is ideális pont, és így $AA' \parallel CC'$ miatt $AA'C'C$ is paralelogramma. Ezzel a tételt igazoltuk. ■

Az 1.5. szakaszban látni fogjuk, hogy amennyiben a nyitott könyv tulajdonságú affin síkok Desargues-félék. Ez azt jelenti, hogy a nyitott könyv tételének fordítottja is igaz.

Két pontról, ha nem esnek egybe, három pontról, ha nem esnek egy egyenesre, azt mondjuk, hogy *általános helyzetben* vannak. Ez a fogalom később általánosabb értelmet nyer majd az Affin geometria fejezetben.

1.2. Vektorok konstruálása

A most következők nyitott könyv tulajdonságú affin síkokon értendők. Az 1.5. szakaszban ki fog derülni, hogy ilyen affin sík izomorfiától eltekintve pontosan egy létezik. Ennek fényében akár azt is mondhatnánk, hogy ez a fejezet innentől a Desargues-síkról szól.

Definíció. A rendezett pontpárokat *kötött vektornak* nevezzük. A P és Q pontok ilyen sorrendje által meghatározott kötött vektort (P, Q) jelöli. Minden P pontra a (P, P) kötött vektort *nullvektornak* mondjuk. ▲

Definíció. A (P, Q) és (R, S) kötött vektorokról azt mondjuk, hogy *p-relációban* állnak, amit $(P, Q) \stackrel{p}{\sim} (R, S)$ jelöl, ha $PQSR$ (ebben a sorrendben!) egy (esetleg

elfajuló) paralelogramma. ▲

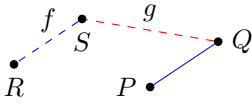
A paralelogrammákra gondolva világos, hogy $(P, Q) \stackrel{p}{\sim} (R, S)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $(P, R) \stackrel{p}{\sim} (Q, S)$.

Tétel. *A p -reláció ekvivalencia-reláció.*

Bizonyítás. A reflexivitás és a szimmetria a paralelogrammák definíciója alapján nyilvánvaló. A tranzitivitás maga a **nyitott könyv tulajdonság**. ■

Egyértelműségi tétel. *Minden (P, Q) kötött vektorhoz és R ponthoz létezik pontosan egy olyan S pont, melyre $(P, Q) \stackrel{p}{\sim} (R, S)$.*

Bizonyítás. *Egzisztencia.* A megfelelő S pontot $R = P$ esetén a Q adja.



Ha $R \neq P$, és R, P, Q nem kollineárisak, akkor legyen g az az egyenes a Q ponton keresztül, amely párhuzamos az RP egyenessel, f pedig az az egyenes az R ponton át, mely a PQ egyenessel párhuzamos. Az f és g egyenesek nem lehetnek párhuzamosak, mert ellenkező esetben a párhuzamosság tranzitivitása miatt $RP \parallel PQ$ lenne, és akkor az R, P, Q pontok egy egyenesre esnének. Legyen tehát $S = f \cap g$, és akkor a konstrukció miatt $RSQP$ egy paralelogramma, vagyis $(R, S) \stackrel{p}{\sim} (P, Q)$.

Ha $R \neq P$, és R, P, Q kollineáris, de $P \neq Q$, akkor vegyünk egy P' pontot ezen az egyenesen kívül. Előbbi okfejtésünk folytán létezik egy Q' pont, hogy $(P', Q') \stackrel{p}{\sim} (P, Q)$. Újra az előbbi indoklást használva láthatjuk, hogy létezik egy S pont, melyre $(R, S) \stackrel{p}{\sim} (P', Q')$, amiből a p -reláció tranzitivitása miatt $(R, S) \stackrel{p}{\sim} (P, Q)$ következik.

Ha $R \neq P$, és $P = Q$, akkor az $S = R$ megfelelő választás.

Unicitás. Az S pont egyértelműségének bizonyításához tegyük fel, hogy létezik olyan S' pont is, amelyre $(R, S) \stackrel{p}{\sim} (P, Q) \stackrel{p}{\sim} (R, S')$. Ebből a p -reláció tranzitivitása miatt következik, hogy $(R, S) \stackrel{p}{\sim} (R, S')$, amiért $RSS'R$ egy elfajuló paralelogramma.

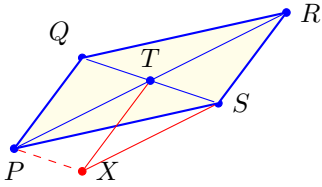
Ha $R \neq S$, akkor legyen X egy tetszőleges pont az RS egyenesen kívül. Az épp most igazolt egzisztencia szerint létezik egy Y pont, melyre $(R, S) \stackrel{p}{\sim} (X, Y)$. Az elfajuló paralelogrammák definíciója miatt ebből $(X, Y) \stackrel{p}{\sim} (R, S')$ következik. Eszerint az YS és az YS' egyenes is párhuzamos az XR egyenessel, ezért egybeesnek, amiért $S = S'$.

Ha $R = S$, akkor élünk az indirekt feltevessel, hogy $S \neq S'$. Legyen X egy tetszőleges pont az SS' egyenesen kívül. Ekkor létezik egy Y pont, melyre $(S, S') \stackrel{p}{\sim}$

(X, Y) . Az elfajuló paralelogrammák definíciója miatt ebből $(X, Y) \stackrel{p}{\sim} (R, R)$ következik, amiért R, X és Y egy közös e egyenesre esik. Ez az egyenes párhuzamos az SS' egyenessel, ami szintén átmegy az R ponton, tehát $e = SS'$, holott az $X \in e$ pontot az SS' egyenesen kívülről választottuk. Ez az ellentmondás igazolja, hogy $S = S'$. ■

Tétel. Minden nem elfajuló $PQRS$ paralelogramma átlóinak T metszéspontja olyan, hogy $(P, T) \stackrel{p}{\sim} (T, R)$ és $(Q, T) \stackrel{p}{\sim} (T, S)$ teljesül.

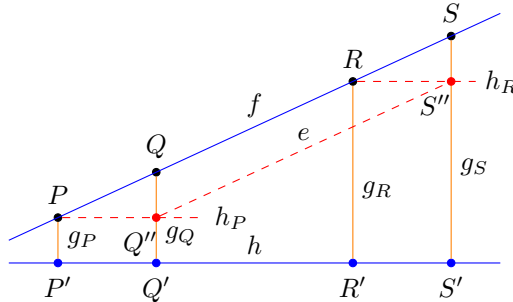
Bizonyítás. Elegendő az utóbbi relációt igazolni, abból a másik a paralelogramma csúcsainak átbetűzése után adódik. Legyen X az a pont, melyre $(X, T) \stackrel{p}{\sim} (S, R)$.



Ekkor $XS \parallel PT$, valamint $(X, T) \stackrel{p}{\sim} (S, R) \stackrel{p}{\sim} (P, Q)$ miatt $TQ \parallel PX$ is teljesül, amiért $PTSX$ szemközti oldalai párhuzamosak, tehát $PTSX$ paralelogramma, vagyis $(P, X) \stackrel{p}{\sim} (T, S)$. Mivel ugyanakkor $(X, T) \stackrel{p}{\sim} (P, Q)$ miatt $(P, X) \stackrel{p}{\sim} (Q, T)$ is teljesül, amiből $(Q, T) \stackrel{p}{\sim} (P, X) \stackrel{p}{\sim} (T, S)$ adódik. A $\stackrel{p}{\sim}$ tranzitivitása igazolja az állítást. ■

A $\overline{PR}$ szakasznak azt a pontját, melyre $(P, T) \stackrel{p}{\sim} (T, R)$ teljesül, a szakasz *affin felezőpontjának* nevezzük.

Párhuzamos szelők tétele. Legyen f és h két egyenes, g pedig egy mindkettőt metsző egyenes. Legyenek az f egyenesen a P, Q, R, S pontok olyanok, hogy $(P, Q) \stackrel{p}{\sim} (R, S)$, és jelölje a rajtuk áthaladó, a g egyenessel párhuzamos egyeneseket rendre g_P, g_Q, g_R, g_S . Ekkor a $P' = h \cap g_P, Q' = h \cap g_Q, R' = h \cap g_R$ és $S' = h \cap g_S$ pontokra $(P', Q') \stackrel{p}{\sim} (R', S')$ teljesül.



Bizonyítás. Ha $f \parallel h$, akkor a p -reláció tranzitivitása igazolja az állítást.

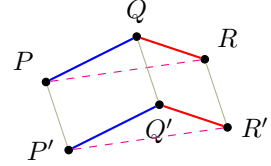
Ha $f \parallel h$, akkor vegyük a h egyenessel párhuzamos h_P egyenest a P ponton és h_R egyenest az R ponton keresztül. A h_P és g_Q egyenesek Q'' metszéspontján átmenő, az f egyenessel párhuzamos egyetlen e egyenes metszete a h_R egyenessel legyen S'' .

Mint hogy $(P, Q) \sim (R, S)$ miatt $(P, R) \sim (Q, S)$ is teljesül, a $(Q'', S'') \sim (P, R) \sim (Q, S)$ relációból következik, hogy S'' a g_S egyenesre esik (hiszen $g_S \parallel QQ''$). Eszerint $(P', Q') \sim (P, Q'') \sim (R, S'') \sim (R', S')$, ami bizonyítja az állítást. ■

A (P, Q) és (Q, S) kötött vektorok $(P, Q) + (Q, S)$ összegén a (P, S) kötött vektort értjük. Ha $Q \neq R$, akkor a (P, Q) és (R, S) kötött vektorok összegét nem értelmezzük.

Kongruencia tétel. Ha $(P, Q) \sim (P', Q')$ és $(Q, R) \sim (Q', R')$, akkor $(P, Q) + (Q, R) \sim (P', Q) + (Q', R')$.

A bizonyításhoz vegyük észre, hogy $(P, Q) + (Q, R) = (P, R)$ és $(P', Q') + (Q', R') = (P', R')$, amiből a **nyitott könyv tulajdonság** alapján $(P, R) \sim (P', R')$ következik.



1.2.1. Szabad vektorok

A **kongruencia tétel** azt mutatja, hogy az összeadhatóság szélesebb értelmezéséhez a kötött vektorok p -reláció szerinti osztályozásán keresztül vezet az út.

Definíció. A kötött vektorok p -reláció szerinti ekvivalencia osztályait *szabad vektoroknak* nevezzük. Azt mondjuk, hogy a (P, Q) kötött vektor *reprezentálja* a $\mathbf{v}$ szabad vektort, ha $(P, Q) \in \mathbf{v}$. A (P, Q) kötött vektor által reprezentált szabad vektort $\overrightarrow{PQ}$, a szabad vektorok halmazát $\mathcal{V}$ jelöli. ▲

- Világos, hogy bármely P, Q, R, S pontok, és $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ szabad vektorok esetén
- (1) $\overrightarrow{PQ} = \{(R, S) : (R, S) \sim (P, Q)\}$;
 - (2) $(P, Q) \sim (R, S)$ akkor és csak akkor, ha $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$;
 - (3) $\mathbf{u} \cap \mathbf{v} \neq \emptyset$ pontosan akkor, ha $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Ugyancsak világos a p -reláció **egyértelműségi tételének** alábbi következménye.

Egyértelmű reprezentálás tétele. Minden P ponthoz és $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ szabad vektorhoz létezik pontosan egy Q pont, melyre $(P, Q) \in \mathbf{v}$.

A szabad vektorok összeadását a **kongruencia-tétel** alapján definiáljuk.

Definíció. Tekintsük az $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$ és $\mathbf{v} = \overrightarrow{RS}$ szabad vektorokat, és legyen T az az egyértelmű pont, melyre $(Q, T) \stackrel{p}{\sim} (R, S)$. A $\mathbf{w} = \overrightarrow{PT}$ szabad vektort az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ szabad vektorok *összege*nek nevezzük. ▲

Tétel. *A szabad vektorok összege egyértelmű.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$, $\mathbf{u} = \overrightarrow{RS}$, továbbá legyenek T és T' azon pontok, melyekre rendre $(Q, T) \stackrel{p}{\sim} (R, S)$ illetve $(Q', T') \stackrel{p}{\sim} (R, S)$ teljesül. Ekkor a P pontból kiindulva a $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ és $\mathbf{u} = \overrightarrow{QT}$ vektorok összege $\overrightarrow{PT}$, a P' pontból kiindulva pedig a $\mathbf{v} = \overrightarrow{P'Q'}$ és $\mathbf{u} = \overrightarrow{Q'T'}$ vektorok összege $\overrightarrow{P'T'}$. A **kongruencia tétel** szerint $(P, T) \stackrel{p}{\sim} (P', T')$, vagyis $\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{P'T'}$, ami az egyértelműséget igazolja. ■

A definíció szerint tetszőleges két szabad vektor összegezzethető, a tétel szerint pedig ez az összegzés egy $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ függvény. E függvény $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ párhoz rendelt eredményét $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ jelöli.

A mostantól $\mathbf{0}$ által jelölt $\overrightarrow{PP}$ szabad vektort *nullvektornak* hívjuk. Világos, hogy $\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ minden $\mathbf{v}$ szabad vektor esetén.

Tétel. *A szabad vektorok halmaza az összeadással kommutatív csoportot² alkot.*

Bizonyítás. Azt már tudjuk, hogy szabad vektorok összege szabad vektor és van az összeadásra nézve neutrális elem is, a nullvektor.

Az asszociativitást az alábbi ábra baloldali része jelöléseinek használatával a

$$(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PQ} + (\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS})$$

azonosság mutatja.



A kommutativitás bizonyításához tekintsük azt az S pontot (nem kollineáris P, Q, R ponthármasra az ábra jobboldali részén látható), amelyre $(P, S) \stackrel{p}{\sim} (Q, R)$. Ekkor persze $(S, R) \stackrel{p}{\sim} (P, Q)$ is teljesül, és az

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{PQ}$$

azonosság igazolja a kommutativitást.

Az inverzelem létét igazolja, hogy $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = \mathbf{0}$.

Ezzel a tételt beláttuk. ■

²A csoport definíciója a Függelék F.11 szakaszában.

Mivel a szabad vektorok csoportot alkotnak, az $\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{v}$ egyenlet megoldása egyértelmű. Ezen egyértelmű megoldást $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ jelöli és a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{u}$ különbségének nevezzük. A nullelem és egy $\mathbf{u}$ vektor különbsége nyilván $-\mathbf{u}$, az $\mathbf{u}$ inverze, vagy ahogy additív környezetben mondják, az *ellentettje*.

Bármely $n \in \mathbb{N}$ természetes szám és $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ szabad vektor esetén az ismételt összeadások rövidebb jelölésére természetes $n \cdot \mathbf{v} := \underbrace{\mathbf{v} + \cdots + \mathbf{v}}_n$ formula, és a disztributivitás $(n + k) \cdot \mathbf{v} = n \cdot \mathbf{v} + k \cdot \mathbf{v}$ összefüggésének az elvárása³ vezet az alábbihoz.

Definíció. Minden $i \in \mathbb{Z}$ egész számra és $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ szabad vektorra

$$i \cdot \mathbf{v} := \begin{cases} \overbrace{\mathbf{v} + \cdots + \mathbf{v}}^i, & \text{ha } i > 0, \\ 0, & \text{ha } i = 0, \\ \underbrace{(-\mathbf{v}) + \cdots + (-\mathbf{v})}_{-i}, & \text{ha } i < 0. \end{cases}$$

▲

A szabad vektorok összeadásának asszociativitására és kommutativitására alapozva gyorsan igazolható a következő.

Tétel. A szabad vektorok egész számmal való szorzására a következők teljesülnek.

- (1) $i \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{u}) = i \cdot \mathbf{v} + i \cdot \mathbf{u}$,
- (2) $(i + j) \cdot \mathbf{v} = i \cdot \mathbf{v} + j \cdot \mathbf{v}$,
- (3) $(i \cdot j) \cdot \mathbf{v} = i \cdot (j \cdot \mathbf{v})$,

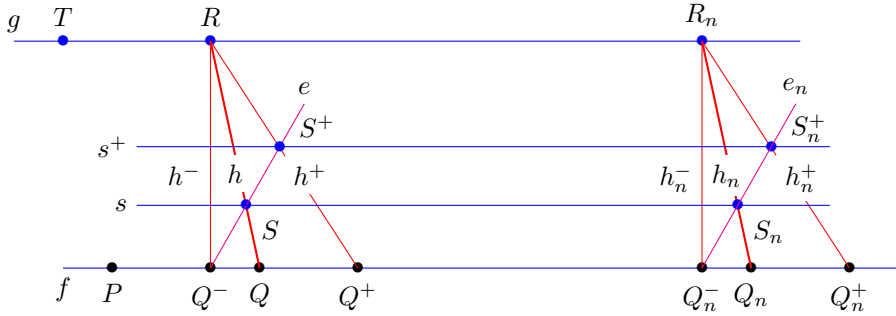
ahol $i, j \in \mathbb{Z}$, és $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathcal{V}$.

Tétel. Legyen az e egyenes két különböző pontja P és Q . Ekkor az az egyértelműen meghatározott $X_P(n, Q)$ pont, melyre $n\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PX_P(n, Q)}$ teljesül, szintén az e egyenesen van.

Bizonyítás. A rövidség kedvéért legyen minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén $Q_n = X_P(n, Q)$. Minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén $\overrightarrow{PQ_n} + \overrightarrow{Q_nQ_{n+1}} = \overrightarrow{PQ_{n+1}} = \overrightarrow{PQ_n} + \overrightarrow{PQ}$, amiért $\overrightarrow{Q_nQ_{n+1}} = \overrightarrow{PQ}$. Eszerint a Q_n pontsorozat bármely két szomszédos tagjának egyenese párhuzamos a $PQ = e$ egyenessel.

Világos, hogy $Q_0 = P$, $Q_1 = Q$, és ezek az e egyenesen vannak. Ha a Q_{-n+1} és Q_n pontok az e egyenesen vannak, a párhuzamossági axióma szerint a Q_{-n} és Q_{n+1} pontok is az e egyenesen vannak, így teljes indukcióval kapjuk a tétel állítását. ■

³Ezt nevezik permanencia elvnek.



Legyen $h^- = RQ^-$, $h = RQ$ és $h^+ = RQ^+$, valamint $h_n^- = R_nQ_n^-$, $h_n = R_nQ_n$ és $h_n^+ = R_nQ_n^+$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Nyilván $h_1^- = h^-$, $h_1 = h$, $h_1^+ = h^+$ és minden $k, \ell \in \mathbb{N}$ esetén $h_k^- \parallel h_\ell^-$, $h_k \parallel h_\ell$ és $h_k^+ \parallel h_\ell^+$, az egész számmal vett szorzás definíciója és a kötött vektorokra bizonyított párhuzamos szelők tétele alapján.

Legyen S egy tetszőleges pont az $\overline{RQ}$ szakaszon, és legyen $e = Q^-S$. A **Pasch-axióma** szerint létezik az $S^+ := e \cap \overline{RQ^+}$ pont. Az S és S^+ ponton is pontosan egy az f egyenessel párhuzamos egyenes van. Legyenek ezek rendre s és s^+ .

Mint hogy az s és s^+ egyenesek párhuzamosak az f és g egyenesekkel, a velük nem párhuzamos h_n és h_n^+ egyenest rendre metszik valamely egyértelmű S_n és S_n^+ pontokban, melyek az f és g ugyanazon fűlsíkjába esnek, mint S és S^+ , amiért $S_n = s \cap \overline{R_nQ_n^-}$ és $S_n^+ = PS^+ \cap \overline{R_nQ_n^+}$.

Az RQ^-S^+ és az $R_nQ_n^-S_n^+$ háromszögek az f, g, s^+ egyenesek ideális pontjára nézve perspektívek, ezért a **nyitott könyv tulajdonság** szerint a $h^- \parallel h_n^-$ és $h^+ \parallel h_n^+$ relációkból $Q^-S^+ \parallel Q_n^-S_n^+$ következik.

Ugyanezt a gondolatmenetet alkalmazva az RQ^-S és az $R_nQ_n^-S_n$ háromszögekre, $Q^-S \parallel Q_n^-S_n$ adódik.

Eszerint a Q_n^- , az S_n és az S_n^+ pontok egy az e egyenessel párhuzamos e_n egyenesre esnek.

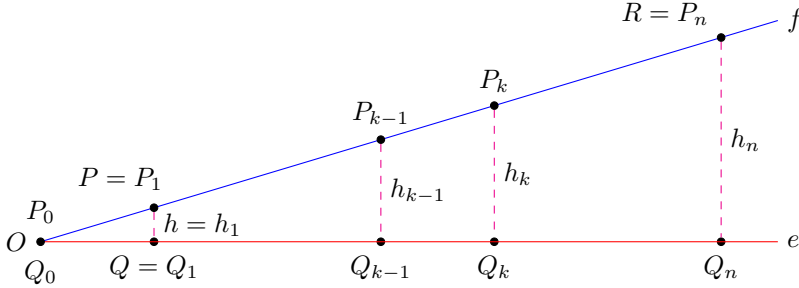
Mivel $Q \in \overline{Q^-Q^+}$, a $Q^-Q^+S^+$ háromszögre és RQ egyenesre alkalmazva a **Pasch-axiómát**, $S \in \overline{Q^-S^+}$ adódik. Eszerint az s^+ és f egyenesek az s egyenes különböző oldalára esnek, amiért $S_n \in \overline{Q_n^-S_n^+}$. Ezt és a **Pasch-axiómát** alkalmazva a $Q_n^-S_n^+Q_n^+$ háromszögre és R_nS_n egyenesre éppen a bizonyítandó $Q_n \in \overline{Q_n^-Q_n^+}$ bizonyosodik be. ■

Tétel. *Pozitív $n \in \mathbb{N}$ és $v \in \mathcal{V}$ esetén pontosan egy olyan $x \in \mathcal{V}$ van, hogy $nx = v$.*

Bizonyítás. *Unicitás.* Tegyük fel, hogy $nx = v = ny$, és így $n(x - y) = \mathbf{0}$ is teljesül.

Legyen $x - y = \overline{PR}$. Ha $P \neq R$, akkor az X_P függvény első változó szerinti szigorú monotonitása miatt $P = X_P(0, R) \prec X_P(1, R) \prec \dots \prec X_P(n, R) = P$. Ez ellentmondás, tehát $R = P$, vagyis $x - y = \mathbf{0}$, amiért $x = y$.

Egzisztencia. Ha $\mathbf{v}$ a nullvektor, akkor az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ a megoldás. Tegyük fel, hogy $(O, R) \in \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Válasszunk egy $Q_1 \notin OR = f$ pontot, és jelölje e az OQ egyenest.



Legyen $Q_k = X_P(k, Q)$ minden $k \leq n$, $k \in \mathbb{N}$ esetén. Vegyük minden Q_k ponton keresztül azt a h_k egyenest, amely párhuzamos a $Q_n R$ egyenessel. Legyen $P_k = h_k \cap f$ ($1 \leq k \leq n$), valamint $P_0 = O$. A kötött vektorokra érvényes párhuzamos szelők tétele szerint ekkor $(P_{k-1}, P_k) \stackrel{P}{\sim} (O, P_1)$ minden $1 \leq k \leq n$ esetén, hiszen $(Q_{k-1}, Q_k) \stackrel{P}{\sim} (O, Q_1)$ is teljesül ugyanazon $k \in \mathbb{N}$ számokra. Eszerint

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \cdots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n} = n \cdot \overrightarrow{OP_1},$$

ami megoldandó egyenletünkre az $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP_1}$ megoldást adja. ■

Fontos, hogy a bizonyítás nem használja X_P első változóbeli monotonosságát.

Definíció. Minden $q \in \mathbb{Q}$ racionális számra az $n\mathbf{x} = m\mathbf{v}$ egyenlet ($\mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n > 0$) egyetlen $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ megoldását az $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ szabad vektor és $q = m/n$ számmal vett *szorzatának* nevezzük, amit $q \cdot \mathbf{v}$ vagy röviden $q\mathbf{v}$ jelöl. ▲

Tétel. A szabad vektorok racionális számmal való szorzására teljesülnek a

- (1) $q \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{u}) = q \cdot \mathbf{v} + q \cdot \mathbf{u}$,
- (2) $(q + r) \cdot \mathbf{v} = q \cdot \mathbf{v} + r \cdot \mathbf{v}$,
- (3) $(q \cdot r) \cdot \mathbf{v} = q \cdot (r \cdot \mathbf{v})$

azonosságok, ahol $q, r \in \mathbb{Q}$ és $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathcal{V}$.

Bizonyítás. Legyen $q = m/n$ és $r = k/\ell$, ahol $n, \ell \in \mathbb{N}$, $m, k \in \mathbb{Z}$ és $n\ell \neq 0$.

A (3) állításra tekintve azonnal látszik, hogy annak bal oldala az $(n\ell)\mathbf{x} = (mk)\mathbf{v}$, egyenlet egyetlen megoldása. A (3) jobb oldalán szereplő $r \cdot \mathbf{v}$ szabad vektor az $\ell\mathbf{y} = k\mathbf{v}$, és így a $q(r\mathbf{v})$ szabad vektor az $n\mathbf{z} = m\mathbf{y}$ egyenlet egyetlen megoldása. Ezt megszorozva az ℓ egész számmal és alkalmazva a szorzás egész számokra már ismert szabályait, az $(n\ell)\mathbf{z} = \ell(n\mathbf{z}) = \ell(m\mathbf{y}) = (\ell m)\mathbf{y} = m(\ell\mathbf{y}) = m(k\mathbf{v}) = (mk)\mathbf{v}$ egyenlethez jutunk, amiből látszik, hogy $\mathbf{z}$ az $(n\ell)\mathbf{z} = (mk)\mathbf{v}$ egyenlet egyetlen megoldása, vagyis $\mathbf{z} = \mathbf{x}$, ahogy azt (3) állítja.

Az (1) és (2) azonosság a (3) alkalmazásával úgy vezethető vissza az egész számok esetére, ha a képletekben szereplő racionális számok nevezőinek valamely közös többszörösével megszorozzuk őket. ■

A továbbiakban tetszőleges P és Q különböző pontokra és $q \in \mathbb{Q}$ racionális számra $X_P(q, Q)$ azt a pontot jelöli a PQ egyenesen, melyre $\overrightarrow{PX_P(q, Q)} = q\overrightarrow{PQ}$ teljesül. Kiegészítésképpen $X_P(q, P) := P$ minden $q \in \mathbb{Q}$ számra.

Jegyezzük meg, hogy X_P ezen meghatározása az eddigi kiterjesztése, ráadásul olyan módon, hogy annak tulajdonságai megmaradnak. Figyeljük meg, hogy a most igazolt (3) tulajdonság alapján $X_P(q, X_P(r, Q)) = X_P(q \cdot r, Q)$, ha $q \in \mathbb{Q}$.

Tétel. (Racionálissal szorzás monotonossága) *Legyen a P pont az e egyenesen. Az X_P függvényt a második változójában az e egyenesre megszorítva, az egyenes rendezésére nézve mindkét változójában szigorúan monoton függvényt kapunk.*

Bizonyítás. Legyen $Q \in e$ olyan pont, melyre $P \prec Q$ az e választott irányításában.

Legyen $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ és $q^- = \frac{m^-}{n^-} \leq q^0 = \frac{m^0}{n^0} \leq q^+ = \frac{m^+}{n^+}$, ahol $q^-, q^0, q^+ \in \mathbb{Q}$ és $n^-, n^0, n^+ \in \mathbb{N}$, $m^-, m^0, m^+ \in \mathbb{Z}$. Legyen továbbá $Q^- = X_P(q^-, Q)$, $Q^0 = X_P(q^0, Q)$ és $Q^+ = X_P(q^+, Q)$.

Vegyük az $n = n^-n^0n^+$ számot és a $Q_n^- = X_P(n, Q^-)$, $Q_n^0 = X_P(n, Q^0)$ valamint $Q_n^+ = X_P(n, Q^+)$ pontokat. Ekkor

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ_n^-} &:= n\overrightarrow{PQ^-} = m^-n^0n^+\mathbf{v}, & \overrightarrow{PQ_n^0} &:= n\overrightarrow{PQ^0} = n^-m^0n^+\mathbf{v}, \\ \overrightarrow{PQ_n^+} &:= n\overrightarrow{PQ^+} = n^-n^0m^+\mathbf{v}.\end{aligned}$$

Az egészzel szorzás monotonitása szerint $Q_n^0 \in \overline{Q_n^-Q_n^+}$, hiszen $m^-n^0n^+ \leq n^-m^0n^+ \leq n^-n^0m^+$. Az X_P függvény második argumentuma szerinti monotonitásának következtében így Q^- és Q^+ közrefogja a Q^0 pontot.

A $Q' = X_P(\frac{m}{n}, Q)$ ($m, n \in \mathbb{Z}$) pont monoton függése a Q ponttól közvetlenül következik az $X_P(n, Q') = X_P(m, Q)$ összefüggésből, hiszen mindkét oldal szigorúan monoton a második változójában. ■

1.2.1. Lemma. *Legyenek P és Q különböző pontok, és válasszuk a PQ egyenesnek azt az irányítását, melyre $P \prec Q$. Ekkor $P = \liminf \{X_P(q, Q) : 0 < q \in \mathbb{Q}\}$.*

Bizonyítás. A $\mathcal{Q} := \{X_P(q, Q) : 0 < q \leq 1, q \in \mathbb{Q}\}$ halmaz nem üres, hiszen a Q pont benne van, és a $\overline{PQ}$ szakasz része az X_P első változó szerinti monotonossága miatt. A **Dedekind-axióma** értelmében ezért létezik az $R := \liminf \mathcal{Q}$ alsó határ.

Indirekt módon tegyük fel, hogy $P \prec R$. Ekkor tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ szám esetén

$$X_P(m, R) \preceq X_P\left(m, X_P\left(\frac{1}{m}, Q\right)\right) = X_P\left(m\frac{1}{m}, Q\right) = X_P(1, Q) = Q$$

következik, vagyis az egésszel szorzás monotonitása miatt a $\overline{PR}$ szakasz minden belső S pontjára és minden $m \in \mathbb{N}$ számra $X_P(m, S) \prec Q$ teljesül. Ebből viszont minden $m \in \mathbb{N}$ és $T \in \overline{PX_P(2, R)}$ pontra $X_P(m, T) = X_P(m, X_P(2, S)) = X_P(2m, S) \prec Q$ következik, ahol $2\overline{PS} = \overline{PT}$.

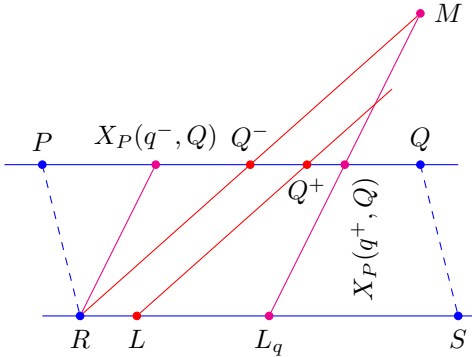
Mivel R a Q alsó határa és $P \prec R \prec X_P(2, R)$, a $\overline{RX_P(2, R)}$ szakaszon lennie kell legalább egy $S_q = X_P(q, Q) \in Q$ pontnak. Mivel $q > 0$ racionális, léteznek olyan $0 < m, n \in \mathbb{N}$ számok, hogy $q = m/n$, amiért

$$Q \prec X_P(2m, Q) = X_P(2n, X_P(q, Q)) = X_P(2n, S_q) \prec Q.$$

Ez az ellentmondás igazolja, hogy $P = R = \liminf Q$, ahogy a tétel állítja. ■

Legyen $PQSR$ nem elfajuló paralelogramma, és $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Íranyítsuk a PQ egyenest úgy, hogy $P \prec Q$, az RS egyenest pedig úgy, hogy $R \prec S$. A $Q^- = \{X_P(q, Q) \in PQ : q \leq \lambda\}$ és $Q^+ = \{X_P(q, Q) \in PQ : \lambda \leq q\}$ halmazoknak a Dedekind-axióma értelmében létezik felső illetve alsó határa: $Q^- := \limsup Q^-$ és $Q^+ := \liminf Q^+$. Az X_P monotonitása miatt tetszőleges $q^- \leq \lambda \leq q^+$ racionális számok esetén $X_P(q^-, Q) \preceq X_P(q^+, Q)$, amiért a határpontok definíciója értelmében $Q^- \preceq X_P(q^+, Q)$ és $X_P(q^-, Q) \preceq Q^+$, amiből szintén a határpontok definíciója alapján $Q^- \preceq Q^+$.

Ha valamely racionális $q^- \leq \lambda \leq q^+$ számokra $Q^- = X_P(q^-, Q)$ vagy $Q^+ = X_P(q^+, Q)$ teljesül, akkor a határpontok definíciója alapján $Q^- = Q^+$.



Ha $Q^- \prec Q^+$, akkor az eddigiek alapján tetszőleges $q^- \leq \lambda \leq q^+$ racionális számokra

$$X_P(q^-, Q) \prec Q^- \prec Q^+ \prec X_P(q^+, Q).$$

Legyen L az pont, melyre $(R, L) \stackrel{p}{\sim} (Q^-, Q^+)$, L_q pedig az a pont, melyre

$$(R, L_q) \stackrel{p}{\sim} (X_P(q^-, Q), X_P(q^+, Q)).$$

Ekkor a fentiek szerint R, L és L_q páronként különböző pontok. Mivel $RQ^- \parallel RX_P(q^-, Q) \parallel L_qX_P(q^+, Q)$, létezik az $M = RQ^- \cap L_qX_P(q^+, Q)$ pont. A $Q^-X_P(q^+, Q)M$ háromszögben a Pasch-axióma és $RQ^- \parallel LQ^+$ miatt LQ^+ metszi az $MX_P(q^+, Q)$ oldalt, amit az RL_qM háromszögben nézve, ott ismét a Pasch-axiómát használva $L \in \overline{RL_q}$ adódik. Legyen $\mathcal{L} = \{L_q : 0 < q^- \leq \lambda \leq q^+ \text{ és } q^-, q^+ \in \mathbb{Q}\}$. Az RS egyeneshez választott irányításban az eddigiek alapján $R \prec L \prec L_q$ teljesül, amiért egyfelől $L \preceq \liminf \mathcal{L}$, másfelől

pedig

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RL_q} &= \overrightarrow{X_P(q^-, Q)X_P(q^+, Q)} = \overrightarrow{PX_P(q^+, Q)} - \overrightarrow{PX_P(q^-, Q)} \\ &= q^+ \overrightarrow{PQ} - q^- \overrightarrow{PQ} = (q^+ - q^-) \overrightarrow{PQ} = (q^+ - q^-) \overrightarrow{RS}.\end{aligned}$$

Eszerint $\mathcal{L} = \{X_R(q, S) : 0 < q \in \mathbb{Q}\}$, amiből az 1.2.1. lemma szerint $R = \liminf \mathcal{L}$ adódik. Ez az ellentmondás azt mutatja, hogy feltételezésünkkel szemben, valójában $Q^- = Q^+$.

Mivel $\overrightarrow{PX_P(q, Q)} = \overrightarrow{X_P(-q, Q)P}$, eredményünk bizonyítja a következő tételt.

Tétel. Bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ és $P \neq Q$ pont esetén ha a PQ egyenes $\prec$ rendezésében $P \prec Q$, akkor

$$\limsup\{X_P(q, Q) \in PQ : \lambda \geq q \in \mathbb{Q}\} = \liminf\{X_P(q, Q) \in PQ : \lambda \leq q \in \mathbb{Q}\}.$$

Ez lehetővé teszi X_P kiterjesztését a valós számok halmazára.

Definíció. Minden $\lambda \in \mathbb{R}$, $P \neq Q$ pont és a PQ egyenes $\prec$ rendezésében legyen

$$X_P(\lambda, Q) := \begin{cases} \liminf\{X_P(q, Q) \in PQ : \lambda \leq q \in \mathbb{Q}\}, & \text{ha } P \prec Q, \\ \limsup\{X_P(q, Q) \in PQ : \lambda \geq q \in \mathbb{Q}\}, & \text{ha } Q \prec P. \end{cases}$$

Legyen továbbá $X_P(\lambda, P) = P$ minden $\lambda \in \mathbb{R}$ és P pont esetén. ▲

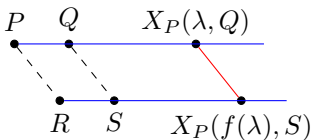
Fontos megjegyezni, hogy az előbbi tétel miatt $X_P(\lambda, Q)$ nem függ a PQ egyenesen választott irányítástól, hiszen a $\prec$ rendezés helyett a $\succ$ rendezést választva csak a definiáló egyenlőség eseteinek sorrendje változik.

Vegyük továbbá észre, hogy a definíció nyilvánvaló következményeként a most megadott X_P függvény az eddigi kiterjesztése. Látni fogjuk, hogy ez a kiterjesztés megőrzi minden korábbi tulajdonságot.

A $\liminf$ és $\limsup$ határok definíciója világossá teszi, hogy X_P szigorúan monoton az első változójában, valamint ha megszorítjuk a második változót egy $e \ni P$ egyenes pontjaira, akkor X_P a második változójában is szigorúan monoton.

Tétel. Ha $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, akkor $\overrightarrow{PX_P(\lambda, Q)} = \overrightarrow{RX_R(\lambda, S)}$ minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén.

Bizonyítás. Ha $P = R$ vagy $Q = S$, akkor az egyértelmű reprezentálás tétele mindkét egyenlőség teljesül, így a tétel állítása is nyilvánvalóan teljesül.



Tegyük most fel, hogy $R \notin PQ$, és definiáljuk az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt azzal, hogy tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $X_R(f(\lambda), S)$ az a pont, amelyre az $X_P(\lambda, Q)X_R(f(\lambda), S)$ egyenes párhuzamos a PR

egyenessel. Ez az f függvény szigorúan monoton, hiszen két párhuzamos egyenes bármelyike a másiknak egyetlen félsíkjában van.

Ha λ racionális, akkor $\overrightarrow{PX_P(\lambda, Q)} = \lambda \overrightarrow{PQ} = \lambda \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RX_R(\lambda, S)}$, amiért az f függvény a racionális számokon identikus, vagyis $f(m/n) = m/n$ minden $m, n \in \mathbb{Z}$ és $n > 0$ esetén. A monotonitás miatt ebből

$$\begin{aligned} \lambda &= \limsup\{r : \mathbb{Q} \ni r < \lambda\} = \limsup\{f(r) : \mathbb{Q} \ni r < \lambda\} \\ &\leq f(\lambda) \leq \limsup\{f(s) : \lambda < s \in \mathbb{Q}\} = \liminf\{s : \lambda < s \in \mathbb{Q}\} = \lambda \end{aligned}$$

következik, vagyis f az identikus leképezés.

Eszerint a PR egyenessel párhuzamos $X_P(\lambda, Q)X_R(f(\lambda), S)$ egyenes valójában az $X_P(\lambda, Q)X_R(\lambda, S)$ egyenes, ami igazolja az állítást. ■

Definíció. Minden $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ szabad vektorra és minden $\lambda \in \mathbb{R}$ valós számra $\lambda \cdot \mathbf{v}$ az a szabad vektor, melyre $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ esetén $\lambda \cdot \overrightarrow{PQ} := \overrightarrow{PX_P(\lambda, Q)}$. ▲

Fentiek szerint $\lambda \cdot \mathbf{v}$ valóban csak a $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektortól és a $\lambda \in \mathbb{R}$ számtól függ.

Tétel. *Tetszőleges $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ szám és $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathcal{V}$ szabad vektorok esetén*

- (1) $(\lambda\mu)\mathbf{v} = \lambda(\mu\mathbf{v})$, és
- (2) $(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}$.

Bizonyítás. (1) Defináljuk az $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt most úgy, hogy $f(\lambda, \mu)\mathbf{v} = \lambda(\mu\mathbf{v})$ minden $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ esetén. Ekkor $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ esetén $\overrightarrow{PX_P(f(\lambda, \mu), Q)} = \overrightarrow{PX_P(\lambda, X_P(\mu, Q))}$, amiből $X_P(f(\lambda, \mu), Q) = X_P(\lambda, X_P(\mu, Q))$ következik. Az X_P szigorú monotonitása miatt ebből az f függvény szigorú monotonitása adódik mindkét változóban. Racionális λ és μ esetén $f(\lambda, \mu) = \lambda\mu$, így

$$\begin{aligned} \lambda\mu &= \limsup\{f(r, s) : \mathbb{Q} \ni r < \lambda, \mathbb{Q} \ni s < \mu\} \\ &\leq f(\lambda, \mu) \leq \liminf\{f(r, s) : \lambda < r \in \mathbb{Q}, \mu < s \in \mathbb{Q}\} = \lambda\mu \end{aligned}$$

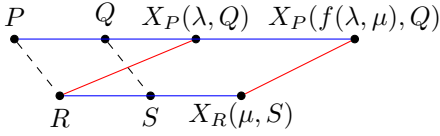
következik, vagyis $f(\lambda, \mu) = \lambda\mu$, ami az állítás volt.

(2) Defináljuk az $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy $f(\lambda, \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}$ minden $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ esetén. Legyen $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$, $R \notin PQ$, és legyen S az a pont, melyre $\mathbf{v} = \overrightarrow{RS}$.

Ekkor minden $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ számra

$$\begin{aligned} \overrightarrow{X_P(\lambda, Q)X_P(f(\lambda, \mu), Q)} &= \overrightarrow{PX_P(f(\lambda, \mu), Q)} - \overrightarrow{PX_P(\lambda, Q)} \\ &= f(\lambda, \mu)\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mu\mathbf{v} = \overrightarrow{RX_R(\mu, S)}, \end{aligned}$$

ami ekvivalens $RX_P(\lambda, Q)$ és $X_R(\mu, S)X_P(f(\lambda, \mu), Q)$ párhuzamosságával.



Minthogy ez minden $\mu \in \mathbb{R}$ esetén teljesül, az $X_R(\mu, S)X_P(f(\lambda, \mu), Q)$ egyenesek párhuzamosak egymással, amiért az f függvény szigorúan monoton a második változójában, hiszen két párhuzamos egyenes egymás egy-egy félsíkjában van. Ugyanakkor a szabad vektorok összeadásának kommutativitása miatt $f(\lambda, \mu) = f(\mu, \lambda)$, tehát az f függvény mindkét változójában szigorúan monoton.

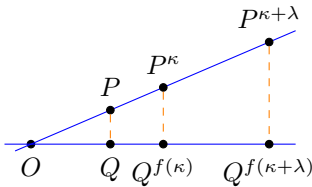
Tudjuk, hogy racionális λ és μ esetében $f(\lambda, \mu) = \lambda + \mu$, amiből

$$\begin{aligned} \lambda + \mu &= \limsup \{f(r, s) : \mathbb{Q} \ni r < \lambda, \mathbb{Q} \ni s < \mu\} \\ &\leq f(\lambda, \mu) \leq \liminf \{f(r, s) : \lambda < r \in \mathbb{Q}, \mu < s \in \mathbb{Q}\} = \lambda + \mu, \end{aligned}$$

vagyis $f(\lambda, \mu) = \lambda + \mu$ következik, ahogy az állítás szól. ■

Párhuzamos szelők tétele. A nem kollineáris O, P, Q pontokra és minden $\lambda, \mu \neq 0$ valós számra $PQ \parallel X_O(\lambda, P)X_O(\mu, Q)$ akkor és csak akkor, ha $\lambda = \mu$.

Bizonyítás. A jelölés egyszerűsítése érdekében legyen $P^\lambda := X_O(\lambda, P)$ és $Q^\mu := X_O(\mu, Q)$, valamint definiáljuk az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy $P^\lambda Q^{f(\lambda)} \parallel PQ$ minden $\lambda \in \mathbb{R}$ számra. Ekkor persze $f(1) = 1$.



Az f függvény szigorúan monoton növekvő, mert másrészt a **Pasch-axióma** szerint a $\overline{P^\lambda Q^{f(\lambda)}}$ szakaszok metszenék egymást. Előbbi tételünk szerint

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P^\kappa P^{\kappa+\lambda}} &= \overrightarrow{OP^{\kappa+\lambda}} - \overrightarrow{OP^\kappa} = (\kappa + \lambda)\overrightarrow{OP} - \kappa\overrightarrow{OP} \\ &= \lambda\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP^\lambda}, \end{aligned}$$

amiből $(P^\kappa, P^{\kappa+\lambda}) \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} (O, P^\lambda)$ következik. A kötött vektorokra érvényes párhuzamos szelők tétele értelmében ebből $(Q^{f(\kappa)}, Q^{f(\kappa+\lambda)}) \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} (O, Q^{f(\lambda)})$, amiből

$$f(\kappa + \lambda)\overrightarrow{OQ} - f(\kappa)\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{Q^{f(\kappa)}Q^{f(\kappa+\lambda)}} = \overrightarrow{OQ^{f(\lambda)}} = f(\lambda)\overrightarrow{OQ}$$

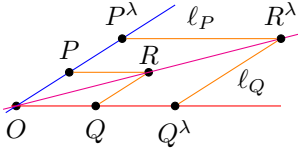
adódik. Ismét előbbi tételünk alapján tehát $f(\kappa + \lambda) = f(\kappa) + f(\lambda)$.

A **Függelék F.10.** szakasza értelmében egy szigorúan monoton, additív függvény homogén is, vagyis $f(\lambda) = c \cdot \lambda$ valamely $c \in \mathbb{R}$ számra. Mivel azonban $f(1) = 1$, ebből $f(\lambda) = \lambda$ következik. Ez igazolja a tétel „akkor” részét.

A fordított irányú következtetéshez csak azt kell észrevenni, hogy a most igazolt állítás szerint a $P^\lambda Q^\lambda$ egyenes párhuzamosak a PQ egyenessel, és a párhuzamossági axióma szerint a P^λ ponton keresztül csak egy párhuzamos húzható a PQ egyenessel. ■

Tétel. Minden $\lambda \in \mathbb{R}$ szám és $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathcal{V}$ szabad vektorok esetén $\lambda(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = \lambda\mathbf{v} + \lambda\mathbf{u}$.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{u} = \overrightarrow{OQ}$, $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \overrightarrow{OR}$ és minden $\lambda \neq 0$ valós számra $P^\lambda = X_O(\lambda, P)$, $Q^\lambda = X_O(\lambda, Q)$ valamint $R^\lambda = X_O(\lambda, R)$.



A párhuzamos szelők tétele értelmében a P^λ ponton áthaladó, az OQ egyenessel párhuzamos ℓ_P egyenes az R^λ pontban metszi az OR egyenest. Ugyanezen okból a Q^λ ponton áthaladó, az OP egyenessel párhuzamos ℓ_Q egyenes is az R^λ pontban metszi az OS egyenest.

Eszерint $OP^\lambda R^\lambda Q^\lambda$ egy paralelogramma, ami igazolja az állítást. ■

Az eddigiek alapján megállapíthatjuk a következőt.

Tétel. A szabad vektorok $\mathcal{V}$ halmaza a fentebb definiált $+$ összeadás és $\lambda \cdot$ valóssal való „szorzási” műveletekkel $(\mathcal{V}, +, \{\lambda \cdot\}_{\lambda \in \mathbb{R}})$ vektorteret alkot.

Az $X_P(\cdot, Q): \mathbb{R} \rightarrow PQ$ ($\lambda \mapsto X_P(\lambda, Q)$) leképezésről már igazoltuk, hogy injektív, hiszen az első változóban szigorúan monoton. Belátjuk, hogy szürjektív is.

1.2.2. Tétel. Tetszőleges $P \neq Q$ és $R \in PQ$ ponthoz pontosan egy olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ szám létezik, melyre $R = X_P(\lambda, Q)$.

Bizonyítás. A λ egyértelmősége az $X_P(\cdot, Q)$ injektivitása, amit már igazoltunk.

Tekintsük az $e = PQ$ egyenesen azt a rendezést, melyre $P \prec Q$. Ekkor az $X_P(\cdot, Q)$ szigorúan monoton növvő. Tekintsük a nem üres

$$\mathbb{Q}^- = \{q \in \mathbb{Q} : X_P(q, Q) \preceq R\}, \quad \mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} : R \preceq X_P(q, Q)\}$$

halmazokat. A valós számok halmazán is érvényes a **Dedekind-axióma**, ezért a $\varrho^- = \limsup \mathbb{Q}^-$ és $\varrho^+ = \liminf \mathbb{Q}^+$ valós számok léteznek. Mivel $\mathbb{Q}^+$ egyetlen eleme sem kisebb mint $\mathbb{Q}^-$ elemei, ϱ^- sem nagyobb $\mathbb{Q}^+$ egyetlen eleménél sem, ezért $\varrho^- \leq \varrho^+$.

Ha $\varrho^- < \varrho^+$, akkor van olyan $q \in \mathbb{Q}$ szám, melyre $\varrho^- < q < \varrho^+$, és így ϱ^- felsőhatár-tulajdonsága miatt $q \notin \mathbb{Q}^-$, amiért $R \prec X_P(q, Q)$, ϱ^+ alsóhatár-tulajdonsága miatt pedig $q \notin \mathbb{Q}^+$, amiért $X_P(q, Q) \prec R$, ami ellentmondás, tehát $\varrho^- = \varrho^+$.

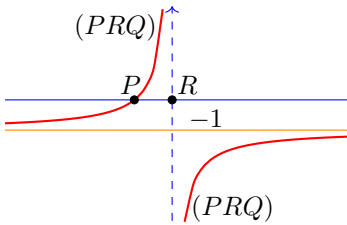
A **Dedekind-axióma** miatt az $R^- = \limsup \{X_P(q, Q) : q \in \mathbb{Q}^-\}$ és $R^+ = \limsup \{X_P(q, Q) : q \in \mathbb{Q}^+\}$ pontok is léteznek, és nyilván $R^- \preceq R \preceq R^+$. Mivel azonban a $\{q^+ - q^- : q^+ \in \mathbb{Q}^+ \text{ és } q^- \in \mathbb{Q}^-\}$ elemei közt minden pozitív racionális szám előfordul, az 1.2.1. lemma értelmében $R^- = R = R^+$.

Mivel $X_P(\cdot, Q)$ monoton, R^- és R^+ felső, illetve alsó határ, $R = R^- \preceq X_P(\varrho^-, Q) = X_P(\varrho^+, Q) \preceq R^+ = R$ következik, vagyis $R = X_P(\varrho^-, Q)$, ami bizonyítja az állítást. ■

Eredményünket a szabad vektorokra átfogalmazva a következőt látjuk.

Tétel. *Különböző P és Q pontok esetén akkor és csak akkor van olyan λ valós szám, melyre $\overrightarrow{PR} = \lambda \overrightarrow{PQ}$, ha $R \in PQ$, és ilyenkor a λ szám egyértelmű is.*

Definíció. A rendezett, kollineáris, mind különböző P, Q, R ponthármas affin *osztóviszonyának* nevezzük azt a (PRQ) számot, melyre $(PRQ)\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PQ}$ érvényes. Ha $R = Q$, akkor (PRQ) értékét végtelennek tekintjük. ▲



Az osztóviszonyra több azonosság is felfedezhető, például $(PRQ)(RPQ) = 1$, de ezekre most nem térünk ki. Könnyű látni, hogy az $Q \mapsto (PRQ)$ függvény (szigorúan monoton) bijektív kapcsolatba hozza a PR egyenes R pontból induló P pontot tartalmazó félegyenesét a $(-1, +\infty)$ intervallummal, míg a másik R pontból induló félegyenesét a $(-\infty, -1)$ intervallummal. Ezek miatt a PR egyenes ∞ ideális pontjára szokásos a $(PR\infty) := -1$ kiterjesztést tenni.

A párhuzamos szelők tétele mutatja, hogy az osztóviszony szoros kapcsolatban áll a párhuzamossággal, amelynek tartása az egyenességet tartó leképezések között a kollineációk jellemzője. Most nem bizonyítjuk — mert a koordinátázások vizsgálatából szinte ajándékba fogjuk kapni —, hogy pontosan a kollineációk tartják az osztóviszonyt.

1.2.2. Helyvektorok

Minden O pont és minden $\mathbf{v}$ szabad vektor esetén jelölje $\mathbf{v}_O$ a rendezett $(O, \mathbf{v})$ pont–vektor-párt.

Definíció. A bármely O pont rögzítése mellett a szabad vektorokhoz fentebbi módon rendelt pont–vektor-párokat O pontból induló *helyvektoroknak* nevezzük. ▲

A P ponthoz tartozó $(O, \overrightarrow{OP})$ helyvektorokat P_O jelöli, a P pontot a P_O helyvektor végpontjának hívjuk. Ezzel a jelöléssel $P_O = (\overrightarrow{OP})_O$. Az O pont által meghatározott helyvektorok halmazát $T_O\mathfrak{S}$ jelöli.

Két helyvektor összegét és $\lambda \in \mathbb{R}$ számmal vett szorzatát úgy definiáljuk, hogy

$$\mathbf{v}_O + \mathbf{u}_O := (\mathbf{v} + \mathbf{u})_O \quad \text{és} \quad \lambda \cdot \mathbf{v}_O := (\lambda \mathbf{v})_O.$$

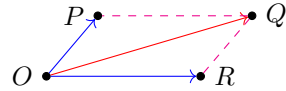
Tétel. *A helyvektorok a megadott műveletekkel vektorteret alkotnak.*

Bizonyításként elég arra gondolni, hogy a szabad vektorok és a helyvektorok $(T_O \mathfrak{S}; +, \{\lambda \cdot\}_{\lambda \in \mathbb{R}})$ vektortere közti $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}_O$ bijektív leképezés a definíció folytán felcserélhető a műveletekkel, így a szabad vektorok és a helyvektorok vektortere kanonikusan izomorf.

Paralelogramma-szabály. Az $OPQR$ négyszög akkor és csak akkor paralelogramma, ha $Q_O = P_O + R_O$.

Bizonyítás. Mivel

$$\begin{aligned} Q_O &= (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ})_O = (\overrightarrow{OP})_O + (\overrightarrow{PQ})_O, \\ P_O + R_O &= (\overrightarrow{OP})_O + (\overrightarrow{OR})_O, \end{aligned}$$



a $Q_O = P_O + R_O$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $(\overrightarrow{PQ})_O = (\overrightarrow{OR})_O \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OR} \Leftrightarrow (P, Q) \stackrel{p}{\sim} (O, R)$. Utóbbi definíció szerint pontosan akkor teljesül, ha a $OPQR$ négyszög egy paralelogramma. Ez a tétel állítása. ■

Tétel. A sík P, Q és R pontjai akkor és csak akkor kollineárisak, ha valamely $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ valós számokra $\lambda + \mu = 1$, és $R_O = \lambda P_O + \mu Q_O$. Páronként különböző kollineáris P, Q és R pontok esetén az $\omega = (PQR)$ osztóviszonyra $\omega = \lambda/\mu$, $\mu(1 + \omega) = \omega$ és $\lambda(1 + \omega) = 1$ teljesül.

Bizonyítás. Ha a P, Q és R pontok kollineárisak, és R egybeesik a P vagy a Q ponttal, akkor rendre $R_O = 1 \cdot P_O + 0 \cdot Q_O$ és $R_O = 0 \cdot P_O + 1 \cdot Q_O$. Ha a P, Q és R pontok páronként különböznek, akkor az $\omega = (PQR) \neq -1$ osztóviszonyukból képezzük a $\mu = \omega/(1 + \omega)$ és $\lambda = 1/(1 + \omega)$ valós számokat! Ezekre $\lambda + \mu = 1$ és $\omega = \lambda/\mu$ is teljesül, továbbá

$$\begin{aligned} 0 &= (\overrightarrow{PR} - \omega \overrightarrow{RQ})_O = (\lambda \overrightarrow{PR} - \mu \overrightarrow{RQ})_O = \lambda(R_O - P_O) - \mu(Q_O - R_O) \\ &= (\lambda + \mu)R_O - \lambda P_O - \mu Q_O, \end{aligned}$$

ami igazolja a tétel „csak akkor” részét.

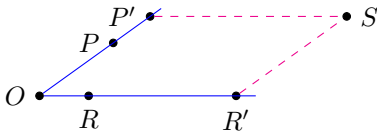
Legyen most a $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ valós számokra $\lambda + \mu = 1$ és $R_O = \lambda P_O + \mu Q_O$. Ha a λ és μ számok egyike 0, akkor a másik 1, ezért R egybeesik a P és Q pontok egyikével, tehát a P, Q és R pontok kollineárisak. Ha a $\lambda\mu \neq 0$, akkor

$$\begin{aligned} 0 &= R_O - \lambda P_O - \mu Q_O = (\lambda + \mu)R_O - \lambda P_O - \mu Q_O \\ &= \lambda(R_O - P_O) - \mu(Q_O - R_O) = \lambda \overrightarrow{PR}_O - \mu \overrightarrow{RQ}_O = \left(\frac{\lambda}{\mu} \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{RQ} \right)_O, \end{aligned}$$

amiért a P, Q és R pontok kollineárisak, továbbá $\omega = (PQR) = \lambda/\mu$. Ebből $\mu(1 + \omega) = \omega$ és $\lambda(1 + \omega) = 1$ következik, ami igazolja a tétel „akkor” részét. ■

Tétel. *A sík helyvektortere kettő dimenziósak.*

Bizonyítás. Legyenek a síkban a P és R pontok olyanok, hogy O , P és R nem kollineáris. Ahogy korábban már láttuk, bármely S ponton át párhuzamos egyeneseket húzva az OP és OR egyenesekkel, ezek metszetei rendre az OR és OP egyenesekkel olyan P' és R' pontok, hogy $OP'SR'$ paralelogramma.



Ekkor $S_O = P'_O + R'_O = \kappa P_O + \mu R_O$ valamely κ és μ valós számra, vagyis minden helyvektor előáll a P_O és R_O helyvektorok lineáris kombinációjaként. Mivel P , O és R nem kollineáris, P_O és R_O nem lehet egymás valóssal

vett szorzata, ezért függetlenek is. Ezek szerint $\{P_O, R_O\}$ az $T_O\mathfrak{S}$ helyvektortér bázisa. ■

1.3. Koordinátázások és transzformációk

Ahogy az 1.2.2. tételben már láttuk, bármely e egyenes különböző O, P pontjai által definiált $X_O(\lambda, P) \mapsto \lambda$ leképezés bijektíven és rendezéstartóan rendeli az e egyenes pontjaihoz a valós számokat. Ehhez hasonló eljárás a sík esetében is létezik.

Tétel. *A sík pontjaihoz bijektíven rendelhetők rendezett számpárok az $\mathbb{R}^2$ halmazból.*

Bizonyítás. Legyen O egy pont, $T_O\mathfrak{S}$ pedig az ebből induló helyvektorok tere. Jelölje ξ_O a bijektív $P \mapsto P_O$ hozzárendelést.

Legyen $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ az $T_O\mathfrak{S}$ egy bázisa. Ekkor minden $\mathbf{s} \in T_O\mathfrak{S}$ helyvektor előáll $\mathbf{s} = \kappa_{\mathbf{s}}\mathbf{u} + \lambda_{\mathbf{s}}\mathbf{v}$ alakban. Jelölje a bijektív $\mathbf{s} \mapsto (\kappa_{\mathbf{s}}, \lambda_{\mathbf{s}})$ hozzárendelést $\chi_{\mathcal{B}}$. Ekkor a $\varphi = \chi_{\mathcal{B}} \circ \xi_O$ a kívánt tulajdonságú $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezés. ■

Definíció. A fentiek szerint definiált $\varphi = \chi_{\mathcal{B}} \circ \xi_O: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^2$ bijektív leképezést a sík *koordinátázásának* nevezzük.

A koordinátázások során kapott rendezett valós számpárokat koordinátáknak, ezek halmazát *koordinátatérnek* hívjuk.

A sík azon egyeneseit, melyek tartalmazzák az origót és a választott bázis elemeinek végpontjait, a *koordinátázás tengelyeinek* nevezzük. ▲

Ha egy φ koordinátázás esetén $\varphi(P) = (x, y)$, akkor azt mondjuk, hogy P a sík (x, y) -koordinátájú pontja, és erre használjuk a $P = (x, y)$ jelölést is, amikor maga a φ koordinátázás megadása nem szükséges.

Fontos felismerni, hogy az előbbi tételünk bizonyításában használt $\chi_{\mathcal{B}}$ leképezés a helyvektorteret ugyanúgy a rendezett valós számpárokkal koordinátázza. Konkrétan ha $P_O = \kappa\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$, akkor $\chi_{\mathcal{B}}(P_O) = (\kappa, \lambda) = \varphi(P)$.

Tétel. Az $\mathbb{R}^2$ koordinátatér vektorteret alkot az

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) + (y_1, y_2) &:= (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \text{ és} \\ \lambda \cdot (x_1, x_2) &:= (\lambda x_1, \lambda x_2) \quad (\lambda \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

műveletekkel, ahol $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

A vektortér-feltételek ellenőrzése olyan egyszerű ebben az esetben, hogy a bizonyítás az olvasóra marad. Sőt, a $T_O\mathfrak{S}$ koordinátázását végző χ_B leképezéssel könnyen látható az alábbi állítás, melynek igazolása szintén az olvasóra hárul.

Tétel. A sík minden $T_O\mathfrak{S}$ helyvektortere izomorf az $(\mathbb{R}^2, +, \{\lambda \cdot\}_{\lambda \in \mathbb{R}})$ vektortérrel.

Érdeemes felfigyelni arra, hogy ez az izomorfia nem kanonikus, vagyis nem független a bázis, tehát χ_B megválasztásától, pedig a sík helyvektorterei kanonikusan izomorfak $T_P\mathfrak{S} \ni v_P \mapsto v_Q \in T_Q\mathfrak{S}$ izomorfia miatt.

Tétel. A sík egy g részhalmaza akkor és csak akkor egyenes, ha minden koordinátázáshoz léteznek olyan $a, b, c \in \mathbb{R}$ valós számok, hogy $(a, b) \neq (0, 0)$, és a sík (x, y) koordinátájú pontja pontosan akkor eleme a g ponthalmaznak, amikor $ax + by = c$ teljesül.

Bizonyítás. Ha g egy az O origón átmenő egyenes, akkor — ahogy azt már láttuk — bármely nem az origóba eső G pontjára igaz, hogy

$$g = \{P \in \mathcal{S} : P_O = \lambda G_O, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Ha a G pont koordinátája $(-b, a)$, akkor $(a, b) \neq (0, 0)$, és így g pontosan azon pontokból áll, melyek (x, y) koordinátáira $(x, y) = \lambda(-b, a) = (-\lambda b, \lambda a)$, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$. Ezek viszont pontosan azok az (x, y) koordináták, melyekre $ax + by = 0$.

Ha most a g' egy a g egyenessel párhuzamos egyenes, és $O' \in g'$, akkor a paralelogramma-szabály szerint

$$g' = \{P' \in \mathcal{S} : P' = O'_O + \lambda G_O, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Ha az O' koordinátája (x_0, y_0) , akkor eszerint g' pontosan azon pontokból áll, melyek (x, y) koordinátáira $(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(-b, a) = (x_0 - \lambda b, y_0 + \lambda a)$, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$. Ezek éppen azok az (x, y) koordináták, melyekre $ax + by = ax_0 + by_0 =: c$ teljesül.

Ezzel beláttuk, hogy minden egyeneshez van egy $ax + by = c$ egyenlet, mely pontosan az egyenes pontjainak koordinátáira teljesül, és $(a, b) \neq (0, 0)$.

Legyen most adott egy $ax + by = c$ egyenlet, ahol $(a, b) \neq (0, 0)$. Tekintsük azt a G pontot, melynek koordinátája $(-b, a)$, és így különbözik az O ponttól. Vegyük

azt a g' egyenest, mely párhuzamos az OG egyenessel, és átmegy azon az O' ponton, amelynek koordinátája $(\frac{ac}{a^2+b^2}, \frac{bc}{a^2+b^2})$. A fentebbiek szerint pontosan ezen g' egyenes pontjainak koordinátái elégítik ki a $c = a(\frac{ac}{a^2+b^2}) + b(\frac{bc}{a^2+b^2}) = ax + by$ egyenletet.

Ezzel a tételt igazoltuk. ■

Egy $ax + by = c$ egyenletre azt mondjuk, hogy *elfajuló*, ha $a = b = 0$. Tételünk szerint minden egyenes képéhez rendelhetünk ugyan többféle nem elfajuló lineáris egyenletet is, azonban ezek megoldáshalmazai pontosan az egyenes képével egyeznek meg. Ennek alapján az $\mathbb{R}^2$ koordinátatérben a nem elfajuló $ax + by = c$ egyenletek megoldáshalmazait *koordinátaegyenesnek* nevezzük. Ezek halmazát $\mathcal{G}_k$ jelöli.

1.3.1. Tétel. *A nem elfajuló $ax + by = c$ és $a'x + b'y = c'$ egyenletek pontosan akkor határozzák meg ugyanazt a koordinátaegyeneset, ha van olyan nem nulla $\lambda \in \mathbb{R}$ szám, melyre $\lambda(a, b, c) = (a', b', c')$.*

Bizonyítás. A nem elfajuló $ax + by = c$ és $a'x + b'y = c'$ egyenletek pontosan akkor határozzák meg ugyanazt a koordinátaegyeneset, ha minden megoldásuk közös. Egyszerű helyettesítéssel kapjuk, hogy e két egyenlet közös (x, y) megoldásaira $(a'b - ab')y = a'c - ac'$ és $(ab' - a'b)x = b'c - bc'$ teljesül. Mivel ennek $a'b - ab' \neq 0$ esetén csak egyetlen közös megoldás van, egy egész közös koordinátaegyeneshez $a'b = ab'$ szükséges. Ekkor persze $a'c = ac'$ és $b'c = bc'$ is teljesül, különben nem lenne közös megoldás. Eszerint $a'(a, b, c) = (a'a, a'b, a'c) = (aa', ab', ac') = a(a', b', c')$ és ugyanígy $b'(a, b, c) = (b'a, b'b, b'c) = (ba', bb', bc') = b(a', b', c')$. Tekintve, hogy $(a, b) \neq (0, 0) \neq (a', b')$, a két egyenlőség közül legalább az egyik bizonyítja az állítást. ■

A e tétel értelmében beszélünk $ax + by = c$ (egyenletű) koordinátaegyenesről.

Azt mondjuk, hogy két koordinátaegyenes „párhuzamos”, ha nincs közös pontjuk, vagy egybeesnek.

1.3.2. Tétel. *Két koordinátaegyenes akkor és csak akkor párhuzamos, ha valamely $ax + by = c$ illetve $a'x + b'y = c'$ egyenleteikhez létezik olyan nem nulla $\lambda \in \mathbb{R}$ szám, melyre $\lambda a = a'$ és $\lambda b = b'$.*

Bizonyítás. Már láttuk, hogy az $ax + by = c$ és $a'x + b'y = c'$ egyenletű koordinátaegyenesek pontosan akkor esnek egybe, ha van olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ nem nulla szám, melyre $\lambda(a, b, c) = (a', b', c')$, ezért most csak azt az esetet kell meghatároznunk, amikor nincs közös pontjuk.

Fentebbiek szerint ha $a'b - ab' \neq 0$, akkor e két egyenletnek pontosan egy közös megoldása van.

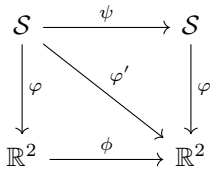
Ha $a'b - ab' = 0$, akkor ahogy fentebb már láttuk, $a'(a, b) = a(a', b')$ és $b'(a, b) = b(a', b')$, ami $(a, b) \neq (0, 0) \neq (a', b')$ miatt igazolja az állítást. ■

Mint hogy az affin sík egyenesének párhuzamossága is ugyanígy függ össze az (a, b) számpárral, azonnal adódik a következő.

Tétel. *Két egyenes a síkban akkor és csak akkor párhuzamos, ha a nekik megfelelő koordinátaegyenesek párhuzamosak.*

Mivel a koordinátaegyenesek párhuzamossága nem függ a harmadik, c konstanstól, ezért érdemes az összes egymással párhuzamos koordinátaegyenesek (ko)normálisairól beszélni. Az $ax + by = c$ egyenletű koordinátaegyenesek esetén ezek a $(\lambda a, \lambda b)$ számpárok ($\lambda \in \mathbb{R}$ nem nulla).

Nem kétséges, hogy sok különböző koordinátázás létezik, hiszen akár az origó, akár a bázis változása esetén a koordinátázás is változik.



Tekintsünk most a $\varphi = \chi_B \circ \xi_O$ és $\varphi' = \chi_{B'} \circ \xi_{O'}$ koordinátázásokat (lásd a baloldali diagramot!). Mindkét koordinátázás bijektív, ezért a

$$\begin{aligned}\phi &= \varphi' \circ \varphi^{-1} = \chi_{B'} \circ \xi_{O'} \circ \xi_O^{-1} \circ \chi_B^{-1}, \text{ és} \\ \psi &= \varphi^{-1} \circ \varphi' = \xi_O^{-1} \circ \chi_B^{-1} \circ \chi_{B'} \circ \xi_{O'}\end{aligned}$$

átmenetleképezések is bijektívek. A ϕ a koordinátatér, a ψ pedig az affin sík transzformációja, ezért előbbi *koordinátatranszformációnak*, utóbbit *affin transzformációnak* nevezzük.

Tétel. *Az affin transzformációk kollineációk, a koordinátatranszformációk tartják a koordinátaegyeneseket, és bijektívek.*

Bizonyítás. Legyen $\varphi = \chi_B \circ \xi_O$ és $\varphi' = \chi_{B'} \circ \xi_{O'}$ két koordinátázás. Mindkettő bijektív, tehát a belőlük képzett affin és koordinátatranszformációk is bijektívek.

A $\psi = \varphi^{-1} \circ \varphi'$ affin transzformáció előbb a φ' hatására egy egyenest koordinátaegyenesbe visz, aztán a φ^{-1} ezt egy egyenesbe viszi, hiszen fentebbi tételünk értelmében egy koordinátaegyenes minden koordinátázásánál egy egyenes képe. Tehát az affin transzformációk egyenestartók. A bijektivitás ezzel igazolja első állításunkat.

Hasonló módon igazolható, hogy a $\phi = \varphi' \circ \varphi^{-1}$ koordinátatranszformáció minden koordinátaegyeneset koordinátaegyenesbe visz. ■

Tétel. *Az $\mathbb{R}^2$ bijektív ϕ transzformációja akkor és csak akkor tartja a koordinátaegyeneseket, ha valamely $x_0, y_0, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$ számokra,*

$$\phi: (x, y) \mapsto (x_0, y_0) + (x, y) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (1.3.1)$$

alakú, ahol $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$.

Bizonyítás. *Elégesség.* Mivel $d = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$, létezik az $\mathbf{A}_\phi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ mátrix $\bar{\mathbf{A}}_\phi = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix}$ inverze, ahol $\bar{a}_{11} = a_{22}/d$, $\bar{a}_{12} = -a_{12}/d$, $\bar{a}_{21} = -a_{21}/d$ és $\bar{a}_{22} = a_{11}/d$. Ekkor (akár helyettesítéssel ellenőrizhető, hogy) $\phi^{-1}: (z, t) \mapsto ((z, t) - (x_0, y_0))\bar{\mathbf{A}}_\phi$ a ϕ inverze, tehát ϕ bijektív.

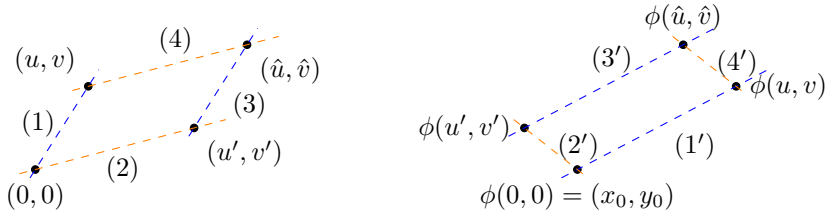
Legyen az e koordinátaegyenes egyik egyenlete $ax + by = c$, ahol persze $(a, b) \neq (0, 0)$, és vegyük az $(a_\phi, b_\phi) = (a, b)\bar{\mathbf{A}}_\phi^T$ számpárt. Ekkor a $\phi(e) = \{(z, t) = \phi(x, y) : ax + by = c\}$ pontthalmaz elemeire

$$\begin{aligned} a_\phi(z - x_0) + b_\phi(t - y_0) &= (a_\phi, b_\phi) \begin{pmatrix} z - x_0 \\ t - y_0 \end{pmatrix} = (a, b)\bar{\mathbf{A}}_\phi^T \mathbf{A}_\phi^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (a, b) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= ax + by = c, \end{aligned}$$

vagyis $\phi(e)$ pontosan az $a_\phi z + b_\phi t = a_\phi x_0 + b_\phi y_0 + c$ egyenlet megoldása, tehát koordinátaegyenes, hiszen $(a_\phi, b_\phi) \neq (0, 0)$, mert $(0, 0)\mathbf{A}_\phi^T = (0, 0)$.

Szükségesség. Legyen $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 ((x, y) \mapsto (\phi_1(x, y), \phi_2(x, y)))$ a tétel feltételeit teljesítő transzformáció, és vezessük be a $\hat{\phi}(x, y) := \phi(x, y) - \phi(0, 0)$ és $(x_0, y_0) = \phi(0, 0)$ jelölést is.

Tekintsünk most olyan (u, v) és (u', v') koordinátákat, melyek nem többszörösei egymásnak. Legyen $(\hat{u}, \hat{v}) := (u + u', v + v')$ ezek összege.



Világos, hogy (u, v) és (u', v') rendre rajta van a $-vx + uy = 0$ (1) és $-v'x + u'y = 0$ (2) koordinátaegyenesen. Az $(\hat{u}, \hat{v})$ összegük pedig rajta van a $-vx + uy = -vu' + uv'$ (3) és a $-v'x + u'y = -v'u + u'v$ (4) koordinátaegyeneseken. Ebből következik, hogy $\phi(\hat{u}, \hat{v})$ rajta van ezen koordinátaegyenesek (3') és (4') képén. A $-vx + uy = -vu' + uv'$ (3) koordinátaegyenes (3') képének eleme a $\phi(u', v')$ koordináta, másfelől nincsen közös pontja a $-vx + uy = 0$ (1) koordinátaegyenes ϕ melletti (1') képével, aminek viszont eleme a $\phi(u, v)$ koordináta és a $\phi(0, 0) = (x_0, y_0)$ koordináta. Ez utóbbi (1') egyenes egyenlete tehát

$$-(\phi_2(u, v) - y_0) \cdot x + (\phi_1(u, v) - x_0) \cdot y = -\phi_2(u, v)x_0 + \phi_1(u, v)y_0.$$

A $\phi(u, v)$ koordináta a $-v'x + u'y = -v'u + u'v$ (4) koordinátaegyenes ϕ melletti (4') képének eleme, és ennek a (4') koordinátaegyenesnek nincsen közös pontja a

$-v'x + u'y = 0$ (2) koordinátaegyenes ϕ melletti (2') képével, miközben ennek eleme a $\phi(u', v')$ és a $\phi(0, 0) = (x_0, y_0)$ koordináta. Ezen (4') egyenes egyenlete ezért

$$-(\phi_2(u', v') - y_0) \cdot x + (\phi_1(u, v) - x_0) \cdot y = -\phi_2(u', v')x_0 + \phi_1(u', v')y_0.$$

Az előbbivel együtt ez azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\hat{u}, \hat{v}) &= \phi(\hat{u}, \hat{v}) - \phi(0, 0) = \phi(u + u', v + v') - \phi(0, 0) \\ &= (\phi(u, v) - \phi(0, 0)) + (\phi(u', v') - \phi(0, 0)) = \hat{\phi}(u, v) + \hat{\phi}(u', v'),\end{aligned}$$

vagyis $\hat{\phi}(x, y)$ additív az olyan pontokon, melyek egymásnak nem valós többszörösei.

Az additivitás a valós többszörösökre is igaz, hiszen ha (u, v) és (u', v') egymásnak nem valós többszörösei, akkor, ahogy vártuk, az adódik, hogy

$$\begin{aligned}\hat{\phi}((\lambda + \mu)(u, v)) &= \hat{\phi}((\lambda(u, v) + (u', v')) + (\mu(u, v) - (u', v'))) \\ &= \hat{\phi}(\lambda(u, v) + (u', v')) + \hat{\phi}(\mu(u, v) - (u', v')) \\ &= \hat{\phi}(\lambda(u, v)) + \hat{\phi}((u', v')) + \hat{\phi}(\mu(u, v)) - \hat{\phi}((u', v')) \\ &= \hat{\phi}(\lambda(u, v)) + \hat{\phi}(\mu(u, v)).\end{aligned}$$

Az origón átmenő $ax + by = 0$ koordinátaegyenes ϕ melletti $a_\phi x + b_\phi y = c_\phi (= a_\phi x_0 + b_\phi y_0)$ képére $(a_\phi, b_\phi, c_\phi \in \mathbb{R})$ nyilván

$$ax + by = 0 \iff a_\phi \phi_1(x, y) + b_\phi \phi_2(x, y) = c_\phi,$$

illetve egy kis átalakítással

$$ax + by = 0 \iff a_\phi \hat{\phi}_1(x, y) + b_\phi \hat{\phi}_2(x, y) = 0$$

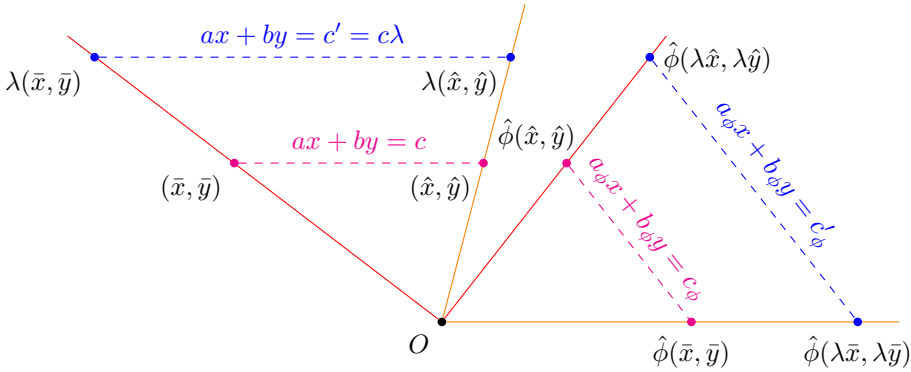
minden (x, y) koordinátára.

Mivel mindkét utóbbi egyenlet homogén — amiért minden megoldásnak minden valós többszöröse is megoldás —, és $\hat{\phi}$ bijektív, ezért lennie kell egy $f_{(x,y)}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijektív függvénynek, melyre

$$\hat{\phi}(\lambda x, \lambda y) = f_{(x,y)}(\lambda) \cdot \hat{\phi}(x, y).$$

Nyilván $f_{(x,y)}(1) = 1$, és $f_{(x,y)}$ additív is minden (x, y) esetén, hiszen $\hat{\phi}$ is additív.

Tekintsünk olyan nem nulla $(\bar{x}, \bar{y})$ és $(\hat{x}, \hat{y})$ pontokat, melyek közös $ax + by = c$ egyenese nem megy át az origón, eme egyenes $\hat{\phi}$ melletti képe pedig legyen $a_\phi x + b_\phi y = c_\phi$. Vegyük most a $\lambda(\bar{x}, \bar{y})$ és $\lambda(\hat{x}, \hat{y})$ pontokat, melyek közös egyenese persze $ax + by = c' = c\lambda$.



Mivel ϕ bijektív, és az $ax + by = c$ egyenes párhuzamos az $ax + by = c'$ egyenessel, utóbbi képe is párhuzamos lesz előbbi képével, vagyis $ax + by = c'$ képe $a_\phi x + b_\phi y = c'_\phi$ valamely c'_ϕ valós számra. Eszerint a $\hat{\phi}(\lambda \bar{x}, \lambda \bar{y})$ és $\hat{\phi}(\lambda \hat{x}, \lambda \hat{y})$ pontok az $a_\phi x + b_\phi y = c'_\phi$ egyenesre, a $\hat{\phi}(\bar{x}, \bar{y})$ és $\hat{\phi}(\hat{x}, \hat{y})$ pontok pedig a vele párhuzamos $a_\phi x + b_\phi y = c_\phi$ egyenesre illeszkednek. Minthogy $\hat{\phi}(\lambda \bar{x}, \lambda \bar{y}) = f_{(\bar{x}, \bar{y})}(\lambda) \cdot \hat{\phi}(\bar{x}, \bar{y})$ és $\hat{\phi}(\lambda \hat{x}, \lambda \hat{y}) = f_{(\hat{x}, \hat{y})}(\lambda) \cdot \hat{\phi}(\hat{x}, \hat{y})$, ebből következik, hogy $f_{(\bar{x}, \bar{y})}(\lambda) = f_{(\hat{x}, \hat{y})}(\lambda)$, ami azt mutatja, hogy $f_{(x, y)}$ nem függ az alsó indexben lévő koordinátától. A továbbiakban ezért ezt a függvényt egyszerűen f jelöli.

Az $f(\lambda \mu) \hat{\phi}(x, y) = \hat{\phi}(\lambda \mu x, \lambda \mu y) = f(\lambda) \hat{\phi}(\mu x, \mu y) = f(\lambda) f(\mu) \hat{\phi}(x, y)$ összefüggés alapján f multiplikatív, így minden $\lambda \geq 0$ számra $f(\lambda) = (f(\sqrt{\lambda}))^2$ miatt $f(\lambda) \geq 0$.

Eszerint $\lambda \leq \mu$ esetén $f(\lambda) \leq f(\lambda) + f(\mu - \lambda) = f(\mu)$, vagyis f monoton növekvő, amiért additivitása folytán homogén is (Lásd a Függelék F.10 szakaszát!), tehát $f(\lambda) = \lambda$ minden $\lambda \in \mathbb{R}$ számra.

Mivel $\hat{\phi}(\lambda x, \lambda y) = f(\lambda) \hat{\phi}(x, y) = \lambda \hat{\phi}(x, y)$, a $\hat{\phi}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transzformáció nem csak additív, hanem homogén is, vagyis lineáris.

Az $\hat{\phi}((1, 0)) = (a_{11}, a_{12})$ és $\hat{\phi}((0, 1)) = (a_{21}, a_{22})$ vektorok meghatározzák $\hat{\phi}$ értékét minden pontban, hiszen lineáris leképezés, amiért

$$\hat{\phi}(x, y) = \hat{\phi}(x(1, 0) + y(0, 1)) = x\hat{\phi}((1, 0)) + y\hat{\phi}((0, 1)).$$

Ez épp a $\hat{\phi}(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ összefüggés, ami a bizonyítandó első része.

A $\hat{\phi}$ homogenitása miatt $\hat{\phi}(0, 0) = (0, 0)$, ezért a $\hat{\phi}$ bijektivitása miatt $(a_{11}, a_{12}) = \hat{\phi}((1, 0)) \neq (0, 0) \neq \hat{\phi}((0, 1)) = (a_{21}, a_{22})$. Ha $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$ lenne, akkor $\hat{\phi}(a_{21}, -a_{11}) = \hat{\phi}(a_{22}, -a_{12}) = (0, 0)$ és a bijektivitás miatt $(a_{21}, -a_{11}) = (a_{22}, -a_{12}) = (0, 0)$ következne, ami ellentmondás, tehát $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$.

Ezzel a tétel bizonyítása teljes. ■

Előbbi két tételünk értelmében minden koordinátatranszformáció (1.3.1) alakú. Ennek fordítottja is igaz.

Tétel. *Pontosan az (1.3.1) alakú tranzformációk a koordinátatranszformációk.*

Bizonyítás. Előbbiek értelmében már csak annyit kell belátnunk, hogy ha φ egy koordinátázás, ϕ pedig a valós sík (1.3.1) alakú tranzformációja, akkor $\phi \circ \varphi$ is koordinátázás.

Világos, hogy az $O := \varphi^{-1}(\phi^{-1}((0,0)))$, $P := \varphi^{-1}(\phi^{-1}((1,0)))$ és $Q := \varphi^{-1}(\phi^{-1}((0,1)))$ pontok nem esnek közös egyenesre. Eszerint $\{P_O, Q_O\}$ egy bázis és így a $\phi \circ \varphi$ leképezés az O pont és a $\{P_O, Q_O\}$ bázis által meghatározott koordinátázás. ■

1.3.3. Tétel. *Tetszőleges három nem kollineáris (x_1, y_1) , (x_0, y_0) és (x_{-1}, y_{-1}) koordinátaponthoz létezik az $\mathbb{R}^2$ koordinátatér pontosan egy olyan ϕ koordinátatranszformációja, melyre $(x_1, y_1) = \phi(1, 0)$, $(x_0, y_0) = \phi(0, 0)$ és $(x_{-1}, y_{-1}) = \phi(0, 1)$.*

Bizonyítás. Elegendő látni, hogy pontosan egy olyan $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ mátrix létezik, melyre

$$(x_1 - x_0, y_1 - y_0) = (1, 0)\mathbf{A}, \quad \text{és} \quad (x_{-1} - x_0, y_{-1} - y_0) = (0, 1)\mathbf{A}.$$

Elvégezve a mátrix-szorzásokat, az

$$x_1 - x_0 = a_{11}, \quad y_1 - y_0 = a_{12}, \quad x_{-1} - x_0 = a_{21}, \quad y_{-1} - y_0 = a_{22}$$

egyenletek adódnak, amelyek egyben a megoldást is adják. Ez az $\mathbf{A}$ egy koordinátatranszformáció mátrixa, mert

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = (x_1 - x_0)(y_{-1} - y_0) - (x_{-1} - x_0)(y_1 - y_0)$$

csak abban a kizárt esetben 0, ha (x_1, y_1) , (x_0, y_0) és (x_{-1}, y_{-1}) kollineárisak. ■

1.4. Kollineációk

Tétel. *A sík kollineációi éppen az affin tranzformációi.*

Bizonyítás. Azt már láttuk, hogy az affin tranzformációk kollineációk, ezért most elég a fordítottját igazolni.

Legyen $\psi: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ kollineáció, vagyis bijektív és egyenestartó, $\mathcal{B} = \{P_O, Q_O\}$ bázis az $T_O\mathcal{S}$ helyvektorsíkban és $\varphi = \chi_{\mathcal{B}} \circ \xi_O: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^2$ koordinátázás.

Ekkor $\phi = \varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1}$ a koordinátatér bijektív és koordinátaegyenest tartó leképezése, ezért

$$\phi(x, y) = (x_0, y_0) + (x, y) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

valamely $x_0, y_0, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$ és $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ számok mellett.

Eszerint $\varphi' = \phi \circ \varphi$ egy koordinátázás, és így $\psi = \varphi^{-1} \circ \varphi'$ affin transzformáció, ahogy a tétel állítja. ■

Eredményünk fontos következménye az alábbi.

Tétel. *Az affin sík tetszőleges két nem kollineáris ponthármasához pontosan egy olyan kollineáció létezik, mely az egyik ponthármaszt a másikba viszi.*

Előbbi tételünk értelmében a bizonyításhoz elég az 1.3.3. Tételre gondolnunk.

1.4.1. Tétel. *Egy egyenességet tartó leképezés akkor és csak akkor kollineáció, ha tartja az osztóviszonyt, és van három általános helyzetű pont, melyek képe is általános helyzetű.*

Bizonyítás. Legyen ψ egy kollineáció.

Vegyük az értelmezési és képtér síkok egy-egy tetszőleges $\varphi = \chi_{\mathcal{B}} \circ \xi_O$ és $\varphi' = \chi_{\mathcal{B}'} \circ \xi_{O'}$ koordinátázását, ahol $\mathcal{B} \subset T_O\mathfrak{S}$ és $\mathcal{B}' \subset T_{O'}\mathfrak{S}'$ egy-egy bázis. Ekkor $\phi = \bar{\varphi} \circ \psi \circ \varphi^{-1}$ a koordinátatér egy transzformációja, amely, mivel ψ egy kollineáció, bijektív és koordinátaegyenest tartó, tehát koordinátatranszformáció. Eszerint $\hat{\phi}(\cdot) = \phi(\cdot) - \phi(0, 0)$ egy nem elfajuló lineáris leképezés, amely emiatt bázist bázisba visz, így a $\mathcal{B}$ bázisban szereplő helyvektorok végpontjai és az O pont együtt éppen a kívánt számú általános helyzetű pontot adja.

Tekintsünk olyan P és Q pontokat, melyre $\lambda_O P_O = Q_O$ valamely nem nulla $\lambda_O \in \mathbb{R}$ számra (vagyis $\lambda = (PQO)$). A $\hat{\phi}$ linearitása miatt következő

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\psi(Q)) - \bar{\varphi}(\psi(O)) &= \phi(\varphi(Q)) - \phi(\varphi(O)) = \phi(\varphi(Q)) - \phi(0, 0) = \hat{\phi}(\varphi(Q)) \\ &= \hat{\phi}(\lambda_O \varphi(P)) = \lambda_O \hat{\phi}(\varphi(P)) = \lambda_O(\phi(\varphi(P)) - \phi(0, 0)) \\ &= \lambda_O(\bar{\varphi}(\psi(P)) - \bar{\varphi}(\psi(O))) \end{aligned}$$

formula bizonyítja, hogy az O ponton átmenő egyeneseket a ψ osztóviszonytartó módon képezi az $\psi(O)$ ponton átmenő egyenesekbe. Mivel az O pontot tetszőlegesen választhatjuk, ez azt jelenti, hogy ψ tartja az osztóviszonyt.

Ezzel a tétel „csak akkor” részét igazoltuk.

Legyen most ψ egy egyenességet és osztóviszony tartó leképezés, mely valamely O, P, Q általános helyzetű pontokat általános helyzetű pontokba, mondjuk az O', P', Q' pontokba képez. Tekintsük a $T_O\mathfrak{S}$ térben a $\mathcal{B} = \{P_O, Q_O\}$ bázist, és az

ezek által adott $\varphi = \chi_B \circ \xi_O$ koordinátázást, valamint egy tetszőleges a képtér egy tetszőleges $\varphi' = \chi_{B'} \circ \xi_{O'}$ koordinátázását.

Mivel ψ osztóviszonyt és egyenességet tartó leképezés, és az osztóviszony bármely egyenes pontthalmazát bijektív kapcsolatba hozza az $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ halmazzal, következik, hogy ψ egyenestartó. Eszerint $\phi = \bar{\varphi} \circ \psi \circ \varphi^{-1}$ a koordinátatér egy olyan transzformációja, mely tartja az osztóviszonyt és az egyeneseket. Eszerint a $\hat{\phi} = \phi - \phi(0, 0)$ is tartja az osztóviszonyt és az egyeneseket, miközben a $(0, 0)$ koordinátát fixen hagyja.

Belátjuk, hogy $\hat{\phi}$ lineáris és bijektív.

Ha $(x_1, y_1) = \lambda(x_0, y_0)$ valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ nem nulla számra, akkor az osztóviszony tartása miatt $\hat{\phi}(x_1, y_1) = \lambda\hat{\phi}(x_0, y_0)$.

Ha $(x_2, y_2) = 0.5((x_1, y_1) + (x_0, y_0))$, akkor $P_2 = (x_2, y_2)$ az $P_1 = (x_1, y_1)$ és $P_0 = (x_0, y_0)$ koordinátaegyenesen van, és az osztóviszonya $(P_0P_1P_2) = 1$. Az osztóviszony tartása miatt tehát $(\hat{\phi}P_0\hat{\phi}P_1\hat{\phi}P_2) = 1$, ami azt jelenti, hogy $\hat{\phi}(x_2, y_2) = 0.5(\hat{\phi}(x_1, y_1) + \hat{\phi}(x_0, y_0))$. Összefoglalva tehát

$$\hat{\phi}((x_1, y_1) + (x_0, y_0)) = 2\hat{\phi}(0.5((x_1, y_1) + (x_0, y_0))) = 2\hat{\phi}(x_2, y_2) = \hat{\phi}(x_1, y_1) + \hat{\phi}(x_0, y_0),$$

vagyis $\hat{\phi}$ additív is, tehát lineáris.

A feltétel miatt a ϕ leképezés a $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ pontokat rendre a $\bar{\varphi}(O'), \bar{\varphi}(P'), \bar{\varphi}(Q')$ pontokba viszi. Ezek nem kollineárisak, így $\hat{\phi}(1, 0) = \bar{\varphi}(P') - \bar{\varphi}(O')$ és $\hat{\phi}(1, 0) = \bar{\varphi}(Q') - \bar{\varphi}(O')$ mutatja, hogy $\hat{\phi}$ nem elfajuló, vagyis bijektív. Eszerint ϕ koordinátatranszformáció, amiért ψ affinitás, tehát kollineáció.

Ezzel a tételt beláttuk. ■

Tekintve, hogy a kollineációk tartják a párhuzamosságot és így a paralelogrammaságot is, adódik, hogy minden ψ kollineációra $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ akkor és csak akkor, ha $\overrightarrow{\psi(P)\psi(Q)} = \overrightarrow{\psi(R)\psi(S)}$. Eszerint minden ψ kollineáció meghatároz egy $\hat{\psi}$ transzformációt a szabad vektorok terén, melyre $\hat{\psi}(\mathbf{v}) := \overrightarrow{\psi(P)\psi(Q)}$, ahol $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$.

Tétel. *Bármely ψ kollineáció $\hat{\psi}$ leképezése izomorfizmus.*

Bizonyítás. Ha ψ kollineáció, akkor véve egy $\varphi = \chi_{\{u_o, v_o\}}\xi_O$ koordinátázást, abban megfelel neki egy $\Psi: (x, y) \mapsto (a, b) + (x, y)\mathbf{A}$ koordinátatranszformáció. Legyen valamely R pontra $\overrightarrow{OR} = r_u\mathbf{u} + r_v\mathbf{v}$, és legyen $(r_u^a, r_v^a) = (r_u, r_v)\mathbf{A}$. Ekkor $\chi_{\{u_o, v_o\}}(R_O) = (r_u, r_v)$ és

$$\begin{aligned} (\hat{\psi}(\overrightarrow{OR}))_O &= (\overrightarrow{\psi(O)\psi(R)})_O = \overrightarrow{(\varphi^{-1}\Psi\varphi(O)\varphi^{-1}\Psi\varphi(R))}_O \\ &= \overrightarrow{(\varphi^{-1}(a, b)\varphi^{-1}((a, b) + (r_u, r_v)\mathbf{A}))}_O \\ &= \overrightarrow{(\xi_O^{-1}(\chi_{\{u_o, v_o\}}^{-1}(a, b))\xi_O^{-1}(\chi_{\{u_o, v_o\}}^{-1}((a, b) + (r_u^a, r_v^a))))}_O \end{aligned}$$

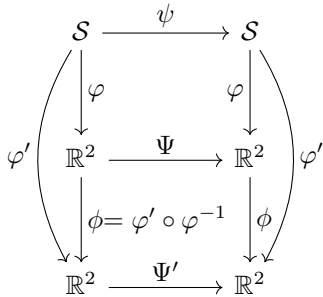
$$\begin{aligned}
&= \overrightarrow{(\xi_O^{-1}(a\mathbf{u}_O + b\mathbf{v}_O)\xi_O^{-1}((a + r_u^a)\mathbf{u}_O + (b + r_v^a)\mathbf{v}_O))}_O \\
&= ((a + r_u^a)\mathbf{u}_O + (b + r_v^a)\mathbf{v}_O) - (a\mathbf{u}_O + b\mathbf{v}_O) = r_u^a\mathbf{u}_O + r_v^a\mathbf{v}_O.
\end{aligned}$$

Eszerint $\hat{\psi}: r_u\mathbf{u} + r_v\mathbf{v} \mapsto r_u^a\mathbf{u} + r_v^a\mathbf{v} = (r_u a_{11} + r_v a_{21})\mathbf{u} + (r_u a_{12} + r_v a_{22})\mathbf{v}$ minden $(r_u, r_v) \in \mathbb{R}^2$ számpárra, vagyis $\hat{\psi}$ lineáris és bijektív, ami bizonyítja az állítást. ■

Bár ez a tétel a koordinátázások nélkül közvetlenül is belátható, a megadott bizonyítás azt is igazolja, hogy az $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ bázisban a $\hat{\psi}$ leképezést reprezentáló mátrix éppen a φ koordinátázásban neki megfelelő Ψ koordinátatranszformáció $\mathbf{A}$ mátrixa. A $\hat{\psi}$ leképezést a ψ kollineáció *lineáris összetevőjének* nevezzük, és a továbbiakban minden kollineáció lineáris összetevőjét a „ $\hat{}$ ” jelöléssel különböztetjük meg a kollineációtól. A lineáris összetevő mátrix-reprezentánsait szokás egyszerűen az *affinitás mátrixának* nevezni. Tekintettel a kanonikus $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}_O$ izomfiára, a $\hat{\psi}$ lineáris összetevőt a helyvektorokon a $\hat{\psi}(\mathbf{v}_O) := \hat{\psi}(\mathbf{v})_O$ egyenlőséggel értelmezzük.

1.4.2. Tétel. *Egy affinitás mátrixai egymás konjugáltjai, ahol a konjugálás mátrixa a koordinátázások közti koordinátatranszformáció mátrixa.*

Bizonyítás. Tekintsük az ábrán láthatóan megfelelően a φ és φ' koordinátázásokat.



A ψ affinitásnak a φ koordinátázásban a Ψ , a φ' koordinátázásban a Ψ' koordinátatranszformáció felel meg. A φ és φ' koordinátázások közti koordinátatranszformáció legyen $\phi = \varphi' \circ \varphi^{-1}$.

Mivel $\psi = \varphi^{-1} \circ \Psi \circ \varphi$ és $\psi = \varphi'^{-1} \circ \Psi' \circ \varphi'$, előbb $\varphi'^{-1} \circ \Psi' \circ \varphi' = \varphi^{-1} \circ \Psi \circ \varphi$, majd ebből

$$\Psi' = \varphi' \circ \varphi^{-1} \circ \Psi \circ \varphi \circ \varphi'^{-1} = \phi \circ \Psi \circ \phi^{-1}$$

adódik, ahogy az az ábrán is jól látszik. Ezzel a tétel első állítását beláttuk.

Legyenek a koordinátatranszformációk a következők: $\Psi: (x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2) + (x_1, x_2)\mathbf{Y}$, $\Psi': (x_1, x_2) \mapsto (y'_1, y'_2) + (x_1, x_2)\mathbf{Y}'$, és $\phi: (x_1, x_2) \mapsto (f_1, f_2) + (x_1, x_2)\mathbf{F}$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\Psi'(x_1, x_2) &= \phi \circ \Psi \circ \phi^{-1}(x_1, x_2) \\
&= (f_1, f_2) + ((y_1, y_2) + ((x_1, x_2) - (f_1, f_2))\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Y})\mathbf{F} \\
&= ((f_1, f_2) - (f_1, f_2)\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{F} + (y_1, y_2)\mathbf{F}) + (x_1, x_2)\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{F},
\end{aligned}$$

vagyis $\mathbf{Y}' = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{F}$, és $(y'_1, y'_2) = (f_1, f_2) - (f_1, f_2)\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{F} + (y_1, y_2)\mathbf{F}$. ■

Eszerint egy affinitás mátrixaiból kiolvasható azon invariánsok, amelyek a konjugálással nem változnak meg, az affinitások geometriai jellemzői lehetnek. Ilyen például a mátrix determinánsa (lásd a **Függelék F.6.** szakaszát).

Definíció. Egy *affinitás determinánsán* az affinitás valamely mátrixának determinánsát értjük.

Egy affinitást *irányítást tartónak* mondunk, ha determinánsa pozitív, és *irányítást váltónak* nevezzük, ha determinánsa negatív. ▲

Vegyünk egy ABC háromszög két különböző körüljárását: $\overleftarrow{A \rightarrow B \rightarrow C}$ és $\overleftarrow{A \rightarrow C \rightarrow B}$. Vegyünk egy olyan ψ affinitást, mely ezeknek megfelelő sorrendben rendeli egymáshoz a háromszög csúcsait. Ez egy csúcsot fixen hagy, a másik kettőt pedig felcseréli, ezért determinánsának értéke -1 . Legyen most ψ olyan affinitás, mely az egyik irányítás szerinti sorrendben rendeli egymáshoz a háromszög csúcsait. Ez egyetlen csúcsot sem hagy fixen, ezért azzal a ψ' affinitással vett szorzata, melyre $\psi'(A) = A$, $\psi'(B) = C$ és $\psi'(C) = B$, olyan, hogy egy csúcsot fixen hagy, a másik kettőt megcseréli. Eszerint a szorzat determinánsának értéke -1 , tehát ψ determinánsának értéke 1 . Összefoglalva, két háromszög körüljárása (irányítása) pontosan akkor egyezik meg, ha a két háromszög csúcsait azok körüljárásai szerinti sorrendben bijektíven egymáshoz rendelő affinitás determinánsa egy, vagyis az affinitás irányítást tartó. Ezeket a háromszögeket *azonos körüljárásúnak* mondjuk.

Vegyünk észre, hogy eszerint egyetlen háromszögon rögzítve annak körüljárását, a többiek ezzel vagy azonos, vagy ellentétes irányításúak lesznek.

Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{P}$ ponthalmaz *invariáns* egy φ affin transzformációval szemben, vagy a φ affin transzformációra nézve, ha $\mathcal{P} = \varphi\mathcal{P}$. *Fixnek* nevezünk egy P pontot egy φ affin transzformációra nézve, ha $P = \varphi P$. Az ilyen pontokat fixpontnak is hívjuk. Ha egy halmaz minden eleme fix a φ affin transzformációra nézve, akkor azt mondjuk, hogy a halmaz fix.

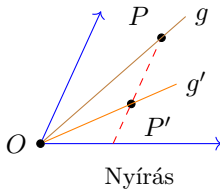
Definíció. Ha egy affinitás valamely mátrixa diagonális, és a főátlójában

- minden elem 1 , azt *eltolásnak*,
- egyetlen -1 elemet kivéve minden elem 1 , azt *affin tükrözésnek*,
- legfeljebb egyik elem nem 1 , azt *tengelyes affinitásnak*,
- minden elem -1 , azt *affin középpontos tükrözésnek*,
- minden elem azonos, azt *affin homotéciának*

mondjuk. Ha pedig az affinitás valamely mátrixa trianguláris, és a főátlójában

- minden elem 1 , azt *nyírásnak*

nevezzük. ▲



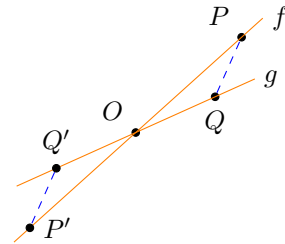
Az eltolás olyan nyírás, melynek mátrixa a főátlón kívül csupa 0 elemet tartalmaz. A nyírások, ezen belül persze az eltolások is tartják az irányítást.

Az affin homotécia mátrixának főátlójában szereplő számot a *homotécia együtthatójának* nevezzük. A párhuzamos szelők tétele szerint affin homotécia esetén

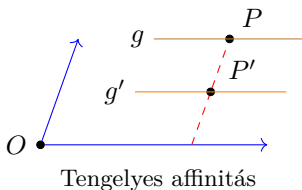
minden egyenes képe párhuzamos az eredetijével.

Az O pontot fixen hagyó homotéciát az O_λ jellel jelöljük, ahol λ a homotécia együtthatója. Az affin homotéciák, ezen belül az affin középpontos tükrözések is tartják az irányítást.

Az O pontot fixen hagyó középpontos affin tükrözések nyilván involutív transzformációk, ezeket τ_O jelöl. Egy $\mathcal{P}$ ponthalmazt az O pontra nézve *középpontosan vagy centrális szimmetrikusnak* mondunk, ha $\mathcal{P}$ invariáns a τ_O transzformációra. Ilyenkor az O pontot a $\mathcal{P}$ középpontjának nevezzük.



Az O pontot fixen hagyó tengelyes affinitás *tengelyeinek* nevezzük annak a koordinátázásnak a báziselemei által meghatározott egyeneseket, melynél a tengelyes affinitás mátrixa diagonális. Fixnek hívjuk azokat a tengelyeket, melyeknél a főátlóban 1 szerepel. A tengelyes affinitás tengelyeire illeszkedő helyvektorokat a tengelyes affinitás *sajátvektorainak* nevezzük. A diagonális mátrixban a tengelyekhez tartozó együtthatókat a tengelyes affinitás *sajátértékének* hívjuk.



Nyilvánvaló, hogy a φ tengelyes affinitás bármely tengelyén adott különböző P és Q pontok $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$ vektor a φ sajátvektora, melyre $\varphi(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}$ teljesül a tengelyhez tartozó λ sajátértékre. Ez a λ legfeljebb egyetlen tengely esetén lehet nem 1, így egy tengelyes affinitás pontosan akkor fordítja meg az irányítást, ha az az egyetlen nem 1 sajátértéke negatív szám. Így például az affin tükrözések is irányítást váltók.

Tétel. Ugyanazon pontot fixen hagyó két tengelyes affinitás szorzata akkor és csak akkor független a szorzásuk sorrendjétől, ha nem fix tengelyeik egymásra esnek.

Bizonyítás. Ha a tengelyek egybeesnek, akkor a szorzat felcserélhetősége a diagonális mátrixok szorzatának felcserélhetősége miatt nyilván teljesül.

Jelölje φ és ψ a két tengelyes affinitást, melyekre $\varphi\psi = \psi\varphi$ és az O pont fix. Utóbbiból következik, hogy φ és ψ is megegyezik saját lineáris összetevőjével.

Tekintsük azon $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_O \mathfrak{S}$ sajátvektorokat, melyekre $\varphi(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}$ és $\psi(\mathbf{v}) = \mu \mathbf{v}$ a $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ nem 1 sajátértékekre.

A φ és a ψ felcserélhetősége miatt minden $x, y \in \mathbb{R}$ számra

$$\begin{aligned} x\varphi(\psi(\mathbf{u})) + y\mu\varphi(\mathbf{v}) &= \varphi(x\psi(\mathbf{u}) + y\mu\mathbf{v}) = \varphi(\psi(x\mathbf{u} + y\mathbf{v})) = \psi(\varphi(x\mathbf{u} + y\mathbf{v})) \\ &= \psi(x\lambda\mathbf{u} + y\varphi(\mathbf{v})) = x\lambda\psi(\mathbf{u}) + y\psi(\varphi(\mathbf{v})), \end{aligned}$$

amiért $\varphi(\psi(\mathbf{u})) = \lambda\psi(\mathbf{u})$ és $\mu\varphi(\mathbf{v}) = \psi(\varphi(\mathbf{v}))$ teljesül. Eszerint $\psi(\mathbf{u})$ a φ sajátvektora, $\varphi(\mathbf{v})$ pedig a ψ sajátvektora. Lévén φ és ψ tengelyes affinitás, és $\lambda \neq 1 \neq \mu$, ebből $\psi(\mathbf{u}) = \lambda' \mathbf{u}$ és $\varphi(\mathbf{v}) = \mu' \mathbf{v}$ adódik valamely nem nulla $\lambda', \mu' \in \mathbb{R}$ számokra.

Ha $\lambda' \neq 1$, akkor $\lambda' = \mu$ és $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Ha $\mu' \neq 1$, akkor $\mu' = \lambda$ és $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Ha pedig $\lambda' = \mu' = 1$, akkor $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ a ψ és φ fix tengelyeire esnek. ■

Tétel. *Két ponthoz pontosan egy eltolás létezik, mely az egyiket a másikba viszi.*

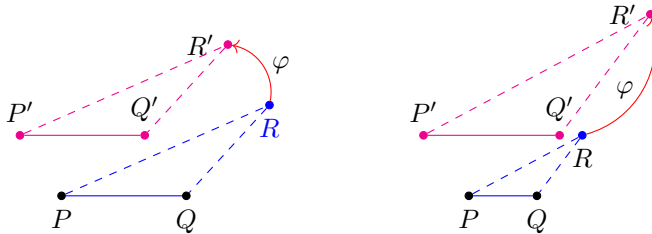
Bizonyítás. Elegendő arra gondolni, hogy mivel az eltoláshoz van olyan koordinátázás, melyben a mátrixa egységmátrix és minden más koordinátázásban a mátrixa ennek konjugáltja, az eltolás minden mátrixa az egységmátrix, amely nem változtat a koordinátákon. Tehát minden eltolásnál a pont és képe koordinátái között minden koordinátázásban konstans a különbség, és ez a különbség meg is határozza az eltolást. ■

Tétel. *Az O_λ homotéciák és az eltolások kommutatív csoportot alkotnak.*

Bizonyításként elegendő arra gondolni, hogy a tételben szereplő mindegyik transzformáció mátrixa minden koordinátázásban úgy diagonális, hogy a főátlójában lévő minden együttható egyforma és nem nulla. Ezek invertálhatóak, szorzáskor felcserélhetők, és inverzük valamint szorzataik is ilyen alakúak,

Jegyezzük meg, hogy a nyírások is csoportot alkotnak, de ez a csoport csak a sík esetén kommutatív.

A Desargues-tulajdonság használatával definiáljuk a *nyújtásokat*. Tekintsük a különböző $PQ \parallel P'Q'$ egyeneseket.



Minden $R \notin PQ$ pont meghatároz egy $e_{PR} \parallel PR$ egyenest a P' ponton át, és egy $e_{QR} \parallel QR$ egyenest a Q' ponton át. Ezek nyilván nem párhuzamosak egymással,

hiszen a párhuzamosság tranzitív és $PR \parallel QR$. Eszerint $e_{PR} \cap e_{QR}$ egyetlen pont. Legyen ez R' .

Az affin sík φ transzformációját úgy definiáljuk, hogy minden $R \notin PQ$ pontra $\varphi(R) = R'$, minden $X \in PQ$ pontra pedig $\varphi(X) \in P'Q'$ az a pont, mely valamely $R \notin PQ$ pontra teljesíti, hogy $XR \parallel \varphi(X)R'$. Ez a φ leképezés jól definiált, mert bármely $R \notin PQ$ pontra a PQR és $P'Q'R'$ háromszögek perspektívek az ideális egyenesre nézve, amiért a **Desargues-tulajdonság** szerint pontra is perspektívek. Ez a perspektivitási pont éppen $O = PP' \cap QQ'$, ami azt jelenti, hogy minden $R \notin PQ$ pontra RR' átmegy az O ponton. A feltétel szerint a PXR és $P'X'R'$ háromszögek is perspektívek az ideális egyenesre nézve, amiért a **Desargues-tulajdonság** szerint pontra is perspektívek, és a fentiek alapján a perspektivitási pont $PP' \cap RR' = O$, mely független R választásától. Tehát $X' = OX \cap P'Q'$.

Tétel. *A nyújtás*

- (1) *eltolás, ha $PP' \parallel QQ'$, és*
- (2) *homotécia, ha $PP' \not\parallel QQ'$.*

Bizonyítás. Ha $PP' \parallel QQ'$, akkor $(P, P') \stackrel{p}{\sim} (Q, Q')$, és így a **nyitott könyv tulajdonság** miatt $(P, P') \stackrel{p}{\sim} (R, R')$ minden R pontra. Ez azt jelenti, hogy bármely koordinátázásban a pont és képe koordinátái közti különbség konstans, így az ilyen nyújtásnak egységmátrixa van, tehát eltolás.

Ha $O = PP' \cap QQ'$ egy valós pont, akkor O képe éppen önmaga. Tekintsük most a $T_O\mathfrak{S}$ helyvektorteret. Ebben a vektortérben a párhuzamos szelők tétele szerint ha $\lambda P_O = P'_O$ valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ számra, akkor $\lambda R_O = R'_O$ is teljesül, ez pedig azt mutatja, hogy bármely bázist is választva az $T_O\mathfrak{S}$ helyvektortérben, az ezáltal kapott koordinátázásban a nyújtáshoz tartozó koordinátatranszformáció a nullát fixen tartja, a pont koordinátáit pedig a λ számmal szorozza, tehát a mátrixa diagonális lesz, a főátló minden elemében a λ számmal. Tehát ez egy homotécia. ■

1.5. Valós affin sík

Az eddigi vizsgálatok ugyan nem fedtek fel ellentmondást az axiómarendszerben, de a — legalább relatív — ellentmondás-mentesség igazolásához egy másik axiómarendszerben létrehozott modellt kell mutatni. A fentiek alapján erre a koordinátatér kínálja magát.

Vegyük a rendezett számpárok $\mathbb{R}^2$ halmazát, és az ezen értelmezett nem elfajuló lineáris egyenletek megoldáshalmazainak $\mathcal{G}_k$ halmazát. Előbbi elemeit nevezzük pontnak, utóbbi elemeit egyenesnek. Az egyeneseken definiáljuk a $\preceq$ rendezést

azzal, hogy

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < x_2, & \text{vagy} \\ x_1 = x_2 \text{ és } y_1 < y_2, & \text{vagy} \\ x_1 = x_2 \text{ és } y_1 = y_2. \end{cases}$$

A $\succeq$ rendezést azzal definiáljuk, hogy $(x_1, y_1) \succ (x_2, y_2)$ pontosan akkor, ha $(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2)$. Ezeket a rendezéseket *lexikografikus rendezésnek* nevezzük.

Tétel. Az $(\mathbb{R}^2, \mathcal{G}_k, \{\preceq, \succeq\})$ rendszer *affin síkot alkot*.

Bizonyítás. A bizonyítás abból áll, hogy a megadott rendszerre ellenőrizzük az axiómák teljesülését.

(I₀) *Létezik legalább három nem kollineáris pont.*

A $(0, 0)$, $(1, 0)$ és $(0, 1)$ pontok egyszerre csak egy elfajuló $ax + by = c$ egyenletnek megoldásai, hiszen az első pont miatt $c = 0$, a második miatt $a = c = 0$, a harmadik miatt pedig $b = c = 0$ következik. Tehát a $(0, 0)$, $(1, 0)$ és $(0, 1)$ pontok nem illeszkednek közös egyenesre.

(I₁) *Minden egyenesre legalább két különböző pont illeszkedik.*

A nem elfajuló $ax + by = c$ egyenletnek a $(\lambda(-b, a) + (ac, bc) \cdot 1/(a^2 + b^2))$ minden $\lambda \in \mathbb{R}$ számra különböző megoldása.

(I₂) *Két különböző pontra egy és csak egy egyenes illeszkedik.*

A különböző (x_0, y_0) és (x_1, y_1) pontok az $a = y_1 - y_0$, $b = x_0 - x_1$ és $c = x_0y_1 - y_0x_1$ által meghatározott nem elfajuló $ax + by = c$ egyenletnek megoldásai, tehát van közös egyenesük. Ha (x_0, y_0) és (x_1, y_1) a — mondjuk $b' \neq 0$ miatt — nem elfajuló $a'x + b'y = c'$ egyenletnek is megoldásai, vagyis $a'x_0 + b'y_0 = c'$ és $a'x_1 + b'y_1 = c'$, abból $a'b = a'(x_0 - x_1) = b'(y_1 - y_0) = b'a$ és $a'c = a'(ax_0 + by_0) = a'ax_0 + b'ay_0 = a(a'x_0 + b'y_0) = ac'$, valamint ugyanígy $b'c = bc'$ következik. Ezek alapján $a'(a, b, c) = (a'a, a'b, a'c) = (aa', ab', ac') = a(a', b', c')$ és ugyanígy $b'(a, b, c) = (b'a, b'b, b'c) = (ba', bb', bc') = b(a', b', c')$. Tekintve, hogy $(a, b) \neq (0, 0) \neq (a', b')$, a két egyenlőség közül legalább az egyik azt adja, hogy valamely nem nulla $\lambda \in \mathbb{R}$ számra $\lambda(a, b, c) = (a', b', c')$. Ez azt jelenti, hogy az $ax + by = c$ és az $a'x + b'y = c'$ egyenletek megoldáshalmazai megegyeznek.

(I₃) *Minden egyeneshez és rajta kívüli ponthoz pontosan egy olyan, a pontra illeszkedő egyenes létezik, melynek nincs az egyenessel közös pontja.*

Az 1.3.2. tétel szerint a nem elfajuló $ax + by = c$ illetve $a'x + b'y = c'$ egyenletek egyenesei pontosan akkor párhuzamosak, ha valamely nem nulla $\lambda \in \mathbb{R}$ számra $\lambda a = a'$ és $\lambda b = b'$. Az 1.3.1. tétel szerint a két párhuzamos egyenes pontosan akkor esik egybe, ha $\lambda c = c'$ is teljesül. Tehát, ha az (x_0, y_0) pont nincs az $ax + by = c$

egyenletű egyenesen, akkor az $ax + by = ax_0 + by_0$ olyan nem elfajuló egyenlet, melynek (x_0, y_0) megoldása, de egyetlen közös pontja sincs az $ax + by = c$ egyenletű egyenessel. Ha pedig $a'x + b'y = c'$ ugyanezen tulajdonsággal bír, akkor a metszés-pont hiánya miatt valamely nem nulla $\lambda \in \mathbb{R}$ számra $\lambda a = a'$ és $\lambda b = b'$, amiből $c' = a'x_0 + b'y_0 = \lambda(ax_0 + by_0) = \lambda c$ adódik, így $a'x + b'y = c'$ megoldáshalmaza megegyezik $ax + by = c$ megoldáshalmazával.

(R₁) *Minden egyenesen adott két teljes rendezés, amelyek egymás megfordítottjai.* Az olvasó könnyen igazolhatja, hogy a két lexikografikus rendezés teljes, mert a két rendezési reláció bármely két különböző pont sorrendjét megadja és egyszerre csak egyező pontokra teljesülnek.

(R₂) (Pasch-axióma) *Ha egy egyenes egy háromszög egyik csúcsára sem illeszkedik, de van közös pontja valamely oldallal, akkor pontosan még egy másik oldalt metsz.* Láttuk, hogy $\mathbb{R}^2$ esetén bármely három, nem kollineáris ponthoz létezik olyan koordinátatranszformáció, mely ezeket a pontokat bármely másik három, nem kollineáris pontba viszi. Bár nem igazoltuk, de az világos, hogy ezek a koordinátatranszformációk az egyeneseket szigorúan monoton (vagyis rendezéstartó) módon képezik le egymásra. Eszerint az axióma teljesülését elegendő a $(0, 0)$, $(1, 0)$ és $(0, 1)$ pontok által alkotott háromszögre ellenőrizni.

Legyen a $(0, a)$ pont a $\overline{(0, 0)(0, 1)}$ oldalon, vagyis $0 < a < 1$. Ha egy ezen keresztüli koordinátaegyenes párhuzamos a $\overline{(0, 0)(1, 0)}$ oldallal, akkor az $\overline{(1, 0)(0, 1)}$ oldalt az $(1 - a, a)$ pontban metszi.

Ha egy $(0, a)$ ponton keresztüli e egyenes nem párhuzamos a $\overline{(0, 0)(1, 0)}$ oldallal, akkor metszi annak egyenesét valamely $(b, 0)$ pontban, és egyenlete $ax + by = ab$.

Ha e párhuzamos az $\overline{(1, 0)(0, 1)}$ oldal $x + y = 1$ egyenesével, akkor $b = a$, vagyis e metszi a $\overline{(0, 0)(1, 0)}$ oldalt.

Ha e nem párhuzamos az $\overline{(1, 0)(0, 1)}$ oldal $x + y = 1$ egyenesével, akkor metszetük $(b(1 - a)/(b - a), a(b - 1)/(b - a))$. Ez a metszéspont pontosan akkor esik az $\overline{(1, 0)(0, 1)}$ oldalra, ha $0 < b(1 - a)/(b - a) < 1$ és $0 < a(b - 1)/(b - a) < 1$. Figyelembe véve, hogy $0 < a < 1$, ezek ekvivalensek a következőkkel:

$$\left. \begin{array}{l} 0 < b(1 - a) < b - a \\ 0 < a(b - 1) < b - a \end{array} \right\} \Leftrightarrow a < ab < b \Leftrightarrow 1 < b, \quad \text{ha } a < b,$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 > b(1 - a) > b - a \\ 0 > a(b - 1) > b - a \end{array} \right\} \Leftrightarrow b < ba < a \Leftrightarrow b < 0, \quad \text{ha } a > b.$$

Ez azt jelenti, hogy az e egyenes pontosan akkor metszi az $\overline{(1, 0)(0, 1)}$ oldalt, ha nem metszi a $\overline{(0, 0)(1, 0)}$ oldalt. Ez igazolja a Pasch-axióma teljesülését.

(F₁) *Minden $(g, \preceq)$ egyenesen, minden $Q \in g$ ponthoz léteznek tőle különböző $P, R \in g$ pontok, hogy $P \prec Q \prec R$.*

Ha (x_0, y_0) a nem elfajuló $ax + by = c$ megoldása, akkor elválasztja az ugyancsak az $ax + by = c$ egyenesén lévő $(x_0 + b, y_0 - a)$ és $(x_0 - b, y_0 + a)$ pontokat.

(F₂) Minden $(g, \preceq)$ egyenesen, minden $\mathcal{Q} \subseteq \overline{PR} \subset g$ ponthalmazhoz létezik olyan Q_- és Q_+ pont a $\overline{PR}$ szakaszon, hogy minden $Q \in \mathcal{Q}$ esetén $Q_- \preceq Q \preceq Q_+$ és bármely, a $\mathcal{Q}$ minden pontját közrefogó $X, Y \in g$ pontpárra $X \preceq Q_-$ és $Q_+ \preceq Y$ is teljesül.

A nem elfajuló $ax + by = c$ egyenlet e egyenesén rögzítsük az (x_0, y_0) pontot. Akkor e minden pontja $(x_0, y_0) + \lambda(-b, a)$ alakú valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ számra, ezért $P = (x_0, y_0) + \lambda_P(-b, a)$ és $R = (x_0, y_0) + \lambda_R(-b, a)$ valamely $\lambda_P, \lambda_R \in \mathbb{R}$ számokra. A $\mathcal{Q}$ ponthalmazhoz rendelt $\mathcal{L} = \{\lambda : (x_0, y_0) + \lambda(-b, a) \in \mathcal{Q}\}$ számhalmaz korlátos, mert elemei a $[\min(\lambda_P, \lambda_R), \max(\lambda_P, \lambda_R)]$ intervallumban vannak. A valós számok korlátos halmazainak határossága biztosítja, hogy $\mathcal{L}$ rendelkezik alsó és felső határokkal. Jelölje ezeket rendre λ_- és λ_+ . Az ezekkel képzett $(x_0, y_0) + \lambda_-(-b, a)$ és $(x_0, y_0) + \lambda_+(-b, a)$ pontok nyilván a $\mathcal{Q}$ határai. ■

Ezzel igazoltuk, hogy az $(\mathbb{R}^2, \mathcal{G}_k)$ rendszer affin sík.

A koordinátaterek egyenesein — hacsak nincs külön másként jelezve — mindig a lexikografikus rendezés használatos, ezért a rendezés nem jelenik meg a jelölésekben. Az $(\mathbb{R}^2, \mathcal{G}_k)$ rendszert *valós affin síknak* nevezzük.

Amennyiben a valós számok rendszere ellentmondásmentes, akkor ez a tétel igazolja, hogy létezik affin sík, tehát ennek axióma-rendszere sem lehet ellentmondásos.

Azt is észrevehetjük, hogy a valós affin síkon a koordinátatranszformációk affinitások, az affinitás lineáris összetevője konkrétan az öt előállító koordinátatranszformáció mátrixa által reprezentált lineáris leképezés, de akár úgy is felfogható a rendszer, hogy egy koordinátatranszformáció valójában egy koordinátázás.

Tétel. *A valós affin sík teljesíti a Desargues-tulajdonságot.*

Bizonyítás. Az 1.1.1. tétel szerint elég belátni, hogy minden perspektív háromszög tengelyesen perspektív.

Vizsgáljuk a perspektív ABC és $A'B'C'$ háromszögeket, ezek megfelelő csúcsain átmenő $p = AA'$, $q = BB'$ és $r = CC'$ egyeneseket, valamint megfelelő oldalegyenesaik $P = AB \cap A'B'$, $Q = BC \cap B'C'$ és $R = CA \cap C'A'$ metszéspontjait!

Azt kell belátnunk, hogy ha p, q, r konkurens, akkor a P, Q, R pontok kollineárisak.

Bármely két nem kollineáris ponthármashoz létezik olyan affin transzformáció (koordinátatranszformáció), mely az egyik ponthármast a másik hármashoz viszi. Bár

nem igazoltuk, de azért világos, hogy minden affín transzformáció (koordinátatranszformáció) szigorúan monoton (vagyis rendezéstartó) módon képezi le egymásra az egyeneseket, így feltehetjük, hogy $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$ és $B = (0, 1)$.

Legyen $C = (e, f)$, valamint $A' = (a, 0)$, $B' = (0, b)$ és $C' = c(e, f)$.

Számoljuk ki a $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$ és $R = (r_1, r_2)$ pontok koordinátáit!

Az R pont rajta van az AC és az $A'C'$ egyenesen is, ezért rendre $f(1 - r_1) = r_2(1 - e)$ valamint $cf(a - r_1) = r_2(a - ce)$, amelyek összevetésével

$$r_1 = \frac{a(1 - c) + ce(a - 1)}{a - c} \quad \text{és} \quad r_2 = \frac{cf(a - 1)}{a - c}$$

adódik. A Q pont a BC és $B'C'$ egyenesen van, amiből az előbbihez hasonlóan következik, hogy

$$q_1 = \frac{ce(b - 1)}{b - c} \quad \text{és} \quad q_2 = \frac{b(1 - c) + cf(b - 1)}{b - c}.$$

A P pont az AB és az $A'B'$ egyenesek metszetében van, ezért $p_1 + p_2 = 1$ és $bp_1 + ap_2 = ab$, így

$$p_1 = \frac{a(b - 1)}{b - a} \quad \text{és} \quad p_2 = \frac{b(1 - a)}{b - a}$$

a koordinátái. Ezen pontok párojaira illesztve egy $tx + sy = d$ egyenest, kiderül, hogy mindhárom pont illeszkedik a

$$(b(a - c) + cf(a - b))x + (a(b - c) + ce(a - b))y = cfa(b - 1) + ceb(a - 1) - ab(c - 1) \quad (1.5.1)$$

egyenesre. Habár a pontok koordinátáira vonatkozó képleteink csak $a \neq b \neq c \neq a$ esetben helyesek, könnyű látni, hogy az (1.5.1) egyenes $a = b \neq c$, $a \neq b = c$ és $c = a \neq b$ esetén rendre párhuzamos az AB , a BC és a CA egyenessel, illetve $a = b = c$ esetén a P , Q és R pontok mindegyike az ideális egyenesre esik. Ez igazolja, hogy a valódi pontra perspektív háromszögek tengelyesen is perspektívek.

Másodszor tegyük fel, hogy p , q és r párhuzamosak, vagyis a közös O pontjuk ideális. Válasszunk olyan koordináta-rendszert, hogy $A = (0, 0)$, $A' = (a, 0)$ és $B = (0, 1)$. Ekkor $B' = (b, 1)$, és ha $C = (e, f)$, akkor $C' = (e + c, f)$.

Számoljuk ki a $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$ és $R = (r_1, r_2)$ pontok koordinátáit!

Az R pont rajta van az AC és az $A'C'$ egyenesen is, ezért rendre $er_2 = r_1f$, valamint $f(1 - r_1) = r_2(1 - e - c)$, amelyek összevetésével

$$r_1 = \frac{e}{1 - c} \quad \text{és} \quad r_2 = \frac{f}{1 - c}$$

adódik. A Q pont a BC és $B'C'$ egyenesen van, amiből az előbbihez hasonlóan következik, hogy

$$q_1 = \frac{eb}{b-c} \quad \text{és} \quad q_2 = \frac{bf-c}{b-c}.$$

A P pont az AB és az $A'B'$ egyenesek metszetében van, ezért $p_1 = 0$ és $(1-b)p_2 = 1$, így

$$p_1 = 0 \quad \text{és} \quad p_2 = \frac{1}{1-b}$$

a koordinátái. Ezen pontok párojaira illesztve egy $tx + sy = d$ egyenest, kiderül, hogy mindhárom pont illeszkedik a

$$(1-c-f(1-b))x + e(1-b)y = e \quad (1.5.2)$$

egyenesre. Habár a pontok koordinátáira vonatkozó képleteink csak $1 \neq b \neq c \neq 1$ esetben helyesek, könnyű látni, hogy az (1.5.2) egyenes $1 = b \neq c$, $1 \neq b = c$ és $c = 1 \neq b$ esetén rendre párhuzamos az AB , a BC és a CA egyenessel, illetve $1 = 1 = 1$ esetén a P , Q és R pontok mindegyik az ideális egyenesre esik. Ez igazolja, hogy ideális pontra perspektív háromszögek tengelyesen is perspektívek.

Ezzel a tételt beláttuk. ■

A tétel fentebbi hosszás számolással való bizonyítása helyett a sík térbeli elhelyezésével is igazolhatjuk az állítást: Mivel az $\mathbb{R}^2$ koordinátatér kanonikusan izomorf az $\mathbb{R}^3$ tér $z = 0$ egyenletű síkjával és a 4.1.1. Tételben igazoljuk, hogy bármely affin tér, így az $\mathbb{R}^3$ síkjai is mindig teljesítik a **Desargues-tulajdonságot**, világos, hogy $\mathbb{R}^2$ is **Desargues-tulajdonságú**.

Miközben a valós affin sík egy modellje a Desargues-féle affin síknak, az ehhez vezető úton valójában azt mutattuk meg, hogy minden affin sík, mely teljesíti a **nyitott könyv tulajdonságot**, bármely koordinátázásán keresztül bijektív, egyenestartó kapcsolatban van a valós affin síkkal, így kimondható a következő.

Tétel. *A Desargues-féle affin síkok izomorfak a valós affin síkkal.*

Ez azt jelenti, hogy a valós affin síkban érvényes állítások igazak minden a **nyitott könyv tulajdonságú** affin síkban, és minden, ami érvényes valamely, **nyitott könyv tulajdonságú** affin síkban, az teljesül a valós affin síkban is.

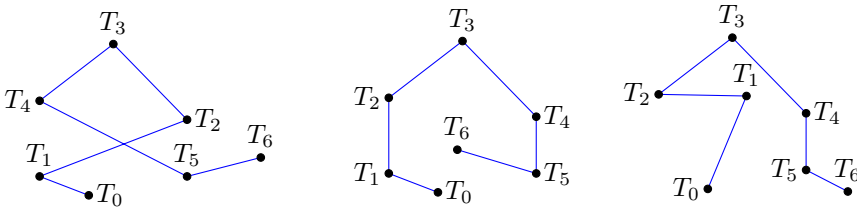
Következmény. *Minden **nyitott könyv tulajdonságú** affin sík Desargues-féle.*

Érdemes még arra is figyelni, hogy a valós affin geometriák esetében a koordinátázások megegyeznek a koordinátatranszformációkkal, a koordinátatranszformációk éppen az affinitások, a koordinátaegyenesek pedig az egyenesek.

Az egyetlen affin sík, amelyet eddig konstruáltunk, Desargues-féle, azonban nem ez az egyetlen lehetőség. A **Függelék F.1.** szakaszában olyan affin síkot is konstruálunk, amely nem Desargues-féle, és így nem is **nyitott könyv tulajdonságú**, tehát nem lehet affin tér síkja sem.

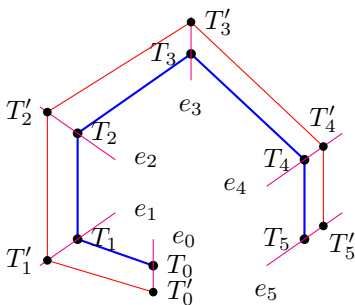
1.6. Törött vonalak, sokszögek és konvexitás

Egy véges pontsorozat pontjait sorban a következővel összekötő zárt szakaszok unióját *törött vonalnak* nevezzük. A zárt szakaszokat a törött vonal *éleinek*, a pontokat a törött vonal *csúcsainak* nevezzük. Két csúcsot szomszédosnak mondunk, ha valamely él két végpontja. Két élet szomszédosnak nevezünk, ha egyik végpontjuk közös, a kimaradó egy-egy végpontjuk pedig ennek szomszédjai.



Ha a pontsorozat első eleme megegyezik az utolsó ponttal, akkor *zárt* törött vonalról beszélünk, melynek első és utolsó élét is szomszédosnak nevezzük. Ha a törött vonal két nem szomszédos éle metszi egymást, vagy két szomszédos éle egybeesik, akkor *önátmetsző* törött vonalról beszélünk. A nem önátmetsző törött vonalakat *egyszerűnek* mondjuk.

Egy egyszerű zárt törött vonalat *sokszögnek* nevezzük, éleit *oldalaknak* mondjuk. A háromszög tehát az oldalaival együtt egy 3-oldalú sokszög, vagyis 3-szög. Ha egy sokszögnek $k \in \mathbb{N}$ oldala van, akkor k csúcsa van, és k -szögnek nevezzük.



Legyenek $T_0, T_1, \dots, T_k$ rendre a $\mathcal{T}$ törött vonal csúcsai, az ezeken rendre átmenő $e_0, e_1, \dots, e_k$ egyeneseket pedig válasszuk úgy, hogy T_{i-1} és T_{i+1} az e_i két különböző oldalára esik minden $i = 1, \dots, k-1$ esetén, valamint $e_0 \parallel T_0T_1$ és $e_k \parallel T_{k-1}T_k$. Rögzítsünk egy $T'_0 \neq T_0$ pontot az e_0 egyenesen.

Most lépésről-lépésre definiálunk egy k csúcsú $\mathcal{T}'$ törött vonalat, melynek kezdőpontja T'_0 és csúcsai rendre az $e_0, e_1, \dots, e_k$ egyeneseken vannak. Ha a T'_i csúcs már adott, akkor a T'_{i+1} csúcs legyen az az egyetlen pont az e_i egyenesen, melyre a $T'_i T'_{i+1}$ egyenes párhuzamos a $T_i T_{i+1}$ egyenessel. Ha $\mathcal{T}$ zárt törött vonal, és $\mathcal{T}'$ nem zárt, akkor

módosítjuk az e_0, T'_0 és e_k választását úgy, hogy ezúttal a $T''_0 = T''_k = T'_0 T'_1 \cap T'_{k-1} T'_k$ pontot választjuk T'_0 pontnak, és a $T_0 T''_0 = T_k T''_k$ egyenest választjuk az e_0 és az e_k egyenesnek is.

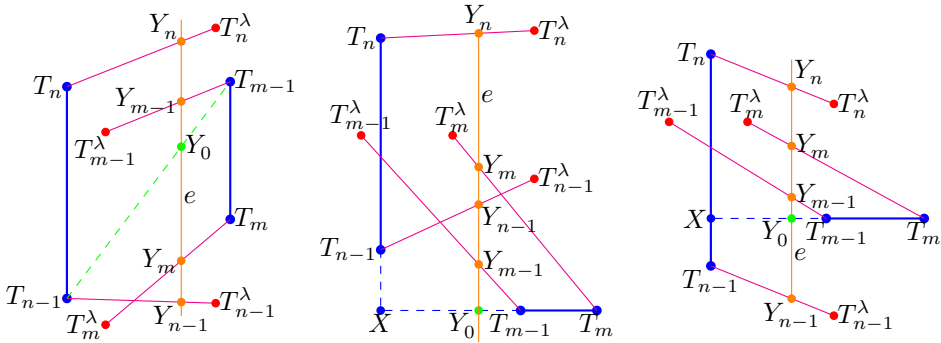
Az így létrehozott $\mathcal{T}'$ törött vonalat a $\mathcal{T}$ törött vonal *kísérőjének* nevezzük.

Figyeljük meg, hogy a párhuzamos szelők tétele alapján minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a $T_i^\lambda = X_{T_i}(\lambda, T'_i)$ csúcsok is a $\mathcal{T}$ törött vonal egy kísérőjét adják, melyet innentől $\mathcal{T}^\lambda$ jelöl.

Lemma. *Ha a $\mathcal{T}$ törött vonal egyszerű, akkor elég kicsi abszolút értékű λ számra a $\mathcal{T}^\lambda$ is egyszerű, és a $\mathcal{T}$ törött vonalat sem metszi.*

Bizonyítás. Legyenek a $\mathcal{T}$ egyszerű törött vonal csúcsai rendre a T_i ($i = 0, \dots, k$) pontok, a $\mathcal{T}^\lambda$ csúcsai pedig rendre a T_i^λ pontok. Belátjuk, hogy különböző $m, n \in \{1, \dots, k\}$ esetén van olyan $\varepsilon_{m,n} > 0$ szám, hogy $\lambda < \varepsilon_{m,n}$ esetén $\overline{T_{m-1}^\lambda T_m^\lambda} \cap \overline{T_{n-1}^\lambda T_n^\lambda} = \emptyset$. Mivel $\overline{T_{m-1} T_m} \cap \overline{T_{n-1} T_n} = \emptyset$, a következők lehetségesek:

- (a) $\overline{T_{m-1} T_m} \cap \overline{T_{n-1} T_n} = \emptyset$,
- (b) $\overline{T_{m-1} T_m} \cap \overline{T_{n-1} T_n} = X$, és $X \notin \overline{T_{m-1} T_m} \cup \overline{T_{n-1} T_n}$.
- (c) $\overline{T_{m-1} T_m} \cap \overline{T_{n-1} T_n} = X$, és $X \in \overline{T_{m-1} T_m}$, de $X \notin \overline{T_{n-1} T_n}$,
- (d) $\overline{T_{m-1} T_m} \cap \overline{T_{n-1} T_n} = X$, és $X \in \overline{T_{n-1} T_n}$, de $X \notin \overline{T_{m-1} T_m}$,
- (e) $\overline{T_{m-1} T_m} = \overline{T_{n-1} T_n}$.



Az (a), a (b) és a (d) esetek.

Mindegyik esetben van olyan e egyenes, melynek különböző félsíkjaiba esnek a $\overline{T_{m-1} T_m}$ és $\overline{T_{n-1} T_n}$ szakaszok:

- (a) a $\overline{T_{m-1} T_n}$ szakasz bármely Y_0 belsőpontján a $t = T_{n-1} T_n$ egyenessel párhuzamosan áthaladó egyenes,
- (b) az $\overline{T_{m-1} T_n}$ szakasz bármely Y_0 felezőpontján áthaladó egyenes,
- (c) az $\overline{XT_n} \cap \overline{T_{n-1} X}$ szakasz bármely Y_0 belsőpontján a $T_{m-1} T_m$ egyenessel párhuzamosan áthaladó egyenes,

- (d) az $\overline{XT_m} \cap \overline{T_{m-1}X}$ szakasz bármely Y_0 belsőpontján a $T_{n-1}T_n$ egyenessel párhuzamosan áthaladó egyenes, és
- (e) a $\overline{T_{m-1}T_m}$ és $\overline{T_{n-1}T_n}$ szakaszokat az egyenesükön elválasztó bármely Y_0 pontban a $T_{n-1}T_n$ egyenest metsző bármely egyenes.

Minden $i \in \{m-1, m, n-1, n\}$ indexre legyen

$$Y_i = \begin{cases} e \cap \overline{T_i T_i^\lambda}, & \text{ha } e \text{ metszi a } \overline{T_i T_i^\lambda} \text{ szakaszt,} \\ T_i^\lambda, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor az $\overline{Y_i T_i}$ szakaszok belseje az e azon nyílt félsíkjaiba esik, amely tartalmazza a T_i pontot. Ha tehát λ_i jelöli azt a pozitív számot, melyre $Y_i = T_i^{\lambda_i}$, akkor minden pozitív $\lambda < \min_i \lambda_i$ esetén a kísérő $\overline{T_{m-1}^\lambda T_m^\lambda}$ és $\overline{T_{n-1}^\lambda T_n^\lambda}$ oldalai nem metszik egymást. Tehát $\mathcal{T}^\lambda$ egyszerű törött vonal.

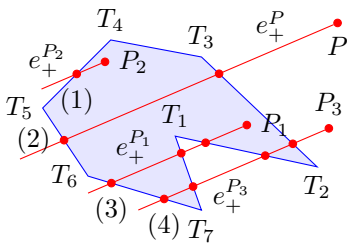
A második állítás igazolásához figyeljük meg, hogy $\mathcal{T}$ egyszerűsége folytán egyetlen oldala sem metszi egyetlen másik oldalát sem, ezért minden m, n sorszámú oldalpárjához van azokat elválasztó $e_{m,n}$ egyenes. Az imént bizonyítottuk, hogy elegendően kicsi, mondjuk az $\varepsilon_{m,n} > 0$ számnál kisebb pozitív λ esetén a kísérő törött vonal m, n sorszámú oldalai az $e_{m,n}$ egyenesnek különböző, a törött vonal m és n sorszámú oldalait tartalmazó, félsíkjaiba lesznek. Eszerint a $\min_{m,n} \varepsilon_{m,n}$ számnál kisebb λ esetén $\mathcal{T}^\lambda$ nem metszi a $\mathcal{T}$ törött vonalat.

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. ■

Legyen adott egy $\mathcal{T}$ sokszög, és definiáljuk a $\mathcal{T}$ relációt a síknak nem a $\mathcal{T}$ sokszögre illeszkedő pontjain úgy, hogy $A \mathcal{T} B$ pontosan akkor, ha van olyan törött vonal, amelynek első csúcsa A , utolsó csúcsa B , és nem metszi a $\mathcal{T}$ törött vonalat.

Tétel. *Ha $\mathcal{T}$ egy sokszög, akkor $\mathcal{T}$ egy ekvivalencia reláció, és pontosan két ekvivalencia-osztálya van, melyek egyikének nem része egyetlen félegyenes sem.*

Bizonyítás. Vegyünk egy E pontot és ebből kiinduló olyan e_+ félegyenest, melynek e egyenese nem párhuzamos a sokszög egyetlen oldalának egyenesével sem.



Jelölje e_+ azt a félegyenest, melyet úgy kapunk, hogy az e félegyenest eltoljuk azzal az eltolással, mely az E pontot a P pontba viszi.

Minden, a $\mathcal{T}$ törött vonalra nem illeszkedő P pontot annak megfelelően nevezünk párosnak illetve páratlannak, hogy az e_+ a $\mathcal{T}$ páros illetve páratlan sok élét metszi.

Ha az e_+ a $\mathcal{T}$ egy csúcsán megy át, akkor aszerint számolunk egy, illetve kettő élmetszést, hogy a csúcs szomszédai az e^P

különböző vagy azonos oldalán vannak. A páros pontok halmazát $\mathcal{H}_e$, a páratlan pontok halmazát $\mathcal{H}_o$ jelöli.

Ha egy $\overline{AB}$ szakasz nem metszi a $\mathcal{T}$ törött vonalat, akkor minden pontja azonos paritású, hiszen a szakaszon mozgó valamely P pont paritása csak akkor változhatna, ha a megfelelő e_+^P félegyenes éppen átmegy a $\mathcal{T}$ törött vonal egy csúcán, de az élmetszés számítási szabálya szerint ilyenkor sem változik.

Ez azt jelenti, hogy $\mathcal{H}_e$ és $\mathcal{H}_o$ pontjait nem kötheti össze olyan törött vonal, mely nem metszi a $\mathcal{T}$ törött vonalat, hiszen minden élén változatlan lenne a pontok paritása, miközben a két végén különböző paritású pontok vannak.

Tekintsünk egy tetszőleges $P \notin \mathcal{T}$ pontot és rajta át egy ℓ egyenest. Az $\ell \cap \mathcal{T}$ végeisége miatt van olyan, a P pontot tartalmazó szakasz, mely nem metszi a $\mathcal{T}$ törött vonalat, és így csak a P paritásával azonos paritású pontokat tartalmaz.

Most belátjuk, hogy ha az $A, C \notin \mathcal{T}$ pontok azonos paritásúak, akkor van olyan $\mathcal{P}$ törött vonal, mely összeköti őket, és nem metszi a $\mathcal{T}$ törött vonalat.

Ha az $\overline{AC} \cap \mathcal{T}$ tartalmazza a $\mathcal{T}$ egy csúcát, akkor vegyünk egy olyan $\overline{C_-C_+}$ szakaszt, amely tartalmazza a C pontot, nem része az AC egyenesnek, és nem metszi a $\mathcal{T}$ törött vonalat. Mivel a $\mathcal{T}$ törött vonalnak csak véges sok csúcsa van, a $\overline{C_-C_+}$ szakaszon van olyan C' pont, hogy $\overline{AC'}$ nem tartalmazza a $\mathcal{T}$ egyetlen csúcát sem. Eszerint feltehető, hogy $\overline{AC}$ nem tartalmazza a $\mathcal{T}$ egyetlen csúcát sem.

Ha az $\overline{AC} \cap \mathcal{T}$ üres, akkor a $\mathcal{P} = \overline{AC}$ szakasz a megoldás.

Tegyük most fel, hogy $\overline{AC} \cap \mathcal{T}$ nem üres.

Mivel az $\overline{AC} \cap \mathcal{T}$ metszet csak véges sok pontot tartalmaz, azok közül van egy B_A pont, amely az $e = AC$ egyenesen az A pontot elválasztja a többi metszésponttól, valamint van egy B_C pont, amely elválasztja a többi metszéspontot a C ponttól..

Legyen B'_A az $\overline{AB_A}$ szakasz belső pontja, és vegyük a $\mathcal{T}$ törött vonalnak egy olyan $\mathcal{T}'$ kísérőjét, mely átmegy a B'_1 ponton.

Minthogy $\mathcal{T}$ egyszerű, előbbi tételünk szerint elegendően kicsiny λ esetén a $\mathcal{T}^\lambda$ kísérő is egyszerű és nem metszi a $\mathcal{T}$ törött vonalat.

Előbbi tételünk bizonyításából tudjuk, hogy ha a $\mathcal{T}$ törött vonal valamely m sorszámú éle nem metszi az $\overline{AC}$ szakaszt, akkor az egyenessel elválasztható az $\overline{AC}$ szakasztól, amiből következik, hogy elegendően kicsiny λ esetén a $\mathcal{T}^\lambda$ kísérő m sorszámú éle sem fogja metszeni az $\overline{AC}$ szakaszt.

Másfelől, ha a $\mathcal{T}$ törött vonal valamely m sorszámú éle metszi az $\overline{AC}$ szakaszt, akkor elegendően kicsiny λ esetén a $\mathcal{T}^\lambda$ kísérő m sorszámú élének végpontjai ugyanúgy az e két különböző oldalára esnek, mint a $\mathcal{T}$ törött vonal m sorszámú élének végpontjai, így a $\mathcal{T}^\lambda$ kísérő m sorszámú éle is metszi az $\overline{AC}$ szakaszt.

ról beszélünk, amikor egy sokszöget a belsejével együtt tekintünk.

Definíció. Pontok egy $\mathcal{K}$ halmazára azt mondjuk, hogy *konvex*, ha bármely két pontjának zárt szakasza a $\mathcal{K}$ része. ▲

Két konvex halmaz metszete nyilván konvex, ezért bármely $\mathcal{P}$ ponthalmazhoz az azt tartalmazó összes konvex halmaz metszetét véve, egy konvex $\mathcal{K}$ halmazt kapunk. Ezt a $\mathcal{K}$ halmazt nevezzük a $\mathcal{P}$ ponthalmaz *konvex burkának*, melyet $\text{conv}(\mathcal{K})$ jelöl.

Definíció. Véges sok pont konvex burkát *politópnak* nevezzük.

A politópot előállító pontok egy ilyen rendszerét *definiáló rendszernek*, a pontokat *definiáló pontoknak* mondjuk. Ezek közül azokat, amelyek elhagyásával a politóp pontjainak halmaza megváltozik (ez persze csak szűkülés lehet), *lényegesnek* nevezzük. Egy politóp valamely definiáló rendszerét *minimálisnak* nevezzük, ha minden eleme lényeges. ▲

Egyetlen pont is politóp. Minden politópnak vannak minimális definiáló rendszerei, hiszen bármely definiáló rendszerből elhagyva a nem lényeges pontokat, végül csak lényeges pontok maradnak.

A szakaszok és a háromszögek is politópok. Az úgynevezett *keresztpolitópot* úgy kapjuk, hogy veszünk 3 általános helyzetű pontot, majd az egyikre tükrözve a másik két pontot, az összesen 5 pont konvex burkát képezzük. Azt a pontot, amelyre a tükrözést végezzük a keresztpolitóp középpontjának hívjuk, és nyilván nem lényeges definiáló pont.

Definíció. Egy politópot 2-dimenziósnek mondunk, ha nem tartalmazza egyetlen egyenes sem, 1-dimenziósnek mondjuk, ha nem egy pont, de tartalmazza egy egyenes, és 0-dimenziósnek nevezzük, ha egyetlen pont. ▲

Definíció. A 2-dimenziós politóp *támaszfélsíkjának* hívjuk azokat a zárt félsíkokat, amelyek tartalmazzák a politópot.

Egy ilyen félsíkot a politóp *lényeges támaszfélsíkjának* nevezzük, ha határoló egyenesének metszete a politóppal egy 1-dimenziós politóp. A lényeges támaszfélsíkok határoló egyeneseit a politóp *támaszegyenesének* mondjuk. ▲

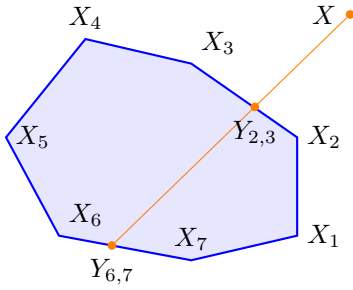
Az 1-dimenziós politóp *támaszfélegyenesének* hívjuk az egyenesen azokat a zárt félegyeneseket, amelyek tartalmazzák a politópot. Egy ilyen félegyeneset a politóp *lényeges támaszfélegyenesének* nevezzük, ha határoló pontjának metszete a politóppal egy pont. A lényeges támaszfélegyenesek határoló pontjait a politóp *támaszpontjainak* mondjuk.

1.6.1. Tétel. Minden 2-dimenziós konvex politóp a lényeges támaszfélsíkjai metszete.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{X} = \{X_i\}_{i=1}^m$ a $\mathcal{P}$ politópot definiáló pontok halmaza. Legyen $\mathcal{P}'$ a politóp lényeges támaszfélsíkjainak metszete.

Nyilván $\mathcal{P} = \text{conv } \mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}'$, hiszen $\mathcal{P}'$ konvex és $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}'$. Eszerint a továbbiakban már elegendő a fordított, $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ tartalmazást igazolni, vagyis azt, hogy a $\mathcal{P}$ pontthalmazba nem tartozó X pont nem esik bele a $\mathcal{P}'$ pontthalmazba sem.

Legyen $X \notin \mathcal{P}$.



Mivel a $\mathcal{P}$ politóp 2-dimenziós, léteznek a definiáló pontok között olyan (X_{i_1}, X_{i_2}) pontpárok, amelyek nem elfajuló szakaszt alkotnak. Ezen szakaszok halmazát jelölje Σ .

A Σ minden $\overline{X_{i_1} X_{i_2}}$ eleméhez legyen ℓ_{i_1, i_2} olyan egyenes az X ponton keresztül, amely belemetsz a $\overline{X_{i_1} X_{i_2}}$ szakaszba, de nem megy át a $\mathcal{P}$ egyetlen pontján se. Jelölje $Z_{j_1, j_2; i_1, i_2}$ az $\ell_{j_1, j_2} \cap \overline{X_{i_1} X_{i_2}}$ metszéspontot.

Minden (j_1, j_2) esetén legyen az $\ell := \ell_{j_1, j_2}$ egyenesen Y_{k_1, k_2} a $Z_{j_1, j_2; i_1, i_2}$ pontok közül az, amely az egyenes pontjainak rendezésében elválasztja a többiekét az X ponttól.

Megmutatjuk, hogy az így kiválasztott, különböző X_{k_1}, X_{k_2} definiáló pontok e_{k_1, k_2} egyenese olyan, hogy annak különböző partján van az X pont és a $\mathcal{P}$ politóp.

Indirekten tegyük fel, hogy mondjuk az $X_h \in \mathcal{X}$ pont az e_{k_1, k_2} egyenes ugyanazon oldalára esik, mint az X pont.

Az X pont nem eshet bele a $\mathcal{H} = \text{conv}(X_h, X_{k_1}, X_{k_2})$ háromszögbe, mert akkor feltevésünkkel szemben $X \in \text{conv } \mathcal{X} = \mathcal{P}$ következne. Ugyanakkor az ℓ egyenest úgy választottuk, hogy az nem megy át a $\mathcal{H}$ egyetlen csúcán sem, miközben metszi annak $\overline{X_{k_1} X_{k_2}}$ oldalát. A Pasch axióma szerint ez azt jelenti, hogy az ℓ egyenes egy belső Y_{h, k_i} pontban metszi az $\mathcal{H}$ háromszög egy $\overline{X_h X_{k_i}}$ oldalát az $i = 1$ vagy $i = 2$ valamelyikére. Ez azt jelenti, hogy $Y_{h, k_i} \in \overline{X_h X_{k_i}}$, ami ellentmond az Y_{k_1, k_2} kiválasztásának.

Tehát X_h mégis az e_{k_1, k_2} másik, az X pontot nem tartalmazó oldalán van.

Eszerint létezik olyan lényeges támaszfél sík, amelyik az X pontot nem tartalmazza, vagyis $X \notin \mathcal{P}'$ érvényes. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. ■

Definíció. A sík véges sok zárt fél síkjának metszetét *konvex poligon*nak nevezzük. A konvex poligon *belsejének* nevezzük ugyanezen fél síkok belsejeinek metszetét.

A konvex poligont előállító fél síkok egy ilyen rendszerét *definiáló rendszernek*, benne a síkokat *definiáló fél síkok*nak hívjuk. Ezek közül azokat, amelyek elhagyásával

a konvex poligon pontjainak halmaza megváltozik (ez persze csak bővülés lehet), *lényegesnek* nevezzük.

Egy konvex poligon valamely definiáló rendszerét *minimálisnak* nevezzük, ha minden eleme lényeges. ▲

Előbbi tételünk szerint a konvex politópok mindig poligonok, de minden félsík is poligon.

Minden poligonnak léteznek minimális definiáló rendszerei, hiszen bármely definiáló rendszerből elhagyva a nem lényeges félsíkokat végül csak lényeges félsíkok maradnak.

Egy konvex poligont 2-dimenziósnek mondunk, ha nem tartalmazza egyetlen egyenes sem, 1-dimenziósnek mondjuk, ha nem egy pont, de tartalmazza egy egyenes, és 0-dimenziósnek nevezzük, ha egyetlen pont. Az 1-dimenziós poligonok, a nem elfajuló zárt szakaszok, a félegyenesek és az egyenesek.

Egy poligon akkor és csak akkor 2-dimenziós, ha a belseje nem üres. Bizonyításképpen elég megfigyelni, hogy egy belső P pontra illeszkedő minden e egyenesnek van olyan szakasza, amely része a poligon belsejének és tartalmazza a P pontot. Ennek a metsző félsíkok számára vonatkozó teljes indukciós bizonyításhoz előbb jegyezzük meg, hogy ha P egy nyílt félsík pontja, akkor P minden rajta átmenő egyenesnek a nyílt félsíkba eső nyílt félegyenesén van. Tegyük fel, hogy az állítás teljesül, amennyiben a P pont $n \in \mathbb{N}$ nyílt félsík metszetében van, vagyis minden P pontot tartalmazó e egyenesen van egy $\overline{P_-^e P_+^e}$ nyílt szakasz, mely tartalmazza a P pontot. Ha most újabb nyílt $\mathcal{S}_+$ félsíkkal metszünk, akkor az e egyenesen a P pont a $\overline{P_-^e P_+^e}$ nyílt szakasz és az $e_+ = e \cap \mathcal{S}_+$ nyílt félegyenes metszetének része. Ez a metszet nyilván egy nyílt szakasz, amivel a bizonyítás teljessé vált.

Tétel. *Bármely 2-dimenziós konvex poligon*

- (1) *metszete bármely öt definiáló rendszer bármely lényeges definiáló félsíkjának határoló egyenesével 1-dimenziós poligon,*
- (2) *pontosan egy minimális definiáló rendszerrel rendelkezik.*

Bizonyítás. Legyen $\{\mathcal{S}^i\}_{i=0}^m$ a 2-dimenziós $\mathcal{P}^+ = \bigcap_{i=0}^m \mathcal{S}^i$ konvex poligon egy definiáló rendszere, melyben az e^0 egyenes által határolt $\mathcal{S}^0$ félsík lényeges.

Az $\mathcal{S}^0$ definiáló félsík elhagyásával keletkező $\mathcal{P}^0 = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{S}^i$ poligonra

$$\mathcal{P}^0 = \mathcal{P}^0 \cap (\mathcal{S}^0 \cup (\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^0)) = \mathcal{P}^+ \cup (\mathcal{P}^0 \cap (\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^0)).$$

Legyen $\mathcal{P}^- = \mathcal{P}^0 \cap (e^0 \cup (\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^0))$. Ekkor $\mathcal{P}^0 = \mathcal{P}^+ \cup \mathcal{P}^-$, $\mathcal{P}^0 \cap e^0 = \mathcal{P}^+ \cap \mathcal{P}^-$, és a $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^-$ poligonok az e^0 egyenes különböző zárt félsíkjaiba esnek.

Mivel $\mathcal{S}^0$ lényeges definiáló félsík, a $\mathcal{P}^0$ poligonban van olyan X pont, amely nincs a $\mathcal{P}^+$ poligonban, ezért $\mathcal{P}^-$ poligon belsejében van. Az X pontot a $\mathcal{P}^+$ minden

Y pontjával összekötő szakasz metszi az e^0 egyenest, a konvexitás miatt pedig $\mathcal{P}^0$ része. Mivel $\mathcal{P}^+$ dimenziója 2, több, és nem is csak egy egyenesbe eső pontja is van, ezért a konvex $e^0 \cap \mathcal{P}_0$ ponthalmaz több pontot is tartalmaz. Ez bizonyítja az első állítást, de figyeljük meg azt is, hogy a $\mathcal{P}^-$ poligon is 2-dimenziós, mert a konvex $\overline{XY} \cap \mathcal{P}^-$ halmaz belseje nem üres.

A második állítás helyett azt igazoljuk, hogy bármely definiáló rendszer minden lényeges eleme minden más definiáló rendszernek is eleme. Ebből nyilván következik a tétel második állítása.

Legyen $\{\mathcal{S}^i\}_{i=1}^m$ a 2-dimenziós $\mathcal{P}$ poligon valamely definiáló rendszerének lényeges elemeit tartalmazó minimális definiáló rendszer, és vegyünk egy e_0 egyenes által határolt S_0 félsíkot, amely a $\mathcal{P}$ poligon valamely definiáló rendszerében lényeges.

Az első állítás alapján a $\mathcal{P}$ poligon metszete az S_0 félsíkkal az e_0 határoló egyenesen egy 1-dimenziós $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ poligon. Ennek egyetlen pontja sincs a $\mathcal{P}$ poligon belsejében, ezért $\mathcal{P}' \not\subseteq \bigcap_{i=1}^m (\mathcal{S}^i \setminus e^i) = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{S}^i \setminus \bigcup_{i=1}^m e^i = \mathcal{P} \setminus \bigcup_{i=1}^m e^i$. Eszerint $\mathcal{P}' \subseteq \bigcup_{i=1}^m e^i = \mathcal{H}$. Ha $e_0 \notin \{e^i : 0 < i \leq m\}$ lenne, akkor az e_0 egyenesnek a $\mathcal{H}$ halmazzal vett $e_0 \cap \mathcal{H} = \mathcal{P}'$ metszete legfeljebb m pontot tartalmazna, holott a $\mathcal{P}'$ poligon 1-dimenziós. Eszerint valamely i indexre $e_0 = e^i$. Mivel $\mathcal{P} \subseteq S_0 \cap S^i$, és a $\mathcal{P}$ poligon 2-dimenziós, az $S_0 \cap S^i$ nem lehet csak az $e_0 = e^i$ egyenes, tehát $S^i = S_0$, ami a bizonyítandó volt. ■

Mivel minimális definiáló rendszer csak egy van, a lényeges definiáló félsíkok is egyértelműen meghatározottak, vagyis ezek a poligon jellemzői.

Definíció. A lényeges definiáló félsíkok határoló egyenesének a poligonon alkotott metszetét a konvex poligon *éleinek* nevezzük.

Ha az élnek van végpontja, akkor azt a konvex poligon *csúcsának* nevezzük.

Az élek egyesített ponthalmazát a konvex poligon *határának* mondjuk. ▲

A konvex poligon határtól különböző része a konvex poligon belseje, hiszen éppen a lényeges definiáló nyílt félsíkok metszete.

Tekintsünk egy konvex poligon belsejében egy P pontot. Az ebből induló minden e_+ félegyenes vagy teljes egészében a poligonban van, vagy pontosan egy határpontot tartalmaz, hiszen egy belső ponton át nem mehet lényeges félsík határoló egyenese. Ez a határpont egy él belső pontja vagy egy csúc.

Korlátnak nevezzük egy poligont, ha nem tartalmaz félegyenest.

Tétel. Minden korlátnak konvex poligon megegyezik csúcsainak konvex burkával.

Bizonyítás. Jelölje $\mathcal{P}'$ a $\mathcal{P}$ korlátos konvex poligon csúcpontjainak konvex burkát. Mivel a $\mathcal{P}$ konvex, teljesül a $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ tartalmazás, így csak a $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$ tartalmazást kell igazolnunk.

Legyen az $X \in \mathcal{P}$ olyan pont, amelyre $X \notin \mathcal{P}'$ teljesül. Az 1.6.1. tétel bizonyítása alapján a $\mathcal{P}'$ politóp valamely f lényeges támaszegyenese olyan, hogy a $\mathcal{P}'$ politóp és az X pont az f különböző oldalára esik. Toljuk az f támaszegyenest az X irányába, esetleg az X ponton túlra párhuzamosan. A $\mathcal{P}$ korlátossága miatt létezik egy „utolsó” f' pozíció, amikor az f' a $\mathcal{P}$ poligont még metszi, de tovább tolva már nem metszené. Legyen ez az „utolsó” metszet $\mathcal{P}^* = f' \cap \mathcal{P}$. Nyilván ez is korlátos konvex poligon és minden csúcsa a $\mathcal{P}$ poligonnak is csúcsa, mert, ha létezne a $\mathcal{P}^*$ egy csúcsát belső pontként tartalmazó szakasz a $\mathcal{P}$ poligonban, akkor

- (1) az nem metszheti az f' eltolt támaszegyenest, hiszen a $\mathcal{P}$ poligon teljes egészében az f' egyik zárt félsíkjában van,
- (2) de az f' eltolt támaszegyenesben sem haladhat, hiszen akkor a tekintett pont nem lehetne a $\mathcal{P}^*$ csúcsa.

Ugyanakkor f' nem metszi a $\mathcal{P}'$ politópot, hiszen az f támasz X pontot tartalmazó oldalán van.

Ezek szerint a z' tartalmazza $\mathcal{P}$ néhány csúcsát, de nem metszi a $\mathcal{P}'$ politópot, így a $\mathcal{P}$ ezen csúcsai nincsenek benne a csúcsok $\mathcal{P}' = \text{conv}\{P_i\}_{i=1}^m$ konvex burkában. Ez az ellentmondás azt mutatja, hogy a feltételezett tulajdonságú X pont nem létezhet, vagyis $X \in \mathcal{P}$ következtében $X \notin \mathcal{P}'$ is teljesül, ami bizonyítja a tételt. ■

Tételünk azonnali következménye, hogy az egyenesek a konvex politópokból mindig szakaszt metszenek ki.

A konvexitás miatt egy csúcs nem lehet három él végpontja, ezért egy csúcs pontosan kettő él közös végpontja. Ez lehetővé teszi a csúcsok $P_1, P_2, \dots, P_k$ sorba rendezését úgy, hogy ezek rendre a $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \dots, \overline{P_{k-1}P_k}$, és $\overline{P_kP_1}$ élek végpontjai. Eszerint minden korlátos konvex poligon határa a csúcsai által definiált sokszög, vagyis a korlátos konvex poligonok éppen a konvex sokszöglapok.

1.7. Másodrendű görbék

Láttuk, hogy az elsőfokú (lineáris) egyenlettel leírható ponthalmazok a síkon éppen az egyenesek. Természetesen vetődik fel a másodrendű egyenletek vizsgálata.

Másodrendű polinomnak nevezünk egy $f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + bx + cy + d$ alakú kifejezést, ahol $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b, c, d \in \mathbb{R}$ nem mind nulla. Egy $f(x, y) = 0$ egyenletet *másodrendűnek* mondunk, ha f másodrendű polinom. A másodrendű egyenletet *elfajulónak* nevezzük, ha $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$.

Az affin sík egy $\mathcal{P}$ ponthalmazát, *másodrendű görbének* nevezzük, ha valamely φ koordinátázásban pontosan a $\mathcal{P}$ halmaz P pontjaira teljesül valamely $f(\varphi(P)) = 0$ másodrendű egyenlet, melyet a *másodrendű görbe egyenletének* mondjuk. Egy másodrendű görbét *elfajulónak* nevezzük, ha valamely egyenlete elfajul.

Világos, hogy a másodrendű görbék és másodrendű egyenletek közötti kapcsolat egyik irányban sem injektív.

Tétel. *Másodrendű görbe affin képe is másodrendű görbe, amely akkor és csak akkor elfajul, ha az őse is elfajul.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{P}$ másodrendű görbe a φ koordinátázásban. Ez azt jelenti, hogy pontosan azon P pontok tartoznak hozzá, melyek φ szerinti koordinátái egy másodrendű egyenlet összes megoldásai, vagyis egy alkalmas $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ másodrendű polinomra $0 = f(\varphi(P))$ teljesül.

Ha $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ egy koordináta-transzformáció, akkor

$$\begin{aligned} 0 &= f(\varphi(\mathcal{P})) = f(\phi^{-1} \circ \varphi \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \varphi(\mathcal{P})) = f \circ \phi^{-1}(\varphi(\psi(\mathcal{P}))) \\ &= f \circ \phi^{-1}(\varphi(\hat{\mathcal{P}})) = \hat{f}(\varphi(\hat{\mathcal{P}})), \end{aligned} \quad (1.7.1)$$

ahol $\psi = \varphi^{-1} \circ \phi \circ \varphi$ a ϕ -hez tartozó affinitás, $\hat{\mathcal{P}} = \psi(\mathcal{P})$ a képponthalmaz.

Eszerint elég igazolni, hogy az $\hat{f} = f \circ \phi^{-1}$ függvény a másodrendű görbe definíciójában megadott alakú. Legyen a ϕ inverze

$$\phi^{-1}: (\hat{x}, \hat{y}) \mapsto (x, y) = (\hat{x}_0, \hat{y}_0) + (\hat{x}, \hat{y}) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

alakú, ahol $b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} \neq 0$, és vezessük be az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ és $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ jelöléseket.

Azt kapjuk, hogy $f(x, y) = (x, y)\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (x, y)\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} + d$, és így

$$\begin{aligned} \hat{f}(\hat{x}, \hat{y}) &= f \circ \phi^{-1}(\hat{x}, \hat{y}) \\ &= ((\hat{x}_0, \hat{y}_0) + (\hat{x}, \hat{y})\mathbf{B})\mathbf{A}((\hat{x}_0, \hat{y}_0) + (\hat{x}, \hat{y})\mathbf{B})^T + ((\hat{x}_0, \hat{y}_0) + (\hat{x}, \hat{y})\mathbf{B})\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} + d \\ &= (\hat{x}, \hat{y})\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^T\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + (\hat{x}, \hat{y})\mathbf{B}\mathbf{A}\begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \end{pmatrix} + (\hat{x}_0, \hat{y}_0)\mathbf{A}\mathbf{B}^T\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + (\hat{x}, \hat{y})\mathbf{B}\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} + \\ &\quad + (\hat{x}_0, \hat{y}_0)\mathbf{A}\begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \end{pmatrix} + (\hat{x}_0, \hat{y}_0)\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} + d, \\ &= (\hat{x}, \hat{y})\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^T\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + (\hat{x}, \hat{y})\mathbf{B}\left(2\mathbf{A}\begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}\right) + \\ &\quad + \left((\hat{x}_0, \hat{y}_0)\mathbf{A}\begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \end{pmatrix} + (\hat{x}_0, \hat{y}_0)\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} + d\right). \end{aligned}$$

Ebből jól látszik, hogy $\hat{f}$ is másodrendű. Ez pontosan akkor elfajul, ha

$$\det(\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^T) = \det(\mathbf{B})\det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}^T) = \det(\mathbf{A})\det^2(\mathbf{B}) = 0,$$

ami $\det(\mathbf{B}) \neq 0$ miatt pontosan akkor teljesül, amikor $\det(\mathbf{A}) = 0$, vagyis amikor az $f = 0$ egyenlet elfajuló. Ezzel a tételt igazoltuk. ■

Affin főtengely-transzformáció. *A sík bármely másodrendű görbéjéhez van olyan affinitás, mely a görbét az*

$$x^2 + y^2 = \begin{cases} 1, & (1a) \\ 0, & (1b) \end{cases} \quad x^2 - y^2 = \begin{cases} 1, & (2a) \\ 0, & (2b) \end{cases} \quad y^2 = \begin{cases} x, & (3a) \\ 1, & (3b) \end{cases} \quad 0 = \begin{cases} x, & (4a) \\ 1, & (4b) \end{cases}$$

egyenletek pontosan egyikének megoldáshalmazába viszi, ahol $0 < a, b, p \in \mathbb{R}$.

Bizonyítás. Legyen egy másodrendű $\mathcal{P}$ görbe egyenlete egy φ koordinátázásban $f(z, t) = (z, t)\mathbf{A} \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} + (z, t) \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} + d = 0$, ahol $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, és $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b, c, d \in \mathbb{R}$ nem mind nulla. Ez azt jelenti, hogy $\mathcal{P} = \{P : f(\varphi(P)) = 0\}$.

Ha ϕ egy koordinátatranszformáció, akkor a sík $\phi_\varphi = \varphi^{-1}\phi\varphi$ affinitása a $\mathcal{P}$ halmazt olyan $\hat{\mathcal{P}} = \phi_\varphi(P)$ halmazba viszi, melynek egyenlete $\hat{f}(x, y) = f \circ \phi^{-1}(x, y) = 0$, hiszen

$$\hat{f}(\varphi(\phi_\varphi(P))) = f \circ \phi^{-1}(\varphi(\phi_\varphi(P))) = f \circ \phi^{-1}(\phi(\varphi(P))) = f(\varphi(P)).$$

Vegyük észre, hogy ez lényegében a korábbi (1.7.1) formula, csak jelen célunkhoz alkalmasabb formában.

Innentől csak az alkalmas ϕ koordinátatranszformációt keressük.

I. eset: $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$ és $b = c = 0$. Ekkor $d \neq 0$, és nincs megoldás, melynek (4b) típusú egyenlete van.

II. eset: $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, és $b^2 + c^2 > 0$. Ekkor az $f(z, t) = bz + ct + d$ forma mutatja, hogy a

$$\phi: (z, t) \mapsto (x, y) = (z, t) \begin{pmatrix} b & c \\ c & -b \end{pmatrix} + (d, 0) = (f(z, t), cz - bt)$$

koordinátatranszformáció esetén a $\hat{\mathcal{P}}$ görbének (4a) az egyenlete.

III.a. eset: $a_{12} = 0$ és $a_{11}a_{22} = 0$. Ekkor $a_{11}^2 + a_{22}^2 > 0$ és az

$$f(z, t) = \begin{cases} a_{11}\left(z + \frac{b}{2a_{11}}\right)^2 + \frac{4da_{11}-b^2}{4a_{11}}, & \text{ha } a_{11} \neq 0 = a_{22} \text{ és } c = 0, \\ a_{11}\left(z + \frac{b}{2a_{11}}\right)^2 + c\left(t + \frac{4da_{11}-b^2}{4ca_{11}}\right), & \text{ha } a_{11} \neq 0 = a_{22} \text{ és } c \neq 0, \\ a_{22}\left(t + \frac{c}{2a_{22}}\right)^2 + \frac{4da_{22}-c^2}{4a_{22}}, & \text{ha } a_{11} = 0 \neq a_{22} \text{ és } b = 0, \\ a_{22}\left(t + \frac{c}{2a_{22}}\right)^2 + b\left(z + \frac{4da_{22}-c^2}{4ba_{22}}\right), & \text{ha } a_{11} = 0 \neq a_{22} \text{ és } b \neq 0, \end{cases}$$

forma mutatja, hogy a

$$\phi: (z, t) \mapsto (x, y) = (z, t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{cases} \left(\frac{b}{2a_{11}}, 0\right), & \text{ha } a_{11} \neq 0 = a_{22} \text{ és } c = 0, \\ \left(\frac{b}{2a_{11}}, \frac{4da_{11}-b^2}{4ca_{11}}\right), & \text{ha } a_{11} \neq 0 = a_{22} \text{ és } c \neq 0, \\ \left(0, \frac{c}{2a_{22}}\right), & \text{ha } a_{11} = 0 \neq a_{22} \text{ és } b = 0, \\ \left(\frac{4da_{22}-c^2}{4ba_{22}}, \frac{c}{2a_{22}}\right), & \text{ha } a_{11} = 0 \neq a_{22} \text{ és } b \neq 0, \end{cases}$$

koordinátatranszformáció esetén a $\hat{\mathcal{P}}$ görbe egyenletének alakja

$$0 = \hat{f}(x, y) = \begin{cases} a_{11}\left(x^2 + \frac{4da_{11}-b^2}{4a_{11}^2}\right), & \text{ha } a_{11} \neq 0 = a_{22} \text{ és } c = 0, \\ a_{11}\left(x^2 + \frac{c}{a_{11}}y\right), & \text{ha } a_{11} \neq 0 = a_{22} \text{ és } c \neq 0, \\ a_{22}\left(y^2 + \frac{4da_{22}-c^2}{4a_{22}^2}\right), & \text{ha } a_{11} = 0 \neq a_{22} \text{ és } b = 0, \\ a_{22}\left(y^2 + \frac{b}{a_{22}}x\right), & \text{ha } a_{11} = 0 \neq a_{22} \text{ és } b \neq 0. \end{cases}$$

Az első esetben az egyenlet, ha $4da_{11} \geq b^2$, akkor (4b) típusú, ha pedig $4da_{11} < b^2$, akkor (3b) alakú. A harmadik esetben az egyenlet, ha $4da_{22} \geq c^2$, akkor (4b) típusú, ha pedig $4da_{22} < c^2$, akkor (3b) alakú. A második és negyedik esetben az egyenlet (3a) alakú.

III.b. eset: $a_{12} = 0$ és $a_{11}a_{22} \neq 0$. Ekkor az

$$f(z, t) = a_{11}\left(z + \frac{b}{2a_{11}}\right)^2 + a_{22}\left(t + \frac{c}{2a_{11}}\right)^2 + \frac{k}{4a_{11}a_{22}}$$

forma, ahol $k = 4da_{11}a_{22} - b^2a_{22} - c^2a_{11}$, mutatja, hogy a

$$\phi: (z, t) \mapsto (x, y) = (z, t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{b}{2a_{11}}, \frac{c}{2a_{11}}\right)$$

koordinátatranszformáció esetén a $\hat{\mathcal{P}}$ görbének

- (1a) típusú egyenlete van, ha $a_{11}a_{22} > 0$ és $k > 0$,
- (1b) típusú egyenlete van, ha $a_{11}a_{22} > 0$ és $k = 0$,
- (2a) típusú egyenlete van, ha $a_{11}a_{22} < 0$ és $k \neq 0$,
- (2b) típusú egyenlete van, ha $a_{11}a_{22} < 0$ és $k = 0$,
- (4b) típusú egyenlete van, ha $a_{11}a_{22} > 0$ és $k < 0$.

IV. eset: $a_{12} \neq 0$. Tekintsük a

$$0 = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a_{22} + a_{11})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$$

egyenletnek a másodrendű egyenletek megoldóképletével adódó

$$\lambda_{\pm} = \frac{a_{22} + a_{11} \pm \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2}}{2}$$

megoldásait. Legyen $\delta = \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2}$, és $\xi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{a_{12}^2 + (\lambda_{\pm} - a_{11})^2}}$. Ekkor

$$\begin{aligned} (\lambda_+ - a_{11})(\lambda_- - a_{11}) &= \lambda_+ \lambda_- - (\lambda_+ + \lambda_-)a_{11} + a_{11}^2 \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) - (a_{22} + a_{11})a_{11} + a_{11}^2 = -a_{12}^2, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\xi_{\pm}^2} = a_{12}^2 + (\lambda_{\pm} - a_{11})^2 = \frac{\delta^2 \pm (a_{22} - a_{11})\delta}{2} = \pm(\lambda_{\pm} - a_{11})\delta,$$

$$\delta a_{12}^2 \xi_{\pm}^2 = \frac{\delta a_{12}^2}{\pm(\lambda_{\pm} - a_{11})\delta} = \frac{-(\lambda_+ - a_{11})(\lambda_- - a_{11})}{\pm(\lambda_{\pm} - a_{11})(\lambda_{\mp} - a_{11})} = \mp(\lambda_{\mp} - a_{11}),$$

és így

$$\begin{aligned} & (z(\lambda_+ - a_{11})\xi_+ - ta_{12}\xi_+)^2\lambda_- + (z(\lambda_- - a_{11})\xi_- - ta_{12}\xi_-)^2\lambda_+ \\ &= ((\lambda_+ - a_{11})z - a_{12}t)^2\xi_+^2\lambda_- + ((\lambda_- - a_{11})z - a_{12}t)^2\xi_-^2\lambda_+ \\ &= ((\lambda_+ - a_{11})^2\xi_+^2\lambda_- + (\lambda_- - a_{11})^2\xi_-^2\lambda_+)z^2 - \\ & \quad - 2((\lambda_+ - a_{11})\xi_+^2\lambda_- + (\lambda_- - a_{11})\xi_-^2\lambda_+)a_{12}zt + (\xi_+^2\lambda_- + \xi_-^2\lambda_+)a_{12}^2t^2 \\ &= ((\lambda_+ - a_{11})\lambda_- - (\lambda_- - a_{11})\lambda_+)\frac{z^2}{\delta} - 2(\lambda_- - \lambda_+)\frac{a_{12}zt}{\delta} + \\ & \quad + (-(\lambda_- - a_{11})\lambda_- + (\lambda_+ - a_{11})\lambda_+)\frac{t^2}{\delta} \\ &= (\lambda_+ - \lambda_-)\frac{a_{11}z^2}{\delta} + 2a_{12}zt + (\lambda_+ + \lambda_- - a_{11})t^2 = a_{11}z^2 + 2a_{12}zt + a_{22}t^2. \end{aligned}$$

Legyen

$$\phi: (x, y) \mapsto (z, t) = (x, y) \begin{pmatrix} (\lambda_+ - a_{11})\xi_+ & (\lambda_- - a_{11})\xi_- \\ -a_{12}\xi_+ & -a_{12}\xi_- \end{pmatrix}.$$

Ezen ϕ koordinátatranszformáció esetén a $\hat{\mathcal{P}}$ görbe egyenlete $\lambda_-x^2 + \lambda_+y^2 + b'x + c'y + d' = 0$ alakú, ahol $b', c', d' \in \mathbb{R}$ alkalmas konstansok. Eszerint a III.a és III.b esetekben megadott további koordinátatranszformációk elvezetnek a megfelelő alakú egyenlethez.

Ezzel a tételt beláttuk. ■

Tételünk fontos következménye, hogy egy másodrendű görbe egyenlete minden koordinátázásban másodrendű, tehát egy pontthalmaz akkor és csak akkor másodrendű, ha minden koordinátázásban egy másodrendű egyenlet megoldáshalmaza.

Definíció. Azon másodrendű görbéket, melyek egyenletének formája megfelelő koordinátázásban a fenti tételben adottak közül (1a), (2a) illetve (3a) alakú, rendre *ellipszisnek*, *hiperbolának* illetve *parabolának* nevezzük. Az ilyen görbéket *valódi* vagy *közönséges* másodrendű görbének hívjuk. ▲

Figyeljük meg, hogy a parabola egyszerre valódi és elfajuló másodrendű görbe. Előbbi tételünk értelmében egy másodrendű görbe affin képe akkor és csak akkor valódi másodrendű görbe, ha az eredeti másodrendű görbe is valódi.

Euklidészi sík

Pontnak nevezett elemek egy $\mathcal{M}$ halmazát *metrikus térnek* nevezzük, ha adott egy $d: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés, a *metrika*, melyre:

(M₁) minden P, Q pontpár esetén

$$(M'_1) \quad d(P, Q) \geq 0, \text{ és}$$

(M''₁) egyenlőség pontosan akkor érvényes, ha $P = Q$;

(M₂) $d(P, Q) = d(Q, P)$, vagyis a leképezés szimmetrikus.

(M₃) minden P, Q, R ponthármasra teljesül a *háromszög-egyenlőtlenség*, vagyis $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$.

Egy metrikus tér részhalmaza is metrikus teret alkot a befoglaló metrikus tér metrikájának megszorításával.

Az M'₁ feltételt a metrika *pozitivitásának*, az M''₁ feltételt a metrika *definit-ségének*, az M₂ feltételt a metrika *szimmetriájának*, az M₃ feltételt *háromszög-egyenlőtlenségnek* vagy *szubadditivitásnak* nevezzük. A $d(P, Q)$ számot a P, Q pontok *távolságának* nevezzük.

Minden halmazon bevezethető több metrika is. Például $k > 0$ esetén a

$$d(P, Q) = \begin{cases} k, & \text{ha } P \neq Q, \\ 0, & \text{ha } P = Q \end{cases}$$

függvény bármilyen halmazon metrika. *Diszkrét metrikának* nevezzük. Metrikus terek fontos tulajdonságait a **Függelék F.4.** szakasza tárgyalja.

A valós számok halmazán az abszolút érték is egy metrika. Ennek fontos tulajdonsága, hogy $|x - z| = |x - y| + |y - z|$ pontosan akkor teljesül, ha y az x és z közé esik.

Definíció. Az $\mathfrak{S}$ affin síkon értelmezett $d: \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}$ metrikát *affinnak* nevezzük, ha minden P, Q, R ponthármasra teljesül, hogy

$$(M'_3) \quad d(P, R) = d(P, Q) + d(Q, R) \text{ pontosan akkor, ha } Q \in \overline{PR}. \quad \blacktriangle$$

Az M'₃ feltételt a metrika *additivitásának* nevezzük. Az M₃ és M'₃ feltételek együttesét *szigorú háromszög-egyenlőtlenségnek* hívjuk.

Vegyük észre, hogy egyedül az additivitás feltétele az, amely az affin metrika fogalmát az affin sík szerkezetéhez köti: azt eredményezi, hogy két pont között a

legrövidebb út a közös egyenesükön vezet. Az affin metrikák általános tulajdonságait az **Affin metrikák** fejezet tárgyalja.

Affin metrika esetén a $d(P, Q)$ számot a $\overline{PQ}$ szakasz hosszának is mondjuk.

2.1. Euklidészi metrika

Tétel. Ha a $d: S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ függvény valamely φ koordinátázásban

$$d(\varphi^{-1}(x_0, y_0), \varphi^{-1}(x_1, y_1)) = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} \quad (2.1.1)$$

alakú, akkor a d egy affin metrika.

Bizonyítás. A pozitivitás és a szimmetria nyilvánvalóan teljesül. A definitség is teljesül, hiszen két négyzetszám összege pontosan akkor nulla, ha mindkét tag nulla, φ pedig bijektív.

A háromszög-egyenlőtlenség és az additivitás bizonyítása a következő. Vegyük észre, hogy $d(P, Q) + d(Q, R) - d(P, R) \geq 0$ akkor és csak akkor, ha $(d(P, Q) + d(Q, R))^2 - d^2(P, R) = (d(P, Q) + d(Q, R) - d(P, R))(d(P, Q) + d(Q, R) + d(P, R)) \geq 0$, hiszen $d(P, Q) + d(Q, R) + d(P, R)$ nem negatív és csak $P = Q = R$ esetén nulla, amely esetben viszont $d(P, Q) + d(Q, R) - d(P, R) = 0$ is teljesül.

Ha $P = \varphi^{-1}((x_1, y_1) - (z_0, t_0))$, $Q = \varphi^{-1}(x_1, y_1)$, és $R = \varphi^{-1}((x_1, y_1) + (z_2, t_2))$, akkor

$$\begin{aligned} & (d(P, Q) + d(Q, R))^2 - d^2(P, R) \\ &= z_0^2 + t_0^2 + z_2^2 + t_2^2 - (z_2 + z_0)^2 - (t_2 + t_0)^2 + 2\sqrt{z_0^2 + t_0^2}\sqrt{z_2^2 + t_2^2} \\ &= -2(z_2 z_0 + t_2 t_0) + 2\sqrt{(z_0^2 + t_0^2)(z_2^2 + t_2^2)}, \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

így elég tehát belátni, hogy a biztosan nem negatív második tag abszolút értéke nem kisebb mint az első tagé. Ezt a

$$(z_0^2 + t_0^2)(z_2^2 + t_2^2) - (z_2 z_0 + t_2 t_0)^2 = (z_0 t_2 - t_0 z_2)^2 \geq 0 \quad (2.1.3)$$

egyenlőtlenség igazolja. Tehát a háromszög-egyenlőtlenségben akkor és csak akkor van egyenlőség, ha a három közül valamely kettő egybeesik, vagy $(z_0, t_0) \neq (0, 0) \neq (z_2, t_2)$ és $z_0 t_2 = t_0 z_2$. Eszerint $t_2(z_0, t_0) = t_0(z_2, t_2)$ és $z_2(z_0, t_0) = z_0(z_2, t_2)$ és ezen egyenlőségek közül legalább az egyikben az egyik szorzó nem nulla. Ez ekvivalens azzal, hogy $\overrightarrow{PQ}$ és $\overrightarrow{QR}$ vektorok egymás többszörösei, vagyis a P, Q és R pontok kollineárisak.

Ha $d(P, Q) + d(Q, R) = d(P, R)$, akkor (2.1.2) miatt $z_2 z_0 + t_2 t_0 \geq 0$. Ugyanakkor $z_0 t_2 = t_0 z_2$ miatt z_0 és z_2 pontosan akkor azonos, illetve különböző előjelű,

ha t_2 és t_0 azonos, illetve különböző előjelű, így $z_2 z_0 + t_2 t_0 \geq 0$ csak úgy lehet, ha z_0 és z_2 , valamint t_2 és t_0 is egyforma előjelű. Ez igazolja, hogy $Q \in \overline{PR}$, amivel a tétel bizonyítása teljes. ■

A (2.1.3) formula a **Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség** speciális esete.

A tételben megadott formájú metrikákat *euklidészinek*, az olyan affin síkokat, melyek ilyen metrikával ellátottak *euklidészi síknak* nevezzük. Két euklidészi síkot *izomorf*nak mondunk, ha van köztük egy kollineáció, amely tartja a távolságot.

Tétel. *Bármely m és $\bar{m}$ euklidészi metrika esetén van olyan ψ affinitása a síknak, melyre $\bar{m}(P, Q) = m(\psi(P), \psi(Q))$ minden (P, Q) pontpárra.*

Bizonyítás. Az euklidészi metrika definíciójából következik, hogy léteznek olyan φ és $\bar{\varphi}$ koordinátázások, melyekre

$$m(\varphi^{-1}(z_0, t_0), \varphi^{-1}(z_1, t_1)) = \sqrt{(z_0 - z_1)^2 + (t_0 - t_1)^2} = \bar{m}(\bar{\varphi}^{-1}(z_0, t_0), \bar{\varphi}^{-1}(z_1, t_1)).$$

Eszerint a $\psi = \bar{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ affin transzformáció igazolja a tétel állítását. ■

Eredményünk szerint bármely két euklidészi sík izomorf, vagyis struktúráját tekintve mind egyforma, ezért beszélhetünk „az” euklidészi síkról.

Legyen $PQRS$ egy paralelogramma az affin síkon, és legyen $T = PR \cap QS$ az átlói metszéspontja. Legyen d egy euklidészi metrika, mely a φ koordinátázásban (2.1.1) alakú, és legyen $\varphi T = (x_t, y_t)$, $\varphi P = (x_t, y_t) + (x_p, y_p)$, $\varphi Q = (x_t, y_t) + (x_q, y_q)$. Ekkor $\varphi R = (x_t, y_t) - (x_p, y_p)$ és $\varphi S = (x_t, y_t) - (x_q, y_q)$, ezért

$$\begin{aligned} d^2(P, Q) + d^2(Q, R) + d^2(R, S) + d^2(S, P) \\ &= (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (x_q + x_p)^2 + (y_q + y_p)^2 + \\ &\quad + (-x_p + x_q)^2 + (-y_p + y_q)^2 + (-x_q - x_p)^2 + (-y_q - y_p)^2 \\ &= 2(x_p - x_q)^2 + 2(y_p - y_q)^2 + 2(x_q + x_p)^2 + 2(y_q + y_p)^2 \\ &= (x_p + x_p)^2 + (y_p + y_p)^2 + (x_q + x_q)^2 + (y_q + y_q)^2 \\ &= d^2(P, R) + d^2(Q, S), \end{aligned}$$

vagyis a paralelogramma oldalhosszainak négyzetösszege éppen az átlóhosszainak négyzetösszege. Ezt az összefüggést *paralelogramma-azonosságnak* hívják.

Az iménti kalkulációból az is kiderül, hogy a paralelogrammák szemközti oldalainak hossza egyenlő. Ez lehetővé teszi, hogy bevezessünk a szabad vektorokon egy $|\cdot|: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ függvényt azzal, hogy $|\overrightarrow{PQ}| := d(P, Q)$. Ezt a függvényt *normának*, a $|\overrightarrow{PQ}|$ értéket pedig a $\overrightarrow{PQ}$ vektor hosszának vagy normájának nevezzük. A normát minden $T_O \mathfrak{S}$ helyvektortér elemeire is kiterjesztjük a $|T_O| := |\overrightarrow{OT}| = d(O, T)$ definícióval.

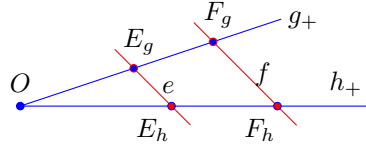
Figyeljük meg, hogy a norma teljesíti a $|\lambda \overrightarrow{OT}| = |\lambda| |\overrightarrow{OT}|$ homogenitási azonosságot minden $\lambda \in \mathbb{R}$ valós számra, hiszen ha $\varphi O = (0, 0)$ és $\varphi T = (x_t, y_t)$, akkor $T_O \mathfrak{S}$ helyvektortéren

$$|\lambda T_O|^2 = (\lambda x_t)^2 + (\lambda y_t)^2 = \lambda^2(x_t^2 + y_t^2) = \lambda^2 |T_O|^2.$$

Ennek azonnali következménye a párhuzamos szelők tételének metrikus verziója.

Párhuzamos szelők tétele. Legyenek g_+ és h_+ közös O kezdőpontú nyílt félegyenesek. Messék az O ponton nem átmenő e és f egyenesek a g_+ és h_+ félegyeneseket az E_g és F_g , illetve E_h és F_h pontokban. Az e és f egyenesek akkor és csak akkor párhuzamosak, ha

$$\frac{d(O, F)}{d(O, E)} = \frac{d(O, F_h)}{d(O, E_h)} = \frac{d(F, F_h)}{d(E, E_h)}.$$



A norma ugyancsak teljesíti a $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ szubadditivitási azonosságot, a metrika háromszög-egyenlőtlenségi tulajdonsága miatt. A metrika affinitása miatt pedig $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ pontosan akkor teljesül, ha az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok valamelyike a másiknak valós többszöröse.

Legyen $PQRS$ egy paralelogramma az affin síkon, és legyen $T = PR \cap QS$ az átlói metszéspontja. Legyen d egy euklidészi metrika, mely a φ koordinátázásban (2.1.1) alakú. A $PQRS$ paralelogramma szomszédos oldalainak hosszánegyzete az átlók $T = PR \cap QS$ metszéspontjával felírva

$$\begin{aligned} d^2(P, Q) &= |\overrightarrow{PQ}|^2 = |\overrightarrow{TQ} - \overrightarrow{TP}|^2, \\ d^2(Q, R) &= |\overrightarrow{QR}|^2 = |\overrightarrow{TR} - \overrightarrow{TQ}|^2 = |-\overrightarrow{TP} - \overrightarrow{TQ}|^2 = |\overrightarrow{TQ} + \overrightarrow{TP}|^2, \end{aligned}$$

vagyis ezek eltérése az $\mathbf{u} = \overrightarrow{TP}$ és $\mathbf{v} = \overrightarrow{TQ}$ vektorokkal felírva $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2$. Legyen $\varphi T = (x_t, y_t)$, $\varphi P = (x_t, y_t) + (x_p, y_p)$, $\varphi Q = (x_t, y_t) + (x_q, y_q)$. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = ((x_p + x_q)^2 + (y_p + y_q)^2) - ((x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2) = 4x_p x_q + 4y_p y_q.$$

Ez alapján bevezetjük az $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ euklidészi szorzást, melyre

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \frac{1}{4}(|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2).$$

A fentiek alapján ez szimmetrikus, mindkét változójában lineáris, és $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{v}|^2$.

Amikor a paralelogramma szomszédos oldalainak hossza egyenlő, akkor $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Az ilyen vektorokat egymásra *ortogonálisnak* mondjuk. Ez az ortogonalitási reláció, melyet $\perp$ jelöl, szimmetrikus. Fontos észrevenni, hogy $\perp$ nem reflexív, sőt $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}$ kizárólag a nullvektorra teljesül. Ugyanakkor a nem nulla $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ vektorokra $\mathbf{w} = \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}$ pontosan akkor teljesül, ha

$$\lambda = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle}{|\mathbf{u}|^2}, \text{ és } \mu = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{|\mathbf{v}|^2}.$$

Ha $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}$, akkor azt látjuk, hogy ugyanazon vektorra ortogonális vektorok egymás valóssal vett többszörösei. A $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ eset azt mutatja, hogy két egymásra ortogonális nem nulla vektor lineárisan független. Mivel $\dim \mathcal{V} = 2$, ez azt is jelenti, hogy két egymásra ortogonális vektor bázist alkot.

A $\mathcal{V}$ egy bázisát *ortonormálnak* nevezünk, ha elemei páronként ortogonálisak, és egységnyi hosszúak. Ha $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ egységnyi vektor, vagyis $u_1^2 + u_2^2 = 1$, és az ugyancsak egységnyi $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ vektor ortogonális az $\mathbf{u}$ vektorra, akkor egyrészt $v_1^2 + v_2^2 = 1$, másrészt $u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$, mely két egyenletnek pontosan $\pm(-u_2, u_1)$ a két megoldása.

Tétel. *Bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektorokra*

- (1) (Pitagorasz) $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ akkor és csak akkor, ha $|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2$,
- (2) (Thalész) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \perp (\mathbf{u} - \mathbf{v})$ akkor és csak akkor, ha $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$.

Bizonyítás. Mivel $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = \langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + |\mathbf{v}|^2$, az $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2$ egyenlőség ekvivalens azzal, hogy $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, amiből (1) következik.

A $0 = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2$ következménye (2). ■

Ortogonalisnak mondunk egy ABC háromszöget, ha valamely csúcsából a többiekbe mutató vektorok ortogonálisak egymásra. Jegyezzük meg, hogy egy ortogonális háromszögben csak egy csúcsra teljesülhet ez az ortogonalitási feltétel, mert az ugyanazon vektorra ortogonális vektorok egymás valóssal vett többszörösei. Előbbi tételünk azonnali következményeként kapjuk a következőket.

Pitagorasz-tétel. *Az OUV háromszög akkor és csak akkor ortogonális az O csúcsánál, ha $d^2(U, O) + d^2(O, V) = d^2(U, V)$.*

Thalész tétele. *Az UVW háromszög akkor és csak akkor ortogonális a W csúcsánál, ha az $\overline{UV}$ szakasz O felező pontjára $2d(O, W) = d(U, V)$.*

Egy adott O ponttól adott $r > 0$ távolságra lévő pontok halmazát *körvonalnak* vagy *körnek* nevezzük. Az O pontot a kör *középpontjának*, az r számot pedig a kör

sugarának mondjuk. A középponton átmenő minden egyenes két pontban metszi a kört. Ezen pontokat átellenesnek, az általuk alkotott szakaszt *átmérőnek* nevezzük.

Thalész tétele ezekkel a fogalmakkal azt jelenti, hogy azon pontok halmaza, melyekből egy nem elfajuló szakasz végpontjaiba mutató vektorok ortogonálisak, az a kör, melynek a szakasz egy átmérője.

Tétel. *Euklidészi síkon minden e egyeneshez és O origóhoz létezik olyan egységnyi $\mathbf{n} \in T_O\mathfrak{S}$ helyvektor és $c \in \mathbb{R}$ szám, melyekre egy X pont akkor és csak akkor esik az e egyenesre, ha $\langle X_O, \mathbf{n} \rangle = c$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{i} = I_O \in T_O\mathfrak{S}$ olyan, hogy az OI egyenes párhuzamos az e egyenessel és $|\mathbf{i}| = 1$. Legyen az $\mathbf{n} \in T_O\mathfrak{S}$ helyvektor erre ortogonális és egységnyi. Ekkor $\{\mathbf{i}, \mathbf{n}\}$ egy ortonormált bázis.

Az e egyenes tetszőleges X pontjára léteznek olyan $\lambda_X \in \mathbb{R}$ és $c_X \in \mathbb{R}$ számok, hogy $X_O = \lambda_X \mathbf{i} + c_X \mathbf{n}$. Az e egyenes bármely másik Y pontjára $X_O - Y_O$ az $\mathbf{i}$ többszöröse, hiszen párhuzamosak, így $0 = \langle \mathbf{n}, X_O - Y_O \rangle = c_X - c_Y$. Eszerint c_X nem függ az X pont választásától, vagyis $c = c_X$ konstans, tehát az e egyenes minden pontjára $X_O = \lambda_X \mathbf{i} + c\mathbf{n}$, amiért $\langle X_O, \mathbf{n} \rangle = c$.

Fordítva, azon X pontok, amelyekre $\langle X_O, \mathbf{n} \rangle = c$ teljesül, éppen az $X_O = \lambda \mathbf{i} + c\mathbf{n}$ alakú helyvektorokhoz tartoznak, ahol $\langle \mathbf{n}, \mathbf{i} \rangle = 0$ ($\mathbf{n} \perp \mathbf{i}$), $|\mathbf{i}| = 1$, és $\lambda \in \mathbb{R}$. Az ilyen pontok viszont éppen egy egyenest határoznak meg, mely átmegy az N ponton, és párhuzamos az OI egyenessel, ahol $c\mathbf{n} = N_O$, és $\mathbf{i} = I_O$. ■

A bizonyítás alapján az olvasó könnyen igazolhatja, hogy ha valamely egységnyi $\mathbf{n}'$ helyvektorra, $c' \in \mathbb{R}$ számra és e egyenesre pontosan az e egyenesen lévő X pontok teljesítik az $\langle X_O, \mathbf{n}' \rangle = c'$ egyenletet, akkor $\mathbf{n}' = \pm \mathbf{n}$, és ennek megfelelően $c' = \pm c$. Ez azt jelenti, hogy az ilyen egyenletek bijektív módon felelnek meg az egyeneseknek.

A bizonyításban szereplő $\mathbf{i}$ helyvektort, illetve a neki megfelelő szabad vektort az *egyes irányvektorának*, a rá ortogonális egységnyi szabad és helyvektorokat az *egyes normálisának* nevezzük.

Két egyenest *ortogonálisnak* vagy *merőlegesnek* mondunk, ha irányvektoraik ortogonálisak. Az egyenesek merőlegessége nem függ az origó kiválasztásától, hiszen a helyvektortérben ugyanakkor ortogonálisak a helyvektorok, amikor a hozzájuk tartozó szabad vektorok ortogonálisak. Az egyenesek merőlegessége nyilván szimmetrikus reláció, hiszen a vektorok ortogonalitása is szimmetrikus reláció, ugyanakkor nem tranzitív, mert közös egyenesre merőlegessége egyenesek egységnyi irányvektorai megegyeznek vagy egymás ellentettjei, így az ilyen egyenesek nyilván párhuzamosak.

A síkbeli merőleges egyenesek mindig metszik egymást, mert ha $\mathbf{n} \perp \mathbf{n}'$, akkor a merőleges $\langle X_O, \mathbf{n} \rangle = c$ és $\langle X_O, \mathbf{n}' \rangle = c'$ egyenesek egyetlen közös X pontjára $X_O = c\mathbf{n} + c'\mathbf{n}'$.

Tétel. *Bármely ponthoz és egyeneshez létezik pontosan egy olyan egyenes, mely átmegy a ponton és merőleges az egyenesre.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy P pontot és egy $\langle X_O, \mathbf{n} \rangle = c$ egyenletű e egyenest.

Minden e egyenesre merőleges egyenes egyenlete $\langle X_O, \mathbf{n}' \rangle = c'$ alakú, ahol $\mathbf{n}' \perp \mathbf{n}$. Egy ilyen egyenes pontosan akkor megy át a P ponton, ha $c' = \langle P_O, \mathbf{n}' \rangle$. ■

Az e egyenes és a P ponton áthaladó, az e egyenesre merőleges f egyenes $P^\perp$ metszéspontját a P pont e egyenesre vett *merőleges vetületének*, illetve az f egyenes *talppontjának* nevezzük. Jegyezzük meg, hogy a **Pitagorasz-tétel** következtében az e egyenes pontjai közül a $P^\perp$ talppont van legközelebb a P ponthoz. Emiatt *pont és egyenes távolságát* éppen a pont és merőleges vetülete távolságával szokás definiálni.

Ezek alapján az e egyenes $\langle X_O, \mathbf{n} \rangle = c$ egyenletében a $|c|$ nem más, mint az O pontnak és az O pont e egyenesre vett vetületének távolsága, hiszen ha $O^\perp \in e$ a vetület, akkor $O_O^\perp$ az $\mathbf{n}$ többszöröse és így $|c| = |\langle O_O^\perp, \mathbf{n} \rangle| = |O_O^\perp| = d(Q, O^\perp)$.

2.1.1. Tétel. *Azon pontok h halmaza, melyek a különböző A és B pontoktól egyforma távolságra vannak, egy olyan f egyenes, mely átmegy az $\overline{AB}$ szakasz F felező pontján, és merőleges az AB egyenesre.*

Bizonyítás. Világos, hogy $F \in h$. Válasszuk ezt a pontot origónak. Legyen az AB egyenes egyik irányvektora $\mathbf{i} \in T_F \mathfrak{S}$, egyik normálisa pedig $\mathbf{n} \in T_F \mathfrak{S}$. Egy $X \in \mathcal{S}$ pont pontosan akkor van azonos távolságra az A és B pontoktól, ha

$$\begin{aligned} d^2(X, A) &= |X_F - A_F|^2 = |X_F|^2 + |A_F|^2 - 2\langle X_F, A_F \rangle, \\ d^2(X, B) &= |X_F - B_F|^2 = |X_F|^2 + |B_F|^2 - 2\langle X_F, B_F \rangle \end{aligned}$$

egyformák, vagyis $\langle X_F, A_F \rangle = \langle X_F, B_F \rangle$. Az X_F vektort $x\mathbf{i} + y\mathbf{n}$ alakban felírva, ahol $x, y \in \mathbb{R}$ valós számok, azt kapjuk, hogy utóbbi egyenletünk pontosan akkor teljesül, ha $x = 0$. Ezzel beláttuk az állítást. ■

A szakasz felező pontján áthaladó, a szakasz egyenesére merőleges egyenest *szakaszfelező merőlegesnek* nevezzük.

Mivel az 1.4.1. Tétel szerint az affinitások tartják az affin osztóviszonyt, minden affin φ leképezésre

$$\frac{d(P, Q)}{d(Q, R)} = |\langle PRQ \rangle| = |\langle \varphi(P)\varphi(R)\varphi(Q) \rangle| = \frac{d(\varphi(P), \varphi(Q))}{d(\varphi(Q), \varphi(R))}$$

érvényes. Bevezetve tehát rendezett, kollineáris, nem mind egybeeső P, Q, R ponthármasokra a $(PRQ)_d := \frac{d(P, Q)}{d(Q, R)}$ *metrikus osztóviszonyt*, azt kapjuk, hogy az affinitások tartják a metrikus osztóviszonyt.

2.1.2. Tétel. *Az euklidészi sík egyenességet tartó transzformációja akkor és csak akkor affinitás, ha tartja a metrikus osztóviszonyt és van három olyan nem kollineáris pont, melyek képei sem kollineárisak.*

Bizonyítás. Fentebbi megjegyzésünk alapján az „csak akkor” irány nyilván teljesül, ezért elegendő a „akkor” irányt igazolnunk.

Legyen φ olyan egyenességet tartó leképezés, mely tartja a metrikus osztóviszonyt és van három olyan nem kollineáris pont, melyek φ melletti képei sem kollineárisak.

Tekintsük a különböző P és R pontok $e = PR$ egyenesét, a $\overline{PR}$ szakasz Q felezőpontját, és az ebből induló, rendre a P illetve R pontot tartalmazó nyílt e_Q^P és e_Q^R nyílt félegyeneseket.

Az $1 = |(PRX)|$ egyenletnek egyetlen megoldása van az X pontra, a $\overline{PR}$ szakasz Q felezőpontja. Mivel $1 = |(PRQ)| = |(\varphi(P)\varphi(R)\varphi(Q))|$, a Q pont képe megoldását adja a Z pontra vonatkozó $1 = |(\varphi(P)\varphi(R)Z)|$ egyenletnek, így $\varphi(Q)$ a $\overline{\varphi(P)\varphi(R)}$ szakasz felezőpontja.

Míthogy $e_Q^P = \{Y \in e : |(PRY)| < 1\}$ és $e_Q^R = \{X \in e : |(PRX)| > 1\}$, és φ tartja a metrikus osztóviszonyt, $\varphi(e_Q^P) = \varphi(e)_{\varphi(Q)}^{\varphi(P)}$ és $\varphi(e_Q^R) = \varphi(e)_{\varphi(Q)}^{\varphi(R)}$ következik, ahol $\varphi(e)_{\varphi(Q)}^{\varphi(P)}$ és $\varphi(e)_{\varphi(Q)}^{\varphi(R)}$ a $\varphi(e)$ egyenes $\varphi(Q)$ pont által kivágott nyílt félegyenesei, rendre a $\varphi(P)$ és $\varphi(R)$ pontokon át.

Mivel bármely egyenesen egy pont pontosan akkor választ el másiktól, ha azok a pont különböző félegyenesén vannak, eredményünk szerint a φ leképezés őrzi az elválasztást.

A $(PRQ) = \begin{cases} |(PRQ)|, & \text{ha } Q \in \overline{PR}, \\ -|(PRQ)|, & \text{ha } Q \notin \overline{PR} \end{cases}$ összefüggés és a fentiek alapján φ őrzi az osztóviszonyt is, így az 1.4.1. Tétel igazolja, hogy φ affinitás. ■

Eredményünk lehetővé teszi az affinitás-csoport szerkezetének vizsgálatát azzal, hogy a metrikus viszonyok változását figyeljük. Az osztóviszony tartását kifejező $(PQR) = (\varphi(P)\varphi(Q)\varphi(R))$ és $(SRQ) = (\varphi(S)\varphi(R)\varphi(Q))$ azonosságok a

$$\frac{d(\varphi(P), \varphi(R))}{d(P, R)} = \frac{d(\varphi(R), \varphi(Q))}{d(R, Q)} = \frac{d(\varphi(S), \varphi(Q))}{d(S, Q)}$$

formában azt mutatják, hogy van egy olyan f függvény az egyenesek halmazán, mely minden e egyeneshez a különböző $P, R \in e$ pontoktól nem függő $f(e) = d(\varphi(P), \varphi(R))/d(P, R)$ számot rendel. Azt, hogy f hogyan függ az egyenesektől, a φ affinitás $\hat{\varphi}$ lineáris összetevőjével és a norma használatával

$$f(e) = \frac{d(\varphi(P), \varphi(R))}{d(P, R)} = \frac{|\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(R)}|}{|\overrightarrow{PR}|} = \frac{|\hat{\varphi}(\overrightarrow{PR})|}{|\overrightarrow{PR}|} = \left| \hat{\varphi} \left(\frac{1}{|\overrightarrow{PR}|} \overrightarrow{PR} \right) \right|$$

mutatja. Eszerint $f(e)$ valójában csak az e egyenes egységnyi irányvektorától függ, és emiatt úgy tekinthető, mint egy szimmetrikus $\tilde{\varphi}$ függvény az egységvektorok halmazán.

Ez a jelenség lehetővé teszi az affinitások osztályozását és vizsgálatát aszerint, hogy ez a $\tilde{\varphi}$ függvény hogyan viselkedik. Belátható (lásd 6.2.2. Tétel), hogy a $\tilde{\varphi}$ izometria erejéig meghatározza a φ affinitást.

Definíció. Ha $\tilde{\varphi}(v) = \lambda$ valamely $\lambda > 0$ valós számra és minden v egységvektorra, akkor az affinitást *dilatációnak* vagy *hasonlósági transzformációnak*, a λ számot a dilatáció *együtthatójának* nevezzük. ▲

A nem identikus tengelyes affinitás és a nem identikus nyírás nem dilatáció, hiszen előbbi tengelyein $\lambda_e = 1$ kivéve egyet, melyen $\lambda_e \neq 1$, utóbbi fix egyenesen pedig $\lambda_e = 1$, ami két kivételtől eltekintve nem fordulhat elő a fix egyenessel nem párhuzamos egyeneseken.

2.2. Dilatációk

A dilatációk definiálásához nem szükséges az affinitások ismerete.

Tétel. Egy $\varphi: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ leképezésre az alábbiak ekvivalensek:

- (1) φ egy dilatáció;
- (2) Létezik olyan $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden P, Q pontpárra $d(\varphi(P), \varphi(Q)) = \lambda d(P, Q)$ teljesül;
- (3) φ tartja a távolságok arányát.

Bizonyítás. Az $(1) \Rightarrow (2)$ következtetés nyilvánvaló.

Az $(1) \Leftarrow (2)$ belátáshoz elég arra gondolni, hogy a feltétel és a szigorú háromszög-egyenlőtlenség miatt a φ egyenestartó, továbbá a

$$\frac{d(\varphi(P), \varphi(Q))}{d(\varphi(Q), \varphi(R))} = \frac{\lambda d(P, Q)}{\lambda d(Q, R)} = \frac{d(P, Q)}{d(Q, R)}$$

azonosság miatt φ tartja az osztóviszonyt is, tehát affinitás. Az affinitások közül viszont éppen azokat nevezzük dilatációknak, melyekre $d(\varphi(P), \varphi(R))/d(P, R)$ állandó.

A $(2) \Rightarrow (3)$ bizonyításához elég látni, hogy minden $P \neq Q$ és $R \neq S$ pontpárra

$$\frac{d(\varphi(P), \varphi(Q))}{d(P, Q)} = \lambda = \frac{d(\varphi(R), \varphi(S))}{d(R, S)},$$

vagyis $d(\varphi(P), \varphi(Q))/d(\varphi(R), \varphi(S)) = d(P, Q)/d(R, S)$.

A (2) $\Leftrightarrow$ (3) bizonyításához induljunk ki abból, hogy minden $P \neq Q$ és $R \neq S$ pontpárra $d(\varphi(P), \varphi(Q))/d(\varphi(R), \varphi(S)) = d(P, Q)/d(R, S)$ teljesül, hiszen φ tartja a távolságok arányát. Eszerint $d(\varphi(P), \varphi(Q))/d(P, Q) = d(\varphi(R), \varphi(S))/d(R, S)$ minden $P \neq Q$ és egy rögzített $R \neq S$ pontpárra, ami igazolja a következtetést.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

Ha $\lambda = 1$, akkor a dilatációt *izometriának* nevezzük. Az ilyen leképezés tartja a pontok távolságát. A nem izometrikus dilatációkat $\lambda < 1$ esetén *kicsinyítésnek*, $\lambda > 1$ esetén pedig *nagyításnak* is mondjuk.

Tétel. Az O_λ homotécia egy $|\lambda|$ együtthatós dilatáció.

Bizonyítás. A tetszőleges P és Q pontokra érvényes

$$d(O_\lambda(P), O_\lambda(Q)) = |\overrightarrow{O_\lambda(P)O_\lambda(Q)}| = |\lambda \overrightarrow{PQ}| = |\lambda| \cdot |\overrightarrow{PQ}| = |\lambda| d(P, Q)$$

egyenlőség igazolja az állítást. ■

A homotéciákat az euklidészi síkon középpontos, vagy *centrális dilatációnak*, illetve középpontos, vagy *centrális hasonlósági transzformációnak* is nevezik.

Tétel.

- (1) *Dilatációk szorzatának együtthatója a dilatációk együtthatóinak szorzata.*
- (2) *Dilatáció inverze dilatáció, ezek együtthatói egymás reciprokai.*
- (3) *A dilatációk az affinitások részcsoportját alkotják.*
- (4) *Az izometriák a dilatációk részcsoportját alkotják.*
- (5) *Minden dilatáció előáll bármely vele egyező együtthatós centrális dilatáció és ennek megfelelő izometria szorzataként.*

Bizonyítás. Legyen δ és ψ is dilatáció, melyek együtthatói rendre λ , illetve ν .

Az (1) állítás abból következik, hogy minden $P \neq Q$ pontpárra

$$d(\delta(\psi(P)), \delta(\psi(Q))) = \lambda d(\psi(P), \psi(Q)) = \lambda \nu d(P, Q).$$

A (2) állítás igazolásához vegyük észre, hogy a δ dilatáció affinitás, ezért van egy φ inverze, és ez is affinitás. Az állítás így abból következik, hogy minden $P \neq Q$ pontpárra

$$d(\varphi(P), \varphi(Q)) = \frac{1}{\lambda} d(\delta(\varphi(P)), \delta(\varphi(Q))) = \frac{1}{\lambda} d(P, Q).$$

A (3) állítás abból következik, hogy a fentiek szerint a dilatációk halmaza a szorzásra és az inverz képzésre nézve is zárt az affinitások csoportjában.

A (4) állítást az bizonyítja, hogy az izometriák 1-együtthatós dilatációk, és így a fentiek értelmében szorzatuk és inverzük is izometria.

Az (5) igazolásához elég látni, hogy $\varphi = O_{1/\lambda} \circ \delta$ (és $\psi = O_{-1/\lambda} \delta$ is) egy izometria, hiszen együtthatója 1, és így $\delta = O_\lambda \circ \varphi$ ($\delta = \psi \circ O_\lambda$).

Ezzel a tétel bizonyítása teljes. ■

Minthogy $\lambda \neq 0$ esetén O_λ és $O_{-1/\lambda}$ is dilatáció, valamint az O pontra vonatkozó τ_O affin tükrözésre nyilván $\tau_O = O_\lambda O_{-1/\lambda}$ is teljesül, adódik, hogy τ_O egy izometria. Emiatt az (5) pontban megadott előállítás nem egyértelmű, hiszen ha $\lambda > 0$ és $\delta = O_\lambda \iota$ valamely ι izometriára, akkor $\delta = O_{-\lambda} \tau_O \iota$ is teljesül. Minthogy τ_O és O_λ is irányítástartó, egy dilatáció pontosan akkor irányítást tartó, illetve váltó, ha a centrális dilatációra és izometriára való bármely felbontásában szereplő izometria irányítást tartó, illetve váltó.

Tétel.

- (1) *A dilatációk tartják a merőlegességet.*
- (2) *Az egyenesek merőlegességét tartó affinitások dilatációk.*

Bizonyítás. (1) Tekintsünk egy δ dilatációt, az egymásra merőleges e és f egyeneseket, melyek metszéspontját jelölje M , és vegyük az e egyenesen azokat a $P \neq Q$ pontokat, melyek távolsága az M ponttól 1.

Ekkor az f a PQ szakasznak a szakaszfelező merőlegese, amely pontosan azon pontok halmaza, melyek azonos távolságra vannak a P és Q pontoktól.

A dilatációk nem változtatják meg a szakaszok arányait, így a szakaszok egyenlőségét sem, amiért az f egyenes $f' = \delta(f)$ képe pontosan az az egyenes, melynek pontjai egyenlő távolságra vannak a $P' = \delta(P)$ és $Q' = \delta(Q)$ pontoktól. Eszerint az f' egyenes a $P'Q'$ szakasz szakaszfelező merőlegese, tehát merőleges az $e' = \delta(e) = P'Q'$ egyenesre.

(2) Mivel $d(A, B) = d(C, D)$ akkor és csak akkor, ha az $(A', C) \stackrel{\mathcal{L}}{(A, B)}$ kötött vektorra $d(A', C) = d(C, D)$, és ez utóbbi **Thalész tétele** szerint pontosan akkor teljesül, ha a $\tau_C(D)A'D$ háromszög az A' pontjánál ortogonális, egy φ affinitás pontosan akkor tartja a pontpárok távolságainak egyenlőségét, ha lineáris összetevője tartja a vektorok ortogonalitását.

Tetszőleges $P \neq Q$ és $R \neq S$ pontokhoz van olyan $0 \neq \nu \in \mathbb{R}$ szám, melyre $\nu d(P, Q) = d(R, S)$, amiért $d(P, X_P(\nu, Q)) = d(R, S)$. Mivel az affinitások tartják az osztóviszonyt is, ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} \frac{d(\varphi(P), \varphi(Q))}{d(P, Q)} &= \frac{\nu d(\varphi(P), \varphi(Q))}{\nu d(P, Q)} = \frac{d(\varphi(P), X_{\varphi(P)}(\nu, \varphi(Q)))}{d(R, S)} \\ &= \frac{d(\varphi(P), \varphi(X_P(\nu, Q)))}{d(R, S)} = \frac{d(\varphi(R), \varphi(S))}{d(R, S)}, \end{aligned}$$

vagyis φ tartja a távolságok arányát, tehát egy dilatáció. ■

2.3. Tengelyes tükrözés

Tekintsük a $T_O\mathfrak{S}$ helyvektortérben az $\langle X_O, \mathbf{n}_O \rangle = c$ egyenletű e egyenest ($\mathbf{n} \in \mathcal{V}$ normált), és definiáljuk a sík $\tau_e: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ transzformációját, amelyre

$$(\tau_e(P))_O := P_O + 2(c - \langle P_O, \mathbf{n}_O \rangle)\mathbf{n}_O. \quad (2.3.1)$$

Tétel. *A τ_e transzformáció csak az e egyenestől függ.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az e egyenesnek egy másik $T_{\bar{O}}\mathfrak{S}$ helyvektortérben $\langle X_{\bar{O}}, \bar{\mathbf{n}}_{\bar{O}} \rangle = \bar{c}$ az egyenlete és az ehhez tartozó (2.3.1) szerinti transzformáció $\bar{\tau}_e$.

Mivel e minden irányvektora ortogonális az $\mathbf{n}$ és $\bar{\mathbf{n}}$ szabad vektorokra, ezek egymás többszörösei. Minthogy normáltak, azt kapjuk, hogy $\bar{\mathbf{n}} = \pm \mathbf{n}$.

Minthogy $|\bar{c}|$ és $|c|$ az $\bar{O}$, illetve O távolsága az e egyenestől, azt kapjuk, hogy $||\bar{c}| - |c|| = |\langle \overrightarrow{O\bar{O}}, \mathbf{n} \rangle|$.

Eszerint

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O\bar{\tau}_e(P)} &= \overrightarrow{OP} + 2(\bar{c} - \langle \overrightarrow{OP}, \bar{\mathbf{n}} \rangle)\bar{\mathbf{n}} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{O\bar{O}} \pm 2(\bar{c} - \langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{O\bar{O}}, \pm \mathbf{n} \rangle)\mathbf{n} \\ &= \overrightarrow{OP} + 2(\langle \overrightarrow{O\bar{O}}, \mathbf{n} \rangle \pm \bar{c} - \langle \overrightarrow{OP}, \mathbf{n} \rangle)\mathbf{n} - \overrightarrow{O\bar{O}} \\ &= \overrightarrow{OP} + 2(c - \langle \overrightarrow{OP}, \mathbf{n} \rangle)\mathbf{n} - \overrightarrow{O\bar{O}} + 2(\langle \overrightarrow{O\bar{O}}, \mathbf{n} \rangle \pm \bar{c} - c)\mathbf{n} \\ &= \overrightarrow{O\tau_e(P)} - \overrightarrow{O\bar{O}} = \overrightarrow{O\tau_e(P)}, \end{aligned}$$

tehát a τ leképezés kizárólag az e egyenestől függ. ■

A τ_e transzformációt az e egyenesre vonatkozó *tengelyes tükrözésnek* nevezzük.

Tétel. *A τ_e tengelyes tükrözés izometrikus, az e egyenes minden pontját helyben hagyja, az egyenes két félsíkját felcseréli, és involúció.*

Bizonyítás. Tekintsük a $T_O\mathfrak{S}$ helyvektortérben az $\langle X_O, \mathbf{n} \rangle = c$ egyenletű e egyenest ($\mathbf{n} \in T_O\mathfrak{S}$ normált). Minden $P \in e$ esetén $\langle P_O, \mathbf{n} \rangle = c$, ezért ilyenkor $\tau_e(P) = P$, tehát az e egyenes minden pontja fix. Vegyük most tetszőleges P és Q pontokat. Ekkor

$$\begin{aligned} d^2(\tau_e(P), \tau_e(Q)) &= |(\tau_e(P))_O - (\tau_e(Q))_O|^2 = \langle (\tau_e(P))_O - (\tau_e(Q))_O, (\tau_e(P))_O - (\tau_e(Q))_O \rangle \\ &= \langle (P_O - Q_O) - 2\langle P_O - Q_O, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}, (P_O - Q_O) - 2\langle P_O - Q_O, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} \rangle \\ &= \langle P_O - Q_O, P_O - Q_O \rangle + 4\langle P_O - Q_O, \mathbf{n} \rangle^2 - 4\langle P_O - Q_O, \langle P_O - Q_O, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} \rangle \\ &= \langle P_O - Q_O, P_O - Q_O \rangle = |P_O - Q_O|^2 = d^2(P, Q), \end{aligned}$$

ami igazolja, hogy τ_e izometria.

Bármely P pontra a $\overline{P\tau_e(P)}$ szakasz F felező pontja az e egyenesre esik, hiszen az $F_O = (P_O + (\tau_e(P))_O)/2 = P_O + (c - \langle P_O, \mathbf{n} \rangle)\mathbf{n}$ helyvektorra $\langle F_O, \mathbf{n} \rangle = c$. Ez azt jelenti, hogy ha $P \notin e$, akkor P és $\tau_e(P)$ az e egyenes két különböző fésíkjába esik.

Végül

$$\begin{aligned} (\tau_e(\tau_e(P)))_O &= (\tau_e(P))_O + 2(c - \langle (\tau_e(P))_O, \mathbf{n} \rangle)\mathbf{n} \\ &= P_O + 2(c - \langle P_O, \mathbf{n} \rangle)\mathbf{n} + 2(c - \langle P_O + 2(c - \langle P_O, \mathbf{n} \rangle)\mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle)\mathbf{n} \\ &= P_O + 2(c - \langle P_O, \mathbf{n} \rangle)\mathbf{n} + 2(c - 2(c - \langle P_O, \mathbf{n} \rangle) - \langle P_O, \mathbf{n} \rangle)\mathbf{n} \\ &= P_O + 2(c - \langle P_O, \mathbf{n} \rangle)\mathbf{n} + 2(-c + \langle P_O, \mathbf{n} \rangle)\mathbf{n} = P_O \end{aligned}$$

igazolja, hogy a nem identikus tengelyes tükrözés önnön inverze, tehát involúció. ■

Azonnali következmény, hogy a tengelyes tükrözések tartják a merőlegességet, vagyis merőleges egyenesek képei is merőlegek egymásra.

Tekintsük az $T_O\mathfrak{S}$ helyvektorsíkon az $\mathbf{n} = N_O$ és $\mathbf{i} = I_O$ ortonormált bázist, ahol $\mathbf{i}$ az e egyenes irányvektora $\mathbf{n}$ pedig a normálisa. Ekkor az e egyenes egyenletében $c = 0$, és így az ezen bázishoz tartozó koordinátázásban az (x, y) koordinátájú P pontra, vagyis amelyre $P_O = x\mathbf{i} + y\mathbf{n}$,

$$(\tau_e(P))_O = P_O - 2\langle P_O, \mathbf{n} \rangle\mathbf{n} = P_O - 2y\mathbf{n} = x\mathbf{i} - y\mathbf{n}.$$

Eszerint a τ_e tengelyes tükrözés mátrixa ebben a koordinátázásban $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, vagyis a tengelyes tükrözések izometrikus affin tükrözések.

Tétel. *Pontosan a tengelyes tükrözések a fixpontos izometrikus affin tükrözések*

Bizonyítás. Legyen φ egy fixponttal rendelkező izometrikus affin tükrözés, és válasszuk úgy a koordinátázást, hogy az O origó a φ fixpontja legyen.

Vegyünk tehát egy olyan $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ bázist a $T_O\mathfrak{S}$ helyvektorsíkban, melyhez tartozó koordinátázásban φ mátrixa $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ alakú. Legyen $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}/|\mathbf{u}|$, $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$, és $U_O = \hat{\mathbf{u}}$, valamint $V_O = \hat{\mathbf{v}}$. Ekkor $\{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}\}$ normált bázis, és az ehhez tartozó koordinátázásban φ nyilván $(x, y) \mapsto \hat{\varphi}((x, y))$ alakú, ahol $\hat{\varphi}((x, y)) = (x, y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

A φ izometrikussága miatt $|\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{v}}| = d(U, V) = d(\varphi(U), \varphi(V)) = |\hat{\mathbf{u}} - (-\hat{\mathbf{v}})|$, melyből $2\langle \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}} \rangle = |\hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{v}}|^2 - |\hat{\mathbf{u}}|^2 - |\hat{\mathbf{v}}|^2 = |\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{v}}|^2 - |\hat{\mathbf{u}}|^2 - |\hat{\mathbf{v}}|^2 = -2\langle \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}} \rangle$, vagyis $\langle \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}} \rangle = 0$ adódik, tehát $\{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}\}$ ortonormált bázis.

Legyen e az az egyenes, mely $\hat{\mathbf{u}}$ irányvektorral megy át az origón. Ekkor tetszőleges P pontra, ha $P_O = x\hat{\mathbf{u}} + y\hat{\mathbf{v}}$, akkor $(\varphi(P))_O = x\hat{\mathbf{u}} - y\hat{\mathbf{v}} = (\tau_e(P))_O$, ami a bizonyítandó volt. ■

Később kiderül majd, hogy a fixponttal nem rendelkező izometrikus affin tükrözések éppen a csúsztatva tükrözések. Azonban azonnal adódik a következő.

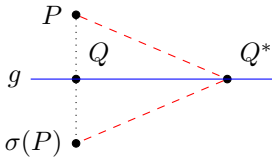
Tétel. *Páratlan sok tengelyes tükrözés szorzata nem egyenlő páros sok tengelyes tükrözés szorzatával.*

Bizonyításként elég arra gondolni, hogy előbbi tételünk szerint a tükrözések irányítást váltó affinitások, így páratlan sok szorzata irányítást váltó, páros sok szorzata meg irányítást tartó affinitás.

Tétel.

- (1) Minden g egyeneshez τ_g az egyetlen olyan izometria, amely a g minden egyes pontját helyben hagyja miközben a félsíkjait felcseréli.
- (2) Tetszőleges h és g egyenesekre $\tau_g \tau_h \tau_g = \tau_{\tau_g(h)}$ teljesül.

Bizonyítás. (1) Legyen σ egy olyan izometria, mely a g egyenes minden egyes pontját helyben hagyja miközben a félsíkjait felcseréli.



Tekintsük a $P \notin g$ pontot. A P és a $\sigma(P)$ pontok különböző félsíkba esnek, ezért a $\overline{P\sigma(P)}$ szakasz metszi a g egyenest. Legyen ez a metszéspont Q , $Q^* \in g$ pedig ettől különböző pont. Mivel a Q és Q^* pontok a σ leképezésnél fixen maradnak, a szigorú háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$\begin{aligned} 2d(P, Q) &= d(P, Q) + d(Q, \sigma(P)) = d(P, \sigma(P)) \\ &< d(P, Q^*) + d(Q^*, \sigma(P)) = 2d(P, Q^*), \end{aligned}$$

vagyis a Q pont az az egyértelműen meghatározott pont a g egyenesen, amely legközelebb esik a P ponthoz.

Eszerint $\sigma(P)$ az az egyértelműen meghatározott pont, mely a P ponthoz a g egyenesen legközelebbi Q ponttól $d(P, Q)$ távolságra van a P pontot nem tartalmazó félsíkban, és illeszkedik a PQ egyenesre. Ennek egyértelműsége igazolja σ egyértelműségét.

A τ_g tengelyes tükrözés g minden egyes pontját helyben hagyja miközben a félsíkjait felcseréli, tehát $\sigma = \tau_g$.

- (2) Legyen $\varphi = \tau_g \tau_h \tau_g$. Ekkor φ egy izometria.

A φ fixpontjaira teljesül, hogy

$$\begin{aligned} P = \varphi(P) &\Leftrightarrow \tau_g(\tau_h(\tau_g(P))) = P \Leftrightarrow \tau_h(\tau_g(P)) = \tau_g(P) \\ &\Leftrightarrow \tau_g(P) \in h \Leftrightarrow P \in \tau_g(h), \end{aligned}$$

vagyis φ fixpontjai éppen a $\tau_g(h)$ egyenes pontjai.

Minden izometria, minden szakasz felező pontját a kép szakasz felező pontjába viszi, így a $\overline{P\varphi(P)}$ szakasz F felező pontjának $\tau_g(F)$ képe a $\overline{\tau_g(P)\tau_h(\tau_g(P))}$ szakasz

felező pontja. Utóbbi szakasz két végpontja egymás tükörképe a h egyenesre, ezért a $\tau_g(F)$ felező pont a h egyenesre esik. Eszerint F a $\tau_g(h)$ egyenesre esik, vagyis ha $P \notin \tau_g(h)$, akkor P és $\varphi(P)$ nem partosak a $\tau_g(h)$ egyenesre nézve, vagyis φ felcseréli a $\tau_g(h)$ egyenes félsíkjaival.

Fentiek alapján az (1) állítás igazolja, hogy $\varphi = \tau_{\tau_g(h)}$. ■

Egy (nem feltétlen Desargues-típusú) affin síkon egy metrikát *tükrözésesnek* nevezünk, ha minden egyeneshez létezik olyan izometria, amely az egyenes minden egyes pontját helyben hagyja, az egyeneshez tartozó félsíkokat pedig felcseréli. Eszerint az euklidészi metrika tükrözéses. Az **Affin metrikák** fejezet 6.4. szakasza igazolja, hogy ha egy metrika tükrözéses, akkor euklidészi.

Tétel. Tekintsük az e, f, g, h egyeneseket és a P, Q pontokat.

- (1) Minden $P \notin e$ esetén a $P\tau_e(P)$ egyenes merőleges az e egyenesre.
- (2) A τ_h és τ_g tükrözésekre $\tau_h\tau_g = \tau_g\tau_h$ akkor és csak akkor, ha $h \perp g$, vagy $h = g$.

Bizonyítás. (1) A τ_e tengelyes tükrözést definiáló (2.3.1) képlet szerint minden $P \notin e$ esetén a $P\tau_e(P)$ egyenes merőleges az e egyenesre, hiszen irányvektora éppen e normálisa.

(2) Az előző tétel (2) pontja szerint $\tau_h\tau_g = \tau_g\tau_h$ akkor és csak akkor, ha $\tau_{\tau_g(h)} = \tau_h$. Az előző tétel (1) pontja szerint ebből $\tau_g(h) = h$ következik. Ez jelen tétel (1) pontja szerint azt jelenti, hogy $h \perp g$, ha a h egyenesnek van pontja a g egyenesen kívül.

Ha $g = h$, akkor nyilván $\tau_h\tau_g = \tau_g\tau_h$.

Ha $g \perp h$, akkor $\tau_g(h) = h$ a jelen tétel (1) pontja szerint, az előző tétel (2) pontja szerint pedig $\tau_g\tau_h\tau_g = \tau_{\tau_g(h)} = \tau_h$, ami igazolja az állítást. ■

Tétel. Két különböző ponthoz az egyetlen olyan tükrözés, amely felcseréli őket, az a pontok szakaszának felező merőlegese.

Bizonyítás. Legyen a két különböző pont P és Q .

Ha $\tau_e(P) = Q$, akkor τ_e izometrikussága miatt az e egyenes minden pontja egyforma távolságra van a P és Q pontoktól, márpedig a 2.1.1. Tétel szerint pontosan egy ilyen van: a szakaszt felező f merőleges. A τ_f viszont nyilván olyan, hogy $\tau_f(P) = Q$. ■

2.4. Izometriák

Kiderül, hogy a tengelyes tükrözések legfeljebb három elemű szorzatai generálják a teljes izometria-csoportot.

Fixpont tételek. Legyen ι egy síkizometria.

- (1) Ha ι három nem kollineáris pontot fixen hagy, akkor identitás.
- (2) Ha ι fixen hagyja a $P_1 \neq P_2$ pontokat, akkor $\iota = \text{id}$, vagy $\iota = \tau_f$, az $f = P_1P_2$ egyenesre vonatkozó tükrözés.
- (3) Ha ι fixen hagyja a P pontot, akkor $\iota = \text{id}$, vagy $\iota = \tau_{f_2}$, ahol $P \in f_2$, vagy $\iota = \tau_{f_2}\tau_{f_1}$, ahol $f_1 \neq f_2$ és $P = f_1 \cap f_2$ teljesül.

Bizonyítás. Figyeljük meg, hogy egy izometriánál minden F fixpont egyenlő távolságra van bármely ponttól és annak képétől, mert

$$d(F, X) = d(\iota(F), \iota(X)) = d(F, \iota(X)),$$

és így a fixpont a pont és képe szakaszának szakaszfelező merőlegesére esik.

(1) Legyenek a P_1, P_2, P_3 pontok nem kollineárisak. Ha létezik olyan Q pont, amelyre $Q \neq \iota(Q)$ teljesül, akkor a P_i pontok a $\overline{Q\iota(Q)}$ szakasz felezőmerőlegesére esnek, ami ellentmondás, hiszen a P_i pontok nem kollineárisak. Tehát minden pont megegyezik a képpel, így $\iota = \text{id}$

(2) Ha $\iota \neq \text{id}$, akkor létezik olyan Q pont, amelyre $Q \neq \iota(Q)$ teljesül. A P_i pontok a $\overline{Q\iota(Q)}$ szakasz f felező merőlegesére esnek, ezért a $\tau_f\iota$ izometriánál a Q, P_1, P_2 nem kollineáris fixpontok. Az (1) alapján ezért $\tau_f\iota = \text{id}$, amiből átszorzással $\iota = \tau_f$ adódik.

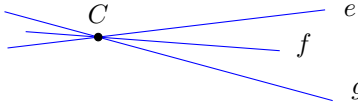
(3) Ha $\iota \neq \text{id}$, akkor létezik olyan Q pont, amelyre $Q \neq \iota(Q)$, és a P fixpont a $\overline{Q\iota(Q)}$ szakasz felező f_2 merőlegesére illeszkedik. Ekkor a $\tau_{f_2}\iota$ izometriánál a P és a Q pont is fixpont, és így (2) miatt vagy $\tau_{f_2}\iota = \text{id}$, vagy pedig $\tau_{f_2}\iota = \tau_{f_1}$ teljesül, ahol $P \in f_1$. Ezekből az egyenletekből átszorzással adódik a tétel állítása. ■

Tétel. Minden ι síkizometria előáll legfeljebb három tengelyes tükrözés szorzataként.

Bizonyítás. Ha $\iota \neq \text{id}$, akkor létezik olyan Q pont, amelyre $Q \neq \iota(Q)$. Legyen f_3 a $\overline{Q\iota(Q)}$ szakaszfelező merőlegese. Ebben az esetben a $\tau_{f_3}\iota$ izometria a Q pontot helyben hagyja, ezért a fentiek szerint vagy $\tau_{f_3}\iota = \text{id}$, vagy $\tau_{f_3}\iota = \tau_{f_2}$, vagy a $\tau_{f_3}\iota = \tau_{f_2}\tau_{f_1}$. Bármelyik is teljesül, átszorzással a tétel állítását kapjuk. ■

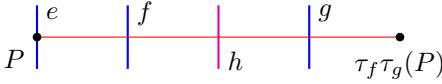
Tétel. Ha e, f, g közös pontra illeszkedő vagy páronként párhuzamos egyenesek, akkor a rájuk vonatkozó tükrözések szorzata egy olyan h egyenesre vonatkozó $\tau_h = \tau_e\tau_f\tau_g$ tükrözés, mely átmegy az e, f, g egyenesek közös pontján, illetve párhuzamos az e, f, g egyenesekkel.

Bizonyítás. Ha $C = e \cap f \cap g$, akkor az $\iota = \tau_e\tau_f\tau_g$ izometriánál a C fixpont.



Eszerint az ι izometriára vonatkozó fixponttétel szerint vagy $\tau_e\tau_f\tau_g = \text{id}$, vagy $\tau_e\tau_f\tau_g = \tau_h$, vagy $\tau_e\tau_f\tau_g = \tau_k$, ahol $C \in h$, illetve $C = h \cap k$. Ezek közül az első és harmadik eset nem állhat

fenn, hiszen páros sok tükrözés szorzata nem lehet páratlan sok szorzatával egyenlő, ami bizonyítja a tétel állítását metsző egyenesekre.



Tekintsük most az $e \parallel f \parallel g$ esetet, és vegyük a $\varphi = \tau_g\tau_f\tau_e$ izometriát. Mivel az izometriák tartják a párhuzamosságot, $\varphi(e) = \tau_g\tau_f(e) \parallel \tau_g\tau_f(f) = \tau_g(f) \parallel$

$\tau_g(g) = g \parallel e$. Válasszunk egy tetszőleges $P \in e$ pontot.

Ha $P = \varphi(P)$, akkor előbbi miatt $\varphi(e) = e$, és így $\varphi = \tau_e$.

Ha $P \neq \varphi(P)$, akkor tekintsük a $\overline{P\varphi(P)}$ szakaszfelező h merőlegesét. Ekkor egyfelől $\tau_h(P) = \varphi(P)$, másrészt a h egyenes párhuzamos az e egyenessel, hiszen ugyanúgy merőleges a $P\varphi(P)$ egyenesre.

Eszerint $\tau_h(e) \parallel \tau_h(h) = h \parallel e \parallel \varphi(e)$, és $\tau_h(e)$ metszi a $\varphi(e)$ egyenest a $\varphi(P)$ pontban, így $\tau_h(e) = \varphi(e)$, ahogy a tétel állítja. ■

Tétel. Ha e, f, g közös pontra illeszkedő, vagy páronként párhuzamos egyenesek, akkor $\tau_e\tau_f\tau_g = \tau_g\tau_f\tau_e$.

Bizonyítás. Az előbbi eredmény szerint $\tau_e\tau_f\tau_g = \tau_h$ valamely h egyenesre, ezért $\text{id} = \tau_h\tau_h = (\tau_e\tau_f\tau_g)(\tau_e\tau_f\tau_g)$. A τ_e, τ_f, τ_g tükrözésekkel balról rendre átszorozva a kívánt formula adódik. ■

Tétel. (konjugálás) Bármely ι izometriára és τ_e tengelyes tükrözésre $\iota\tau_e\iota^{-1} = \tau_{\iota(e)}$.

Bizonyítás. Az $\iota\tau_e\iota^{-1}$ izometriánál az $\iota(e)$ egyenes pontjai fixek, hiszen minden $P \in e$ pontra $\iota\tau_e\iota^{-1}(\iota(P)) = \iota\tau_e(P) = \iota(P)$ teljesül. Ezért a fixpont-tétel miatt $\iota\tau_e\iota^{-1} = \tau_{\iota(e)}$ vagy $\iota\tau_e\iota^{-1} = \text{id}$ adódik. Utóbbi azonosságból a $\tau_e = \text{id}$ ellentmondás következik, ezért az előbbi azonosság teljesül, ami igazolja az első állítást. ■

Jegyezzük meg, hogy tetszőleges $\psi = \tau_{e_k}\tau_{e_{k-1}} \cdots \tau_{e_1}$ izometriára az

$$\iota\psi\iota^{-1} = \iota\tau_{e_k}\tau_{e_{k-1}} \cdots \tau_{e_1}\iota^{-1} = \iota\tau_{e_k}\iota^{-1}\iota\tau_{e_{k-1}}\iota^{-1} \cdots \iota\tau_{e_1}\iota^{-1} = \tau_{\iota(e_k)}\tau_{\iota(e_{k-1})} \cdots \tau_{\iota(e_1)}.$$

azonosság érvényes.

Definíció. Két metsző egyenesre vonatkozó tengelyes tükrözés szorzatát *forgatásnak* nevezzük. A $\varphi = \tau_e\tau_f$ forgatásnál az $e \cap f$ metszéspontot a forgatás *centrumának* nevezzük. ▲

Az $\text{id} = \tau_e\tau_e$ izometria is forgatás, és minden pont a centruma.

Tétel. *Az azonos centrumú forgatások a szorzásra nézve Abel-csoportot alkotnak.*

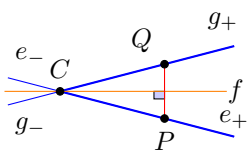
Bizonyítás. Ha a közös centrumú φ_1, φ_2 forgatásokat $\varphi_1 = \tau_f \tau_e$, illetve $\varphi_2 = \tau_h \tau_g$ alakban fejezzük ki, akkor van olyan, a közös $C = h \cap g \cap f \cap e$ centrumon átmenő k egyenes, melyre $\tau_h \tau_g \tau_f = \tau_k$, és így $\varphi_2 \varphi_1 = (\tau_h \tau_g)(\tau_f \tau_e) = (\tau_h \tau_g \tau_f) \tau_e = \tau_k \tau_e$ egy $C = k \cap e$ centrumú forgatás. Az identikus leképezés az „egység”-forgatás, és a $\varphi_1^{-1} = \tau_e \tau_f$ inverz is C centrumú forgatás, ezért a C középpontú forgatások az izometriák csoportjának részcsoportját alkotják. A kommutativitást a

$$\varphi_1 \varphi_2 = \tau_f (\tau_e \tau_h \tau_g) = \tau_f (\tau_g \tau_h \tau_e) = (\tau_f \tau_g \tau_h) \tau_e = (\tau_h \tau_g \tau_f) \tau_e = \varphi_2 \varphi_1$$

levezetés igazolja. ■

Tétel. (egyértelműség) *Ha egy forgatásnak két fixpontja van, akkor identikus. Két azonos C kezdőpontú e_+ , g_+ félegyeneshez pontosan egy C centrumú φ forgatás létezik, amelyre $\varphi(e_+) = g_+$ teljesül.*

Bizonyítás. Ha egy izometriának két fixpontja van, akkor a fixponttétel szerint identikus, vagy tükrözés, de utóbbi nem lehet, mert két tengelyes tükrözés szorzata nem lehet egyenlő egy tengelyes tükrözéssel, ami igazolja a tétel első állítását.



A második állítás igazolásához olyan $P \in e_+$ és $Q \in g_+$ pontokat tekintsünk, amelyre $d(C, P) = d(C, Q) \neq 0$ teljesül. Ha $P = Q$, akkor a tételnek megfelelő egyetlen forgatás az identikus leképezés.

Ha P és Q különböző, akkor jelölje f a $\overline{PQ}$ szakaszfelező merőlegesét. Mivel $d(C, P) = d(C, Q)$, az f egyenes áthalad a C ponton, a $\varphi = \tau_f \tau_e$ a tételnek megfelelő forgatás.

Az unicitás igazolásához, legyen φ' tetszőleges, a tételnek megfelelő forgatás, és tekintsük a $\varphi^{-1} \varphi'$ forgatást. Mivel a φ' a P pontot a Q pontba viszi, φ^{-1} pedig ezt visszaviszi a P pontba, a $\varphi^{-1} \varphi'$ forgatás a $P \neq C$ pontot is helyben hagyja, amiért $\varphi^{-1} \varphi' = \text{id}$, ami igazolja az állítást. ■

Tétel. (Egyértelmű reprezentálás.) *Minden C középpontú φ forgatáshoz és a C ponton átmenő e egyeneshez létezik pontosan egy f , illetve g egyenes a C ponton át, melyre $\varphi = \tau_f \tau_e = \tau_e \tau_g$.*

Bizonyítás. Legyen $\varphi = \tau_k \tau_h$, $C = h \cap k$, és $C \in e$.

Tekintsük a $\varphi \tau_e = \tau_k \tau_h \tau_e$ izometriát. A három egy ponton átmenő tengelyre vonatkozó tükrözések helyettesítésére bizonyított tétel miatt valamely, a C ponton átmenő f egyenesre $\tau_k \tau_h \tau_e = \tau_f$, így $\varphi \tau_e = \tau_f$, amiből átszorzással $\varphi = \tau_f \tau_e$. A $\tau_e \varphi$ izometriát vizsgálva ugyanígy kapjuk a tételnek megfelelő g egyenest. ■

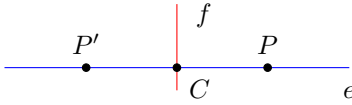
Tétel. *Két metsző tengelyű tükrözés szorzatán nem változtat tengelyeiknek a metszéspont körüli együttes elforgatása.*

Bizonyítás. Legyen $\varphi = \tau_f \tau_e$ és ψ közös centrumú forgatások. A konjugálásra vonatkozó formulából és a kommutativitásból $\tau_{\psi(f)} \tau_{\psi(e)} = \psi \varphi \psi^{-1} = \varphi$ adódik, ami bizonyítja az állítást. ■

E tétel és a merőleges tengelyű tükrözések felcserélhetősége alapján az egymást valamely C pontban merőlegesen metsző tengelyekre vonatkozó tükrözések szorzatai mind megegyeznek.

Definíció. Ezt az egyértelműen meghatározott izometriát a τ_C jellel jelöljük, és a C pontra vonatkozó *centrális tükrözésnek* hívjuk. ▲

A centrális tükrözések involúciók, ugyanis ha $\tau_C = \tau_f \tau_e$ valamely $e \perp f$, $e \cap f = C$ egyenesekre, akkor $\tau_C^2 = \tau_f \tau_e \tau_f \tau_e = \tau_f \tau_f \tau_e \tau_e = \text{id}$. Ha a P pont az e és f tengelyek valamelyikére, mondjuk az e egyenesre illeszkedik, akkor a C pont felezi a P és a $P' = \tau_C(P) = \tau_f(P)$ pontokat összekötő, az e egyenesre illeszkedő szakaszt.

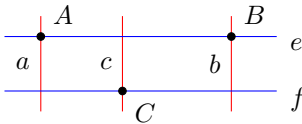


Mivel bármely P ponthoz a tengelyek választhatók úgy, hogy az egyik tengely a P ponton haladjon át, a C mindig felezi a $\overline{P\tau_C(P)}$ szakaszt.

Legutóbbi észrevételünkéből azonnal következik, hogy a centrális tükrözések a centrumon áthaladó egyeneseket invariánsan hagyják.

Tétel. *Három centrális tükrözés szorzata centrális tükrözés. Tetszőleges három A, B, C centrumra $\tau_A \tau_B \tau_C = \tau_C \tau_B \tau_A$.*

Bizonyítás. Tekintsük a $\varphi = \tau_C \tau_B \tau_A$ izometriát, és legyen $e = AB$, $f \ni C$ az e egyenessel párhuzamos egyenes, a, b és c pedig rendre az A, B és C pontokból az e egyenesre állított merőlegesek.



Ekkor $a \parallel b \parallel c$, amiért létezik egy olyan velük párhuzamos g egyenes, melyre $\tau_c \tau_b \tau_a = \tau_g$. Eszerint $\varphi = \tau_C \tau_B \tau_A = (\tau_c \tau_f)(\tau_b \tau_e)(\tau_a \tau_e) = (\tau_f \tau_c)(\tau_b \tau_e)(\tau_e \tau_a) = \tau_f(\tau_c \tau_b \tau_a) = \tau_f \tau_g$, vagyis φ egy centrális tükrözés, hiszen $g \parallel a \perp e \parallel f$ miatt $g \perp f$.

Ezek szerint $\tau_A \tau_B \tau_C = \tau_D$ valamely D pontra, így $(\tau_A \tau_B \tau_C)(\tau_A \tau_B \tau_C) = \text{id}$. Ebből a tétel második állítása átszorzásokkal adódik. ■

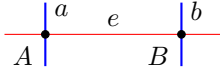
Két párhuzamos egyenesre vonatkozó tükrözés szorzatát *párhuzamos eltolásnak* nevezzük. Az $e = f$ esetben az $\text{id} = \tau_e \tau_f$ izometriát is eltolásnak tekintjük.

Mivel a tükrözések tengelyei párhuzamosak, ha egy koordinátázásban az egyik tükrözés mátrixa $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, akkor ugyanabban a koordinátázásban a másik tükrözés

mátrixa is $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ alakú, vagyis szorzatuk egy affin eltolás. Hamarosan kiderül, hogy minden affin eltolás egy párhuzamos eltolás.

Tétel. *Két centrális tükrözés szorzata párhuzamos eltolás, és minden párhuzamos eltolás kifejezhető két centrális tükrözés szorzataként.*

Bizonyítás. A τ_A és τ_B centrális tükrözésekhez jelölje e az AB egyenest.



Fejezzük ki ezeket a tükrözéseket a $\tau_A = \tau_e \tau_a$ és $\tau_B = \tau_b \tau_e$ alakban. Ekkor $a \parallel b$, és így a $\tau_B \tau_A = (\tau_b \tau_e)(\tau_e \tau_a) = \tau_b \tau_a$ szorzat párhuzamos eltolás.

Fordítva, valamely $\tau_b \tau_a$ párhuzamos eltoláshoz válasszunk a két tengelyre merőleges e egyenest, amelyik az a és b egyeneseket rendre az A és B pontokban metszi. Ekkor $\tau_b \tau_a = \tau_b \tau_e \tau_e \tau_a = \tau_B \tau_A$, vagyis a párhuzamos eltolás két centrális tükrözés szorzata. ■

Tétel. *A párhuzamos eltolások Abel-csoportot alkotnak.*

Bizonyítás. Tekintsük az ε_1 és ε_2 eltolásokat $\varepsilon_1 = \tau_A \tau_B$ és $\varepsilon_2 = \tau_C \tau_D$ alakban. Van olyan K pont, melyre $\tau_A \tau_B \tau_C = \tau_K$, és így $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = (\tau_A \tau_B)(\tau_C \tau_D) = (\tau_A \tau_B \tau_C) \tau_D = \tau_K \tau_D$ egy eltolás. Az identikus leképezés az „egység”-eltolás, és $\varepsilon_1^{-1} = \tau_B \tau_A$ inverz is eltolás, ezért az eltolások az izometriák részcsoportját alkotják.

A kommutativitást az $\varepsilon_2 \varepsilon_1 = (\tau_C \tau_D)(\tau_A \tau_B) = (\tau_C \tau_D \tau_A) \tau_B = \tau_A (\tau_D \tau_C \tau_B) = (\tau_A \tau_B)(\tau_C \tau_D) = \varepsilon_1 \varepsilon_2$ azonosság igazolja. ■

Tétel. (Egyértelmű reprezentálás.) *Minden ε eltoláshoz és P ponthoz pontosan egy olyan Q , illetve R pont létezik, melyre $\varepsilon = \tau_Q \tau_P = \tau_P \tau_R$.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon = \tau_X \tau_Y$ a párhuzamos eltolás. Ekkor $\varepsilon \tau_P = \tau_X \tau_Y \tau_P = \tau_Q$ és $\tau_P \varepsilon = \tau_P \tau_X \tau_Y = \tau_R$ valamely Q és R pontra, amiért $\varepsilon = \tau_P \tau_R$, illetve $\varepsilon = \tau_Q \tau_P$, ami igazolja az állítást. ■

Legyen O egy ε eltolás fixpontja. Az egyértelmű reprezentálás tétele szerint van olyan Q pont, melyre $\varepsilon = \tau_Q \tau_O$. Ebből $\tau_Q O = O$ következik, amiért $Q = O$, így állíthatjuk, hogy az identikus leképezés az egyetlen fixponttal rendelkező eltolás.

Tétel. (Egyértelműség.) *Bármely két ponthoz pontosan egy párhuzamos eltolás létezik, amelyik az egyiket a másikba viszi.*

Bizonyítás. Legyen a két pont P és Q .

Egzisztencia. Ha $P = Q$, akkor az identikus leképezés megfelel. Ha $P \neq Q$, akkor legyen e a P pontra illeszkedő, a PQ egyenesre merőleges egyenes, az f egyenes pedig legyen a $\overline{PQ}$ szakaszfelező merőlegese. Ekkor az $\varepsilon = \tau_f \tau_e$ eltolás megfelel a tétel feltételének.

Unicitás. Ha ε_1 és ε_2 két olyan eltolás, amelyre $\varepsilon_1(P) = \varepsilon_2(P) = Q$ teljesül, akkor az $\varepsilon = \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2$ eltolásnál a P pont fix, ezért $\varepsilon = \text{id}$, vagyis $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. ■

Tételünk értelmében minden affin eltolás egy párhuzamos eltolás, hiszen bármely két ponthoz pontosan egy affin eltolás létezik, amelyik az egyiket a másikba viszi, viszont ilyen párhuzamos eltolás is van.

Tétel. *Két párhuzamos tengelyű tükrözés szorzatán nem változtat tengelyeiknek együttes párhuzamos eltolása.*

Bizonyítás. Bármely $\varepsilon = \tau_e\tau_f$ és ψ eltolásra, a kommutativitásból és a konjugálásra vonatkozó formulából adódó $\varepsilon = \psi\varepsilon\psi^{-1} = \tau_{\psi(e)}\tau_{\psi(f)}$ igazolja az tételt. ■

Definíció. Egy síkizometriát *csúsztatva tükrözésnek* nevezünk, ha egy párhuzamos eltolás és egy olyan tengelyes tükrözés szorzata, amelynek tengelye invariáns az eltolásra. ▲

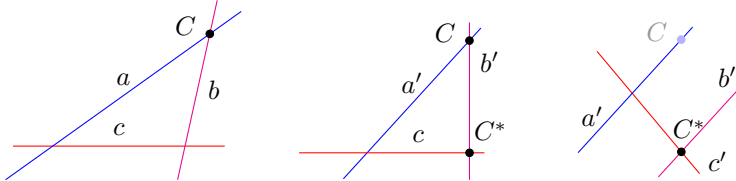
Egy csúsztatva tükrözés $\psi = \tau_c\tau_b\tau_a$ alakban írható, ahol $a \parallel b$ és $c \perp a$. A merőlegesség miatt $\psi = \tau_b\tau_a\tau_c$ is írható.

Tétel. (klasszifikáció) *A síkizometriák összes lehetséges típusai az identitás, a tengelyes tükrözés, a párhuzamos eltolás, a forgatás és a csúsztatva tükrözés.*

Bizonyítás. A fixpont tételek szerint bármely síkizometria legfeljebb három tengelyes tükrözés szorzataként állítható elő. Ha a tengelyek száma kevesebb mint 3, akkor a tételben szereplő esetek közül az első hármat kapjuk.

Ha a tengelyek száma 3, és ezek páronként párhuzamosak, vagy közös ponton haladnak át, akkor az eddigiek szerint a tekintett izometria tengelyes tükrözés.

Ha a három, a , b és c tengely közül kettő, mondjuk, a és b metszi egymást egy C pontban, és a harmadik tengely nem halad át ezen a közös C ponton, akkor a következőképpen járunk el.



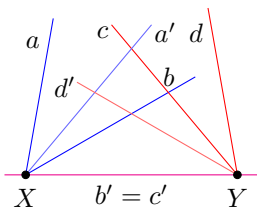
Forgassuk el az a és b tengelyeket a C körül addig, amíg a c merőlegesen áll a b tengely b' képére, majd a $C^* = b' \cap c$ pont körül forgassuk a b' és c egyeneseket azon b'' és c' tengelyekbe, amelyekre $c' \perp a'$ teljesül. Ekkor rendre az a' , b'' és c' egyenesekre tükrözve a vizsgált izometriát kapjuk, és ez nem más mint egy csúsztatva tükrözés, hiszen $a' \parallel b''$, $c' \perp a'$, és $c' \perp b''$. Ezzel a tételt igazoltuk. ■

A fenti tételt és annak bizonyítását arra is felhasználhatjuk, hogy a síkizometriákat a fixpontjaikról is felismerjük. Ha egy izometria pontosan egy egyenes pontjait hagyja fixen, akkor nem más, mint erre a tengelyre vonatkozó tükrözés. Ha az izometriának egyetlen fixpontja van, akkor a körül a centrum körül egy forgatás. Ha nincs fixpont, akkor az izometria párhuzamos eltolás vagy csúsztatva tükrözés.

Tétel. *Két forgatás szorzata forgatás vagy párhuzamos eltolás. Egy forgatás és egy párhuzamos eltolás bármely sorrendű szorzata forgatás.*

Bizonyítás. Először a két forgatás szorzatát vizsgáljuk: legyen $\varphi_1 = \tau_b \tau_a$ egy X körüli forgatás, $\varphi_2 = \tau_d \tau_c$ pedig egy Y körüli forgatás.

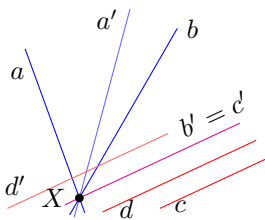
Ha $X = Y$, akkor $\varphi_2 \varphi_1$ egy X körüli forgatás, ahogy azt már korábban láttuk.



Ha $X \neq Y$, akkor forgassuk el az a és b tengelyeket az X körül az a', b' tengelyekbe, a c és d tengelyeket az Y körül a c', d' tengelyekbe úgy, hogy a b' az Y ponton a c' pedig az X ponton haladjon át, és így $b' = c'$ teljesüljön. Ekkor $\varphi_2 \varphi_1 = \tau_d \tau_c \tau_b \tau_a = \tau_{d'} \tau_{c'} \tau_{b'} \tau_{a'} = \tau_{d'} \tau_{a'}$, tehát a végeredmény forgatás vagy párhuzamos

eltolás, annak megfelelően, hogy $d' \parallel a'$ vagy $d' \not\parallel a'$.

Rátérünk a forgatások eltolásokkal vett szorzatának vizsgálatára.



Ha a $\varphi = \tau_b \tau_a$ valamely X pont körüli forgatás, és az $\varepsilon = \tau_d \tau_c$ egy párhuzamos eltolás, akkor forgassuk el az a és b tengelyeket az X körül olyan a' és b' tengelyekbe, hogy $b' \parallel d$ legyen, majd toljuk el a d és c tengelyeket olyan d', c' tengelyekbe, hogy $b' = c'$ teljesüljön. Ekkor $\varepsilon \varphi = \tau_d \tau_c \tau_b \tau_a = \tau_{d'} \tau_{c'} \tau_b \tau_a = \tau_{d'} \tau_{a'}$, tehát a végeredmény forgatás az $Y = d' \cap a'$ pont körül. A $\varphi \varepsilon$ szorzat tekintetében hasonlóan lehet eljárni ■

Ha figyelembe vesszük azt is, hogy a párhuzamos eltolások szorzata ismét párhuzamos eltolás, akkor a fenti tétellel eljárást adtunk arra, hogy négy tengelyes tükrözés szorzatát miként lehet két tengelyes tükrözés szorzatára redukálni.

Tétel. (redukálhatóság)

- (1) *Páros számú tengelyes tükrözés szorzata identikus, vagy előáll 2 különböző tengelyes tükrözés szorzata.*
- (2) *Páratlan számú tengelyes tükrözés szorzata tengelyes tükrözés, vagy előáll mint 3 különböző tengelyes tükrözés szorzatára.*

Bizonyítás. Az első állítás úgy igazolható, hogy páros számú tengelyes tükrözés szorzatában négy egymás mellett lévő tényezőt az előző tétel alapján két tengelyes

tükrözés szorzatára redukálunk. Így véges lépésben az egész kifejezés két tengelyes tükrözés szorzatára redukálódik. A második állítás az elsőből következik. ■

Definíció. A páros számú tengelyes tükrözés szorzataként kifejezhető izometriákat *mozgásoknak*, a páratlan számú tengelyes tükrözés szorzataként kifejezhető izometriákat pedig *irányításváltó*, vagy *körüljárást váltó* izometriáknak, vagy *átfordításoknak* nevezzük. ▲

Könnyen látható, hogy egy izometria pontosan akkor mozgás, illetve átfordítás, ha mint affinitás irányítástartó illetve irányítást váltó.

Az átfordítások nem alkotnak csoportot, mert két átfordítás szorzata mozgás, vagyis a művelet kivezet a halmazból. Az átfordítások a tengelyes tükrözések és a csúsztatva tükrözések.

A mozgások részcsoportot alkotnak az izometriák között, hiszen két mozgás szorzata is mozgás, és egy mozgás inverze is mozgás. A *mozgáscsoport* elemeit a párhuzamos eltolások és a forgatások alkotják.

Tétel. *A síkban két a_+ , b_+ félegyeneshez pontosan egy olyan μ mozgás létezik, amely bijektív az a_+ és a b_+ félegyenes között.*

Bizonyítás. Legyen A az a_+ , B pedig a b_+ félegyenes kezdőpontja.

Az egzisztencia igazolásához legyen ε az a párhuzamos eltolás, amelyre $\varepsilon(A) = B$ teljesül, majd φ az a B körüli forgatás, amelyik az $\varepsilon(a_+)$ félegyeneset a b_+ félegyenesbe forgatja. Ekkor a $\mu = \varphi\varepsilon$ mozgás a tételnek megfelelő.

Az unicitás bizonyításához legyen μ_1 és μ_2 két megfelelő mozgás. Ekkor a $\mu_2^{-1}\mu_1$ mozgás az a_+ félegyeneset pontonként fixen hagyja, de nem lehet tükrözés, ezért $\mu_2^{-1}\mu_1 = \text{id}$, és így $\mu_1 = \mu_2$ következik. ■

2.5. Egybevágóság és hasonlóság

Definíció. Az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ ponthalmazokat *egybevágónak* mondjuk, ha létezik olyan szürjektív $\psi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ leképezés, amely tartja a távolságot. Ezt $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ jelöli. A ψ leképezést *egybevágósági transzformációnak* nevezzük. ▲

Világos, hogy két euklidészi sík egybevágó, hiszen bármely tengelyes tükrözés a sík egybevágósági transzformációja. Könnyű látni azt is, hogy az egybevágósági $\cong$ reláció ekvivalenciareláció.

Rövid formában az egybevágósági transzformációt és a ponthalmazok közötti $\cong$ egybevágósági relációt is gyakran *egybevágóságnak* nevezzük.

Tétel. *Az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ alakzatok akkor és csak akkor egybevágóak, ha létezik olyan ι izometria, melyre $\iota(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.*

Bizonyítás. Ha az ι síkizometriára $\iota(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$, akkor a $\psi = \iota|_{\mathcal{A}}$ leképezés bizonyítja, hogy $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

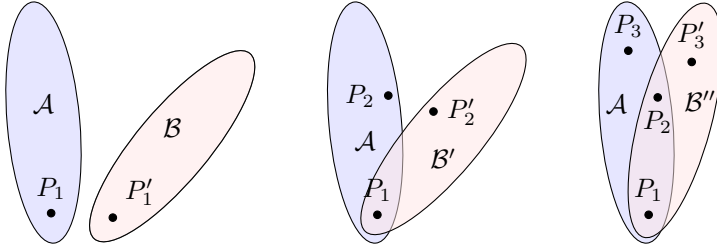
Tegyük fel, hogy az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ alakzatok között létezik távolságot tartó, szűrjektív $\psi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ráképezés. Igazolnunk kell, hogy ez a ψ valamely ι síkizometria megszorítása az $\mathcal{A}$ halmazra.

Legyen $P_1 \in \mathcal{A}$ olyan pont, amelyre $P_1 \neq \psi(P_1)$. Ha ilyen pont nem létezik, akkor $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, vagyis $\psi = \text{id}|_{\mathcal{A}}$.

Ha $P_1 \neq P'_1 := \psi(P_1)$, akkor legyen τ_1 a $\overline{P_1 P'_1}$ szakaszfelező merőlegesére vonatkozó tükrözés. Jelölje továbbá $\mathcal{B}'$ a $\tau_1(\mathcal{B})$ halmazt. Ekkor a $\psi' := \tau_1 \psi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}'$ távolságtartó leképezés fixen hagyja a P_1 pontot.

Legyen most $P_2 \in \mathcal{A}$ olyan pont, amelyre $P_2 \neq P_1$ és $P_2 \neq P'_2 := \psi'(P_2)$ teljesül. Ha ilyen pont nincs, akkor a ψ' az identikus leképezés megszorítása az $\mathcal{A}$ pontthalmazra, amiért a ψ a τ_1 izometriának a megszorítása az $\mathcal{A}$ alakzatra, ami bizonyítja a tételt.

Ha $P_2 \neq P'_2$, akkor legyen τ_2 a $\overline{P_2 P'_2}$ szakaszfelező merőlegesére való tükrözés, és jelölje $\mathcal{B}''$ a $\tau_2(\mathcal{B}')$ alakzatot. Mivel a P_2 és P'_2 a P_1 ponttól azonos távolságra helyezkednek el (hiszen a ψ' a P_1 pontot fixen hagyja), a P_1 pont az előbbi felező merőlegesén van, így a $\psi'' := \tau_2 \psi': \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}''$ távolságtartó leképezésnél a P_1 pont is, és a P_2 pont is fixpont.



Ha $\psi'' = \text{id}|_{\mathcal{A}}$, akkor a ψ leképezés nem más, mint a $\tau_1 \tau_2$ izometriának az $\mathcal{A}$ pontthalmazra vett megszorítottja.

Ha ψ'' nem az identitás, akkor legyen $P_3 \in \mathcal{A}$ olyan pont, amelyre $P_3 \neq P'_3 := \psi''(P_3)$ teljesül. A P_3 nem illeszkedik a $P_1 P_2$ egyenesre, hiszen akkor a P_1 és P_2 fixpontoktól mért távolságai, amelyek megegyeznek a P'_3 pont ezektől mért távolságaival, egyértelműen meghatároznák, és így $P_3 = P'_3$ lenne.

Mivel a P_1 és P_2 pontok a P_3 és P'_3 pontoktól azonos távolságra helyezkednek el, ezek a pontok a $\overline{P_3 P'_3}$ szakaszfelező merőlegesére esnek. Legyen τ_3 az erre a felező merőlegesre vonatkozó tükrözés, és $\mathcal{B}''' := \tau_3(\mathcal{B}'')$. Ekkor a $\psi''' := \tau_3 \psi'': \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}'''$ távolságtartó ráképezésnél a P_1, P_2 és P_3 pontok mindegyike fixen marad.

Ha valamely $Q \in \mathcal{A}$ pontra $Q \neq \psi'''(Q)$, akkor a nem kollineáris P_i ($i = 1, 2, 3$) pontok a ψ''' távolságtartása miatt a Q és $\psi'''(Q)$ pontoktól rendre azonos távolságra,

vagyis a $\overline{Q\psi'''(Q)}$ szakasz felező merőlegesén helyezkednek el. Mivel azonban a P_i ($i = 1, 2, 3$) pontok nem kollineárisak, ez lehetetlen. Emiatt ψ''' fixen hagyja az $\mathcal{A}$ minden pontját, vagyis $\psi''' = \text{id}|_{\mathcal{A}}$, így az $\iota = \tau_1\tau_2\tau_3$ izometriának az $\mathcal{A}$ ponthalmazra vett megszorítottja éppen ψ . Ezzel a bizonyítást befejeztük. ■

Ebből a tételből azonnal adódik, hogy két háromszög egybevágó, ha megfelelő oldalaik páronként azonos hosszúságúak.

Definíció. A sík, illetve a tér $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ ponthalmazát (alakzatát) *hasonlóknak* nevezzük, ha létezik olyan szürjektív $\chi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ leképezés és pozitív $\lambda \in \mathbb{R}$ szám, hogy az $\mathcal{A}$ minden P, Q pontpárjára $d(\chi(P), \chi(Q)) = \lambda d(P, Q)$ teljesül. A hasonlóság jelölésére az $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ jelet használjuk, a λ értéket a *hasonlóság* együtthatójának hívjuk. ▲

A hasonlóság nyilván ekvivalenciareláció.

Tétel. Az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ alakzatok akkor és csak akkor hasonlóak, ha létezik olyan δ dilatáció, hogy $\delta(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.

Bizonyítás. Ha a δ dilatációra $\delta(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$, akkor a $\delta|_{\mathcal{A}}$ leképezés bizonyítja, hogy $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$. Ha $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$, akkor létezik olyan szürjektív $\psi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ leképezés és $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ szám, hogy az $\mathcal{A}$ minden P, Q pontpárjára $d(\psi(P), \psi(Q)) = \lambda d(P, Q)$ teljesül. Ekkor a $\psi' = O_{1/\lambda}\psi: \mathcal{A} \rightarrow O_{1/\lambda}(\mathcal{B})$ transzformáció egybevágóság, tehát létezik egy ι izometria, melyre $\iota|_{\mathcal{A}} = \psi'$ és $\iota(\mathcal{A}) = O_{1/\lambda}(\mathcal{B})$. Legyen most $\delta = O_{\lambda}\iota$. Ez olyan dilatáció, melyre $\psi = \delta|_{\mathcal{A}}$, ami igazolja az állítást. ■

Eszerint két háromszög hasonló, ha megfelelő oldalaik hosszai arányosak.

2.6. Szögek és mérések

A következőkben az e_+ félegyenest az e egyenesre kiegészítő félegyenest e_- jelöli. Zárt félegyenések esetén e_+ és e_- ugyanazon $E = e_+ \cap e_-$ pontból indul ki és $e = e_+ \cup e_-$. Nyílt félegyenések esetén $e_+ \cap e_- = \emptyset$, és mindkét félegyenest az $E = e \setminus (e_+ \cup e_-)$ pontból indul ki. Általában zárt félegyenest használunk.

Definíció. *Kötött szögnek* nevezzük az azonos pontból kiinduló rendezett félegyenepárokat. A közös O pontból induló e_+ és f_+ félegyenések által alkotott kötött szöget (e_+, f_+) jelöli. A O pontot a *szög csúcsának* az e_+ és f_+ félegyenéseket a *szög szárainak* mondjuk.



Tetszőleges a_+ félegyenest esetén az (a_+, a_+) kötött szöget *nullszögnek*, az (a_-, a_+) kötött szöget *egyenesszögnek* hívjuk. ▲

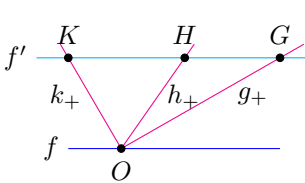
Egy (e_+, f_+) kötött szögből tetszőleges ε eltolással adódó az $(\varepsilon(f_+), \varepsilon(e_+))$ kötött szögeket *egyállású szögeknek* mondjuk. Egy (e_+, f_+) kötött szög *mellékszögének* nevezzük az (f_+, e_-) és (f_-, e_+) kötött szögeket, az ezekkel egyállásúakat pedig *kiegészítő szögeknek* hívjuk. Az (e_+, f_+) és (f_-, e_-) kötött szögeket *csúcsszögeknek*, a velük egyállásúakat pedig *váltószögeknek*, mondjuk.

A nem egyenes- és nem nullszög (f_+, g_+) és (f_+, h_+) kötött szögekre azt mondjuk, hogy *f-partos kötött szögek*, ha a g_+ és h_+ félegyenesek pontjai *f-partosak*. Mivel az *f-partosság* a pontok halmazán ekvivalenciareláció, a g_+ és h_+ félegyenesek akkor és csak akkor *f-partosak*, ha valamely $G \in g_+$ és $H \in h_+$ pont *f-partos*. Eszerint az *f-partosság* a közös első félegyenessel rendelkező, nem egyenes- és nem nullszög kötött szögek halmazán is ekvivalencia-reláció, és ennek is két ekvivalenciaosztálya van, melyeket $\mathcal{P}_f^-$ és $\mathcal{P}_f^+$ jelöl (nem azonosít).

Azt mondjuk, hogy az f_+ *félegyenes elválasztja* a nem az *f* egyenesen lévő g_+ és h_+ félegyeneseket, ha az (f_+, g_+) és (f_+, h_+) kötött szögek nem *f-partosak*.

Tétel. *Ha a közös O pontból induló páronként különböző g_+, h_+, k_+ félegyenesek egy O pontra illeszkedő f egyenesre nézve f -partosak, akkor g_+, h_+ és k_+ közül pontosan egy elválasztja a másik kettőt.*

Bizonyítás. Legyen f' egy tetszőleges, az f egyenessel párhuzamos egyenes az f azon félsíkjában, amely tartalmazza a g_+, h_+ és k_+ félegyeneseket. Ilyen van, hiszen a g_+, h_+ és k_+ félegyenesek *f*-partosak.



Legyen $G = g_+ \cap f'$, $H = h_+ \cap f'$ és $K = k_+ \cap f'$. Ezek a pontok léteznek, hiszen a g, h és k egyenesek nem párhuzamosak az f , és így az f' egyenessel sem, és mindegyikük az f egyenes f' egyenest is tartalmazó félsíkjában van.

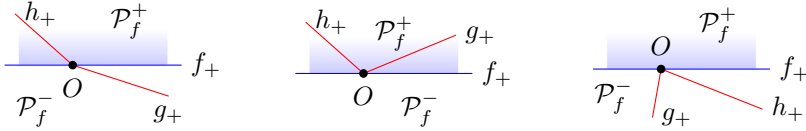
A G, H és K pontok közül pontosan egy elválasztja a másik kettőt, mondjuk a H . Ekkor a K és G pontok a h egyenes két különböző félsíkja esnek, amiért a k_+ és g_+ minden pontja a h különböző félsíkja esik, hiszen a k és g egyenes is pontosan az O pontban metszi a h egyenest, amiért a félegyeneseken belül biztosan nincs a h egyenesnek pontja. Ez azt jelenti, hogy a h_+ elválasztja a g_+ és k_+ félegyeneseket. Ugyanilyen indoklás igazolja, hogy a g_+ és h_+ félegyenes k -partos, a k_+ és h_+ félegyenes pedig g -partos. Ez bizonyítja az állítást. ■

Tétel. *Bármely ι izometria esetén az $\iota(h_+)$ félegyenes akkor és csak akkor választja el az $\iota(g_+)$ és $\iota(k_+)$ félegyeneseket, ha h_+ elválasztja a g_+ és k_+ félegyeneseket.*

Ennek igazolásához csak az előbbi tételünk bizonyításában alkalmazott módszerben kell észrevenni (lásd az ábrát), hogy ha egy félegyenes (az ábrán h_+) elválaszt

két félegyenest (az ábrán a g_+ és k_+ félegyeneseket), akkor bármely σ szakasztartó transzformáció melletti képe ($\sigma(h_+)$) is elválasztja a két félegyenest ($\sigma(g_+)$ és $\sigma(k_+)$).

Definíció. Rögzítsük az f_+ félegyenest, és a vele azonos pontból kiinduló félegyenések egyik partossági osztályát, amelyet jelöljön $\mathcal{P}_f^+$. Az egyszerűség kedvéért az f egyenesre eső egyenesszöget és nullszöget is soroljuk a $\mathcal{P}_f^+$ osztályba.



Az $\mathcal{P}_f^+$ partossági osztály kiválasztása alapján a kötött szögek két, egymással inverz rendezését határozza meg az

- (1) $\begin{cases} (f_+, g_+) \in \mathcal{P}_f^- \text{ és } (f_+, h_+) \in \mathcal{P}_f^+, \text{ vagy} \\ (f_+, g_+), (f_+, h_+) \in \mathcal{P}_f^+ \text{ és } g_+ \text{ elválasztja az } f_+ \text{ és } h_+ \text{ félegyeneseket, vagy} \\ (f_+, g_+), (f_+, h_+) \in \mathcal{P}_f^- \text{ és } h_+ \text{ elválasztja a } g_+ \text{ és } f_+ \text{ félegyeneseket,} \end{cases}$
- és

- (2) $\begin{cases} (f_+, g_+) \in \mathcal{P}_f^+ \text{ és } (f_+, h_+) \in \mathcal{P}_f^-, \text{ vagy} \\ (f_+, g_+), (f_+, h_+) \in \mathcal{P}_f^- \text{ és } g_+ \text{ elválasztja az } f_+ \text{ és } h_+ \text{ félegyeneseket, vagy} \\ (f_+, g_+), (f_+, h_+) \in \mathcal{P}_f^+ \text{ és } h_+ \text{ elválasztja a } g_+ \text{ és } f_+ \text{ félegyeneseket,} \end{cases}$

feltételrendszer. Rögzítve ezek egyikét, mondjuk az (1) rendszert, azt mondjuk, hogy az (f_+, g_+) kötött szög megelőzi az (f_+, h_+) kötött szöget, és ezt $(f_+, g_+) \prec (f_+, h_+)$ jelöli, ha az (f_+, g_+) és (f_+, h_+) kötött szög teljesíti az (1) feltételrendszert. $\blacktriangle$

Nyilvánvaló, hogy az azonos első félegyenesű kötött szögekre most megadott két rendezés teljes és egymás inverze, ha pedig $\mathcal{P}_f^+$ a félegyenések másik partossági osztályát jelöli, akkor ugyanazon két rendezés adódik, csak az (1) és (2) feltételrendszerek megcserélődnek.

A feltétel szerint az egyenesszög az egyik rendezésben a legutolsó, és ebben a rendezésben nincsen legelső elem, az ezzel inverz rendezésben viszont az egyenesszög a legelső, és nincsen legutolsó elem. Ez a megfigyelés lehetővé teszi a rendezés rögzítését az egyenesszög legutolsónak vagy legelsőnek választásával.

Definíció. Az (e_+, f_+) és a (g_+, h_+) kötött szögeket m -relációban állónak mondjuk, ha van olyan μ mozgás, hogy $\mu(e_+) = g_+$ és $\mu(f_+) = h_+$. Az m -relációt $\overset{m}{\sim}$ jelöli. $\blacktriangle$

Mivel a forgatások és az eltolások is mozgások, az egyenesszögek, és ugyanazon kötött szög kiegészítő szögei is m -relációban állnak egymással.

Az identikus leképezés azt mutatja, hogy az m -reláció reflexív. Mivel a mozgások inverze is mozgás, adódik, hogy az m -reláció szimmetrikus, és minthogy a mozgások szorzata mozgás, következik, hogy az m -reláció tranzitív is. Ezeket fogalmazza meg tételünk.

Tétel. *Az m -reláció ekvivalenciareláció.*

Tétel. *Az $(e_+, f_+) \stackrel{m}{\sim} (g_+, h_+)$ reláció akkor és csak akkor teljesül, ha van olyan ε eltolás, melyre $\varepsilon\tau_e\tau_f\varepsilon^{-1} = \tau_g\tau_h$, és az $O_{ef} = e_+ \cap f_+$, $O_{gh} = g_+ \cap h_+$ metszéspontokra, valamint minden $E \in e_+$, $F \in f_+$, $G \in g_+$ és $H \in h_+$ nem a metszéspontokba eső pontokra az $O_{ef}EF$ és $O_{gh}GH$ háromszögek azonos körüljárásúak.*

Bizonyítás. *Szükségesség.* Mivel $(e_+, f_+) \stackrel{m}{\sim} (g_+, h_+)$, van pontosan egy olyan μ mozgás, melyre $\mu(e_+) = g_+$, $\mu(f_+) = h_+$ és így nyilván $\mu(O_{ef}) = O_{gh}$ is. Ekkor

$$\tau_g\tau_h = \tau_{\mu(e)}\tau_{\mu(f)} = (\mu\tau_e\mu^{-1})(\mu\tau_f\mu^{-1}) = \mu\tau_e\tau_f\mu^{-1}. \quad (2.6.1)$$

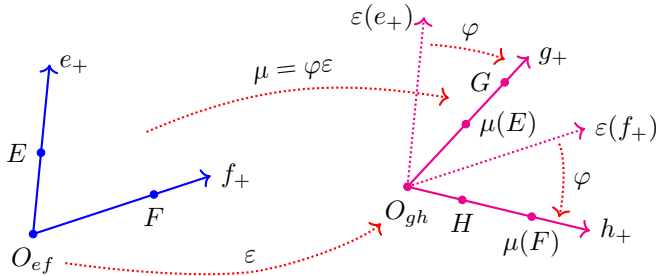
A mozgások páros sok tükrözésből állnak, tehát μ eltolás vagy forgatás. Ha μ egy eltolás, akkor a bizonyítás készen van.

Tegyük fel, hogy μ egy forgatás, melynek valamely O pont a forgáspontja.

Ha $O = O_{ef}$, akkor az azonos középpontú forgatások felcserélhetősége miatt az előbbi egyenlőség úgy folytatódik, hogy $\mu\tau_e\tau_f\mu^{-1} = \tau_e\tau_f$, mely szerint az $\varepsilon = id$ eltolás bizonyítja az állítást.

Ha $O \neq O_{ef}$, akkor az egyértelmű reprezentálás tétele szerint van olyan m egyenes, melyre $\mu = \tau_m\tau_{OO_{ef}}$. Vegyük az m egyenessel párhuzamos m_{ef} egyenest az O_{ef} ponton át. Ekkor $\mu = (\tau_m\tau_{m_{ef}})(\tau_{m_{ef}}\tau_{OO_{ef}})$, ahol $\varepsilon := \tau_{O\tau_{m_{ef}}}$ egy eltolás, $\varphi := \tau_{m_{ef}}\tau_{OO_{ef}}$ pedig egy forgatás az O_{ef} körül, ezért a (2.6.1) egyenlet úgy folytatódik, hogy $\mu\tau_e\tau_f\mu^{-1} = \varepsilon\varphi\tau_e\tau_f\varphi^{-1}\varepsilon^{-1}$, amelyből az azonos középpontú forgatások felcserélhetősége miatt a bizonyítandó $\tau_g\tau_h = \varepsilon\tau_e\tau_f\varepsilon^{-1}$ adódik.

A szükséges feltétel második része világosan következik abból, hogy bármely(!) $E \in e_+$ és $F \in f_+$ pontokra az $O_{ef}EF$ és az $\mu(O_{ef})\mu(E)\mu(F)$ háromszögek — ahol $O_{gh} = g_+ \cap h_+ = \mu(e_+) \cap \mu(f_+) = \mu(O_{ef})$ és $\mu(E) \in g_+$, $\mu(F) \in h_+$ — azonos körüljárásúak, hiszen μ irányítástartó affinitás.



Elégességesség. Legyen ε olyan eltolás, melyre $\varepsilon\tau_e\tau_f\varepsilon^{-1} = \tau_g\tau_h$. Ekkor $\tau_g\tau_h = \tau_{\varepsilon(e)}\tau_{\varepsilon(f)}$, amiért $O_{gh} = g \cap h = \varepsilon(e) \cap \varepsilon(f)$, és így létezik egy olyan φ forgatás az O_{gh} pont körül, melyre $\varphi(\varepsilon(e_+)) = g_+$. Legyen $\mu = \varphi\varepsilon$. Ez egy mozgás és $\mu(O_{ef}) = O_{gh}$, ezért tetszőleges $E \in e_+ \setminus \{O_{ef}\}$, $F \in f_+ \setminus \{O_{ef}\}$ pontokra az $O_{ef}EF$ háromszög és az $O_{gh}\mu(E)\mu(F)$ háromszög azonos körüljárású.

Másfelől viszont

$$\tau_g\tau_h = \varepsilon\tau_e\tau_f\varepsilon^{-1} = \tau_{\varepsilon(e)}\tau_{\varepsilon(f)} = \varphi\tau_{\varepsilon(e)}\tau_{\varepsilon(f)}\varphi^{-1} = \tau_{\mu(e)}\tau_{\mu(f)} = \tau_g\tau_{\mu(f)}$$

miatt $\tau_h = \tau_{\mu(f)}$, vagyis $h = \mu(f)$. Mivel a $G \in g_+$ és $H \in h_+$ pontokra az $O_{gh}GH$ háromszög azonos körüljárású az $O_{ef}EF$ háromszöggel, mely azonos körüljárású az $O_{gh}\mu(E)\mu(F)$ háromszöggel, következik, hogy H és $\mu(F)$ a h egyenesnek ugyanazon O_{gh} által kimetszett félegyenesére esik, vagyis $h_+ = \mu(f_+)$.

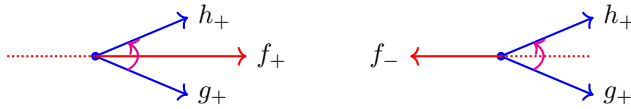
Ezzel a tételt teljes egészében bebizonyítottuk. ■

Vegyük észre, hogy a fentiek szerint az $\varepsilon\tau_e\tau_f\varepsilon^{-1} = \tau_g\tau_h$ egyenlőség ekvivalens azzal, hogy $(e_+, f_+) \stackrel{m}{\sim} (g_+, h_+)$ vagy $(e_+, f_+) \stackrel{m}{\sim} (g_+, h_-)$ legalább egyike teljesül.

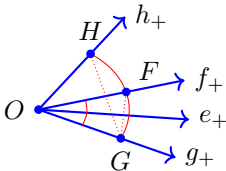
Definíció. Az f_+ félegyenes a (g_+, h_+) kötött szög felezője, ha $(g_+, f_+) \stackrel{m}{\sim} (f_+, h_+)$. ▲

Jegyezzük meg, hogy $(g_+, f_+) \stackrel{m}{\sim} (f_+, h_+)$ esetén a két kötött szöget egymásba vivő μ mozgás csak $g \cap h$ centrumú forgatás lehet. Ennek $\mu = \tau_\ell\tau_f$ formájából $\tau_f(g_+) = \tau_\ell\mu(g_+) = \tau_\ell(f_+) = \tau_\ell\tau_f(f_+) = \mu(f_+) = h_+$, vagyis $\tau_f(g_+) = h_+$ adódik.

Tétel. Minden kötött szögnek pontosan kettő felezője van, melyek egyenesszöget alkotnak egymással.



Bizonyítás. Tekintsük a (g_+, h_+) kötött szöget, és legyen $G \in g_+$ és $H \in h_+$ olyan pont, hogy $d(O, G) = d(O, H)$, ahol $O = g_+ \cap h_+$ a két félegyenes közös kiindulási pontja.



Legyen f a $\overline{GH}$ szakaszfelező merőleges egyenese. Nyilván $\tau_f(O) = O$, és $\tau_f(G) = H$, ezért $\tau_f(g_+) = h_+$.

Tekintsük most a $(g_+, f_\pm)$ kötött szöget, ahol $f_\pm$ az f egyenes valamely, az O pont által kijelölt félegyenes. Legyen $F \in f_\pm$ olyan pont, hogy $d(O, G) = d(O, F)$, és legyen e a $\overline{GF}$ szakaszfelező merőleges egyenese.

Nyilván $\tau_e(O) = O$, és $\tau_e(G) = F$, ezért $\tau_e(g_+) = f_\pm$.

Ekkor a τ_e felcseréli a g_+ és $f_{\pm}$ félegyeneseket, a τ_f viszont felcseréli a g_+ és h_+ félegyeneseket, ezért a $\mu = \tau_f \tau_e \in \mathcal{M}$ mozgásra $\mu(g_+) = f_{\pm}$ és $\mu(f_{\pm}) = h_+$ teljesül. Tehát az f egyenes mindkét félegyenese felezi a kötött szöget, amivel a tétel egzisztencia részét beláttuk.

Az unicitás tekintetében induljunk ki abból, hogy amennyiben f_+ és f'_+ is felezi a (g_+, h_+) kötött szöget, akkor $\tau_{f'} \tau_f(g_+) = \tau_{f'}(h_+) = g_+$, vagyis a $\tau_{f'} \tau_f$ forgatás invariánsan, ezért fixen hagyja a g_+ félegyenest, amiért csak az identitás lehet, tehát $f = f'$. ■

Tekintsük most a (g_+, h_+) kötött szög (h_+, g_-) kiegészítőjét, és e kötött szögek szögfelezőinek f illetve f' egyenesét. Az f egyenesre tükrözve a g_+ félegyenest a h_+ félegyenese adódik, ezért a τ_f tükrözés a g_- félegyenest a h_- félegyenesebe viszi, amiért a (h_+, g_-) kiegészítő szög a tükrözés hatására a (g_+, h_-) kötött szögbe megy át. Ez azt jelenti, hogy a τ_f tükrözés az f'_+ félegyenest az f'_- félegyenesebe viszi, tehát $f \perp f'$.

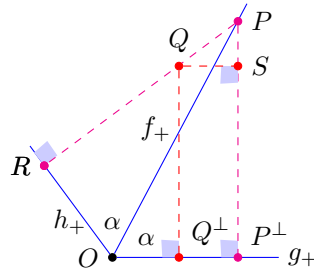
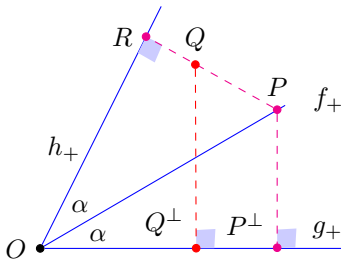
Tétel. Tekintsünk egy nem egyenes szöget. Ekkor azon pontok halmaza, melyek e szög szárainak egyeneseitől egyenlő távolságra vannak a szög és mellékszöge szögfelező egyeneseinek uniója.

Bizonyítás. A szög vagy mellékszöge szögfelezőjére való tükrözés helyben hagyja a szögfelező pontjait, felcseréli a szög szárait, tartja a merőlegességet és izometria, ezért mindkét szögfelező pontjai egyenlő távolságra vannak a szög száraitól.

Elég tehát megmutatnunk, hogy a szárok egyeneseitől egyenlő távolságra lévő bármely Q pont valamelyik szögfelezőn van.

Tekintsünk egy O pontban egymást metsző g, h egyenespárt és rajtuk kívül egy tetszőleges Q pontot. A Q pont merőleges vetülete a g és h egyenesekre, rendre legyenek $Q^{\perp}$ és R . A h egyenes O pontból indul és az R pontot tartalmazó félegyenest jelölje h_+ , a g egyenes O pontból induló és a $Q^{\perp}$ pontot tartalmazó félegyenest pedig jelölje g_+ . Legyen f_+ a (g_+, h_+) kötött szög azon szögfelezője, amely a Q ponttal h - és g -partos is.

Tegyük most fel, hogy $Q \notin f_+$. Ekkor Q az R vagy $Q^{\perp}$ pontok egyikével — mondjuk az R ponttal — f -partos.



Az RQ egyenes metszi az f szögfelezőt, mert különben $f \parallel RQ$, és így $f \perp h$, amiből $h_+ = g_+$ következik, holott (g_+, h_+) nem egyenes szög. Legyen $P = QR \cap f$, $P^\perp$ pedig ennek merőleges vetülete a g egyenesre. Ekkor $d(g, Q) = d(h, Q) = d(R, Q) < d(R, P) = d(h, P) = d(g, P)$, mivel Q azonos távolságra van a szög száraitól, $Q \in \overline{RP}$, és P egyenlő távolságra van a szög száraitól. (Ez mutatja, hogy az ábra baloldalán látható szituáció nem jöhet létre.)

Mivel $d(g, Q) < d(g, P)$, a Q ponton át a g egyenessel párhuzamosan húzott egyenes metszi a $\overline{PP^\perp}$ szakaszt valamely $S \in \overline{PP^\perp}$ pontban, amiért

$$d(P, S) = d(P, g) - d(S, g) = d(P, h) - d(Q, g) = d(P, h) - d(Q, h) = d(P, Q).$$

A PQS nem kollineáris pontok által alkotott háromszögben $SP \perp SQ$, így a **Pitagorasz-tétel** értelmében $d(P, Q) > d(P, S)$, ami ellentmond a feltételezésünkéből bizonyított $d(P, Q) = d(P, S)$ egyenlőségnek, tehát feltételezésünk nem valósulhat meg, ami bizonyítja a tétel állítását. ■

Tovább követjük a vektoroknál bevált eljárást.

Definíció. A kötött szögek m -reláció szerinti ekvivalenciaosztályait *szabad szögeknek* nevezzük. A szabad szögek halmazát $\mathcal{A}$ jelöli. Egy szabad szög elemeit a *szabad szög reprezentánsainak* nevezzük. Az (e_+, f_+) kötött szög által reprezentált szabad szöget $\triangleleft(e_+, f_+)$ jelöli. ▲

Fontos megfigyelni, hogy minden szabad szög kötött szögek egy-egy halmaza. Az ugyanabban a szabad szögben lévő kötött szögek egymással m -relációban állnak. *Egyenesszögnek* hívjuk azt a szabad szöget is, melynek reprezentánsai az egyenesszögek. Ennek ϵ a jelölése.

Lemma. (egyértelmű reprezentálás) *Bármely e_+ félegyeneshez és $\alpha \in \mathcal{A}$ szabad szöghöz pontosan egy olyan f_+ félegyenes létezik, amelyre $(e_+, f_+) \in \alpha$.*

Bizonyítás. Legyen $(g_+, h_+) \in \alpha$. Ekkor pontosan egy olyan μ mozgás létezik, melyre $\mu(g_+) = e_+$. Legyen $f_+ := \mu(h_+)$. Ekkor $(e_+, f_+) \stackrel{m}{\sim} (g_+, h_+) \in \alpha$, így $(e_+, f_+) \in \alpha$ is teljesül.

Ha f_+ és f'_+ félegyenesekre $(e_+, f_+) \stackrel{m}{\sim} (e_+, f'_+)$, akkor létezik olyan μ mozgás, hogy $\mu(e_+) = e_+$ és $\mu(f_+) = f'_+$. Az $\mu(e_+) = e_+$ egybeesésből következik, hogy μ az identikus leképezés, amiért $\mu(f_+) = f'_+$ alapján $f_+ = f'_+$ adódik. ■

Definíció. Legyen α és β szabad szög, $(a_+, b_+) \in \alpha$, és $(b_+, c_+) \in \beta$. A γ szabad szöget az α és β *szabad szögek összegének* mondjuk, amit a $\gamma = \alpha + \beta$ formulával fejezünk ki, ha $(a_+, c_+) \in \gamma$. ▲

Tétel. *A szabad szögek összege egyértelmű.*

Bizonyítás. Legyen $(a_+, b_+) \in \alpha$ és $(a'_+, b'_+) \in \alpha$, valamint $(b_+, c_+) \in \beta$ és $(b'_+, c'_+) \in \beta$. Azt kell belátnunk, hogy $(a_+, c_+) \stackrel{m}{\sim} (a'_+, c'_+)$

Nyilván $(a_+, b_+) \stackrel{m}{\sim} (a'_+, b'_+)$ és $(b_+, c_+) \stackrel{m}{\sim} (b'_+, c'_+)$ is teljesül, amiért léteznek olyan μ_α és μ_β mozgások, hogy $\mu_\alpha(a_+) = a'_+$, $\mu_\alpha(b_+) = b'_+$ és $\mu_\beta(b_+) = b'_+$, $\mu_\beta(c_+) = c'_+$.

Mivel minden félegyenespárhoz pontosan egy mozgás létezik, mely az egyiket a másikba viszi, a középső két egybeesés miatt $\mu_\alpha = \mu_\beta$, amiért $\mu_\alpha(a_+) = a'_+$ és $\mu_\beta(c_+) = c'_+$ azt jelenti, hogy $(a_+, c_+) \stackrel{m}{\sim} (a'_+, c'_+)$. Ez volt a bizonyítandó. ■

Tétel. *A szabad szögek az összeadással egy Abel-csoportot alkotnak.*

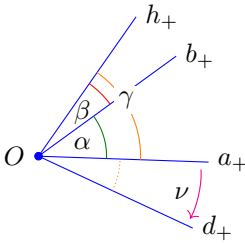
Bizonyítás. Szabad szögek összege szabad szög, az (a_+, a_+) által reprezentált $0 = \angle(a_+, a_+)$ szabad szög pedig nyilván az összeadás nulleleme.

Az asszociativitást az alábbi formula mutatja:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) + \gamma &= (\angle(a_+, b_+) + \angle(b_+, c_+)) + \angle(c_+, d_+) = \angle(a_+, c_+) + \angle(c_+, d_+) \\ &= \angle(a_+, d_+) = \angle(a_+, b_+) + (\angle(b_+, c_+) + \angle(c_+, d_+)) = \alpha + (\beta + \gamma). \end{aligned}$$

Az invertálhatóságot mutatja, hogy az $\angle(a_+, b_+) + \angle(b_+, a_+) = \angle(a_+, a_+)$ szerint az $\angle(a_+, b_+)$ és $\angle(b_+, a_+)$ szabad szögek egymás ellentettjei.

A kommutativitás vizsgálatához legyen $\alpha = \angle(a_+, b_+)$, $\beta = \angle(b_+, c_+) = \angle(d_+, a_+)$, és $\gamma = \alpha + \beta = \angle(a_+, c_+)$. Azt kell igazolnunk, hogy a $\beta + \alpha = \angle(d_+, a_+) + \angle(a_+, b_+) = \angle(d_+, b_+)$ szög is γ .



Mivel β két reprezentánsa m -relációban áll, létezik egy μ mozgás, melyre $\mu(b_+) = d_+$, és $\mu(c_+) = a_+$, és ez egyértelmű. Szintén létezik egy egyértelmű $\nu \in \mathcal{M}$ mozgás is, melyre $\nu(a_+) = d_+$. Mivel mindegyik félegyenes ugyanabból az O pontból indul ki, a μ és a ν mozgás is az O pont körüli forgatás. Ekkor $\nu(c_+) = \nu(\mu^{-1}(a_+)) = \mu^{-1}(\nu(a_+)) = \mu^{-1}(d_+) = b_+$, hiszen a ν és μ forgatások szorzáskor felcserélhetők.

A ν forgatás miatt $(a_+, c_+) \stackrel{m}{\sim} (d_+, b_+)$, ami igazolja a kommutativitást. ■

Az m -relációra fentebb igazolt ekvivalens feltételt használva a kommutativitást azzal is igazolhatjuk, hogy $\tau_a \tau_c = \tau_a \tau_b (\tau_b \tau_c) = \tau_a \tau_b (\tau_d \tau_a) = (\tau_d \tau_b \tau_a) \tau_a = \tau_d \tau_b$, és az a forgatás, amely az a_+ félegyenesest d_+ félegyenesbe viszi, a forgatások második tengelyének egyértelműsége miatt a c_+ félegyenesest a b_+ félegyenesbe viszi, és mozgás lévén tartja a körüljárást.

Vezessük be a szabad szögek természetes $n \in \mathbb{N}$ számmal való szorzását az

$$n\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\alpha + \cdots + \alpha}_n$$

ismételt összeadás rövidítéseként. Az így bevezetett egésszel szorzás nem injektív, hiszen például a $2\xi = \alpha$ egyenletnek a két szögfelező tulajdonságai alapján pontosan két különböző megoldása van. Az α nullszögre pedig az ϵ egyenesszög megoldás, hiszen $\epsilon + \epsilon = 0$.

Előbbi tételünk alapján a kötött szögeknél megfogalmazott, a kötött szögek és forgatások közötti összefüggés az alábbira vezet.

Tétel. *A szabad szögek és bármely O rögzített pont körüli forgatások között a $\varphi: \triangleleft(a_+, b_+) \mapsto \tau_a \tau_b$ leképezés a két kommutatív csoport között homomorfizmus.*

A φ homomorfizmus nem izomorfizmus, hiszen bár az identikus forgatásnak és a centrális tükrözésnek pontosan egy-egy öse az az $\triangleleft(a_+, b_+)$ szabad szög, ahol $a \perp b$, illetve $a = b$, de a többi forgatásnak mindig pontosan kettő öse van, mégpedig $\triangleleft(a_+, b_+)$ és $\triangleleft(a_-, b_+)$.

Tétel. *Tekintsük a rendre az O és O' pontokból induló f_+ és f'_+ félegyeneseket, és rögzítsünk az ezekkel kezdődő kötött szögek halmazán egy-egy $\prec$ és $\prec'$ rendezést is.*

Ekkor a $\varphi: (f_+, g_+) \mapsto (f'_+, g'_+)$ leképezés, ahol $(f_+, g_+) \stackrel{m}{\sim} (f'_+, g'_+)$ szigorúan monoton a $\prec$ és $\prec'$ rendezésekre nézve.

Bizonyítás. Mivel a mozgásokat egy félegyenes és annak képe meghatározza, pontosan egy olyan μ mozgás létezik, melyre $\mu(f_+) = f'_+$, így $(f_+, g_+) \stackrel{m}{\sim} (f'_+, g'_+)$ következtében $\mu(g_+) = g'_+$ is teljesül, vagyis $\varphi: (f_+, g_+) \mapsto (\mu(f_+), \mu(g_+))$.

Az elválasztás definíciójánál beláttuk, hogy az izometriák, így a mozgások is tartják a félegyenések elválasztását, ami a fentivel bizonyítja az állítást. ■

A kötött szögek két inverz rendezése miatt ez az eredmény a szabad szögek két inverz rendezését határozza meg az alábbiak szerint.

Definíció. Rögzítsünk egy f_+ félegyenest és a vele kezdődő kötött szögeken egy rendezést. Azt mondjuk, hogy az α szabad szög *kisebbs mint* a β szabad szög, ha az $(f_+, a_+) \in \alpha$ és $(f_+, b_+) \in \beta$ reprezentánsokra $(f_+, a_+) \prec (f_+, b_+)$. Ezt a relációt $\alpha < \beta$ jelöli. ▲

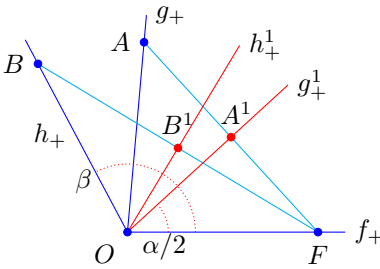
A szabad szögek összeadása általában nem monoton művelet erre a rendezésre nézve. Ha f és g két egymásra merőleges egyenes, akkor $\triangleleft(f_+, g_-) + \triangleleft(f_+, g_-) = \triangleleft(f_+, f_-) = \triangleleft(f_+, g_+) + \triangleleft(f_+, g_+)$, holott $(f_+, g_-) \prec (f_+, g_+)$.

A kötött szögek szögfelezői miatt minden α szabad szögre egyértelműen létezik az az $\frac{1}{2}\alpha$ szabad szög, mely elválasztja az α és a nullszög szabad szögeket (vagyis $0 < \frac{1}{2}\alpha < \alpha$ vagy $\alpha < \frac{1}{2}\alpha < 0$), és $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha = \alpha$. Ha valamely $n \in \mathbb{N}$ természetes számra $\frac{1}{2^n}\alpha$ már definiált szabad szög, akkor legyen $\frac{1}{2^{n+1}}\alpha := \frac{1}{2}(\frac{1}{2^n}\alpha)$.

Tétel. Rőgzítsük a szabad szögek egy rendezését, valamint α és β legyenek szabad szögek.

- (1) Ha $\alpha < \beta$, akkor $\frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2}\beta$.
- (2) Ha $0 < \alpha, \beta$ (illetve $\alpha, \beta < 0$), akkor van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ esetén $\frac{1}{2^n}\alpha < \beta$ (illetve $\beta < \frac{1}{2^n}\alpha$).
- (3) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $2^n(\frac{1}{2^n}\alpha) = \alpha$.

Bizonyítás. (1) Vegyük észre, hogy ha $\alpha < 0 < \beta$, akkor a szögfelező definíciója miatt $\alpha < \frac{1}{2}\alpha < 0 < \frac{1}{2}\beta < \beta$ miatt teljesül. Emiatt, és mert $-(\frac{1}{2}\alpha) = \frac{1}{2}(-\alpha)$, elegendő $0 < \alpha < \beta$ esetén igazolni az állítást.



Vegyük fel egy O pontból induló f_+ nyílt félegyenest, és legyenek g_+ és h_+ azok az egyértelmű nyílt félegyenesek, melyekre $\angle(f_+, g_+) = \alpha$ és $\angle(f_+, h_+) = \beta$, valamint legyenek g_+^1 és h_+^1 azok az egyértelmű félegyenesek, melyekre $\angle(f_+, g_+^1) = \frac{1}{2}\alpha$, és $\angle(f_+, h_+^1) = \frac{1}{2}\beta$. Vegyük fel az $A \in g_+$, $F \in f_+$ és $B \in h_+$ pontokat az origótól egységnyi távolságra. Így az a B^1 pont, melyre $2B_O^1 = F_O + B_O$, a h_+^1 félegyenese

sen van, az az A^1 pont pedig, melyre $2A_O^1 = F_O + A_O$, a g_+^1 félegyenésre esik.

Mivel a g_+ félegyenes elválasztja a h_+ és f_+ félegyeneseket, vagyis g_+ metszi az $\overline{FB}$ szakaszt, vannak olyan $\lambda, \mu > 0$ és $\kappa > 1$ valós számok, hogy $\lambda + \mu = 1$, és $A_O = \kappa(\lambda B_O + \mu F_O)$. Eszerint

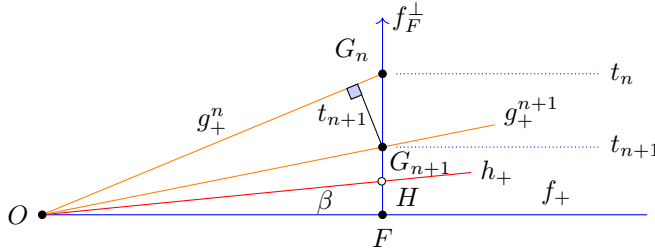
$$\begin{aligned} 2A_O^1 &= F_O + A_O = (1 + \kappa\mu)F_O + \kappa\lambda B_O = (1 + \kappa\mu)F_O + \kappa\lambda(2B_O^1 - F_O) \\ &= (1 - \kappa(\lambda - \mu))F_O + 2\kappa\lambda B_O^1. \end{aligned}$$

Mivel

$$\begin{aligned} 1 - \kappa(\lambda - \mu) &\geq 1 - \kappa\sqrt{(\lambda - \mu)^2} = 1 - \kappa\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 - 2\lambda\mu} \\ &\geq 1 - \kappa\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu\langle B_O, F_O \rangle} = 1 - \kappa|\lambda B_O + \mu F_O| = 1 - |A_O| \\ &\geq 1 - 1 = 0, \end{aligned}$$

az A_O^1 előbbi előállításában szereplő mindkét együttható nem negatív, ami azt jelenti, hogy az A^1 pont g_+^1 félegyenesre esik, ami elválasztja az F és B^1 pontok f_+ és h_+^1 félegyenesét. Ezzel az (1) állítást igazoltuk.

(2) Mivel $0 < \alpha < \beta$ esetén $0 > -\alpha > -\beta$, és $-\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{1}{2}(-\alpha)$, elegendő a $0 < \alpha < \beta$ esetben bizonyítanunk. Vegyük észre, hogy $\frac{1}{2}\epsilon$ nem egyenesszög, ezért elegendő az állítást $\alpha < \epsilon$ esetén megmutatni.



Vegyünk fel egy f_+ nyílt félegyenest, és legyenek g_+^n és h_+ azok az egyértelmű nyílt félegyenések, melyekre $\triangleleft(f_+, g_+^n) = \frac{1}{2^n}\alpha$ ($n \in \mathbb{N}$), és $\triangleleft(f_+, h_+) = \beta$. Válasszuk a félegyenések halmazán azt a rendezést, melyben $0 \prec h_+ \preceq g_+^0$.

Legyen $f^\perp$ olyan félegyenes, melyre $2\angle(f_+, f^\perp) = \epsilon$. Válasszunk egy tetszőleges $F \in f_+$ pontot, és toljuk el párhuzamosan az $f^\perp$ félegyenenest úgy, hogy a kezdőpontja az F pontba kerüljön. Az eltolt félegyenenest jelölje $f_F^\perp$.

A g_+^n ($n > 0$) félegyenes metszi az $f_F^\perp$ félegyenest, mondjuk, a G_n pontban, hiszen az (1) állítás szerint g_+^1 (és így minden g_+^n) félegyenes elválasztja az $f^\perp$ és f_+ félegyeneseket, mert $\alpha < \epsilon = 2\angle(f_+, f^\perp)$.

Tekintsük a G_{n+1} ($n > 0$) pont t_{n+1} távolságát a g_+^n félegyenestől. Ekkor $t_{n+1} = d(G_{n+1}, F)$, mivel a szögfelezők pontjai egyenlő távolságra vannak a szög száraitól. A **Pitagorasz-tétel** miatt $t_{n+1} < d(G_n, F) - d(G_{n+1}, F)$, amiből $t_{n+1} < 2t_n$ adódik, amiért $t_{n+1} < t_1/2^n$.

Ha $g_+^1 \prec h_+$, akkor az állítás igaz. Ha $h_+ \preceq g_+^1$, akkor h_+ metszi az $f_+^\perp$ egyenest valamely H pontban. Valamely $N \in \mathbb{N}$ számra $t_1/2^N < d(H, F)$, így minden $n > N$ esetén a $G_{n+1} \in \overline{HF}$, vagyis g_+^n elválasztja az f_+ félegyenest a h_+ félegyenestől, amiért $\frac{1}{2^n}\alpha = \angle(f_+, g_+^n) < \angle(f_+, h_+) = \beta$, ahogy az állításban szerepel.

(3) Teljes indukcióval bizonyítunk. Az állítás $n = 1$ esetben a definiáló egyenlőség. A $2^n(\frac{1}{2^n}\alpha) = \alpha$ indukciós feltétel és $\frac{1}{2^{n+1}}\alpha$ definíciója következtében

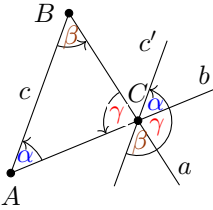
$$\begin{aligned} 2^{n+1} \left(\frac{1}{2^{n+1}} \alpha \right) &= \underbrace{\left(\frac{1}{2^{n+1}} \alpha + \frac{1}{2^{n+1}} \alpha \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n+1}} \alpha + \frac{1}{2^{n+1}} \alpha \right)}_{2^n \times ()} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2^n} \alpha + \cdots + \frac{1}{2^n} \alpha}_{2^n} = \alpha, \end{aligned}$$

ami igazolja az állítást. Ezzel a tételt teljes egészében bizonyítottuk.

Az $\alpha = \sphericalangle(CAB)$, $\beta = \sphericalangle(ABC)$ és $\gamma = \sphericalangle(BCA)$ szögeket az ABC háromszög *belső szögeinek* nevezzük.

Tétel. *A háromszög belső szögeinek összege egyenesszög.*

Bizonyítás. Legyen a háromszög három csúcsa A , B és C . Legyen $\alpha = \sphericalangle(CAB)$, $\beta = \sphericalangle(ABC)$ és $\gamma = \sphericalangle(BCA)$.



Vegyük azt az egyetlen eltolást, mely az A pontot a C pontba viszi. Ez az eltolás az α megadott reprezentánsát egy olyan kötött szögbe viszi, melynek félegyenesei a C pontból indulnak, közülük az első a $b = AC$ egyenes része, a második, c' egyenes pedig párhuzamos a $c = AB$ egyenessel. Ez az eltolt kötött szög is az α szabad szöget reprezentálja.

Vegyük most azt az egyetlen eltolást, amely a B pontot viszi a C pontba. Ez az eltolás a β megadott reprezentánsát egy olyan kötött szögbe viszi, melynek félegyenesei a C pontból indulnak, közülük az első a c' , a második az $a = BC$ egyenes része. Ez az eltolt kötött szög is a β szabad szöget reprezentálja.

A C pontra vonatkozó középpontos tükrözés a γ megadott reprezentánsát egy olyan kötött szögbe viszi, melynek félegyenesei a C pontból indulnak, közülük az első az $a = BC$, a második a $b = AC$ egyenes része. Ez a középpontosan tükrözött kötött szög is a γ szabad szöget reprezentálja.

Ezek szerint három olyan új reprezentánsát kaptuk a β , γ és α szabad szögeknek, hogy közülük az elsőnek a második a_+ félegyenese a másodiknak az első félegyenese, a harmadiknak az első b_+ félegyenese megegyezik a második kötött szög második félegyenésével. Eszerint az első kötött szög első, és a harmadik kötött szög második félegyenese párban éppen a $\beta + \gamma + \alpha$ összeget reprezentálja. Márpedig ezek a félegyenések egybe esnek (hiszen párhuzamosak a c egyenessel és a C egy közös pontjuk), amiért ez az egyenesszög egy reprezentánsa, ami bizonyítja az állítást. ■

A sík azon transzformációit, amelyek tartják a szabad szögeket, *szögtartó transzformációknak* nevezzük. Ilyen például a centrális dilatáció, mely minden kötött szöget vele egyállású kötött szögbe visz, de ilyen minden mozgás is, a szabad szög definíciója értelmében.

Tétel. *Egy kollineáció akkor és csak akkor szögtartó, ha irányítástartó dilatáció.*

Bizonyítás. Minden irányítást tartó dilatáció egy mozgás és egy centrális dilatáció szorzata, márpedig mindkettő őrzi a szögeket.

A fordított állítás igazolásához legyen φ egy szögtartó kollineáció. Ekkor minden $\sphericalangle(f_+, g_+)$ szögre $\sphericalangle(f_+, g_+) = \sphericalangle(\varphi(f_+), \varphi(g_+))$, tehát létezik olyan μ mozgás, melyre $\mu(\varphi(f_+)) = f_+$ és $\mu(\varphi(g_+)) = g_+$.

Legyen $\psi = \mu \circ \varphi$. A ψ is szögtartó kollineáció, tehát bármely (f_+, h_+) kötött szögre $\angle(f_+, h_+) = \angle(\psi(f_+), \psi(h_+)) = \angle(f_+, \psi(h_+))$, amiből az egyértelmű reprezentálás tétele miatt $\psi(h_+) = h_+$ következik.

A ψ affinitás tehát invariánsan hagy minden az $O = f_+ \cap g_+$ pontból kiinduló félegyenest, és fixen tartja a közös O kezdőpontjukat.

Tekintsük a $T_O\mathfrak{S}$ helyvektorsík $\hat{\psi}(P_O) := (\psi(P))_O$ transzformációját, ami a ψ lineáris összetevője. Mivel a ψ affinitás invariánsan hagyja az O kezdőpontú félegyeneseket, minden $\mathbf{v}$ helyvektorhoz van egy $\lambda_{\mathbf{v}}$ valós szám, melyre $\hat{\psi}(\mathbf{v}) = \lambda_{\mathbf{v}}\mathbf{v}$ és ez érvényes a $\mathbf{v}$ minden többszörösére is.

Legyen $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ a $T_O\mathfrak{S}$ egy bázisa. A $\mathbf{w} = \ell\mathbf{u} + m\mathbf{v}$ helyvektorra

$$\lambda_w\ell\mathbf{u} + \lambda_w m\mathbf{v} = \lambda_w\mathbf{w} = \hat{\psi}(\mathbf{w}) = \hat{\psi}(\ell\mathbf{u}) + \hat{\psi}(m\mathbf{v}) = \lambda_u\ell\mathbf{u} + \lambda_v m\mathbf{v},$$

adódik, amiből az egyértelmű bázisbontás miatt $\lambda_w = \lambda_u$ és $\lambda_w = \lambda_v$ következik, vagyis az összes $\lambda_{\mathbf{v}}$ megegyezik.

Legyen λ az a konstans, amelyre eszerint $\hat{\psi}(\mathbf{w}) \equiv \lambda\mathbf{w}$ teljesül minden $\mathbf{w}$ helyvektorra. Ekkor tetszőleges P, Q pontpárra

$$\begin{aligned} d(\varphi(P), \varphi(Q)) &= d(\mu(\varphi(P)), \mu(\varphi(Q))) = d(\psi(P), \psi(Q)) = |(\psi(P))_O - (\psi(Q))_O| \\ &= |\hat{\psi}(P_O) - \hat{\psi}(Q_O)| = |\lambda P_O - \lambda Q_O| = |\lambda| |P_O - Q_O| \\ &= |\lambda| d(P, Q), \end{aligned}$$

vagyis φ dilatáció. Ezzel a tételt beláttuk. ■

Ha irányítatlan szögek tartását $(\varphi(\pm\alpha) = \pm\alpha)$ szabjuk feltételnek, akkor az összes dilatációt kapjuk eredményül.

Tétel. *Legyen $p > 0$ valós szám. Ekkor pontosan egy olyan $m: \mathcal{A} \rightarrow (-p, p] \subset \mathbb{R}$ szigorúan monoton függvény létezik, melyre $m(\epsilon) = p$, és*

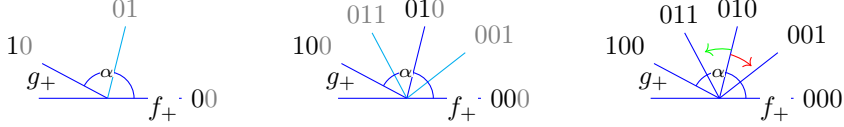
$$m(\alpha + \beta) = \begin{cases} m(\alpha) + m(\beta) + 2p, & \text{ha } m(\alpha) + m(\beta) \leq -p \\ m(\alpha) + m(\beta), & \text{ha } -p < m(\alpha) + m(\beta) \leq p \\ m(\alpha) + m(\beta) - 2p, & \text{ha } p < m(\alpha) + m(\beta) \end{cases}$$

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $\alpha = \angle(f_+, g_+)$ nem nulla szabad szöget, és — az egyszerűség kedvéért — válasszuk a szabad szögek azon rendezését, melyre $0 < \alpha$.

Egzisztencia. Rendeljük a g_+ félegyeneshez az 1, az f_+ félegyeneshez a 0 szám-jegyet, majd végezzük el a következő eljárást N alkalommal egymás után:

Minden olyan félegyenespár által meghatározott kötött szögnek vegyük a félegyenesekkel f -partos szögfelezőjét, melyek félegyenesei már rendelkeznek számmal, és nincs őket elválasztó számozott félegyenes. Egy így

keletkező szögfelező félegyeneshez rendeljük hozzá az általa felezett szög félegyeneseihez rendelt számok közül a kisebbet. Ezután minden régebbi számozott félegyenes számához írunk hozzá még egy 0 számjegyet, és minden újabb számozott félegyenes (a most keletkezett szögfelezők) számához írunk hozzá még egy 1 számjegyet.



Az eljárás minden lépésében nevezzük az olyan számozott félegyenesekből álló párokat üresnek, amelyekhez nincs őket elválasztó számozott félegyenes. Ekkor a következőt állítjuk.

A fenti eljárás minden lépésében az üres félegyenespárok száma duplázódik, azok egymással mind m -relációban állnak, az általuk reprezentált szabad szög pedig a k -adik lépésben $\frac{1}{2^k} \alpha$.

Teljes indukcióval bizonyítunk. A kezdő, „nulladik” lépésben nyilván igaz az állítás, hiszen csak egyetlen egy ilyen üres félegyenespár van. A következő, első lépésben is igaz marad az állítás, hiszen a g_+ félegyenessel f -partos szögfelezővel feleztük az üres (f_+, g_+) félegyenespár kötött szögét.

Tegyük fel most, hogy a k -adik lépés eredményeként is 2^k egymással m -relációban lévő kötött szöget határoznak meg az üres félegyenespárok.

Az eljárás $(k+1)$ -edik lépése az indukciós feltétel miatt 2^k szögfelező félegyeneset határoz meg úgy, hogy mind ugyanazon f -partossági osztályba tartozik. Tekintsük egy ilyen új szögfelező két partján létrejött üres egyenespárok által meghatározott kötött szögek közös (hiszen szögfelezés történt!) ξ szabad szögét. A ξ nagyobb, mint a nullszög, mert az új szögfelező és az általa felezett, az előző lépésben még üres félegyenespár által meghatározott kötött szög mindkét félegyenesre ugyanazon f -partossági osztályba tartozik. Eszerint $0 < \xi$, és $\xi + \xi = \frac{1}{2^k} \alpha$, amiből $\xi = \frac{1}{2^{k+1}} \alpha$ adódik, és ezzel a teljes indukciós bizonyítást el is végeztük.

Jelölje az $\{x_k\}_{k=0}^N$ számjegyekkel (tehát az első számjegy x_0 !) számozott félegyenes g_+^x , ahol $x = \sum_{k=0}^N x_k \frac{1}{2^k}$. Világos, hogy x_k az x valós szám kettes számrendszerbeli alakjának a „kettedes vessző” utáni k -adik számjegye, ha $k > 0$. Mivel véges sok szabad szög összege is szabad szög, a $\sum_{n=0}^N x_n \frac{1}{2^n} \alpha$ formula szabad szöget határoz meg. Világos, hogy $g_+^0 = f_+$, és $g_+^1 = g_+$.

Most teljes indukcióval igazoljuk, hogy

$$\angle(f_+, g_+^x) = \sum_{n=0}^N x_n \frac{1}{2^n} \alpha, \quad \text{ahol } x = \sum_{k=0}^N x_k \frac{1}{2^k}, \text{ és } N \in \mathbb{N}.$$

Az $N = 0$ esetben $g_+^0 = f_+$ és $g_+^1 = g_+$ mutatja az állítás helyességét. Az $N = 1$ esetben az egyetlen új $\angle(f_+, g_+^{1/2}) = \frac{1}{2}\alpha$ egyenlőség teljesülését mutatja, hogy $g_+^{1/2}$ éppen az (f_+, g_+) kötött szög felezője, így $2\angle(f_+, g_+^{1/2}) = \angle(f_+, g_+) = \alpha$.

Tegyük fel, hogy az állítás N esetén is teljesül, és nézzük $N + 1$ esetén. Ha $x_{N+1} = 0$, akkor az indukciós feltétel szerint igaz az állítás. Ha $x_{N+1} = 1$, az azt jelenti, hogy g_+^x felezi a $(g_+^{x-\frac{1}{2^{N+1}}}, g_+^{x+\frac{1}{2^{N+1}}})$ kötött szöget, ezért

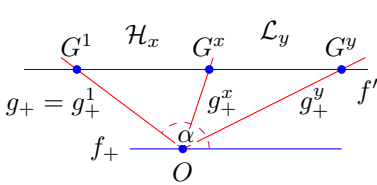
$$\angle(f_+, g_+^x) = \angle(f_+, g_+^{x-\frac{1}{2^{N+1}}}) + \frac{1}{2^{N+1}}\alpha = \sum_{n=0}^N x_n \frac{1}{2^n}\alpha + \frac{1}{2^{N+1}}\alpha = \sum_{n=0}^{N+1} x_n \frac{1}{2^n}\alpha,$$

ami éppen a bizonyítandó formula.

Jelölje $\mathbb{D}$ a diadikus számok halmazát a $[0, 1]$ intervallumban, vagyis

$$\mathbb{D} = \left\{ \sum_{n=1}^{N+1} x_n \frac{1}{2^n} : N \in \mathbb{N} \text{ és } x_n \in \{0, 1\}, n = 1, \dots, N \right\} \cup \{0, 1\}.$$

Legyen az f' egyenes párhuzamos az f egyenessel, a g_+ egyenes egy $G^1 \neq f \cap g = O$ pontján át. Az f' egyenesnek minden g_+^x ($x \in \mathbb{D}$, $x \neq 0$) félegyenessel van egy G^x metszéspontja. Válasszuk az f' egyenesen azt a rendezést, melyre $G^x \prec G^1$ valamely $0 \neq x \in \mathbb{D}$ esetén. Ekkor a félegyenesek partosságának vizsgálatakor már látott monotonitási kapcsolat miatt a G^x pontok szigorúan monoton növvő módon vannak elrendezve az f' egyenesen, vagyis $G^y \prec G^x$ pontosan $y < x$ esetén.



Legyen x egy tetszőleges valós szám a $(0, 1)$ nyílt intervallumból, és vegyük az $\mathcal{L}_x = \{G^y : y \in \mathbb{D}, 0 \leq y \leq x\}$ és $\mathcal{H}_x = \{G^y : y \in \mathbb{D}, x \leq y \leq 1\}$ pontthalmazokat az f' egyenesen. A Dedekind-axióma szerint léteznek az $L_x = \limsup \mathcal{L}_x$ és $H_x = \liminf \mathcal{H}_x$ határpontok, melyekre nyilván $L_x \preceq H_x$ teljesül.

Ha $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{1}{2^n}$ ($x_n \in \{0, 1\}$), akkor tekintsük az $x_N^- = \sum_{n=1}^{N+1} x_n \frac{1}{2^n}$ és $x_N^+ = x_N^- + \frac{1}{2^N}$ számokat minden $N \in \mathbb{N}$ esetén. Nyilván $x_N^- \leq x \leq x_N^+$, ezért $G^{x_N^-} \prec L_x \preceq H_x \prec G^{x_N^+}$.

Legyenek az O pontból kiinduló és az L_x illetve H_x pontokon áthaladó félegyenesek rendre ℓ_x és h_x . Ekkor minden $N \in \mathbb{N}$ esetén $\angle(\ell_x, \ell_x) \leq \angle(\ell_x, h_x) \leq \angle(g^{x_N^-}, g^{x_N^+}) = \frac{1}{2^N}\alpha$, amiből $\angle(\ell_x, h_x) = 0$ következik, tehát $\ell_x = h_x$, és $L = H$. Nyilván minden $x \in \mathbb{D}$ esetén $\ell_x = g_+^x$, ezért a továbbiakban minden $x \in (0, 1)$ esetén legyen $g_+^x = \ell_x$.

Eszerint az $x \mapsto (f_+, g_+^x)$ hozzárendelés a $[0, 1]$ intervallumon jól definiált és szigorúan monoton.

Most igazoljuk, hogy minden $0 < \beta < \alpha$ szöghöz létezik olyan $x \in (0, 1)$, melyre $\beta = \angle(f_+, g_+^x)$. Tekintsük azt az egyértelmű e_+ félegyenest, melyre $\beta = \angle(f_+, e_+)$, és mossa ez az e_+ félegyenes az f' egyenest az E pontban. A $\mathbb{D}_E^- = \{y \in \mathbb{D} : G^y \preceq E\}$ és $\mathbb{D}_E^+ = \{y \in \mathbb{D} : E \preceq G^y\}$ halmazok az f' egyenesen nem üresek, hiszen előbbinek a 0, utóbbinak az 1 eleme. Legyen $x^- = \limsup \mathbb{D}_E^-$ és $x^+ = \liminf \mathbb{D}_E^+$. Nyilván $x^- \leq x^+$. Ha $x^- < x^+$, akkor van olyan $y \in \mathbb{D}$ szám, melyre $x^- < y < x^+$, és így x^- definíciója miatt $E \prec G^y$, x^+ definíciója miatt pedig $G^y \prec E$, ami ellentmondás, tehát $x^- = x^+$. Ekkor $x^- \leq x^+$ miatt $G^{x^-} \leq E \leq G^{x^+}$, vagyis $E = G^{x^-}$, amit bizonyítani akartunk.

Eszerint az $x \mapsto (f_+, g_+^x)$ hozzárendelés a $[0, 1]$ intervallumon szürjektív is, tehát összességében bijektív, és szigorúan monoton.

Eredményeink alapján az

$$x \mapsto x\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \angle(f_+, g_+^x), & 0 \leq x < 1, \\ \angle(f_+, \tau_{f_+} g_+^{-x}), & 0 < -x < 1, \end{cases}$$

szorzás a diadikus számokkal való szorzás kiterjesztése, teljesíti a disztributivitás $x\alpha + y\alpha = (x+y)\alpha$ formuláját, és szigorúan monoton növekvő, ha $-1 < x, y, x+y < 1$, valamint szigorúan monoton.

Legyen most $\alpha = \frac{1}{2}\epsilon$, vagyis $g \perp f$. A fentiek és a bijektivitás szerint ekkor

$$m: \beta \mapsto \begin{cases} (x+1)p/2, & \text{ahol } \beta - \alpha = \angle(f_+, g_+^x), \quad \text{ha } \alpha < \beta \leq \epsilon, \\ xp/2, & \text{ahol } \beta = \angle(f_+, g_+^x), \quad \text{ha } 0 < \beta \leq \alpha, \\ -xp/2, & \text{ahol } \beta = \angle(f_+, \tau_{f_+} g_+^x), \quad \text{ha } \alpha < \beta \leq 0, \\ -(x+1)p/2, & \text{ahol } \beta + \alpha = \angle(f_+, \tau_{f_+} g_+^x), \quad \text{ha } \beta \leq \alpha, \end{cases}$$

éppen a tétel feltételeinek megfelelő szigorúan monoton függvény.

Unicitás. Legyen α olyan szabad szög, hogy $m(\alpha) = p/2 > 0$. A monotonitás miatt ekkor minden $x \in (-1, 1)$ valós számra $-p/2 < m(x\alpha) < p/2$, amiért tetszőleges $-1 < x, y, x+y < 1$ számok esetén $m(x\alpha) + m(y\alpha) = m((x+y)\alpha)$.

Tekintsük az $f(x) = m((x - [x])\alpha) + [x]p/2$ valós függvényt, ahol $[\cdot]$ az egészrész-függvényt jelöli. Az f additív, mert

$$\begin{aligned} f(x+y) &= m((x+y - [x+y])\alpha) + [x+y]\frac{p}{2} \\ &= f(x) + f(y) + ([x+y] - [x] - [y])\frac{p}{2} + m([y] + [x] - [x+y])\alpha, \end{aligned}$$

és ha $[x+y] - [x] - [y] = 1$, akkor $m([y] + [x] - [x+y])\alpha = m(-\alpha) = -p/2$. Az f szigorúan monoton növekedő is, mert $f(1/4) = m(\frac{1}{4}\alpha) = p/8 > 0$, így a **Függelék F.10** szakasza szerint f homogén, tehát $m(x\alpha) = xp/2$, ha $-1 < x \leq 1$.

A megadott további azonosságokat kihasználva ugyanezen x valós számokra $m((x+1)\alpha) = m(x\alpha) + p/2 = (x+1)p/2$ és $m((x-1)\alpha) = m(x\alpha) - p/2 =$

$(x-1)p/2$ adódik, amiért $m(x\alpha) = xp/2$ következik, ha $-2 < x \leq 2$. Mivel ez lefedi m teljes értékkészletét, és m szigorúan monoton, a legnagyobb, vagyis az ϵ egyenesszög esetére $x = 2$ adódik, vagyis α reprezentánsaiban a félegyenesek merőlegesek egymásra. Ez tehát az általunk fentebb megadott függvénnyel egyezik meg, amivel a tétel bizonyítása teljessé vált. ■

Legyen $0 < p \in \mathbb{R}$, és definiáljuk az $\oplus$ műveletet a

$$a \oplus b = \begin{cases} a + b + 2p, & \text{ha } a + b \leq -p, \\ a + b, & \text{ha } -p < a + b \leq p, \\ a + b - 2p, & \text{ha } p < a + b, \end{cases}$$

szabállyal. Világos, hogy ekkor $((-p, p], \oplus)$ egy kommutatív csoport.

Definíció. Az $m: (\mathcal{A}, +) \rightarrow ((-p, p], \oplus)$ izomorfizmust *szögmérésnek* nevezzük. ▲

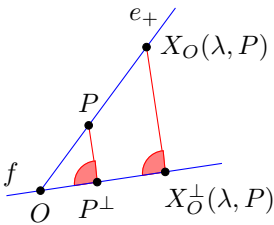
Tételünkben a $p = \pi$ számot választva, a szokásos „radián” szerinti szögmérés adódik. A $p = 180$ esetben a szabad szögek „fok” szerinti mérését kapjuk.

Mivel a szögmérés bijektív, a szabad szögeket meghatározzák a szögmérés által hozzájuk rendelt számok, ezért értelmes azt mondani, hogy „ a 60° -os szög”, melyen a 60° mértékű szabad szöget értjük.

Innentől a szög kifejezés, ha nincs másra utalás, szabad szöget jelent.

2.7. Szögfüggvények és trigonometria

Legyenek O az (e_+, f_+) kötött szög csúcsa, és rögzítsük a $P \in e_+$ pontot.



Jelölje $X_O^\perp(\lambda, P)$ az $X_O(\lambda, P)$ pont f egyenesre vett merőleges vetületét. Minthogy ugyanazon egyenesre merőleges egyenesek párhuzamosak, a párhuzamos szelők tétele szerint

$$\frac{d(O, X_O^\perp(\lambda, P))}{d(O, X_O(\lambda, P))} = \frac{d(O, X_O^\perp(1, P))}{d(O, X_O(1, P))} = \frac{d(O, P^\perp)}{d(O, P)}$$

egy λ értékétől független állandó, ahol $P^\perp$ a P merőleges vetülete az OQ egyenesre. Legyen $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP^\perp}$ és $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$. Ha $P^\perp \in f_+$, akkor **Pitagorasz-tétele** szerint $|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 + |\mathbf{u}|^2 = |\mathbf{v}|^2$, amelyet kibontva a norma és az euklidészi szorzás közti összefüggés alapján $|\mathbf{u}|^2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ adódik. Ugyanígy eljárva $P^\perp \in f_-$ esetében $(|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 + |\mathbf{u}|^2 = |\mathbf{v}|^2)$, az adódik, hogy

$$\frac{d(O, P^\perp)}{d(O, P)} = \frac{|\mathbf{u}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} \times \begin{cases} 1, & \text{ha } P^\perp \in f_+, \\ -1, & \text{ha } P^\perp \in f_-. \end{cases}$$

Ezt az értéket minden mozgás változatlanul tartja, hiszen a mozgások tartják a távolságot, az euklidészi szorzatot, a merőlegességet és a merőleges vetületet is.

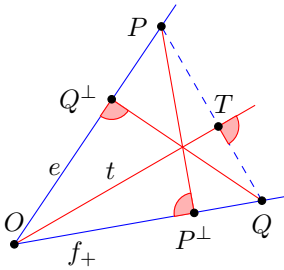
Definíció. Legyen $\alpha = \sphericalangle(e_+, f_+)$, és legyen O az (e_+, f_+) kötött szög csúcsa, valamint $\mathbf{u} \in T_O \mathfrak{S}$ az f_+ , $\mathbf{u} \in T_O \mathfrak{S}$ pedig az e_+ félegyenes egy-egy irányvektora. A $\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}$ számot az α szabad szög koszinuszának nevezzük. Ezt $\cos \alpha$ jelöli. $\blacktriangle$

Használjuk még a $\cos(e_+, f_+) := \cos \alpha$ jelölést is, mely esetben azt is mondjuk, hogy ez az e_+ félegyenes f_+ félegyenesre vonatkozó koszinusza, vagy az (e_+, f_+) kötött szög koszinusza. Világos, hogy $\cos(e_+, f_+) = \cos(f_+, e_+)$.

A koszinusz mintájára egy másik szögfüggvényt is érdemes bevezetni. Legyen O az (e_+, f_+) kötött szög csúcsa, és legyen $P \in e_+$ nem az O pontban. Jelölje $X_O^\perp(\lambda, P)$ az $X_O(\lambda, P)$ pont merőleges vetületét az f egyenesre. Minthogy ugyanazon egyenesre merőleges egyenesek párhuzamosak, a párhuzamos szelők tétele szerint

$$\frac{d(X_O(\lambda, P), X_O^\perp(\lambda, P))}{d(O, X_O(\lambda, P))} = \frac{d(P, P^\perp)}{d(O, P)}$$

egy λ értékétől független állandó, ahol $P^\perp$ a P merőleges vetülete az f egyenesre. Legyen most $Q \in f_+$ az a pont, melyre $d(O, P) = d(O, Q)$, és legyen $Q^\perp$ a Q merőleges vetülete az e egyenesre.



Ekkor az O pont a $\overline{PQ}$ szakasz t felező merőlegesére esik. Legyen T a $\overline{PQ}$ felező pontja. Nyilván $T \in t$. A t egyenesre vonatkozó τ_t tükrözés felcseréli az e és f egyeneseket és a rájuk merőleges $PP^\perp$ és $QQ^\perp$ szakaszokat, hiszen $\tau_t(P) = Q$, és a tükrözés tartja a merőlegességet. Eszerint $\tau_t(P^\perp) = Q^\perp$, és így $d(O, P^\perp) = d(O, Q^\perp)$, amiért

$$\frac{d(P, P^\perp)}{d(O, P)} = \frac{d(Q, Q^\perp)}{d(O, Q)}.$$

Definíció. Legyen $\alpha = \sphericalangle(e_+, f_+)$, legyen O az (e_+, f_+) kötött szög csúcsa és legyen $P \in e_+$ nem az O pont. A P merőleges vetületét az f egyenesre jelölje $P^\perp$. Ekkor a $\frac{d(P, P^\perp)}{d(O, P)}$ számot az (e_+, f_+) kötött szög szinusznak nevezzük. $\blacktriangle$

Jelentős eltérés a koszinusztól, hogy a kötött szög szinusza sosem negatív.

Vegyük észre, hogy minden mozgás változatlanul tartja a kötött szög szinusztát, hiszen tartják a távolságot, a merőlegességet és a merőleges vetületet is. A mozgások tartják a szabad szögeket és azok korábban definiált bármely rendezését is.

Definíció. A szabad szögek egy előre rögzített rendezése mellett az $\alpha = \angle(f_+, g_+)$ szabad szög szinuszt a

$$\sin \alpha := \begin{cases} \sin(f_+, g_+), & \text{ha } 0 \leq \alpha \\ -\sin(f_+, g_+), & \text{ha } \alpha \leq 0 \end{cases}$$

formulával adjuk meg. ▲

Ezen definíció értelmében $\sin \alpha + \sin(-\alpha) = 0$ és $\sin(f_+, g_+) = |\sin \angle(f_+, g_+)|$.

A szögek és a szögfüggvények (koszinusz és szinuszt) közti kapcsolat egyszerűbb jelölése érdekében bevezetjük az $(FOG) := (f_+, g_+)$ jelölést is, ahol $O = f_+ \cap g_+$, $O \neq F \in f_+$ és $O \neq G \in g_+$. Ekkor persze $\angle(FOG) := \angle(f_+, g_+)$ is érvényes, emiatt $\sin(FOG) = |\sin \angle(FOG)|$.

Koszinusztétel. Tekintsünk egy A, B, C háromszöget. Ekkor

$$d^2(A, B) = d^2(C, A) + d^2(C, B) - 2d(C, A)d(C, B) \cos \angle(ACB).$$

Bizonyítás. A fenti definíciót, az euklidészi normát és a szorzást használó

$$\begin{aligned} d^2(A, B) &= |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}|^2 = \langle \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} \rangle \\ &= |\overrightarrow{CB}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2 - 2|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{CA}| \cos \angle(ACB) \\ &= d^2(C, B) + d^2(C, A) - 2d(C, B)d(C, A) \cos \angle(ACB) \end{aligned}$$

levezetés igazolja állításunkat. ■

Színusztétel. Tekintsünk egy A, B, C háromszöget. Ekkor

$$\frac{d(A, C)}{d(C, B)} = \frac{\sin(ABC)}{\sin(CAB)}.$$

Bizonyítás. Legyen C merőleges vetülete az AB egyenesre $C^\perp$. Ekkor definíció szerint

$$\frac{d(C, C^\perp)}{d(A, C)} = \sin(CAB) \quad \text{és} \quad \frac{d(C, C^\perp)}{d(C, B)} = \sin(ABC),$$

mely formulák hánnyadosa igazolja a tétel állítását. ■

Tétel. A koszinusz a szabad szögek $[0, \epsilon]$ részhalmazán monoton csökkenő, a szinusz a szabad szögek $[-\frac{1}{2}\epsilon, \frac{1}{2}\epsilon]$ részhalmazán monoton növekvő.

Bizonyításként emlékeztetjük az olvasót, hogy az f egyenesre nézve partos kötött szögek rendezését éppen a második félegyenesük és egy, az f egyenessel párhuzamos f' egyenes metszéspontjainak az f' egyenesen adott rendezésével adtuk

meg, mely rendezés monoton kapcsolatban van a távolsággal, ami viszont éppen a szög koszinusza. A szinusz esetében a párhuzamos egyenes helyett egy, az f egyenesre merőleges f'' egyenest kell tekintenünk, melyen a második félegyenesek metszéspontjainak az f egyenestől vett távolsága az f egyenes két félsíkjában egymással ellentétesen monoton.

Tétel. (pitagoraszai összefüggés) Minden $\alpha \in \mathcal{A}$ szabad szögre $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Bizonyítás. Pitagorasz tétele szerint a C csúcsnál ortogonális ABC háromszögre $d^2(A, B) = d^2(A, C) + d^2(C, B)$. Ha $\alpha = \sphericalangle(CAB)$, akkor ebből definíció szerint

$$1 = \frac{d^2(A, C)}{d^2(A, B)} + \frac{d^2(C, B)}{d^2(A, B)} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$$

következik, ami bizonyítja az állítást. ■

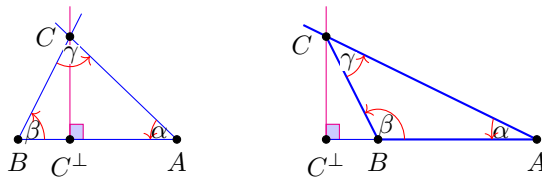
Fontos következmény, hogy $-1 \leq \sin \alpha, \cos \alpha \leq 1$.

Addíciós formulák. Minden $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ szabad szögre

- (1) $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ és $\cos(\epsilon - \alpha) = -\cos(\alpha)$;
- (2) $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ és $\sin(\epsilon - \alpha) = \sin(\alpha)$;
- (3) $\sin(\frac{1}{2}\epsilon - \alpha) = \cos(\alpha)$;
- (4) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$;
- (5) $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.

Bizonyítás. Az (1), (2) és (3) a definícióból közvetlenül következik.

A továbbiakban az ábra jelöléseit fogjuk használni, vagyis az ABC háromszögben $\alpha = \sphericalangle(CAB)$, $\beta = \sphericalangle(ABC)$ és $\gamma = \sphericalangle(BCA)$, valamint $C^\perp$ a C merőleges vetülete az AB egyenesre.



(4) Ha $\alpha + \beta = \epsilon$, vagy $\alpha + \beta = 0$, akkor az állítás az (1) és (2) állítások közvetlen következménye, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy $\alpha + \beta \neq \epsilon$ és $\alpha + \beta \neq 0$. Ahogy már láttuk, $\gamma = \epsilon - \alpha - \beta$, amiért $\sin \gamma = \sin(\alpha + \beta)$ érvényes.

Felírva a koszinusztételt az ABC háromszög $\overline{AC}$ és $\overline{BC}$ oldalára, azok összegéből $d(C, A) \cos \alpha + d(B, C) \cos \beta = d(A, B)$ adódik. Mivel α, β és γ is a nullszög azonos oldalán van a szabad szögek bármely rendezésében, formulánkat elosztva az $\overline{AB}$ oldal $d(A, B)$ hosszával, és alkalmazva a szinusztételt, (4) képlete adódik.

(5) Az (1)–(3) és (4) azonosságokból következő

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \sin\left(\frac{1}{2}\epsilon - (\alpha + \beta)\right) = \sin\left(\frac{\epsilon}{2} - \alpha\right) \cos(-\beta) + \cos\left(\frac{\epsilon}{2} - \alpha\right) \sin(-\beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

formula igazolja az állítást. ■

A szabad szögek méréseinek bijektivitása miatt valós függvényeket is generálhatunk a $\sin$ és $\cos$ függvényekből.

Rögzítsük a szabad szögeknek azt az m mérését, melyre a mérés maximuma $p \in \mathbb{R}_{0<}$. Legyen $\sin: (-p, p] \rightarrow \mathbb{R}$ az a függvény, melyre $\sin(m(\alpha)) = \sin \alpha$, $\cos: (-p, p] \rightarrow \mathbb{R}$ pedig az a függvény, melyre $\cos(m(\alpha)) = \cos \alpha$. Nyilván $\lim_{x \searrow -p} \cos x = \lim_{x \nearrow p} \cos(-x) = \lim_{x \nearrow p} \cos x = \cos p = 0$, és hasonlóan $\lim_{x \searrow -p} \sin x = -\sin p = 0$. Ez lehetővé teszi ezen $\sin$ és $\cos$ függvények kiterjesztését a teljes számegyenesre.

Definíció. A valós $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ szögfüggvények azon $2p$ szerint periodikus függvények, melyekre a $(-p, p]$ intervallumon rendre $\sin(m(\alpha)) = \sin \alpha$ és $\cos(m(\alpha)) = \cos \alpha$. ▲

A definíció szerint tehát

$$\sin x = \sin\left(m^{-1}\left(x - 2p\left[\frac{x}{2p}\right]\right)\right), \quad \text{és} \quad \cos x = \cos\left(m^{-1}\left(x - 2p\left[\frac{x}{2p}\right]\right)\right),$$

ahol az egyenlőségek baloldalán a valós, jobboldalán pedig a szögekre vonatkozó szögfüggvények állnak.

Tétel. Minden valós $x, y \in (-p, p]$ és természetes n számra

- (1) $\cos(-x) = \cos(x)$, és $\cos(p - x) = -\cos(x)$;
- (2) $\sin(-x) = -\sin(x)$, és $\sin(p - x) = \sin(x)$;
- (3) $\sin\left(\frac{1}{2}p - x\right) = \cos(x)$;
- (4) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, és így $-1 \leq \sin x, \cos x \leq 1$;
- (5) $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$;
- (6) $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$;
- (7) $\sin(nx) = \sum_{i=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^i \binom{n}{2i+1} \cos^{n-2i-1} x \cdot \sin^{2i+1} x$;
- (8) $\cos(nx) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^i \binom{n}{2i} \cos^{n-2i} x \sin^{2i} x$;

Bizonyítás. A (1)–(4) állítások a szabad szögekre vonatkozó analóg állítások közvetlen következményei.

Az (5)–(6) állítások szintén a szabad szögekre vonatkozó analóg állítások következményei, hiszen a szabad szögek összege mérésének eredményei az

$$x \oplus y = \begin{cases} x + y + 2p, & \text{ha } x + y \leq -p, \\ x + y, & \text{ha } -p < x + y \leq p, \\ x + y - 2p, & \text{ha } p < x + y, \end{cases}$$

művelet szerint változnak.

A (7) és (8) formulák az $n = 1$ esetben triviálisak, $n = 2$ esetben megegyeznek az (5) és (6) formulák $x = y$ helyettesítésével, az $n > 2$ esetre pedig teljes indukcióval igazolhatók külön külön a páros, illetve a páratlan n számokra, az indukciós lépésben (5) és (6), valamint a szomszédos binomiális együtthatók összegére vonatkozó azonosság felhasználásával. Ez most az olvasóra marad. ■

A *valós* sin és cos függvényeket összefoglalóan *trigonometrikus* függvényeknek vagy szögfüggvényeknek is nevezik. A **Függelék F.9** szakasza tovább tárgyalja ezek tulajdonságait.

2.8. Terület és területformák

Bár jóval nagyobb általánosságban lehetne vizsgálni a terület mérését, a bonyolult részletek elkerülése és néhány szép geometriai tény feltárása érdekében most csak a konvex sokszögek $\mathcal{P}$ halmazán vizsgálódunk.

Amennyiben egy paralelogramma egyik oldalát *alapnak* nevezzük, akkor eme oldal és a szemközti oldal távolságát a paralelogramma *magasságának* mondjuk. Az olyan paralelogrammát, melynek szomszédos oldalai egymásra merőleges egyeneseken vannak, *téglalapnak* nevezzük. Ha a szomszédos oldalak hossza megegyezik, akkor a téglalapot *négyzetnek* nevezzük.

Tétel. Pontosan egy olyan $t: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ hozzárendelés létezik, amelyre minden $\mathcal{K}, \mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$ konvex sokszög esetén teljesülnek a következők:

- (0) $t(\mathcal{K}) \geq 0$;
- (1) Ha $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, és a $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$ metszet közös él, akkor $t(\mathcal{K}) = t(\mathcal{K}_1) + t(\mathcal{K}_2)$;
- (2) Minden φ izometriára $t(\varphi(\mathcal{K})) = t(\mathcal{K})$;
- (3) Valamely egységnyi oldalú négyzethez t az 1 értéket rendeli.

Bizonyítás. Előbb megmutatjuk, hogy van ilyen t függvény, aztán igazoljuk, hogy csak egy ilyen van.

Egzisztencia. Több lépésben konstruálunk egy alkalmas $t: \mathcal{K} \mapsto t(\mathcal{K})$ függvényt.

1. A $\mathcal{K}$ egy ABC háromszög. Jelölje a, b és c a megfelelő csúcsokkal szembeni oldalak hosszát, és legyen m_a, m_b és m_c rendre az A, B és C csúcsok távolsága a szemközti oldal egyenesétől.

Definiáljuk a $t(\mathcal{K})$ értéket minden $\mathcal{K}$ háromszögre a $t(\mathcal{K}) = a \cdot m_a/2$ formulával. A szinusz-tétel értelmében mindegy melyik oldalt választottuk a hozzárendeléskor, hiszen $a \cdot m_a = b \cdot m_b = c \cdot m_c$.

Azonnal következik, hogy amennyiben egy $\mathcal{K}$ háromszöget valamely csúcsából kiinduló egyenes a $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$ háromszögekre vág, akkor $t(\mathcal{K}) = t(\mathcal{K}_1) + t(\mathcal{K}_2)$.

2. A $\mathcal{K}$ egy konvex $ABCD$ négyszög. Ebben az egyik, mondjuk, az AC átlót behúzva a négyszög az idegen ABC és ACD háromszögek uniójaként áll elő. A másik, BD átlót behúzva a négyszög az ABD és BCD háromszögek uniójaként áll elő. Legyen a két átló metszete az M pont. Ekkor az előbbi állításunk következtében

$$\begin{aligned} t(ABC) + t(ACD) &= t(ABM) + t(BCM) + t(AMD) + t(DMC) \\ &= t(ABM) + t(AMD) + t(BCM) + t(CDM) \\ &= t(ABD) + t(BCD). \end{aligned}$$

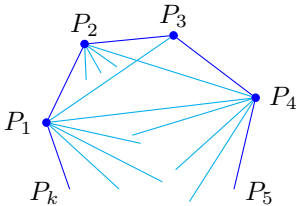
Definiáljuk a $t(\mathcal{K})$ értéket minden $\mathcal{K}$ konvex négyszögre a $t(\mathcal{K}) = t(ABC) + t(ACD) = t(ABD) + t(BCD)$ formulával.

Ebből máris következik, hogy minden egységoldalú $\mathcal{K}$ négyzetre $t(\mathcal{K}) = 1$, hiszen mindkét átló egységnyi befogójú derékszögű háromszögekre osztja az egységoldalú négyzetet.

3. A $\mathcal{K}$ egy konvex k -szög. A $\mathcal{K}$ körüljárása szerint sorba rendezett csúcsait jelölje $P_1, P_2, \dots, P_k$, és formuláink egyszerűsítése érdekében vezessük be a $P_0 = P_k$ jelölést is. A $\mathcal{K}$ konvex k -szöget az azonos csúcsból induló átlók éppen $k - 2$ háromszögre „bontják”. Legyen ezek t -értékeinek összege

$$f_{\mathcal{K}}(j) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \notin \{j, j+1\}}}^{k-1} t(P_j P_i P_{i+1}), \quad j \in \{0, 1, \dots, k-1\}.$$

Állítjuk, hogy $f_{\mathcal{K}}(j)$ nem függ a j számtól. A $k = 3$ esetben minden j esetén ugyanaz a háromszög adódik a „bontásból”, tehát $f_{\mathcal{K}}(1) = f_{\mathcal{K}}(2) = f_{\mathcal{K}}(3)$. A $k = 4$ esetre bizonyításunk iménti 2. lépése igazolja, hogy $f_{\mathcal{K}}(1) = f_{\mathcal{K}}(2) = f_{\mathcal{K}}(3) = f_{\mathcal{K}}(4)$.



Teljes indukciós lépésként tegyük fel, hogy a $(k - 1)$ - és $(k - 2)$ -szögeknél $f_{\mathcal{K}}(j)$ nem függ a j megválasztásától. Ehhez elegendő belátni, hogy $f_{\mathcal{K}}(j) = f_{\mathcal{K}}(j + 1)$ minden lehetséges j esetén. Mint-hogy ugyanakkor a csúcsok számozásánál szabadon választható, hogy melyik legyen az első, elegendő látnunk, hogy $f_{\mathcal{K}}(1) = f_{\mathcal{K}}(2)$.

A következő formula az ábra jelöléseivel és az egyenlőségjelek alatt az éppen alkalmazásra kerülő indukciós feltétel, az egyenlőségjelek felett pedig ama csúcs

feltüntetésével, mely éppen alkalmazásra kerül, igazolja várakozásunk:

$$\begin{aligned}
 f_{\mathcal{K}}(1) &= \sum_{i=2}^{k-1} t(P_1 P_i P_{i+1}) = t(P_1 P_2 P_3) + t(P_1 P_3 P_4) + \sum_{i=4}^{k-1} t(P_1 P_i P_{i+1}) \\
 &\stackrel{P_1}{\equiv}_{k-2} t(P_1 P_2 P_3 P_4) + t(P_4 P_5 \dots P_k P_1) \\
 &= t(P_2 P_3 P_4) + t(P_2 P_1 P_4) + t(P_4 P_5 \dots P_k P_1) \\
 &\stackrel{P_4}{\equiv}_{k-1} t(P_2 P_3 P_4) + t(P_4 P_5 \dots P_k P_1 P_2) \\
 &\stackrel{P_2}{\equiv}_{k-1} t(P_2 P_3 P_4) + \left(\sum_{i=4}^{k-1} t(P_2 P_i P_{i+1}) + t(P_2 P_k P_1) \right) \\
 &= \sum_{i=3}^{k-1} t(P_2 P_i P_{i+1}) + t(P_2 P_k P_1) = f_{\mathcal{K}}(2).
 \end{aligned}$$

Eszerint minden $\mathcal{K}$ konvex k -szögre $f_{\mathcal{K}}(1) = \dots = f_{\mathcal{K}}(k)$.

4. A $t: \mathcal{K} \mapsto f_{\mathcal{K}}(1)$ hozzárendelés teljesíti az (0) – (3) feltételeket.

A (0) feltétel teljesül, hiszen minden $\mathcal{K}$ sokszögre $t(\mathcal{K}) \geq 0$.

A (3) feltétel is teljesül, hiszen azt még a négyszögeknél megmutattuk.

A (2) feltétel belátásához először vegyük észre, hogy az izometriák a háromszög oldalhosszait, a csúcsok és oldalegyenesek távolságait tartják, ezért bármely képháromszöghöz a t ugyanazt az értéket rendeli, mint az ősháromszöghöz. Ebből következik, hogy minden konvex sokszögre vonatkozóan a t függvény értéke az izometriákra nézve invariáns, hiszen minden konvex sokszöget háromszögekre oszthatunk fel bármely csúcsából induló átlói, és a t a csúcsból induló háromszögfelbontás alapján rendeli hozzá az értéket.

Az (1) additivitási feltétel igazolásához vegyünk egy egyenessel $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$ konvex sokszögekre kettéosztott $\mathcal{K}$ sokszöget. Legyen az egyenesünk két metszete a $\mathcal{K}$ sokszög oldalaival a Q és R pont. Vegyük a $\mathcal{K}_1$ háromszögekre bontását a Q csúcsából, és a $\mathcal{K}_2$ háromszögekre bontását ugyancsak a Q csúcsából kiindulva. A két háromszögekre bontás uniója a $\mathcal{K}$ sokszög egy háromszögekre bontása a Q határpontjából kiindulva, ezért $t(\mathcal{K}) = t(\mathcal{K}_1) + t(\mathcal{K}_2)$.

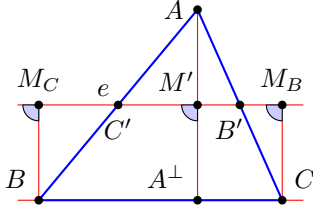
Unicitás. Igazoljuk, hogy ha a $t': \mathcal{K} \mapsto t(\mathcal{K})$ függvény teljesíti a (0) – (3) feltételeket, akkor $t' = t$.

m

$f(m)$
1

 Legyen $\mathcal{L}_m$ olyan téglalap, melynek egyik oldala 1, másik pedig $m > 0$ hosszúságú. Legyen $f(m) = t'(\mathcal{L}_m)$. Az (1) és (0) tulajdonságok miatt az $f(m)$ függvény additív és monoton növekvő, a (3) szerint pedig $f(1) = 1$. A Függelék F.10 szakasza szerint tehát $f(m) \equiv m$.

m $g(l)$ Legyen most $\mathcal{L}_{m,\ell}$ egy olyan téglalap, melynek egyik oldala $m > 0$, másik oldala pedig $\ell > 0$ hosszúságú. Legyen $g(\ell) = t'(\mathcal{L}_{m,\ell})$. Az l (1) additivitási és a (0) pozitivitási tulajdonság miatt a $g(\ell)$ függvény additív és monoton növekvő, és előbbi számításunk alapján $g(1) = m$. A Függelék F.10 szakasza szerint tehát $g(\ell) \equiv m\ell$, vagyis $t'(\mathcal{L}_{m,\ell}) = m\ell$.



Tekintsünk most egy háromszöget. A leghosszabb oldalával szemkötti csúcs legyen A , a másik két csúcs pedig legyen B és C . A leghosszabb oldal hossza legyen a , az A merőleges vetülete erre $A^\perp$. Legyen $m_a = d(A, A^\perp)$, az $AA^\perp$ szakasz felezőpontja pedig M' . Legyen e az az M' ponton áthaladó egyenes, mely párhuzamos a BC oldallal. Az e metszete az AB és AC oldalakkal legyen rendre C' és B' , a B és C pontok merőleges vetületei az e egyenesre pedig legyenek rendre M_C és M_B .

A fentiek szerint $t'(BCM_B M_C) = am_a/2$. A $BM_C C'$ háromszög az $AM' C'$ háromszöggel, a $CM_B B'$ háromszög az $AM' B'$ háromszöggel egybevágó — hiszen szögeik megegyeznek, és $d(B, M_C) = m_a/2 = d(A, M') = m_a/2 = d(C, M_B)$ —, így a t' függvény az additivitása és a (2) tulajdonsága szerinti izometriákra vonatkozó invarianciája miatt az ABC háromszöghöz éppen a téglalaphoz rendelt értéket rendeli, vagyis $t'(ABC) = t'(BCM_B M_C) = am_a/2$, tehát $t = t'$ minden háromszög esetében.

Mivel minden konvex sokszög háromszögekre bontható, a t és t' egyezése a háromszögeken és additivitási tulajdonságuk a két függvény egyezését bizonyítja minden sokszögon, amivel a bizonyítás teljessé vált. ■

Definíció. A $t(\mathcal{K})$ értéket a $\mathcal{K}$ konvex sokszög *területének* nevezzük. ▲

Eszerint a háromszögek területe $t = am_a/2$, a paralelogrammák területe $t = a \cdot m$, ahol a az egyik oldal, m pedig ezen oldalhoz mint alaphoz tartozó magasság.

Világos, hogy ha egyenesekkel „szétvágva” több konvex sokszögre osztunk fel egy konvex sokszöget, és abból összeállítunk egy másik konvex sokszöget, akkor a kapott konvex sokszög területe megegyezik a felvágott konvex sokszög területével.

Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{K}_2$ konvex sokszög a $\mathcal{K}_1$ konvex sokszög *átdarabolta*, ha véges sok egyenes a $\mathcal{K}_1$ konvex sokszöget olyan konvex sokszögekre osztja fel, amelyek mozgással transzformált képeinek diszjunkt uniója a $\mathcal{K}_2$ sokszög. Ha a $\mathcal{K}_2$ és $\mathcal{K}_1$ konvex sokszöghöz létezik véges sok olyan egyenes, hogy ezekkel a $\mathcal{K}_2$ konvex sokszög a $\mathcal{K}_1$ konvex sokszög átdarabolta, akkor azt mondjuk, hogy a $\mathcal{K}_1$ a $\mathcal{K}_2$ konvex sokszögbe darabolható. Ezt $\mathcal{K}_1 \bowtie \mathcal{K}_2$ jelöli.

A $\bowtie$ relációt (egymásba) *átdarabolhatóságnak* nevezzük.

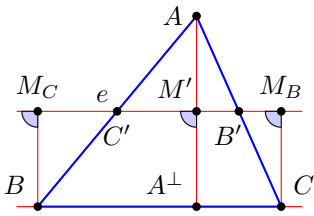
Világos, hogy az átdarabolhatóság reflexív és szimmetrikus. Annak részletes átgondolása, hogy tranzitív is, tehát ekvivalenciareláció, az olvasóra marad azzal az útmutatással, hogy ha $\mathcal{K}_1 \bowtie \mathcal{K}_2 \bowtie \mathcal{K}_3$, akkor a $\mathcal{K}_2$ sokszögön rendelkezésre álló két egyenesre egyik a $\mathcal{K}_1$ sokszögbe daraboláshoz, másik a $\mathcal{K}_3$ sokszögbe daraboláshoz használható, együtt azonban olyan darabokra vágják a $\mathcal{K}_2$ sokszöget, hogy azokból $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_3$ is kirakható, ami átdarabolhatóságot igazolja.

Wallace–Bolyai–Gerwien-tétel. *Két sokszög területe akkor és csak akkor egyezik meg, ha átdarabolhatók egymásba.*

Bizonyítás. Az világos, hogy ha két konvex sokszög átdarabolható, akkor a területük megegyezik, hiszen az izometriák nem változtatják a területet, és a terület additív.

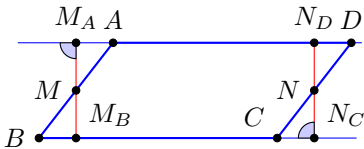
A fordított irányt lépésről lépésre bizonyítjuk. Eközben a háromszögeknél a következő jelöléseket használjuk. Az oldalak hossza a, b és c , melyekre $a \leq b, c$ teljesül. Ezekkel szemben rendre az A, B és C csúcs van, az A merőleges vetülete a szemközti oldalra $A^\perp$.

1. Minden háromszög átdarabolható egy a és $m_a/2$ oldalú téglalapba.



Legyen e az $AA^\perp$ szakaszfelező merőleges. Legyen $M' = e \cap \overline{AA^\perp}$, valamint $C' = e \cap \overline{AB}$ és $B' = e \cap \overline{AC}$. A párhuzamos szelők tétele szerint az utóbbi kettő az elmetezett oldalak felezőpontja. Állítsunk a B és C pontokba a BC oldalra merőleges egyenest, ezek metszete az e egyenessel rendre legyen M_C és M_B . Mivel megfelelő oldalai párhuzamosak, és átfogóik egyforma hosszúak, az $AC'M'$ és $BC'M_C$ háromszögek is és az $AB'M'$ és $CB'M_B$ háromszögek is egybevágók, sőt ezeket $\tau_{C'}$ és $\tau_{B'}$ egymásba viszi. Ez azt jelenti, hogy $ABC \bowtie BCM_B M_C$, ahogy állítottuk.

2. Ha egy paralelogramma alapja a és magasság m , akkor ez a paralelogramma átdarabolható egy a és m oldalú téglalapba.



Legyen $ABCD$ egy feltétel szerinti paralelogramma, $a = d(A, D)$, és tegyük fel először, hogy a paralelogramma másík, $b = d(A, B)$ oldala rövidebb, mint a . Legyen M és N rendre az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ oldalak felezőpontja. Legyen ezek merőleges vetülete az AD és BC oldalakra rendre M_A és M_B , illetve N_D és N_C . Mivel oldalegyenesek párhuzamosak és átfogóik hossza egyenlő, a $BM_B M$, az $AM_A M$, a $CN_C N$ és a $DN_D N$ háromszögek egybevágók, ezért az $M_A M_B N_C N_D$ téglalap területe megegyezik az $ABCD$ paralelogramma területével. A téglalap

egyik oldalának hossza $d(M_A, M_B) = m$, a másik oldalának hossza pedig

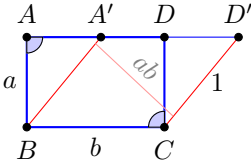
$$d(M_B, N_C) = d(B, M_B) + d(M_B, N_C) - d(C, N_C) = d(B, C) = a,$$

ami igazolja 2. állítást a paralelogrammák hosszabb oldalára.

Ha $b > a$, akkor vegyünk egy olyan $k \in \mathbb{N}$ számot, melyre $ka > b$ teljesül, és vágjuk fel a paralelogrammát a BC oldallal párhuzamos, a BC oldaltól $\ell m/k$ ($\ell = 1, \dots, k-1$) távolságokra lévő egyenesekkel. Az így kapott k darab paralelogrammák nyilván egybevágók egymással, hiszen megfelelő oldalegyenesaik párhuzamosak és megfelelő oldalaik hossza egyenlő. Ezen paralelogrammák oldalai a és b/k hosszúak, a BC egyenessel párhuzamos oldalegyenesaik távolsága pedig m/k . Mivel $b/k < a$, előbbi részeredményünk szerint mind átdarabolhatók egy-egy a és m/k oldalú téglalapba. Ezt a k darab a és m/k oldalú téglalapot az a hosszúságú oldalaiknál összeillesztve éppen egy a és m oldalú téglalapot kapunk, ami igazolja 2. állításunkat.

3. Minden téglalap átdarabolható egy vele azonos területű olyan téglalapba, amelynek egyik oldala egységnyi.

Vegyünk egy $ABCD$ téglalapot, mely oldalainak hossza $a = d(A, B)$ és $b = d(B, C)$. Ha $a = 1$ vagy $b = 1$, akkor nincs szükség átdarabolásra.

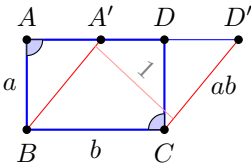


Ha valamelyik oldal, mondjuk $a < 1$, akkor legyen D' az a pont az AD egyenesén, amely az $ABCD$ téglalapon kívül van, és $d(C, D') = 1$. Ez a D' pont Pitagorasz tétele szerint éppen $\sqrt{1 - a^2}$ távolságra van a D ponttól. Az A' pont legyen olyan, hogy $d(A', D') = b$, és A' az AD oldalegyenesen D ugyanazon oldalára esik,

mint A . Ekkor a 2. lépésben igazoltak szerint $ABCD \bowtie A'BCD'$, és szintén a 2. lépés eredménye értelmében az $A'BCD'$ paralelogramma átdarabolható egy olyan $A'BC'D''$ téglalapba, melynek egyik oldala éppen $d(C, D') = 1$.

Ha $a > 1 > b$, akkor a fenti eljárást a téglalap másik oldalára végezzük el.

Ha $a > 1$ és $b > 1$, akkor legyen D' egy olyan pont az AD egyenesén, amely az $ABCD$ téglalapon kívül van, és $d(C, D') = ab$.



Ilyen D pont létezik, mert $a < ab$. Az A' pont ezek után legyen olyan, hogy $d(A', D') = b$, és A' az AD oldalegyenesen A ugyanazon oldalára esik, mint D . Ekkor 2. pontunk szerint $ABCD \bowtie A'BCD'$, és szintén a 2. lépésünk értelmében az $A'BCD'$ paralelogrammának átdaraboltja egy olyan ugyanolyan alappal és

magassággal rendelkező $A'BC'D''$ téglalap. Mivel ennek a téglalapnak az egyik oldala az ab hosszúságú CD' , a másik pedig 1, ez igazolja állításunkat.

4. Minden sokszög átdarabolható egy vele azonos területű téglalapba, amelynek egyik oldala egységnyi.

Bontsuk fel a sokszöget háromszögekre az egyik pontból kiinduló átlókkal. Az 1. pontunk alapján daraboljuk mindegyik háromszöget egy téglalapba, majd a 3. pontunk szerint egy egységnyi oldalú téglalapba. Ezeket a téglalapokat sorban mozgassuk el úgy, hogy az egymás után következők metszete az egységnyi hosszúságú oldaluk legyen, a nem egymásután következők pedig diszjunktak legyenek. Ezzel egy egységnyi oldalú téglalapot kapunk, amely átdaraboltja a kiindulásul adott sokszögnek, ahogy állítottuk.

Mivel az $\bowtie$ átdaraboltság ekvivalencia-reláció, a 4. pont bizonyítja a tételt. ■

Egy paralelogrammát meghatároznak bármely csúcsából induló élei, melyeket megfeleltethetünk a csúcshoz tartozó helyvektoroknak, így egy helyvektorpáron értelmezett függvényhez jutunk, ha ezen helyvektorpárokhoz rendeljük az általuk meghatározott paralelogramma területét. A terület invariáns az eltolásokkal szemben, így a helyvektorpárokhoz a területet rendelő ezen függvény a szabad vektorok $\mathcal{V}$ terében is értelmezhető.

Világos, hogy egy vektorpár akkor és csak akkor alkot bázist, ha az általa meghatározott paralelogramma nem elfajuló, vagyis a területe nem nulla. Függvényünk szoros kapcsolatát a bázisokhoz tovább erősíthetjük a bázisok közti átmenetek figyelembevételével.

Egy $f: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *antiszimmetrikusnak* mondunk, ha argumentumai felcserélése hatására előjelet vált, vagyis $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -f(\mathbf{v}, \mathbf{u})$. Az ilyen függvényekre $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = -f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ teljesül.

Definíció. Egy $f: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *területformának* hívunk, ha antiszimmetrikus, és egyik változójában lineáris. Ha f azonosan nulla, akkor eltűnő formáról beszélünk. ▲

Legyen $\{\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0\} \subset T_O \mathfrak{S}$ egy bázis. Egy másik $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1\}$ bázist választva, az O pontot fixáló koordinátatranszformációk közül pontosan egy φ viszi az előbbi bázist az utóbbiba. Legyen

$$\varepsilon(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) = \begin{cases} +1, & \text{ha } \varphi \text{ irányítást tartó,} \\ 0, & \text{ha } \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 \text{ nem bázis,} \\ -1, & \text{ha } \varphi \text{ irányítást váltó.} \end{cases}$$

Az ε nem nulla értéke a bázisokat két osztályba sorolja, és ez a két osztály nem függ a kiindulási bázis választásától.

Tétel. Az $f(U_O, V_O) = \varepsilon(U_O, V_O)t(\text{OUPV})$ függvény, ahol $P_O = U_O + V_O$, és $t(\text{OUPV})$ az OUPV paralelogramma területe, egy területforma.

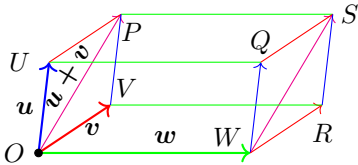
Bizonyítás. Az f függvény antiszimmetrikus, hiszen a báziselemek felcseréléséhez tartozó koordináta-transzformáció irányítást váltó. Emiatt a linearitást, ami a homogenitás és az additivitás együttes teljesülése, elegendő az első változóban igazolni.

Az f függvény homogén. Az f függvény homogén a pozitív valós számokkal való szorzásra nézve, hiszen ha az egyik báziselem pozitív többszörösét vesszük, akkor ε értéke nem változik, de a paralelogramma megfelelő élének hossza ugyanúgy többszöröződik, így pedig a paralelogramma területe is ugyanúgy többszöröződik.

Az f függvény homogén a nullával való szorzás esetében is, hiszen akkor a vektorok függővé válnak, és akkor f értéke definíció szerint 0.

Az f függvény homogén a negatív valós számokkal való szorzásra nézve is, hiszen ha az egyik vektort a (-1) -szeresét cserélő φ irányítást váltó koordinátatranszformáció, miközben a paralelogramma területe nem változik, hiszen az oldalak hossza és távolsága sem változik.

Az f függvény additív is.



Ennek igazolásához legyen $w = W_O$, $Q_O = u + w$, $R_O = v + w$ és $S_O = u + v + w$, valamint az egyszerűség kedvéért $\varepsilon(u, w) = 1$, és $\varepsilon(v, w) = 1$, amiből már $\varepsilon(u + v, w) = 1$ is következik. Világos, hogy $f(u + v, w) = t(OPSW)$, és $f(u, w) + f(v, w) = t(OUQW) + t(OVRW)$.

Nyilván

$$\begin{aligned} & t(OVP) + t(OUQW) + t(OVRW) \\ &= t(OVP) + t(VPSR) + t(OVRW) = t(OVP \cup VPSR \cup OVRW) \\ &= t(OPSRW) = t(OPSW \cup WRS) = t(OPSW) + t(WRS). \end{aligned}$$

Mivel az OVP és a WRS háromszögek oldalai egyforma hosszúságúak, e háromszögek egybevágóak, amiért $t(OVP) = t(WRS)$. Akkor viszont iménti formulánkból éppen a bizonyítandó $t(OUQW) + t(OVRW) = t(OPSW)$ következik. ■

Tétel. Két nem eltűnő területforma egymás valós számmal vett többszöröse.

Bizonyítás. Legyen f és $\bar{f}$ is egy területforma, és legyen ν olyan valós szám, hogy a rögzített $\{u_0, v_0\}$ bázisra $\bar{f}(u_0, v_0) = \nu f(u_0, v_0)$ teljesül. Ekkor tetszőleges $u = \lambda_u u_0 + \mu_u v_0$ és $v = \lambda_v u_0 + \mu_v v_0$ vektorokra

$$\begin{aligned} \bar{f}(u, v) &= \bar{f}(\lambda_u u_0 + \mu_u v_0, \lambda_v u_0 + \mu_v v_0) \\ &= \lambda_u \bar{f}(u_0, \lambda_v u_0 + \mu_v v_0) + \mu_u \bar{f}(v_0, \lambda_v u_0 + \mu_v v_0) \\ &= \lambda_u \lambda_v \bar{f}(u_0, u_0) + \lambda_u \mu_v \bar{f}(u_0, v_0) + \mu_u \lambda_v \bar{f}(v_0, u_0) + \mu_u \mu_v \bar{f}(v_0, v_0) \\ &= (\lambda_u \mu_v - \mu_u \lambda_v) \bar{f}(u_0, v_0) = \nu (\lambda_u \mu_v - \mu_u \lambda_v) f(u_0, v_0) = \nu f(u, v). \end{aligned}$$

A területméréssel való összhang megtartása érdekében, ha másként nem jelezzük, akkor azt az f területformát használjuk, amely valamely ortonormált $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ bázishoz az $f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1$ értéket rendeli, vagyis

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda_u \mu_v - \mu_u \lambda_v = \det \begin{pmatrix} \lambda_u & \mu_u \\ \lambda_v & \mu_v \end{pmatrix},$$

ahol $\mathbf{u} = \lambda_u \mathbf{e}_1 + \mu_u \mathbf{e}_2$, és $\mathbf{v} = \lambda_v \mathbf{e}_1 + \mu_v \mathbf{e}_2$. Mivel egy paralelogramma szemközti oldalainak távolsága a szomszédos oldal hosszának és a két oldal közti α szög szinuszána szorzata, a bizonyítás azt is mutatja, hogy $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \alpha$.

Legyen O a $\mathcal{K}$ konvex sokszög egyik csúcsa. A $\mathcal{K}$ többi csúcsa által meghatározott helyvektorok halmazát jelölje $\mathcal{H}_{\mathcal{K},O} = \{P_O : P \neq O \text{ a } \mathcal{K} \text{ csúcsa}\}$. Legyen $\bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{K},O} \subseteq \mathcal{H}_{\mathcal{K},O} \times \mathcal{H}_{\mathcal{K},O}$ olyan, hogy $(P_O, Q_O) \in \bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{K},O}$ akkor és csak akkor, ha $\overline{PQ}$ a $\mathcal{K}$ egy éle.

Tétel. *Egy f területforma a*

$$t(\mathcal{K}) = \frac{1}{4} \sum_{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{K},O}} |f(\mathbf{u}, \mathbf{v})|$$

formulával területfüggvényt határoz meg a konvex sokszögek halmazán.

Igazolásul elég arra gondolni, hogy $|f(P_O, Q_O)|$ éppen az OPQ háromszög területének duplája, a sokszögek területe pedig a formulában foglalt háromszögfelbontás eredménye, de minden háromszög kétszer szerepel az összegzésben, hiszen az O ponttal szembeni háromszögoldal végpontjai két sorrendben szerepelnek.

Jegyezzük meg, hogy az f területforma éppen a formula által meghatározott területfüggvényből származik.

A területformát használva az affinitások egyszerű jellemzéséhez jutunk.

Tétel. *Az euklidészi sík egy φ háromszögtartó leképezése akkor és csak akkor affinitás, ha létezik olyan $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ valós szám, hogy minden $\mathcal{K}$ háromszögre $t(\varphi(\mathcal{K})) = \lambda t(\mathcal{K})$, ahol t a területfüggvény.*

Bizonyítás. Előbb az „akkor” állítással foglalkozunk. A terület és területforma közti kapcsolat alapján elegendő belátni, hogy a területformához létezik az állításnak megfelelő konstans.

Tekintsünk egy tetszőleges φ affinitást és ennek $\hat{\varphi}$ lineáris összetevőjét.

Ha f a szokásos területforma, akkor $\hat{\varphi}$ linearitása miatt a $\hat{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\hat{\varphi}(\mathbf{u}), \hat{\varphi}(\mathbf{v}))$ is területforma, ezért ezek egyértelműsége miatt létezik olyan ν konstans, hogy $\hat{f} = \nu f$, ami igazolja a tétel „akkor” állítását.

A fordított, „csak akkor” állítás igazolásához vegyük a szokásos t területfüggvényt, és tekintsünk a sík egy $\varphi: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ transzformációját, melyhez feltételünk szerint létezik olyan $\lambda > 0$ konstans, hogy $t \circ \varphi = \lambda \cdot t$.

Ekkor a φ transzformáció olyan, hogy

$$\begin{aligned} A, B, C \text{ kollineáris pontok} &\Leftrightarrow 0 = t(ABC) \\ &\Leftrightarrow 0 = \lambda t(ABC) = t \circ \varphi(ABC) = t(\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)) \\ &\Leftrightarrow \varphi(A), \varphi(B), \varphi(C) \text{ kollineáris pontok.} \end{aligned}$$

Ez egyfelől azt jelenti, hogy φ injektív, másfelől viszont azt, hogy általános helyzetű ponthármakat általános helyzetű ponthármakba visz.

Tekintsük a tetszőleges A, B, C nem kollineáris pontokat, az AC egyenesen pedig egy tetszőleges D pontot. A φ fentebbi tulajdonsága miatt a D pont $\varphi(D)$ képe a $\varphi(A)\varphi(C)$ egyenesre esik, a B pont képe viszont nem esik a $\varphi(A)\varphi(C)$ egyenesre, ezért

$$\frac{d(A, D)}{d(A, C)} = \frac{t(ABD)}{t(ABC)} = \frac{\lambda t(ABD)}{\lambda t(ABC)} = \frac{t(\varphi(A)\varphi(B)\varphi(D))}{t(\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C))} = \frac{d(\varphi(A), \varphi(D))}{d(\varphi(A), \varphi(C))},$$

vagyis a φ tartja a metrikus osztóviszonyt.

Az euklidészi sík vizsgálatokor láttuk, hogy pontosan az affin leképezések tartják a metrikus osztóviszonyt és a ponthármak általános helyzetét, ami bizonyítja a „csak akkor” állítást. ■

A tételünk által az affinitáshoz rendelt egyértelmű pozitív valós szám kiszámításához elegendő egy négyzet területét megnéznünk. Mivel az affinitások tartják a párhuzamosságot, a négyzet képe paralelogramma. A területformák vizsgálatokor láttuk, hogy ezek területe illetve térfogata az egy csúcsból kiinduló éleikhez tartozó vektorokból összeállított mátrix determinánsa, ezért a tételben szereplő egyértelmű szám valójában az *affinitás determinánsának* abszolút értéke.

Azon φ affin transzformációkat, melyekre nézve a terület invariáns, vagyis $t = t \circ \varphi$, *területtartónak* nevezzük.

Világos, hogy az izometriák tartják a területet is, így determinánsuk ± 1 , amit persze korábban már igazoltunk az euklidészi metrika vizsgálata közben, de nem csak az izometriák ilyenek, elég a $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \pm 1/\lambda \end{pmatrix}$ mátrixú ($\lambda \neq 0$) affinitásokra gondolni.

A sík felfedezése

Ebben a fejezetben az eddigiekben kiépített rendszer különböző elemei közti új kapcsolatok, új geometriai objektumokat és jelenségeket mutatunk be. Persze nem fér ide a sík összes érdekessége, hiszen óriási a választék, így aztán ez a válogatás csak néhány kiemelkedően fontos téma kiemelése a sok közül.

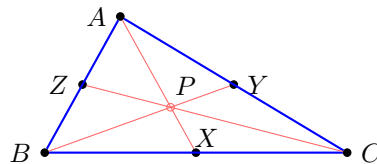
3.1. Illeszkedési tételek

Affin invariánsoknak nevezzük egy geometriai alakzat vagy objektum olyan tulajdonságait, melyeket az affin transzformációk nem változtatnak meg. Ilyenek az osztóviszony, a területarány és persze az illeszkedés és a párhuzamosság is. Az ilyen tulajdonságokról szóló állítások közvetlenül affin geometriai eszközökkel is igazolhatók, de általában rövidebb úton is célt érünk, ha felhasználjuk az euklidészi metrikát, vagy akár a területfüggvényt.

E szakasz tételei és különösen általánosításai jól mutatják, hogy az osztóviszonyt érdemes volt úgy kiterjeszteni, hogy bármely két közösleges A és B pontra és egyenesük ∞_{AB} ideális pontjára $(AB \infty_{AB}) = -1$ legyen. Világos, hogy ezzel a kiterjesztéssel az osztóviszony bijektív hozzárendelést valósít meg a valós számok és az ideális ponttal bővített egyenes pontjai között.

Ceva tétele. Legyenek az X, Y és Z pontok rendre az ABC háromszög $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ és $\overline{AB}$ oldalán. Az AX , BY és CZ egyenesek akkor és csak akkor metszik egymást egy közös pontban, ha

$$\frac{d(B, X)}{d(X, C)} \frac{d(C, Y)}{d(Y, A)} \frac{d(A, Z)}{d(Z, B)} = 1.$$



Bizonyítás. Ha a megadott egyenesek egy közös P ponton mennek át, akkor a három egyenes hat kis háromszögre bontja az eredetit. Ekkor

$$\frac{d(B, X)}{d(X, C)} = \frac{t(ABX)}{t(ACX)} = \frac{t(PBX)}{t(PCX)} = \frac{t(ABX) - t(PBX)}{t(ACX) - t(PCX)} = \frac{t(ABP)}{t(ACP)},$$

és ugyanilyen számítással $\frac{d(C,Y)}{d(Y,A)} = \frac{t(BCP)}{t(BAP)}$, és $\frac{d(A,Z)}{d(Z,B)} = \frac{t(CAP)}{t(CBP)}$, amiért

$$\frac{d(B,X)}{d(X,C)} \frac{d(C,Y)}{d(Y,A)} \frac{d(A,Z)}{d(Z,B)} = \frac{t(ABP)}{t(ACP)} \frac{t(BCP)}{t(BAP)} \frac{t(CAP)}{t(CBP)} = 1.$$

Ha $\frac{d(B,X)}{d(X,C)} \frac{d(C,Y)}{d(Y,A)} \frac{d(A,Z)}{d(Z,B)} = 1$, akkor legyen $P = AX \cap BY$, és legyen $Z' = CP \cap \overline{AB}$. Előbbieket szerint ekkor $\frac{d(B,X)}{d(X,C)} \frac{d(C,Y)}{d(Y,A)} \frac{d(A,Z')}{d(Z',B)} = 1$ is teljesül, amiért $\frac{d(A,Z')}{d(Z',B)} = \frac{d(A,Z)}{d(Z,B)}$. Ebből $Z = Z'$ következik, amivel a tétel bizonyítása teljessé válik. ■

Jegyezzük meg, hogy Ceva tételéből következik a háromszögek nevezetes pontjai létezésének java része, így például a beírt kör középpontja, a súlypont stb.

Ceva tételét nem a teljes általánosságában adtuk meg. Ceva tételének általános formája azt mondja ki, hogy a rendre a BC , AC és AB oldalegyeneseken lévő X , Y és Z pontok által meghatározott AX , BY és CZ egyenesek akkor és csak akkor metszik egymást egy közös (esetleg ideális) pontban, ha az osztóviszonyokra

$$(BCX)(CAY)(ABZ) = 1.$$

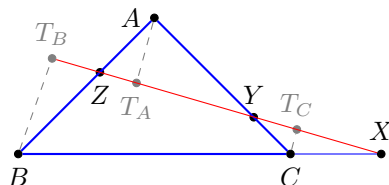
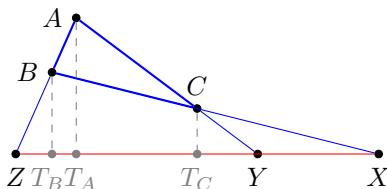
Ennek bizonyítása is elvégezhető a fenti módszerrel az X, Y és Z pontok lehetséges elhelyezkedéseinek vizsgálatával.

Menelaosz tétele. Legyenek az X, Y és Z pontok rendre az ABC háromszög BC , AC és AB oldalegyenesén úgy, hogy $X \notin \overline{BC}$. Ha az X, Y és Z pontok közös egyenesre esnek, akkor

$$\frac{d(B,X)}{d(X,C)} \frac{d(C,Y)}{d(Y,A)} \frac{d(A,Z)}{d(Z,B)} = 1.$$

Ha az X, Y és Z pontok teljesítik ezt a formulát, és $Z \in \overline{AB}$ valamint $Y \in \overline{AC}$, vagy $Z \notin \overline{AB}$ és $Y \notin \overline{AC}$, akkor az X, Y és Z pontok egy közös egyenesre esnek.

Bizonyítás. Ha a megadott pontok egy közös e egyenesre illeszkednek, akkor legyenek T_A, T_B és T_C rendre az A, B és C pontokból az e egyenesre állított merőleges egyenesek talppontjai.



Mivel AZT_A és BZT_B ugyanaz a szög, vagy csúcsszögek, az AZT_A és BZT_B

derékszögű háromszögben a szinusz-tétel szerint , $\frac{d(A,Z)}{d(Z,B)} = \frac{d(A,T_A)}{d(B,T_B)}$. Hasonló megfontolásból $\frac{d(C,Y)}{d(Y,A)} = \frac{d(C,T_C)}{d(A,T_A)}$ és $\frac{d(B,X)}{d(X,C)} = \frac{d(B,T_B)}{d(C,T_C)}$. Eszerint

$$\frac{d(B, X)}{d(X, C)} \frac{d(C, Y)}{d(Y, A)} \frac{d(A, Z)}{d(Z, B)} = \frac{d(T_B, B)}{d(C, T_C)} \frac{d(T_C, C)}{d(A, T_A)} \frac{d(T_A, A)}{d(B, T_B)} = 1.$$

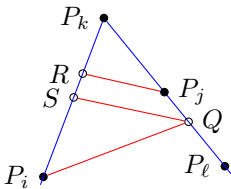
Ha $\frac{d(B,X)}{d(X,C)} \frac{d(C,Y)}{d(Y,A)} \frac{d(A,Z)}{d(Z,B)} = 1$, akkor legyen e az $X \in BC \setminus \overline{BC}$ és $Y \in AC$ pontok közös egyenese, és legyen $Z' = e \cap AB$. Előbbiektől szerint ekkor $\frac{d(B,X)}{d(X,C)} \frac{d(C,Y)}{d(Y,A)} \frac{d(A,Z')}{d(Z',B)} = 1$ is teljesül, amiért $\frac{d(A,Z')}{d(Z',B)} = \frac{d(A,Z)}{d(Z,B)}$, vagyis $Z = Z'$. A tétel bizonyítását befejeztük.

Menelaosz tétele teljes általánosságában azt mondja ki, hogy a rendre a BC , AC és AB oldalegyeneseken lévő X , Y és Z pontok akkor és csak akkor kollineárisak, ha $(BCX)(CAY)(ABZ) = -1$. Ennek bizonyítása is elvégezhető a fenti módszerrel az X , Y és Z pontok elhelyezkedésének megfelelő különféle esetek vizsgálatával. A **Pasch-axióma** alapján mindössze két esetet kell vizsgálni, ugyanis vagy csak egy pont nem esik a háromszög oldalaira, vagy egy sem. Menelaosz tétele akár a **Pasch-axióma** pontosított általánosításának is felfogható.

Gallai–Sylvester tétel. *Ha egy véges sok pontot tartalmazó halmaz bármely két pontjára illeszkedő egyenesre a halmaznak még legalább egy pontja illeszkedik, akkor a halmaz pontjai kollineárisak.*

Bizonyítás. Legyenek a $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i=0}^n$ pontthalmaz pontjai nem kollineárisak.

A $\mathcal{P}$ pontjai legfeljebb $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ illeszkedő egyenest határoznak meg, hiszen ennyi a pontpárok száma. Legyen ezen egyenesek halmaza $\mathcal{E}$. Legyen $\mathcal{D} = \{(P_i, P_j, P_k) : P_i \notin P_j P_k \in \mathcal{E}\}$. A $\mathcal{D}$ véges halmaz mindegyik eleméhez rendeljük a pontnak az egyenestől vett $d(P_i, P_j P_k)$ távolságát. Ilyen távolságból véges sok van, tehát van ezek között legkisebb. Legyen ez a legkisebb szám t . Ez nyilván pozitív, és van olyan i, j, k számhármas, hogy $t = d(P_i, P_j P_k)$. Legyen a Q pont a P_i merőleges vetülete a $P_j P_k$ egyenesre.



Mivel minden pontpár egyenesén legalább három pont van, a $P_j P_k$ egyenesre is esik még legalább egy további, mondjuk a P_ℓ pont. A $P_j P_k$ egyenesen a P_j , P_k és P_ℓ pontok közül legalább kettő a Q pont ugyanazon oldalára esik. Legyen ez a két pont P_j és P_k . Ezek pontosan egyike választja el a Q ponttól a másikat.

Legyen ez mondjuk a P_j pont. Ennek merőleges vetülete a $P_i P_k$ egyenesre legyen R , a Q merőleges vetülete a $P_i P_k$ egyenesre pedig legyen S . Ekkor a

párhuzamos szelők tétele és a derékszögű háromszög befogója és átfogója közti egyenlőtlenség szerint

$$d(P_j, P_i P_k) = d(P_j, R) < d(Q, S) < d(Q, P_i) = t.$$

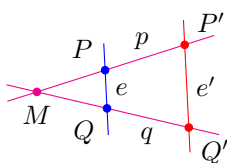
Ez az egyenlőtlenség ellentmond a P_i , P_j és P_k pontok kiválasztásának, ezért a $P_j P_k$ egyenesre nem illeszkedhet a $\mathcal{P}$ halmaz egyetlen további eleme sem.

A tétel feltételei szerint a pontthalmaz minden egyenesén legalább három pont van, így a fentiek szerint a pontthalmaz kollineáris, ami az állítás. ■

3.2. Dilatációkról bővebben

Tétel. *A nem izometrikus dilatációknak pontosan egy fixpontja van.*

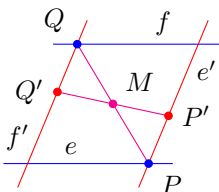
Bizonyítás. Mivel a nem izometrikus dilatáció megváltoztatja a pontok távolságát, legfeljebb egy fixpont létezhet, így csak annak létezését kell kimutatnunk. Legyen a vizsgált dilatáció jele δ , együtthatója $\lambda \neq 1$.



Tegyük fel, hogy δ a dilatáció minden e egyenest vele párhuzamos $\delta(e) \parallel e$ egyenesbe visz.

Válasszunk egy tetszőleges e egyenest és azon $P \neq Q$ pontokat, melyek δ melletti képei $P' \neq Q'$. Ha $P = P'$ vagy $Q = Q'$, akkor találtunk fixpontot. Ellenkező esetben $P \neq P'$ és $Q \neq Q'$, amiért az $e' = \delta(e) = P'Q'$ egyenes különbözik az e egyenestől. Mivel $P \neq Q$, a PP' és a QQ' egyenesek is különbözöek.

A $PP'Q'Q$ négyszög nem lehet paralelogramma, hiszen $\lambda d(P, Q) = d(P', Q')$ és $\lambda \neq 1$, tehát a PP' és QQ' egyenesek metszik egymást valamely M pontban. Ugyanakkor a $p = PP'$ egyenes invariáns a δ dilatációra nézve, mivel $\delta(p)$ képe áthalad a P' ponton és feltételünk szerint párhuzamos a p egyenessel. Ugyanilyen indoklás szerint a $q = QQ'$ egyenes is invariáns, amiért az $M = p \cap q = \delta(p) \cap \delta(q) = \delta(M)$, vagyis az M fixpont.



Most azt az esetet nézzük, amikor a δ dilatációhoz létezik olyan e egyenes, amely vele nem párhuzamos $e' = \delta(e)$ egyenesbe transzformálódik, amiért az e és e' egyenesek metszik egymást valamely P pontban, és persze $P' = \delta(P) \in e'$. Vegyük az e' egyenest nem a P' pontjában metsző olyan f egyenest, mely párhuzamos az e egyenessel. Mivel a dilatációk párhuzamos egyeneseket párhuzamos egyenesekbe transzformálnak, nyilván $e' \parallel f' = \delta(f)$ is teljesül, és ezért $f \parallel f'$, amiért a két egyenes metszi egymást egy $Q = f \cap f'$ pontban, melyre természetesen $Q' = \delta(Q) \in f'$.

Mivel $\lambda d(P, Q) = d(P', Q')$ és $\lambda \neq 1$, a $PQQ'P'$ négyszög nem paralelogramma, ezért a PQ és a $P'Q'$ egyenesek metszik egymást valamely M pontban. Előbb a dilatációt, majd a párhuzamos szelők tételét (hiszen $QQ' = f' \parallel e' = PP'$) alkalmazva

$$\frac{d(\delta(M), P')}{d(\delta(M), Q')} = \frac{\lambda d(M, P)}{\lambda d(M, Q)} = \frac{d(M, P)}{d(M, Q)} = \frac{d(M, P')}{d(M, Q')}$$

adódik. Mivel az osztóviszony két pont ismeretében egyértelműen meghatározza a harmadikat, ebből $\delta(M) = M$ következik, amivel a tételt bebizonyítottuk. ■

A fixpont létezését sokkal általánosabban tárgyalja a **Függelék F.4.** szakasza.

Tétel.

- (1) *A középpontos dilatációk és az eltolások mellett minden egyenes képe párhuzamos az ősével.*
- (2) *Ha egy dilatáció mellett minden egyenes képe párhuzamos az ősével, akkor az középpontos dilatáció vagy eltolás.*

Bizonyítás. (1) Mivel a párhuzamos eltolások középpontos tükrözések szorzataként állnak elő, elegendő az állítást a középpontos dilatációkra igazolni. Minthogy minden középpontos dilatáció egy pozitív együtthatós középpontos homotécia, vagy egy ilyennek a vele egyező középpontra vonatkozó középpontos tükrözéssel vett szorzata, a párhuzamos szelők tétele értelmében elegendő a középpontos tükrözésekre belátni az állítást.

Legyen adott egy τ_C középpontos tükrözés, és egy e egyenes. Az e egyenesen válasszunk P és Q különböző pontokat úgy, hogy a C ponttól mért távolságuk különböző. Ekkor a C pont felezi a $P\tau_C(P)$ és $Q\tau_C(Q)$ szakaszt is, amiért a párhuzamos szelők tétele értelmében a $P\tau_C(P)\tau_C(Q)Q$ négyszög egy (esetleg elfajult) paralelogramma, amiért $PQ \parallel \tau_C(P)\tau_C(Q)$, ahogy a tétel állította.

(2) Mivel minden dilatáció egy pozitív együtthatós középpontos homotécia és egy izometria szorzata, és előbbi az (1) pont szerint az egyeneseket velük párhuzamos egyenesbe képezi, elegendő az állítást izometriákra igazolni.

Vegyünk most egy olyan ι izometriát, melynél minden e egyenes $\iota(e)$ képe párhuzamos az ősével, vagyis $\iota(e) \parallel e$. Ha ι nem identikus, akkor van olyan P pont, melyre $P \neq \iota(P)$. Tekintsünk olyan Q és R pontokat, hogy P, Q és R nem esik egy egyenesre. Feltételünk szerint $PQ \parallel \iota(P)\iota(Q)$, $QR \parallel \iota(Q)\iota(R)$, és $RP \parallel \iota(R)\iota(P)$, vagyis a PQR és a $\iota(P)\iota(Q)\iota(R)$ háromszögek a végtelen távoli egyenesre perspektívek.

Ha $P\iota(P) \parallel Q\iota(Q)$, akkor a nyitott könyv tétele szerint $P\iota(P) \parallel R\iota(R)$ is teljesül, és $P\iota(P)\iota(Q)Q$, $P\iota(P)\iota(R)R$, valamint $R\iota(R)\iota(Q)Q$ is paralelogramma. Legyen ε az az eltolás, melyre $\iota(P) = \varepsilon(P)$. Ekkor $P\iota(P)\varepsilon(Q)Q$ és $P\iota(P)\varepsilon(R)R$

is paralelogramma, amiért $\iota(Q) = \varepsilon(Q)$, és $\iota(R) = \varepsilon(R)$. Eszerint $\varepsilon^{-1}\iota$ a nem kollineáris P , Q és R pontokat helyben hagyja. A fixpont tételek szerint tehát $\varepsilon^{-1}\iota$ az identikus leképezés, tehát $\iota = \varepsilon$ eltolás.

Ha $P\iota(P) \cap Q\iota(Q) = O$, akkor a **Desargues-tulajdonság** miatt $P\iota(P) \cap R\iota(R) = O$ is teljesül, és a párhuzamos szelők tétele miatt $d(P, O) = d(\iota(P), O)$, $d(Q, O) = d(\iota(Q), O)$, és $d(R, O) = d(\iota(R), O)$. Eszerint $\tau_O\iota$ a nem kollineáris P , Q és R pontokat helyben hagyja, így fixpont tételek szerint $\tau_O\iota$ az identikus leképezés, tehát $\iota = \tau_O$ centrális tükrözés. ■

Az eredmény úgy is értelmezhető, hogy a középpontos dilataciók és az eltolások helyben hagyják az ideális egyenes pontjait.

Legyen ε egy eltolás. Ennek **lineáris összetevője** az identitás, tehát $\overrightarrow{PQ} = \varepsilon(P)\varepsilon(Q)$ minden (P, Q) kötött vektorra. Ebből következik, hogy ugyancsak minden (P, Q) kötött vektorra és minden ε eltolásra $\overrightarrow{P\varepsilon(P)} = \overrightarrow{Q\varepsilon(Q)}$ is teljesül, vagyis ez a vektor független a P pont választásától. Ez indokolja, hogy ezt a szabad vektort az ε eltolás *eltolás-vektorának* nevezzük.

Tétel. *Két eltolás szorzatának eltolás-vektora az egyes eltolás-vektorok összegével egyenlő. Az eltolások és a szabad vektorok Abel-csoportjai izomorfak.*

Bizonyítás. Az első állítást a bármely két ε_1 és ε_2 eltolásra érvényes

$$\overrightarrow{P\varepsilon_2(\varepsilon_1(P))} = \overrightarrow{P\varepsilon_2(P)} + \overrightarrow{\varepsilon_2(P)\varepsilon_2(\varepsilon_1(P))} = \overrightarrow{P\varepsilon_2(P)} + \overrightarrow{P\varepsilon_1(P)},$$

formula igazolja.

A második állítást azzal bizonyítjuk, hogy az eltolások $\mathcal{E}$ csoportjáról a vektorok $\mathcal{V}$ Abel-csoportjába való $\varepsilon \mapsto \mathbf{v}(\varepsilon) := \overrightarrow{P\varepsilon(P)}$ leképezés izomorfizmus. Az első állítás szerint ez homomorfizmus, tehát csak a bijektivitást kell igazolni.

A homomorfizmus miatt, ha $\mathbf{v}(\varepsilon_1) = \mathbf{v}(\varepsilon_2)$, akkor $\mathbf{v}(\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}) = \mathbf{0}$, vagyis a $\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}$ eltolásnak minden pont fixpontja, amiért $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Ez éppen az injektivitás.

A szürjektivitás igazolása érdekében tekintsünk egy $\overrightarrow{PQ}$ szabad vektort. Ha $P = Q$, akkor ez az identikus eltoláshoz rendelt eltolás-vektor, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy $P \neq Q$. Legyen e és g a PQ egyenesre merőleges két egyenes úgy, hogy e átmegy a P ponton, g pedig a $\overrightarrow{PQ}$ szakaszt felező merőleges. Ekkor az $\varepsilon = \tau_g\tau_e$ izometria egy eltolás, és $\overrightarrow{P\varepsilon(P)} = \overrightarrow{PQ}$, vagyis a leképezés szürjektív. ■

A bizonyításból kiolvasható, hogy az eltolás távolsága éppen kétszerese az eltolás két tükrözése tengelyei közti távolságnak. Az eredmény maga pedig értelmessé teszi az eltolásoknak egy egységnyi helyvektorral és az eltolás távolsága általi megadását, vagyis elegendő az $\mathbf{u}$ egységnyi vektor t távolságú $\varepsilon_{\mathbf{u}}^t$ eltolásáról beszélni.

Legyen O a φ forgatás középpontja, f_+ pedig egy ebből induló félegyenes. Az O pontból induló minden g_+ félegyeneshez létezik pontosan egy olyan O középpontú

ψ forgatás, melyre $\psi(f_+) = g_+$, amiből a forgatások felcserélhetősége miatt

$$\sphericalangle(f_+, \varphi(f_+)) = \sphericalangle(\psi(f_+), \psi(\varphi(f_+))) = \sphericalangle(g_+, \varphi(\psi(f_+))) = \sphericalangle(g_+, \varphi(g_+))$$

következik. Ez azt jelenti, hogy az $\sphericalangle(f_+, \varphi(f_+))$ szög nem függ az f_+ félegyenes választásától, ami indokolja, hogy ezt a szabad szöget a φ forgatás *forgásszögének* nevezzük.

Tétel. *Két azonos középpontú forgatás szorzatának forgásszöge az egyes forgásszögek összegével egyenlő. Az azonos középpontú forgatások és a szabad szögek Abel-csoportjai izomorfak.*

Bizonyítás. Legyen a f_+ egy tetszőleges O kezdőpontú félegyenes, φ és ψ pedig egy O középpontú forgatás. Ekkor

$$\sphericalangle(f_+, \varphi(\psi(f_+))) = \sphericalangle(f_+, \varphi(f_+)) + \sphericalangle(\varphi(f_+), \varphi(\psi(f_+))) = \sphericalangle(f_+, \varphi(f_+)) + \sphericalangle(f_+, \psi(f_+))$$

igazolja az első állítást.

A második állítást azzal bizonyítjuk, hogy az O középpont körüli Φ_O csoportjáról a szabad szögek Abel-csoportjába való $\varphi \mapsto \sigma(\varphi) := \sphericalangle(f_+, \varphi(\psi(f_+)))$ leképezés izomorfizmus. Az első állítás szerint ez homomorfizmus, tehát csak a bijektivitást kell igazolni.

A homomorfizmus miatt, ha $\sigma(\varphi_1) = \sigma(\varphi_2)$, akkor $\sigma(\varphi_1\varphi_2^{-1})$ a nullszög, vagyis a $\varphi_1\varphi_2^{-1}$ forgatás minden félegyenest fixen hagy, amiért $\varphi_1 = \varphi_2$. Ez éppen az injektivitás.

A szürjektivitás bizonyítása érdekében tekintsünk egy $\sphericalangle(f_+, g_+)$ szabad szöget. Ha $f_+ = g_+$, akkor az identikus forgatás a szög őse, így innentől feltehetjük, hogy $f_+ \neq g_+$. Legyen h az (f_+, g_+) kötött szög felezője. Ekkor a $\varphi = \tau_h\tau_f$ izometria egy forgatás, és $\sphericalangle(f_+, \varphi(f_+)) = \sphericalangle(f_+, g_+)$, vagyis a leképezés szürjektív. ■

A bizonyításból kiolvasható, hogy a forgásszög éppen kétszerese a forgatás két tükrözésének tengelyei által bezárt szögnek. Az eredmény maga pedig értelmessé teszi a forgatásoknak a középpontjuk és forgásszögük általi megadását, vagyis elegendő az O pont körüli α szögű φ_O^α forgatásról beszélni.

A forgatások szöge máshol is megjelenik.

3.2.1. Tétel. *Minden λ együtthatós dilatáció mátrixának alakja bármely ortonormált bázisra épülő koordinátázásban $\lambda \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, vagy $\lambda \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$, ahol α valamely $(-\pi, \pi]$ szám.*

Bizonyítás. Mivel minden dilatáció egy pozitív együtthatós középpontos homotécia, és egy izometria szorzata, elegendő az 1-együtthatós dilatációkra, vagyis az izometriákra bizonyítani az állítást.

Valamely $\psi = \chi_{\mathcal{B}} \circ \xi_{\mathcal{O}}$ koordinátázásban a d euklidészi metrika alakja

$$d(\psi^{-1}(x_0, y_0), \psi^{-1}(x_1, y_1)) = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}.$$

A keresett izometria ebben a ψ koordinátázásban egy olyan $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ koordináta-transzformáció, melyre $(x, y) \mapsto (a, b) + \hat{\varphi}((x, y))$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ tetszőleges számok, a **lineáris összetevő** pedig

$$\hat{\varphi}((x, y)) = (x, y) \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix}.$$

A metrikát megadó fentebbi képlet és a φ izometrikussága alapján

$$\begin{aligned} d(\psi^{-1}\hat{\varphi}(x_0, y_0), \psi^{-1}\hat{\varphi}(x_1, y_1)) &= d(\psi^{-1}\varphi(x_0, y_0), \psi^{-1}\varphi(x_1, y_1)) \\ &= d(\psi^{-1}(x_0, y_0), \psi^{-1}(x_1, y_1)), \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy miközben (a, b) tetszőleges lehet, a $\hat{\varphi}$ egy izometria. Eszerint

$$\begin{aligned} &(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 \\ &= ((\varphi_{11}x_0 + \varphi_{21}y_0) - (\varphi_{11}x_1 + \varphi_{21}y_1))^2 + ((\varphi_{12}x_0 + \varphi_{22}y_0) - (\varphi_{12}x_1 + \varphi_{22}y_1))^2 \\ &= (\varphi_{11}(x_0 - x_1) + \varphi_{21}(y_0 - y_1))^2 + (\varphi_{12}(x_0 - x_1) + \varphi_{22}(y_0 - y_1))^2 \\ &= (x_0 - x_1)^2(\varphi_{11}^2 + \varphi_{12}^2) - 2(x_0y_1 + y_0x_1)(\varphi_{11}\varphi_{21} + \varphi_{12}\varphi_{22}) + (y_0 - y_1)^2(\varphi_{21}^2 + \varphi_{22}^2) \end{aligned}$$

minden (x_0, y_0) és (x_1, y_1) esetén.

Azonnal következik, hogy

$$\varphi_{11}^2 + \varphi_{12}^2 = 1, \quad \varphi_{11}\varphi_{21} + \varphi_{12}\varphi_{22} = 0, \quad \text{és} \quad \varphi_{21}^2 + \varphi_{22}^2 = 1 \quad (3.2.1)$$

szükséges és elégséges feltétele annak, hogy φ egy izometria legyen.

A négyzetes tagokat tartalmazó egyenletekből következik, hogy valamely α és β valós számra $\varphi_{11} = \cos \alpha$, $\varphi_{12} = \sin \alpha$ és $\varphi_{21} = \sin \beta$, $\varphi_{22} = \cos \beta$, amiből

$$0 = \varphi_{11}\varphi_{21} + \varphi_{12}\varphi_{22} = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta)$$

miatt $\beta + \alpha = k\pi$ adódik, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Eszerint a k paritásától függően

$$\hat{\varphi}((x, y)) = (x, y) \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{vagy} \quad \hat{\varphi}((x, y)) = (x, y) \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Ahogy már láttuk, az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok pontosan akkor egységnyiek és ortogonálisak, ha a $\chi_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}) = (u_0, u_1)$ és $\chi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) = (v_0, v_1)$ koordinátákra $u_1^2 + u_2^2 = 1$, és $(v_1, v_2) = \pm(-u_2, u_1)$. Ebből pedig az következik, hogy valamely β valós számra

$(u_0, u_1) = (\cos \beta, \sin \beta)$, és $(v_0, v_1) = \pm(-\sin \beta, \cos \beta)$. Eszerint a koordinátázásban használt bázisról az $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ bázisra való áttéréskor a φ mátrixa a

$$\begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \text{ vagy } \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix}$$

mátrixok egyikével konjugálódik. Ugyanakkor

$$\begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix},$$

ami azt mutatja, hogy a konjugálás nem változtat a fentebb talált

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ és } \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

mátrixokon, ami a tételt bizonyítja. ■

Figyeljük meg, hogy

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

vagyis a két izometriatípus között egy affin (tengelyes) tükrözés teremt kapcsolatot, mely eszerint izometria az euklidészi geometriában, ha a bázis ortonormált.

A forgatások origót fixen hagyó, irányítást tartó izometriák, így az euklidészi geometriák izometriáinak alakjára vonatkozó tételünk értelmében a φ forgatás bármely $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ ortonormált bázisban

$$(x, y) \mapsto (x, y) \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

alakú, ahol α valamely $(-\pi, \pi]$ szám. Tekintsük most az $f_+ = \{x(1, 0) : x \geq 0\}$ félegyenest. Ennek képe $\varphi(f_+) = \{x(\cos \alpha, \sin \alpha) : x \geq 0\}$. A szögek koszinuszának és szinuszának definíciója szerint $\cos \sphericalangle(f_+, \varphi(f_+)) = \cos \alpha$ és $\sin \sphericalangle(f_+, \varphi(f_+)) = \sin \alpha$, ami a szögmértékek és a trigonometrikus függvények radián szerinti összefüggése értelmében azt jelenti, hogy $\sphericalangle(f_+, \varphi(f_+)) = \alpha$.

3.3. Háromszögek szögei és oldalai

Egy háromszög belső szöge mellékszögét *külső szögnek* hívjuk. Ahogy már láttuk, a külső szög megegyezik a két nem mellette lévő belső szög összegével, amiért a külső szögek összege dupla egyenesszög. Könnyű látni, hogy ez minden sokszögre igaz.

A merőleges egyenesek félegyenesei által alkotott szöget (fél egyenesszög) *derékszögnek* nevezzük. A derékszögű háromszögben a derékszöggel szemközti oldalt *átfogónak*, a többi oldalt *befogónak* nevezzük.

Azokat a háromszögeket, melyeknek két oldala egyenlő hosszúságú, *egyenlő szárú háromszögnek*, a két egyenlő hosszú oldalt *száraknak*, a harmadik oldalt *alapnak* mondjuk. *Egyenlő oldalúnak* vagy *szabályosnak* nevezzük a háromszöget, hogy minden oldala azonos hosszúságú.

Tétel.

- (1) *Egy háromszögben nagyobb szöggel szemben hosszabb oldal található.*
- (2) *Egy derékszögű háromszögben az átfogó mindig hosszabb, mint bármely befogó.*
- (3) *Az ABC egyenlő szárú háromszögekben az alapon lévő, $\sphericalangle(CAB)$ és $\sphericalangle(ABC)$ szögek megegyeznek egymással.*

Bizonyítás. (1) Ahogy ezt a szinusztételnél már említettük, a valós szinuszfüggvény monoton növekedését használjuk a $[0, \pi/2]$ intervallumon. Ha a háromszög minden szöge a $[0, \pi/2]$ intervallumba esik, akkor az állítás közvetlenül következik a szinusztételből a monoton növekedés miatt. Ha van olyan szög, amely a $[\pi/2, \pi]$ intervallumba esik, abban a csúcban a külső szög a $[0, \pi/2]$ intervallumba esik, és nagyobb, mint a nem mellette fekvő belső szögek, így ezekre megint a szinuszfüggvény monotonitását használva adódik az állítás.

(2) Derékszögű háromszögben az átfogóra illeszkedő két szög összege derékszög, így mindkettő kisebb a derékszögnél, ezért ezen állításunkat (1) bizonyítja.

(3) Ha az egyenlő szárakhoz tartozó szögek különbözőek lennének, akkor az egyik nagyobb lenne, mint a másik, amiből (1) szerint a szögekkel szemben lévő oldalak nem lehetnének egyformák. Ez igazolja az állítást. ■

Eszerint az egyenlő szárú háromszög két alapon lévő belső szöge egyenlő.

Tétel. Két nem elfajuló háromszög egybevágó, ha

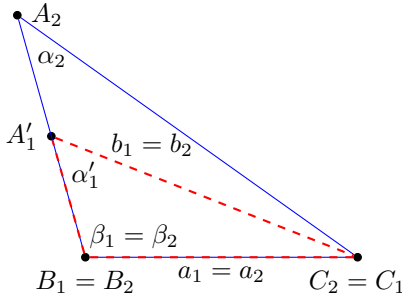
- (1) *megfelelő oldalaik hosszai egyenlők,*
- (2) *két oldaluk hosszai és az általuk közrefogott irányítatlan szögük egyenlő,*
- (3) *két oldaluk hosszai és ezek közül a hosszabbikkal szemközti irányítatlan szögek egyenlők,*
- (4) *egy oldaluk hossza és irányítatlan szögeik megegyeznek.*

Bizonyítás. Vizsgáljuk az $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszögeket, melyek csúcsaiban lévő szögek rendre α_1 , β_1 és γ_1 , illetve α_2 , β_2 és γ_2 , illetve a csúcsokkal szemben lévő oldalak hossza rendre a_1 , b_1 és c_1 , illetve a_2 , b_2 és c_2 .

- (1) Ezt már bizonyítottuk az **Euklidészi sík** fejezet 2.5 szakaszában.

(2) Ha, mondjuk, $\alpha_1 = \alpha_2$, akkor létezik egy ι izometria, melynél az oldalak A_1 ponttal kezdődő félegyenesekre $\iota(A_1B_1) = A_2B_2$, $\iota(A_1C_1) = A_2C_2$, és $\iota(A_1) = A_2$. Mivel a félegyeneseken a pontokat egyértelműen jellemzi a kezdőponttól mért távolságuk, ebből $\iota(B_1) = B_2$ és $\iota(C_1) = C_2$ következik, amiért az $\iota|_{A_1B_1C_1}: A_1B_1C_1 \rightarrow A_2B_2C_2$ egybevágóság a két háromszög között.

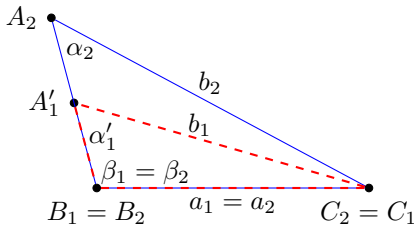
(3) Ha, mondjuk, $a_1 \leq b_1$, $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, és $\beta_1 = \beta_2$, vegyünk fel a B_2 kezdőpontú A_2 ponton áthaladó félegyenesen egy olyan A'_1 pontot, melyre $d(B_1, A_1) = d(B_2, A'_1)$. Mivel $\sphericalangle(A_1B_1C_1) = \sphericalangle(A_2B_2C_2)$ vagy $\sphericalangle(A_1B_1C_1) = -\sphericalangle(A_2B_2C_2)$, van olyan μ mozgás, amely a $(A_1B_1C_1)$ kötött szöget az $(A_2B_2C_2)$, vagy a $(\tau_{B_2C_2}(A_2)B_2C_2)$ kötött szögbe viszi. Mivel ez izometrikus, $\mu(B_1) = B_2$, $\mu(C_1) = C_2$, és $\mu(A_1) = A'_1$ vagy $\mu(A_1) = \tau_{B_2C_2}(A'_1)$. Alkalmasan választva tehát az ι izometriát $\iota(B_1) = B_2$, $\iota(C_1) = C_2$, és $\iota(A_1) = A'_1$.



Ha $A'_1 \neq A_2$, akkor $A'_1C_2A_2$ egy egyenlő szárú háromszög, melynek a C_2 pontban találkozó szárai $\overline{b_1} = b_2$ hosszúságúak, alapja pedig az $\overline{A'_1A_2}$ szakasz. Az egyenlő szárú háromszög alapon lévő szögei kisebbek az alapon lévő külső szögeknél. Az alapon fekvő szög az $A'_1B_2C_2$ háromszög külső szöge, vagyis nagyobb a β_2 szögnél. Az alapon fekvő külső szög $\alpha'_1 = \sphericalangle(B_2A'_1C_2)$, ezért $\alpha'_1 < \beta_2$.

Ugyanakkor a feltétel szerint $a_1 \leq b_1$, amiért $d(A'_1, B_2) \leq d(A_1, B_2)$, és így a nagyobb szöggel szemben hosszabb oldal összefüggés értelmében $\beta_2 \leq \alpha'_1$. Ez az ellentmondás mutatja az $A'_1 \neq A_2$ feltétel lehetetlenségét, vagyis $\iota(A_1) = A_2$, és így az $\iota|_{A_1B_1C_1}: A_1B_1C_1 \rightarrow A_2B_2C_2$ egy egybevágóság a két háromszög között.

(4) Legyen, mondjuk, $a_1 = a_2$, és $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, és $\gamma_1 = \gamma_2$.



Vegyünk ismét azt az ι izometriát, amelyikre $\iota(B_1) = B_2$, $\iota(C_1) = C_2$, és a β_1 szabad szög $(C_1B_1A_1)$ reprezentánsát az ι a $(C_2B_2A_2)$ kötött szögbe viszi. Legyen $A'_1 := \iota(A_1)$, és $\alpha'_1 = \sphericalangle(B_2A'_1C_2)$. Ha $B_2 \prec A'_1 \prec A_2$, akkor $\alpha'_1 > \alpha_2$, hiszen α'_1 az $A'_1C_2A_2$ háromszög A'_1 csúcsánál lévő külső szöge. Ha $B_2 \prec A_2 \prec A'_1$, akkor $\alpha'_1 < \alpha_2$, hiszen α_2

az $A_2C_2A'_1$ háromszög A_2 csúcsánál lévő külső szöge. Eszerint $A'_1 = A_2$, vagyis $\iota(A_1) = A_2$, így az $\iota|_{A_1B_1C_1}: A_1B_1C_1 \rightarrow A_2B_2C_2$ egybevágóság a két háromszög között. ■

Tétel. *Két nem elfajuló háromszög hasonló, ha*

- (1) *megfelelő oldalhosszaik arányai egyenlőek,*
- (2) *megfelelő irányítatlan szögeik egyenlőek,*
- (3) *két megfelelő oldaluk oldalhosszaik arányosak és az ezek közti szögük egyenlő.*

Bizonyítás. Ismét az $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszögeket vizsgáljuk, melyek csúcsaiban lévő szögek rendre α_1, β_1 és γ_1 , illetve α_2, β_2 és γ_2 , illetve a csúcsokkal szemben lévő oldalak hossza pedig rendre a_1, b_1 és c_1 , illetve a_2, b_2 és c_2 .

(1) Ha $a_2/b_2 = a_1/b_1$, és $b_2/c_2 = b_1/c_1$, akkor $a_2/a_1 = b_2/b_1 = c_2/c_1$, amiből a háromszögek hasonlóságát az **Euklidészi sík** fejezet **Egybevágóság és hasonlóság** szakaszában már bizonyítottuk.

(2) Ha $\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$, és $\gamma_1 = \gamma_2$, akkor a szinusz-tétel szerint a megfelelő oldalak hosszai arányosak, így (1) bizonyítja az állítást.

(3) Ha $\gamma_1 = \gamma_2$, és $b_2/a_2 = b_1/a_1$, akkor az előző tétel (2) állítása szerint az $A_2B_2C_2$ háromszög bármely O_{b_1/b_2} homotécia melletti képe egybevágó az $A_1B_1C_1$ háromszöggel, vagyis létezik olyan ι izometria, hogy a két háromszög között $\iota|_{O_{c_1/c_2}(A_2B_2C_2)}: O_{c_1/c_2}(A_2B_2C_2) \rightarrow A_1B_1C_1$ egy egybevágóság. Eszerint a $\delta = O_{c_2/c_1}\iota$ dilatáció egy hasonlóság a két háromszög között. ■

Tétel. *A háromszög minden szögfelezője a mellette lévő oldalak hosszainak arányában osztja a szemközti oldalt.*

Bizonyítás. Vizsgáljuk az ABC háromszöget, melynek csúcsaiban lévő szögek rendre α, β és γ .

Tegyük fel, hogy az A pontra illeszkedő szögfelező metszi a BC egyenest valamely (esetleg ideális) A' pontban, és alkalmazzuk a szinusz-tételt az $AA'B$ és $AA'C$ háromszögekre.

Ha $A' \in \overline{BC}$, akkor

$$\frac{d(B, A')}{d(A', C)} = \frac{d(B, A')/\sin(\alpha/2)}{d(A', C)/\sin(\alpha/2)} = \frac{d(B, A)/\sin \xi}{d(A, C)/\sin(\epsilon - \xi)} = \frac{d(B, A)}{d(A, C)},$$

ha pedig $A' \notin \overline{BC}$, akkor

$$\frac{d(B, A')}{d(A', C)} = \frac{d(B, A')/\sin(\epsilon/2 \pm \alpha/2)}{d(A', C)/\sin(\epsilon/2 \mp \alpha/2)} = \frac{d(B, A)/\sin \xi}{d(A, C)/\sin(\xi)} = \frac{d(B, A)}{d(A, C)},$$

ahol $\xi = \angle(BA'A)$.

Ha A' egy ideális pont, akkor a háromszög egyenlő szárú, amiért a metrikus osztóviszony definíciója szerint

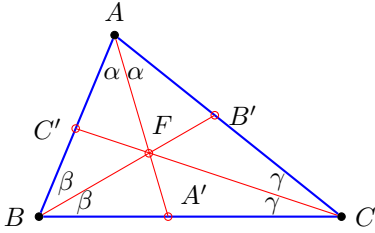
$$\frac{d(B, A')}{d(A', C)} = 1 = \frac{d(B, A)}{d(A, C)}.$$

Ezzel az állítást bizonyítottuk. ■

3.4. Háromszögek nevezetes pontjai

Tétel. *A háromszögek átellenes oldalakat metsző szögfelezőinek van közös pontja.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy ABC háromszöget, és annak az A , B és C csúcson átmenő, a szemközti oldalakat rendre az A' , B' és C' pontokban metsző szögfelezőit.



Az AA' , BB' és CC' szögfelezőket rendre összevetve a $BB'C$, $CC'A$ és $AA'B$ háromszöggel, a Pasch-axiómából következik, hogy rendre $AA' \cap BB'$, $BB' \cap CC'$ és $CC' \cap AA'$ nem üres, vagyis bármely két szögfelező metszi egymást.

Az A pontból kiinduló szögfelező azon pontok halmaza, melyek egyenlő távolságra vannak az AB és AC oldalegyenesektől. A B pontból kiinduló szögfelező azon pontok halmaza, melyek egyenlő távolságra vannak a BC és BA oldalegyenesektől. Eszerint AA' és BB' metszete egy olyan F pont, mely a háromszög mindhárom oldalától egyenlő távolságra van. Ez viszont azt jelenti, hogy F a CA és CB oldalegyenesektől egyenlő távolságra van, amiért a CC' szögfelezőre esik. ■

A tételben szereplő szögfelezőket *belső szögfelezőnek* szokás hívni. Ha ezek F metszéspontja, mint középpont körül az F oldalegyenesektől mért távolságával mint sugárral kört rajzolunk, akkor ennek a körnek mindegyik oldallal csak egyetlen közös pontja lesz, hiszen az oldalakon lévő többi pont nagyobb távolságra helyezkedik el. Ezt úgy fejezzük ki, hogy a kör érinti az oldalakat. Ezt az egyértelműen meghatározott kört a háromszög *beírt körének* nevezzük.

Ha a belső szögfelezők közül kettő helyett a belső szögfelezőre merőleges külső szögfelezőket vesszük, a fenti bizonyítással analóg módon adódik, hogy ezek a szögfelezők is egy pontban metszik egymás. Három ilyen pont van, ezek a háromszög *hozzáírt köreinek* középpontjai.

Tétel. *A háromszögek oldalfelező merőlegesei közös pontra illeszkednek.*

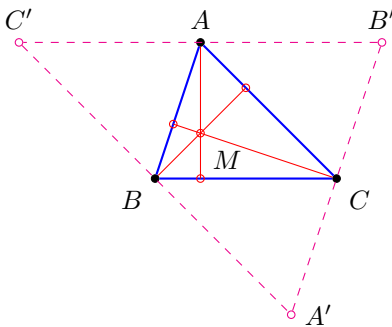
Bizonyítás. Két oldalfelező merőleges nem lehet párhuzamos, hiszen a rájuk merőleges oldalak is metszők. Két oldalfelező merőleges metszéspontja mind a három csúctól egyforma távolságra van, amiért illeszkedik a harmadik oldal oldalfelező merőlegesére is. ■

Ha az oldalfelező merőlegesek O metszéspontja, mint középpont körül az O csúcsoktól mért távolságával, mint sugárral kört rajzolunk, akkor ez a kör a háromszög mindhárom csúcsán átmegy. Ezt az egyértelműen meghatározott kört a háromszög *körülírt körének* nevezzük.

Egy háromszög bármely P csúcsának és a szemközti oldal egyenesére vett $P^\perp$ merőleges vetületének egyenesét a háromszög *magasságvonalának*, a $d(P, P^\perp)$ távolságot pedig a háromszög *magasságának* nevezzük.

Tétel. *Bármely háromszög magasságvonalai illeszkednek egy közös pontra.*

Bizonyítás. Húzzunk az ABC háromszög minden csúcsán át egy a vele szemben lévő oldallal párhuzamos egyenest.



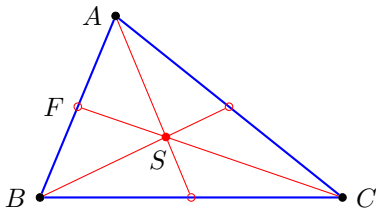
Ezen egyenesek metszéspontjai legyenek A' , B' és C' úgy, hogy A' a B, C pontokon átmenő egyenesek, B' a C, A pontokon átmenő egyenesek és C' az A, B pontokon átmenő egyenesek metszete. Tekintve, hogy $BCAC'$ és $BCB'A$ is paralelogramma, az A pont felezi a $\overline{B'C'}$ szakaszt, és ugyanilyen okból B és C is felezi a $\overline{C'A'}$ illetve $\overline{A'B'}$ szakaszt. Eszerint az ABC háromszög csúcsaiból kiinduló magasságvonalak az $A'B'C'$ háromszög

oldalfelező merőlegesei, melyekről épp az imént láttuk, hogy egy pontban metszik egymást. ■

Egy háromszög bármely csúcsát a szemben lévő oldal felezőpontjával összekötő szakaszt a háromszög *súlyvonalának* nevezzük.

Tétel. *A háromszögek súlyvonalai közös pontra illeszkednek. Ez a pont a súlyvonalak oldalhoz közelebbi harmadolója.*

Bizonyítás. Tekintsük az ABC háromszöget, és válasszunk egy O pontot.



Az $\overline{AB}$ szakasz F felezőpontjának F_O helyvektorára $F_O = \frac{1}{2}(A_O + B_O)$. A $\overline{CF}$ szakasz F ponthoz közelebb eső S harmadolópontjának helyvektorára az osztóviszony alapján

$$S_O = \frac{2F_O + C_O}{2 + 1} = \frac{1}{3}(A_O + B_O + C_O).$$

Mivel ez a formula szimmetrikus a háromszög csúcsaira, a harmadolópontokat kiszámítva a másik két súlyvonalra, ugyanez az eredmény adódik, amiért a súlyvonalak oldalakhoz közelebbi harmadolópontjai egybeesnek. ■

Egy háromszög magasságvonalainak metszéspontját *magasságpontnak*, súlyvonalainak metszéspontját pedig *súlypontnak* nevezzük.

Tétel. Bármely háromszög M magasságpontja, S súlypontja és körülírt körének O középpontja közös egyenesre illeszkedik. Az S pont harmadolja az $\overline{OM}$ szakaszt, és az O ponthoz esik közelebb.

Bizonyítás. Legyen M' az a pont, melyre $M'_O = 3S_O = A_O + B_O + C_O$. Ekkor az $M'A$ egyenes merőleges a BC egyenesre, mert

$$\begin{aligned}\langle M'_O - A_O, C_O - B_O \rangle &= \langle C_O + B_O, C_O - B_O \rangle \\ &= |C_O|_{d,O}^2 - |B_O|_{d,O}^2 = 0,\end{aligned}$$

hiszen a $|C_O|_{d,O}$ és $|B_O|_{d,O}$ is a körülírt kör O középpontjának egyező távolsága a csúcsoktól.

Ugyanígy igazolható, hogy az M' pont rajta van az összes magasságvonalon, akkor pedig az $M' = M$, vagyis $M_O = 3S_O$, ahogy állítottuk. ■

A tételben szereplő egyenest *Euler-egyenesnek* nevezzük.

Az ABC háromszögben jelölje A^1, B^1, C^1 a megfelelő magasságvonalak talp-pontjait, A^2, B^2, C^2 a megfelelő oldalfelező pontokat és A^3, B^3, C^3 a csúcsokat az M magasságponttal összekötő szakaszok felezőpontjait.

Tétel. (Feuerbach). Az A^i, B^i és C^i ($i = 1, 2, 3$) pontok közös körre illeszkednek. Ennek a körnek a középpontja az $\overline{OM}$ szakasz F felezőpontja, sugara pedig a körülírt kör sugarának a fele, ahol O a körülírt kör középpontja, M pedig a magasságpont.

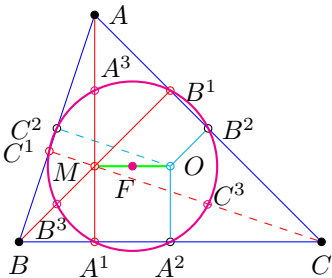
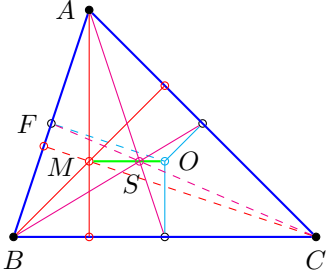
Bizonyítás. Legyen F az $\overline{OM}$ szakasz felezőpontja. Ekkor az eddigiek alapján

$$\begin{aligned}2F_O &= M_O = 3S_O = A_O + B_O + C_O, \\ 2(C_O^2 - F_O) &= (A_O + B_O) - (A_O + B_O + C_O) \\ &= -C_O, \\ 2(C_O^3 - F_O) &= (M_O + C_O) - F_O = C_O\end{aligned}$$

azonosságok adódnak. Az utolsó két azonosságból azonnal következik, hogy az F pont felezi a $\overline{C^3C^2}$ szakaszt, és $d(F, C^3) = d(F, C^2) = r/2$, ahol r a körülírt kör sugara. Mivel $C^3C^1 \perp C^1C^2$, Thalész

tétele szerint a C^1 pont az F ponttól ugyanakkora távolságra van, mint a C^2 és C^3 pontok az F ponttól, ami $r/2$.

Az A^i és B^i ($i = 1, 2, 3$) pontokra vonatkozóan az állítás hasonlóan igazolható, amivel a bizonyítást befejeztük. ■



A tételben szereplő kört *Feuerbach*-, vagy *kilenc pontos körnek* nevezzük.

A háromszögnek több mint 6000(!) további nevezetes pontja ismert [10]. Ezek koordinátákkal való megadását nagyon megkönnyíti a jelen könyvben terjedelmi okokból nem tárgyalt, amúgy az osztóviszony általánosításának tekinthető *baricentrikus koordinátázás*.

3.5. Másodrendű görbék metrikus tulajdonságai

Az euklidészi metrika lehetővé teszi a másodrendű görbéknek a korábbi, az Affin főténgely-transzformációval meghatározott osztályozásának további finomítását.

Főténgely-transzformáció. *Az euklidészi sík bármely másodrendű görbéjéhez van olyan izometria, mely a másodrendű görbét az*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \begin{cases} 1, & (1a) \\ 0, & (1b) \end{cases} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \begin{cases} 1, & (2a) \\ 0, & (2b) \end{cases} \quad y^2 = \begin{cases} 2px, & (3a) \\ 1, & (3b) \end{cases} \quad 0 = \begin{cases} x, & (4a) \\ 1, & (4b) \end{cases}$$

egyenletek pontosan egyikének megoldáshalmazává teszi, ahol $0 < a, b, p \in \mathbb{R}$.

Bizonyítás. Legyen φ az a koordinátázás, melynél a metrikára

$$d^2(\varphi^{-1}(x, y), \varphi^{-1}(z, t)) = (x - z)^2 + (y - t)^2,$$

amiért $\langle \varphi^{-1}(x, y), \varphi^{-1}(z, t) \rangle = xz + yt$, és $|\varphi^{-1}(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Legyen a másodrendű $\mathcal{P}$ görbe egyenlete ebben a koordinátázásban $f(z, t) = (z, t)\mathbf{A} \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} + (z, t) \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} + d = 0$, ahol $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, és $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b, c, d \in \mathbb{R}$ nem mind nulla. Ez azt jelenti, hogy $\mathcal{P} = \{P : f(\varphi(P)) = 0\}$.

Ha ϕ egy izometrikus koordinátatranszformáció, akkor az euklidészi sík $\phi_\varphi = \varphi^{-1} \circ \phi \circ \varphi$ izometriája olyan $\phi_\varphi(\mathcal{P})$ halmazba viszi a $\mathcal{P}$ halmazt, melynek egyenlete a φ koordinátázásban $f \circ \phi^{-1}(\cdot, \cdot) = 0$, hiszen

$$f \circ \phi^{-1}(\varphi(\phi_\varphi(P))) = f \circ \phi^{-1}(\phi(\varphi(P))) = f(\varphi(P)).$$

Ezért innentől csak az alkalmas izometrikus ϕ koordinátatranszformációt keressük.

Az Affin főténgely-transzformáció bizonyításának lépései szerint haladunk azaz a megszorítással, hogy csak izometrikus koordinátatranszformációt használhatunk.

I. eset: $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$ és $b = c = 0$. Ekkor $d \neq 0$, és nincs megoldás, melynek (4b) típusú egyenlete van.

II. eset: $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, és $b^2 + c^2 > 0$. Ekkor az

$$f(z, t) = \sqrt{b^2 + c^2} \left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} z + \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} t + \frac{d}{\sqrt{b^2 + c^2}} \right)$$

forma mutatja, hogy az izometrikus

$$\phi: (z, t) \mapsto (x, y) = (z, t) \begin{pmatrix} \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} & \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} & \frac{-b}{\sqrt{b^2+c^2}} \end{pmatrix} + \left(\frac{d}{\sqrt{b^2+c^2}}, 0 \right)$$

koordinátatranszformáció esetén a görbe ϕ_φ melletti izometrikus képének egy (4a) típusú egyenlete van.

III.a. eset: $a_{12} = 0$ és $a_{11}a_{22} = 0$. Az Affin főtengely-transzformáció bizonyításának ebben a lépésében alkalmazott koordinátatranszformáció nyilván izometrikus, tehát most is egy (3a), (3b) vagy (4b) típusú egyenlet adódik.

III.b. eset: $a_{12} = 0$ és $a_{11}a_{22} \neq 0$. Az Affin főtengely-transzformáció bizonyításának ebben a lépésében alkalmazott koordinátatranszformáció nyilván izometrikus, tehát most is egy (1a), (1b), (2a), (2b), illetve (4b) típusú egyenlet adódik.

IV. eset: $a_{12} \neq 0$. Az Affin főtengely-transzformáció bizonyításának ebben a lépésében alkalmazott

$$\phi: (z, t) \mapsto (x, y) = (z, t) \begin{pmatrix} (\lambda_+ - a_{11})\xi_+ & (\lambda_- - a_{11})\xi_- \\ -a_{12}\xi_+ & -a_{12}\xi_- \end{pmatrix}$$

koordinátatranszformációról kell igazolnunk, hogy izometrikus. Tekintsük az

$$\mathbf{u}_+ = \psi(1, 0) = ((\lambda_+ - a_{11})\xi_+, (\lambda_- - a_{11})\xi_-) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{\xi_+}, -\frac{1}{\xi_-} \right),$$

$$\mathbf{u}_- = \psi(0, 1) = -a_{12}(\xi_+, \xi_-).$$

vektorokat. Ezekre

$$\langle \mathbf{u}_+, \mathbf{u}_- \rangle = 0,$$

$$\langle \mathbf{u}_+, \mathbf{u}_+ \rangle = \frac{1}{\delta^2} \left(\frac{1}{\xi_+^2} + \frac{1}{\xi_-^2} \right) = \frac{1}{\delta} ((\lambda_+ - a_{11}) - (\lambda_- - a_{11})) = 1,$$

$$\langle \mathbf{u}_-, \mathbf{u}_- \rangle = -a_{12}^2(\xi_+^2 + \xi_-^2) = \frac{-1}{\delta} (-(\lambda_- - a_{11}) + (\lambda_+ - a_{11})) = 1$$

teljesül, tehát $\{\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-\}$ egy ortonormált bázis. Eszerint ϕ izometrikus koordinátatranszformáció ami teljessé teszi a bizonyítást. ■

Definíció. A sík azon P pontjainak halmazát, amelyekre $d(F, P) = \varepsilon d(P, e)$ teljesül valamely $F \notin e$ pont, e egyenes és $\varepsilon > 0$ valós szám esetén, *kúpszeletnek* nevezzük.

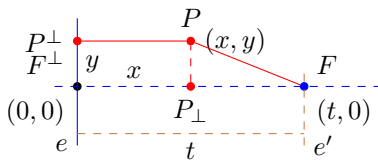
Az e egyenest *direktriának* vagy *vezéregyenesnek*, az F pontot *fókusz*nak, az $\varepsilon > 0$ értéket a kúpszelet *numerikus excentricitásának*, az P_F helyvektorokat a kúpszelet *rádiuszvektorainak*, a fókuszon át a vezéregyenesre bocsájtott merőleges egyenest pedig a kúpszelet *tengelyének* hívjuk. ▲

Világos, hogy a kúpszeletnek az F fókusszal nem e -partos P pontjaira $d(F, P) > d(P, P^\perp)$ teljesül, ezért $0 < \varepsilon \leq 1$ esetén a kúpszelet minden pontja e -partos a fókusszal, ha pedig $\varepsilon > 1$, akkor a kúpszeletnek a direktrix mindkét partján van pontja.

Azt a szakaszt, amelynek végpontjait a (nem parabola) kúpszeletből a tengely metsz ki, *nagy tengelynek* nevezzük. Ellipszis esetében *kistengelynek* nevezzük azt a szakaszt, melynek végpontjait a nagy tengely szakaszfelező merőlegese metszi ki az ellipsziszből.

Tétel. *A kúpszelet ellipszis, ha $0 < \varepsilon < 1$, parabola, ha $\varepsilon = 1$, és hiperbola, ha $1 < \varepsilon$. Minden valódi másodrendű görbe kúpszelet vagy kör.*

Bizonyítás. Legyen $F^\perp$ az F pontnak az e egyenesre vett merőleges vetülete, jelölje t az F és $F^\perp$ pontok $t = d(F, e) = d(F, F^\perp)$ távolságát, és legyen $P_\perp$ a P pontnak az $FF^\perp$ egyenesre vett merőleges vetülete.



Tekintsük azt a φ koordinátázást, melyre $\varphi(F^\perp) = (0, 0)$, $\varphi(F) = (t, 0)$, és $\varphi(e) = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$. Ekkor Pitagorasz tétele szerint $(t - x)^2 + y^2 = \varepsilon^2 x^2$, ahol $\varphi(P) = (x, y)$. Ezt rendezve

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 + y^2 - 2tx + t^2 = 0$$

adódik, amiért a kúpszelet másodrendű görbe, mely mátrixának sajátértékei 1 és $1 - \varepsilon^2$. Ez igazolja az első állítást.

A második állításhoz csak annyi a dolgunk, hogy a kúpszeletek imént kapott másodrendű egyenletéből, amelyben ezúttal a kör esete miatt az $\varepsilon = 0$ is megengedett, a t és ε paraméterek megfelelő megválasztásával *minden* valódi másodrendű görbe egyenletét megtaláljuk.

Ha $\varepsilon = 1$, akkor egyenletünk az $y^2 = 2t(x - t/2)$ alakot veszi fel, ezért az összes (3) típusú valódi másodrendű egyenletet megkapjuk a $t = p$ választással konkrétan a $y^2 = 2p(x - p/2)$ formában.

Az $\varepsilon \notin \{0, 1\}$ esetben egyenletünk teljes négyzetekké alakításával az

$$\frac{(x - \frac{t}{1-\varepsilon^2})^2}{a^2} + \text{sign}(1 - \varepsilon) \frac{y^2}{b^2} = 1$$

alakú egyenletet kapjuk, ahol $a = \frac{\varepsilon t}{|1 - \varepsilon^2|}$, $b = \frac{\varepsilon t}{\sqrt{|1 - \varepsilon^2|}}$, és $a, b > 0$. Figyeljük meg, hogy $a \neq b$!

Eszerint az összes (2) típusú valódi másodrendű egyenletet megkapjuk az

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \text{ és } t = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ választással az } \frac{(x + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}})^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

alakban.

Ha az (1) típusú valódi másodrendű egyenletben $a = b$, akkor a görbe kör.

Ha az (1) típusú valódi másodrendű egyenletben $a \neq b$, mondjuk $a \geq b$, akkor megkapjuk az

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \text{ és } t = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \text{ választással az } \frac{(x - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}})^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

formában.

Ezzel minden nem kör valódi másodrendű görbe egyenletét előállítottuk kúpszeletként az ε és t paraméterek megfelelő választása mellett. ■

A bizonyításban nyert formulák alapján világos, hogy a kör az ellipszisek határhelyzetével is „értelmezhető” a kúpszeletek között, ugyanis legyen b_n olyan sorozat ($n \in \mathbb{N}$), mely az a számhoz tart, és legyen $\mathcal{P}_n$ a bizonyítás utolsó egyenletének megoldáshalmaza a b_n és a paraméterek mellett. A $\mathcal{P}_n$ ellipszist az $y = 0$ egyenes mentén az $(-a^2/\sqrt{a^2 - b_n^2}, 0)$ vektorral eltolva, a kapott $\mathcal{P}'_n$ görbe eleget tesz az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b_n^2} = 1$ egyenletnek, és határhelyzete emiatt nyilván — hiszen $(b_n - b)\sqrt{1 - x^2/a^2} \rightarrow 0$ minden x esetén — az a sugarú kör $x^2 + y^2 = a^2$ egyenletének tesz eleget. Vegyük észre, hogy a konvergálás közben $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $t_n \rightarrow \infty$, és $\varepsilon_n t_n \rightarrow a$, vagyis a kör numerikus excentricitása 0, „vezéregyenesének” távolsága a fókuszról „végtelen”, ugyanakkor ezek „szorzata” éppen a kör a sugara.

Tétel. *A kúpszelet pontjainak a fókuszról vett r távolságára és a fókuszról a direktrixre bocsájtott merőleges egyenes, valamint a ponthoz a fókuszról vezető félegyenes Θ szögére a direktrixnek a fókusszal partos, illetve nem partos oldalán rendre*

$$r = \frac{\ell}{\varepsilon \cos \Theta + 1}, \quad \text{illetve} \quad r = \frac{\ell}{\varepsilon \cos \Theta - 1}$$

teljesül, ahol t a fókuszhoz a direktrixtől mért távolsága, és $\ell = t\varepsilon$.

Bizonyítás. A már bevezetett jelöléseken túl legyen e' az F pontra illeszkedő e egyenessel párhuzamos egyenes. Ez két olyan P_1 és P_2 pontban metszi a kúpszeletet, amelyek távolsága az F ponttól $\ell = \varepsilon t$.

aszimptotikus irányoknak hívjuk. A hiperbola mindkét ágán lévő pontok tetszőlegesen közel kerülnek a saját síknegyedét határoló aszimptotákhoz, miközben a pontjainak fókuszról mért távolsága a végtelenbe tart.

Vegyük észre, hogy a kör nem kúpszelet. Indirekten tegyük fel, hogy mégis az. Ekkor a korlátossága miatt ellipszis. Az ellipszis szimmetrikus a tengelyére, ezért $FF^\perp$ egy átmérő két végpontjában metszi a kört, melynek hossza $r(\pi) - r(0) = \frac{\ell}{1-\varepsilon} - \frac{\ell}{1+\varepsilon} = t \frac{2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$, aminek fele a kör sugara. Mivel a kör középpontja az átmérő végpontjaitól azonos távolságra van, a középpont a vezéregyenestől $\frac{1}{2} \left(\left(t - \frac{\ell}{1-\varepsilon} \right) + \left(t + \frac{\ell}{1+\varepsilon} \right) \right) = t \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$ távolságra helyezkedik el. Ezt az ε excentricitással megszorozva éppen a kör sugara adódik, amiért a kör középpontja ráesik a körre, vagyis sugara 0. Ez ellentmond az $\varepsilon > 0$ és $t > 0$ feltételeknek, tehát a kör nem kúpszelet.

A kúpszeletek első fokális egyenletében az $\varepsilon = 0$ megengedésével minden kör előállítható, ezért a továbbiakban a köröket mégis a kúpszeletek közé soroljuk.

Tétel. *Két kúpszelet akkor és csak akkor*

- (1) *hasonló, ha numerikus excentricitásuk megegyezik,*
- (2) *egybevágó, ha hasonló, és a sugaruk megegyezik.*

Bizonyítás. A kúpszelet akkor és csak akkor kör, ha $\varepsilon = 0$, két kör pedig akkor és csak akkor egybevágó, ha a sugaruk megegyezik. Ha $\varepsilon \neq 0$, akkor a kúpszelet (r, Θ) polárkoordinátájú pontjaira

$$\varepsilon = \frac{\pm r}{r \cos \Theta - t}.$$

Mivel a dilatációk se a szakaszok hosszának arányait, se a szögeket nem változtatják meg, a dilatációk nem változtatják az egyenlet jobb oldalán álló kifejezés értékét, vagyis hasonló kúpszeleteknek azonos a numerikus excentricitásuk.

Bármely két pont-egyenes pár dilatációval egymásba transzformálható, ezért az azonos numerikus excentricitású kúpszeletek fókusz-direktrix párjainak ilyen egymásba transzformálása igazolja, hogy minden azonos numerikus excentricitású kúpszelet hasonló egymáshoz. Ezzel a tétel első állítását igazoltuk.

A hasonlóság akkor és csak akkor izometria, ha a fókusz-direktrix távolság, vagyis a paraméter (sugár) és az excentricitás hányadosa nem változik. Ez igazolja a tétel második állítását. ■

Jegyezzük itt meg, hogy eszerint bármely két parabola hasonló egymással.

A nagytengely felezőpontjára tükrözött fókusz és direktrixet, valamint ugyanazt az excentricitást használva egy az eredetivel egybevágó kúpszeletet kapunk. Ez egybeesik az eredetivel, hiszen tengelymetszeteik egybeesnek.

Tekintsük az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletű ellipszist, ahol $a \geq b$. Ennek fókuszai az origóra szimmetrikusan az x -tengelyen helyezkednek el, így koordinátáik $(\pm c, 0)$

valamely $c \geq 0$ számra. A direktrixek párhuzamosak az y -tengellyel, egyenleteik $x = \pm e$ valamely $e > 0$ számra. Világos, hogy a numerikus excentricitás a fókuszokra kiszámítva $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{e-a}{a-c} = \frac{e+a}{c+a}$. Eszerint $(e-a)(c+a) = (e+a)(a-c)$ vagyis $ec = a^2$, amiből $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{a^2-ac}{ca-c^2} = \frac{a}{c} = \frac{e}{a}$. Az excentricitást a $(0, b)$ pontra kiszámítva $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{e-0}{\sqrt{b^2+c^2}}$ adódik. Eszerint $a^2 = b^2 + c^2$ és így $e = \frac{a^2}{c} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

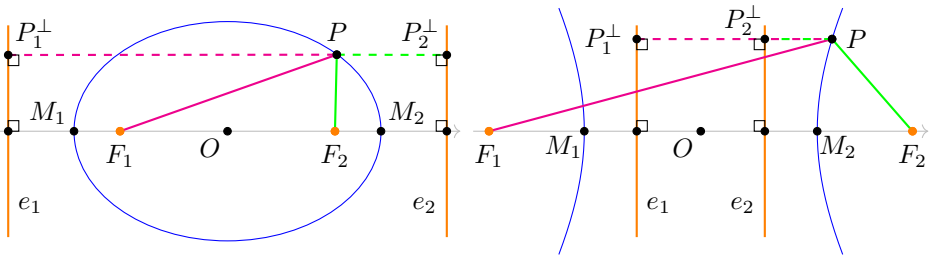
Tekintsük az $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletű hiperbolát, ahol $a \geq b$. Ennek fókuszai az origóra szimmetrikusan az x -tengelyen helyezkednek el, így koordinátáik $(\pm c, 0)$ valamely $c \geq 0$ számra. A direktrixek párhuzamosak az y -tengellyel, egyenleteik $x = \pm e$ valamely $e > 0$ számra. Világos, hogy a numerikus excentricitás a fókuszokra kiszámítva $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{a-e}{c-a} = \frac{e+a}{c+a}$, vagyis $ec = a^2$ és így $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{ac-a^2}{c(c-a)} = \frac{a}{c} = \frac{e}{a}$. Az excentricitást a $(c, \frac{b}{a}\sqrt{c^2-a^2})$ pontra kiszámítva $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{a(c-e)}{b\sqrt{c^2-a^2}}$ adódik. Ebből $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{a(c^2-a^2)}{cb\sqrt{c^2-a^2}} = \frac{a\sqrt{c^2-a^2}}{cb}$. Eszerint $a^2 = b^2 + c^2$ és így $e = \frac{a^2}{c} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

Tétel. Az ellipszis (ezúttal a kör is) azon pontok halmaza, amelyek fókuszoktól mért távolságainak összege a nagytengely hossza.

A hiperbola azon pontok halmaza, amelyek fókuszoktól mért távolságai különbségének abszolút értéke a nagytengely hossza.

Bizonyítás. Legyen egy ε numerikus excentricitású ellipszis két fókusza F_1 és F_2 , az ezekhez tartozó vezéregyenesek pedig legyenek e_1 és e_2 . Legyen P ennek az ellipszisnek tetszőleges pontja, melynek merőleges vetületei az e_1 és e_2 egyeneseken rendre $P_1^\perp$ és $P_2^\perp$. Ekkor az első állítást igazolja, hogy

$$d(F_1, P) + d(P, F_2) = \varepsilon d(e_1, P) + \varepsilon d(P, e_2) = 2\varepsilon d(e_1, e_2) = 2\varepsilon e = 2a.$$



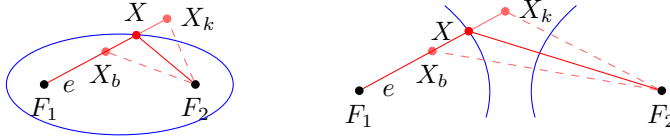
Legyen egy ε numerikus excentricitású hiperbola két fókusza F_1 és F_2 , az ezekhez tartozó vezéregyenesek pedig legyenek e_1 és e_2 . Legyen P ennek a hiperbolának tetszőleges pontja, melynek merőleges vetületei az e_1 és e_2 egyeneseken rendre $P_1^\perp$ és $P_2^\perp$. Ha $d(F_1, P) > d(P, F_2)$, akkor a második állítást igazolja, hogy

$$d(F_1, P) - d(P, F_2) = \varepsilon d(e_1, P) - \varepsilon d(P, e_2) = 2\varepsilon d(e_1, e_2) = 2\varepsilon e = 2a. \quad \blacksquare$$

Tétel. Az ellipszis bármely fókuszából induló minden félegyenesen pontosan egy pont esik az ellipsziszre.

A hiperbola bármely fókuszából induló minden félegyenesen pontosan egy pont esik az hiperbola közelebbi ágára.

Bizonyítás. Vegyük egy fókuszról induló félegyenesen a kúpszelet X pontja által elválasztott X_b és X_k pontokat.



A háromszög-egyenlőtlenség alapján az ellipszis esetén

$$d(F_1, X_b) + d(X_b, F_2) < d(F_1, X_b) + d(X_b, X) + d(X, F_2) = d(F_1, X) + d(X, F_2),$$

$$d(F_1, X_k) + d(X_k, F_2) = d(F_1, X) + d(X, X_k) + d(X_k, F_2) > d(F_1, X) + d(X, F_2),$$

a hiperbola esetén pedig

$$d(F_1, X_b) - d(X_b, F_2) < d(F_1, X_b) + d(X_b, X) - d(X, F_2) = d(F_1, X) - d(X, F_2),$$

$$d(F_1, X_k) - d(X_k, F_2) = d(F_1, X) + d(X, X_k) - d(X_k, F_2) > d(F_1, X) - d(X, F_2),$$

adódik. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

Definíció. Az X a kúpszelet *külső pontja*, ha

- $d(F_1, X) + d(X, F_2) > 2a$ és a kúpszelet egy ellipszis,
- $|d(F_1, X) - d(X, F_2)| < 2a$ és a kúpszelet egy hiperbola,
- $d(F, X) > d(X, e)$ és a kúpszelet egy parabola,

ahol F_1, F_2 a fókuszok, e pedig a parabola direktrixe. A kúpszelethez nem tartozó és nem külső pontokat a kúpszelet *belső pontjának* nevezzük.

A kúpszelet *érintőjének* nevezünk egy egyenest, ha a kúpszelettel közös egyetlen pontján kívül minden pontja külső pont. Az érintő és a kúpszelet egyetlen közös pontját *érintési pontnak* mondjuk. ▲

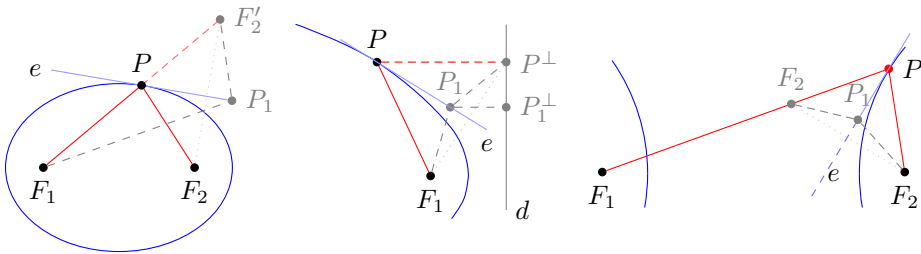
Tétel. Minden $\mathcal{K}$ kúpszeletet minden P pontjában pontosan egy érintője van.

- Az e érintő merőleges a P rádiuszvektorára, ha $\mathcal{K}$ kör;
- Az e érintő felezi a P és a fókuszok háromszögének a P pontnál lévő külső szögét, ha $\mathcal{K}$ nem kör ellipszis vagy $\mathcal{K}$ hiperbola;
- Az e érintő felezi a P pont rádiuszvektora és a P pontból a direktrixre állított merőleges egyenes belső szögét, ha $\mathcal{K}$ parabola.

Bizonyítás. A kör esetében az érintő érintési pontja egyben az érintőnek a kör középpontjához legközelebb eső pontja is, amiért Pitagorasz tételéből következően az érintő merőleges kell legyen az érintési pontot a középponttal összekötő egyenesre. Ilyen egyenes egyetlen van, és a Pitagorasz-tétel miatt tényleg érintő is.

Megmutatjuk, hogy a tételben szereplő szögfelezők valóban érintők.

A kúpszelet valamely P pontjához jelölje e a megfelelő szögfelezőt, F'_2 az F_2 fókuszhoz az e egyenesre vonatkozó tükröképét, illetve parabola esetén $P^\perp$ jelölje a P pontnak a direktrixre vett merőleges vetületét, valamint legyen $P_1 \neq P \in e$ egy további pont az e szögfelezőn.



Ellipszis és hiperbola esetén a szögfelezés miatt az F'_2 pont a PF_1 egyenesre, parabola esetében viszont éppen a direktrixre, a $P^\perp$ pontba esik.

A háromszög-egyenlőtlenség alapján az ellipszis esetében

$$\begin{aligned} d(F_1, P_1) + d(P_1, F_2) &= d(F_1, P_1) + d(P_1, F'_2) \\ &> d(F_1, F'_2) = d(F_1, P) + d(P, F'_2) = d(F_1, P) + d(P, F_2), \end{aligned}$$

a parabola esetében $d(F_1, P_1) = d(P_1, P^\perp) > d(P_1, P_1^\perp)$, mert a $P_1 P_1^\perp P^\perp$ háromszög derékszögű, a hiperbolánál pedig

$$\begin{aligned} d(F_1, P_1) - d(P_1, F_2) &= d(F_1, P_1) - d(P_1, F'_2) \\ &< d(F_1, F'_2) = d(F_1, P) - d(P, F'_2) = d(F_1, P) - d(P, F_2). \end{aligned}$$

Ezen egyenlőtlenségek alapján a P_1 pont mindig külső pont, és ezért az e szögfelező érintő.

Igazoljuk, hogy a kúpszeletek minden pontjához csak egyetlen érintő húzható.

Tekintsünk egy kúpszeletet mint egy kúp $\mathcal{S}$ síkkal vett metszetét, és a kúpszelet valamely X pontjában legyen e egy érintő. Ha a kúp Q csúcsára és az e egyenesre illeszkedő $\mathcal{S}_e$ sík tartalmazza a kúp egy alkotóját, akkor az alkotó és az $\mathcal{S}$ sík metszéspontja — ha van ilyen — az $\mathcal{S}$ és az $\mathcal{S}_e$ sík metszetében van, vagyis az e egyenesre esik. Mivel e egy érintő, az $\mathcal{S}_e$ sík a kúpnak csak az XQ alkotóját tartalmazza. Az $\mathcal{S}_e$ sík a kúp alapsíkját ezért egy olyan egyenesben metszi, amely az alap körét egyetlen pontban metszi, vagyis az alapkörnek érintője. Mivel ez az érintő

egyértelműen meghatározott, az X ponthoz rendelt $\mathcal{S}_e$ sík is egyértelmű, amiből az $e = \mathcal{S} \cap \mathcal{S}_e$ érintő egyértelműsége következik. ■

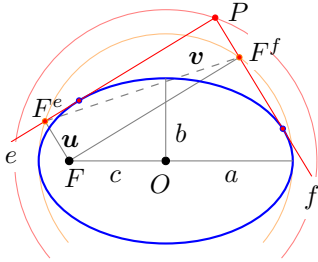
Tételünk bizonyításában láttuk, hogy ha mondjuk, az F_1 fókusz tükörzzük egy érintőre, akkor annak tükörképe éppen az F_2 fókusz körüli $2a$ sugarú körre esik. Ebből következik, hogy az F_1 fókuszhoz az érintőkre vett merőleges vetületei ennek a $2a$ sugarú körnek az F_1 pontból való $1/2$ arányú kicsinyített képén vannak. E kör sugara nyilván a , középpontja pedig az ellipszis O középpontja, hiszen O felezi az $\overline{F_1 F_2}$ szakaszt. Ezt az O középpontú a sugarú kört az ellipszis *főkörének* nevezzük.

Minden ellipszis egy kör affin képe, ezért meglepőnek tűnhet e következő eredmény.

Tétel. *Ha egy ellipszis nagy- és kistengelye rendre $2a > 0$ és $2b > 0$ hosszú, egymásra merőleges érintőinek metszete arra a $\sqrt{a^2 + b^2}$ sugarú körre esik, melynek középpontja az ellipszis középpontjával egyezik meg.*

Bizonyítás. Legyen az ellipszis F fókuszának távolsága az O középponttól c .

Ekkor Pitagorasz tétele szerint $c^2 + b^2 = a^2$.



Tekintsünk most egy olyan P pontot, melyen keresztül az ellipszishez húzott e és f érintők merőlegesek egymásra. Jelölje F^e és F^f rendre az F merőleges vetületeit az e és f érintőkre és legyen $\mathbf{u} = \overrightarrow{FF^e}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{FF^f}$.

Ekkor FF^ePF^f egy téglalap, ezért $\overrightarrow{F^fP} = \mathbf{u}$, $|\mathbf{v}| = d(F, P)$, és

$$\begin{aligned} |P_O|^2 + |F_O|^2 &= |P_O - F_O|^2 + 2\langle P_O, F_O \rangle = |F_O^e - F_O^f|^2 + 2\langle P_O, F_O \rangle \\ &= |F_O^e|^2 + |F_O^f|^2 + 2(\langle P_O, F_O \rangle - \langle F_O^e, F_O^f \rangle) \\ &= |F_O^e|^2 + |F_O^f|^2 + 2(\langle \overrightarrow{OF^f} + \mathbf{u}, \overrightarrow{OF^e} - \mathbf{u} \rangle - \langle \overrightarrow{OF^e}, \overrightarrow{OF^f} \rangle) \\ &= |F_O^e|^2 + |F_O^f|^2 + 2(\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle) = |F_O^e|^2 + |F_O^f|^2. \end{aligned}$$

Eszerint $d(O, P) = |P_O| = \sqrt{a^2 + a^2 - c^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$, hiszen F^e és F^f az ellipszis főkörén van. A bizonyítás teljes. ■

Befejezésül a körök néhány olyan tulajdonságát gyűjtjük össze, melyek e szakaszban már bizonyításra kerültek esetleg az általánosabb ellipszis esetére, vagy az olvasó könnyen bizonyíthatja azok valamelyikéből.

Tétel.

- (1) *Három nem kollineáris pontra pontosan egy körvonal illeszkedik, ami nem más, mint a pontok háromszögének körülírt köre.*

- (2) *A kör középpontjától a kör sugaránál kisebb távolságra lévő pontok alkotják kör belsejét.*
- (3) *A nem a kör belsejéhez és a körvonalhoz tartozó pontok alkotják a kör külsejét.*
- (4) *Ha egy körvonalnak egy másik kör belsejében és külsejében is van pontja, akkor a két körvonal pontosan kettő pontban metszi egymást.*
- (5) *A kör érintői azok az egyenesek, melyeknek pontosan egy közös pontjuk van a körvonallal.*
- (6) *A kör érintői merőlegesek a közös pontbeli sugárra.*
- (7) *Ha két pont egy egyenes ugyanazon oldalán van, akkor pontosan egy körvonal illeszkedik rájuk, amely érinti az adott egyenest.*
- (8) *Két ponthoz és ezeken keresztül egy-egy különböző egyeneshez pontosan egy olyan kör van, mely az adott pontokban az azon átmenő adott egyeneseket érinti.*

Jegyezzük meg továbbá, hogy az érintő és a kör közös pontját *érintési pontnak* nevezzük. Két kört pedig *koncentrikusnak* hívunk, ha közös a középpontjuk.

3.6. Körök, szögek és körtartó transzformációk

A körök, a szögek és a távolságok arányai közötti közeli kapcsolatra már láttunk jeleket ebben a könyvben

A következő két tétel tovább erősíti a gondolatot, hogy e hármas — a kör, a szög és a távolságarányok — mélyebb kapcsolatban vannak egymással.

Egy szakasz a végpontjain átmenő minden kört két, az egyenesére nézve különböző partosságú részre, az úgynevezett *körívekre* oszt. A körívek két végpontját összekötő szakaszt a kör *húrjának* hívjuk.

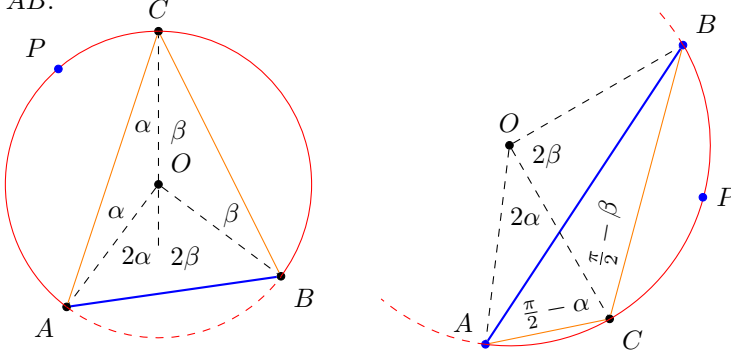
Azt az α irányítatlan szöget, amelyet azon két félegyenes határoz meg, amelyek egy adott P pontból indulnak és átmennek a szakasz két végpontján, a szakasz P pontbeli *látószögének* nevezzük. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a szakasz a P pontból α szög alatt látszik.

Látószög-tétel. *Legyen adott egy $\gamma \neq 0$ szög és egy $\overline{AB}$ szakasz. Ekkor létezik olyan P pont, melyből az $\overline{AB}$ szakasz γ szög alatt látszik.*

Azon pontok halmaza, melyekből az $\overline{AB}$ szakasz γ szög alatt látszik, az A, B és P pontokra illeszkedő körnek az a köríve, és annak az AB egyenesre vett tükörképe, amely AB -partos a P ponttal.

Bizonyítás. A szinusz-tétel értelmében az $\overline{AB}$ szakaszfelező f merőlegesén az a P pont, mely a $T = f \cap \overline{AB}$ ponttól $d(T, B) \cos(\gamma/2) / \sin(\gamma/2)$ távolságra van, éppen megfelel az első állítás feltételének.

Legyen O az f és a $\overline{PA}$ szakaszfelező merőlegesének metszéspontja. Ez egyenlő távolságra van az A, B és P pontoktól, tehát azt a körívet kell vizsgálnunk, amely körének középpontja O , átmegy az A, B és P pontokon, és g -partos a P ponttal, ahol $g = AB$.



Legyen ennek a körívnek egy tetszőleges pontja C . Nyilván a C és P pontok g -partosak, és C is két, egyenlő szárú háromszöget alkot az A, B pontokkal és a kör O középpontjával, ahogy minden ezen a köríven lévő pont.

Attól függően, hogy a C pont az O ponttal g -partos vagy se, a COA és COB egyenlőszárú háromszögek O csúcsánál lévő külső vagy belső szögeinek összege éppen az $\overline{AB}$ szakasz O pontbeli látószöge.

Bármely egyenlő szárú háromszög csúcsánál lévő belső, illetve külső szög a két alapon lévő egyenlő szög összege, illetve az összeg kiegészítő szöge. Eszerint az $\overline{AB}$ szakasz látószöge a C pontból fele akkora, mint az O pontbeli látószög, vagy annak kiegészítő szöge. Ezt alkalmazva a P pontra is, adódik, hogy az $\overline{AB}$ szakasz látószöge a C pontból egyenlő a P pontbeli γ szöggel.

Világos, hogy a P pontot tartalmazó körívet tükrözve a g egyenesre, ugyanazon látószögeket kapjuk.

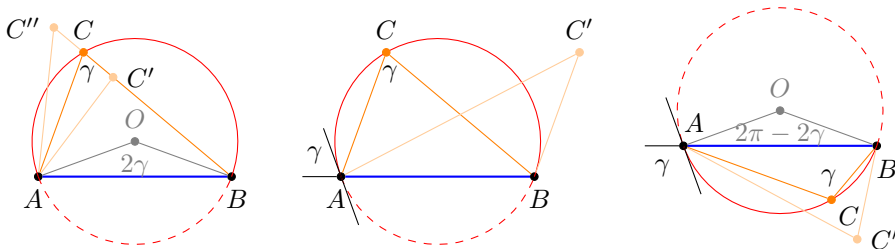
Most igazoljuk, hogy a megadott körívekre nem illeszkedő C pontokra a látószög aszerint nagyobb vagy kisebb, mint γ , hogy a C ponttal AB -partos körívnek a körén belül, vagy kívül vannak.

Először figyeljük meg, hogy az A és B pontokban a körívek érintői éppen γ szöget zárnak be a g egyenessel, mert az AOB egyenlő szárú háromszög csúcsánál lévő szöge 2γ vagy $2\pi - 2\gamma$, így az alapon fekvő szöge $\pi - \gamma$ vagy γ .

Tekintsünk egy $C' \notin g$ pontot.

Ha C' a vele g -partos körön belül van, és C a $C'B$ egyenesnek a körívvel vett nem B metszete, akkor $C' \in \overline{CB}$, és az ACC' háromszög C pontnál lévő belső szöge γ . A C' pontnál lévő $\sphericalangle(AC'B)$ ennek az ACC' háromszögnek külső szöge, így nagyobb mint γ .

Ha C' a vele g -partos körön kívül van, és a $\overline{C'B}$ szakasznak van C' ponttal g -partos körívvel metszete, akkor ezt a metszetet jelölje C . Így $C \in \overline{C'B}$, és az ACC' háromszög C pontnál lévő külső szöge γ . A C' pontnál lévő belső szög ezért kisebb mint γ .



Ha C' a vele g -partos körön kívül van, és a $\overline{C'B}$ szakasznak nincs a C' ponttal g -partos körívvel metszete, akkor az ABC' háromszög B csúcsánál lévő külső szöge legfeljebb γ . Ez azért következik, mert a B pontban az érintő éppen γ szöget zár be a g egyenessel, hiszen az érintőre merőleges OB egyenes a g egyenessel $\pi/2 - \gamma$ szöget zár be, ha az O pont g -partos a P ponttal, és γ szöget zár be, ha az O pont nem g -partos a P ponttal. Mivel tehát az ABC' háromszög B csúcsánál lévő külső szöge legfeljebb γ , az $AC'B$ háromszög C' csúcsánál lévő belső szöge is kisebb, mint γ .

Eszerint csakis a köríven lévő pontokra teljesül, hogy a látószög megegyezik a P pontnál lévő látószöggel, amivel a bizonyítást befejeztük. ■

Fontos megjegyezni, hogy a bizonyítás a tételnél többet ad, mert a megadott szögnél kisebb illetve nagyobb látószöggel rendelkező pontok halmazát is megadja.

A derékszögű látószög speciális esete különösen fontos, habár korábban már másként bizonyítottuk.

Thalész tétele. Egy szakasz mint átmérő fölé írt kör pontosan azokat a pontokat tartalmazza, amelyekből a szakasz két végpontja derékszög alatt látszik.

A tételben szereplő kört *Thalész-körnek* is nevezik.

Apollóniosz tétele. Legyen a síkban adott az A és B pont, és legyen $0 < \lambda \neq 1$ valós szám. Azon P pontok halmaza, melyekre $d(A, P) = \lambda d(P, B)$, egy olyan K körvonal, melynek ϱ sugarára és K középpontjára

$$\varrho = \frac{\lambda d(A, B)}{|\lambda^2 - 1|}, \quad \text{és} \quad (ABK) = -\lambda^2.$$

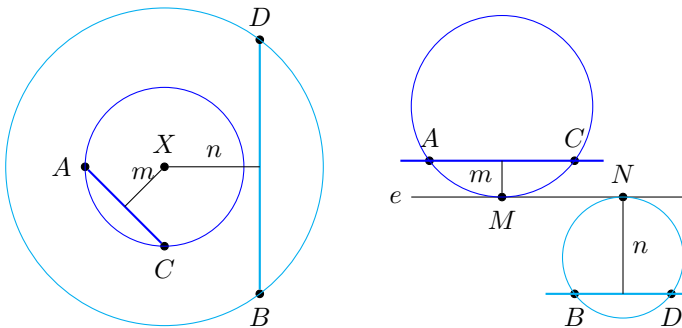
Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges P pontot, melyre $d(A, P) = \lambda d(P, B)$. Messe az $\sphericalangle(APB)$ szögfelezője az AB egyenest a C pontban, a P pontra illeszkedő PC egyenesre merőleges egyenes pedig messe az AB egyenest a D pontban.

Ugyanezt mondjuk az egy körre illeszkedő A, B, C és D pontokra, ha az A és C pontok két ívének mindegyike pontosan egy pontot tartalmaz a B és D pontok közül.

Tétel.

- (1) Ha az A, B, C és D pontok nem illeszkednek egy egyenesre vagy egy körre, akkor létezik két, egymást nem metsző kör úgy, hogy az egyik az A, C , a másik a B, D pontokra illeszkedik.
- (2) A kollineáris A, B, C és D pontok akkor és csak akkor választják el egymást, ha nem létezik két, egymást nem metsző kör melyek egyike az A, C , másika a B, D pontokra illeszkedik.
- (3) Az egy körre illeszkedő A, B, C és D pontok akkor és csak akkor választják el egymást, ha nem létezik két, egymást nem metsző kör melyek egyike az A, C , másika a B, D pontokra illeszkedik.

Bizonyítás. (1) bizonyításához vegyük észre, hogy az $\overline{AC}$ és $\overline{BD}$ szakaszokat felező m és n merőlegesek nem eshetnek egybe, hiszen akkor a négy pont egy körre vagy egyenesre illeszkedne.

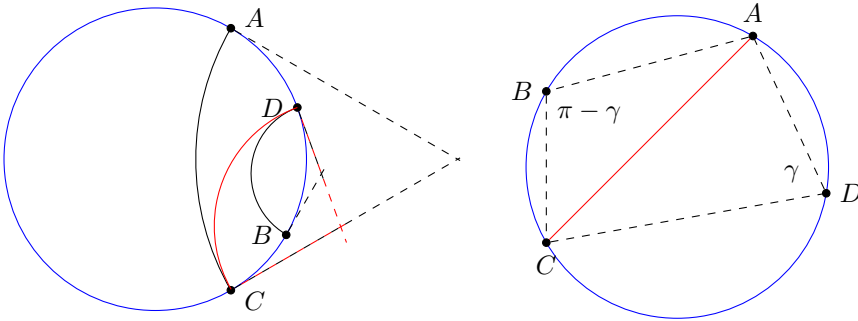


Ha most a két felezőmerőleges metszi egymást valamely X pontban, akkor az A és C pontok távolsága az X ponttól nem lehet egyenlő a B és D pontok X ponttól mért távolságával, hiszen akkor a négy pont egy körre illeszkedne. Ebből viszont következik, hogy X létezése esetén az X középpontú A ponton átmenő, és az ezzel koncentrikus B pontra illeszkedő körök megfelelnek az (1) állításának.

Ha viszont a két felezőmerőleges nem metszi egymást, akkor az AC egyenes párhuzamos a BD egyenessel, így van egy olyan e egyenes, amely ezekkel párhuzamos és mindkettőt különböző félsíkjában tartalmazza. Messe ez az egyenes az n egyenest az N pontban, az m egyenest az M pontban. Az ANC és a BMD ponthármak által meghatározott körök nem metszhetik egymást, mert az $M \neq N$ pontok kivételével az e egyenes különböző oldalán vannak, ezért ezek a körök megfelelnek az (1) állításának.

A (2) bizonyításához elegendő megjegyezni, hogy a kör konvex, tehát minden húrjának minden pontja a belsejében van, így ha a pontok elválasztják egymást, akkor a B pont minden az A és C pontokra illeszkedő körnek belső pontja, a D pedig külső pontja, mert nincsen rajta az $\overline{AC}$ húron. Ebből következik, hogy minden az A és C pontokra illeszkedő kör és minden a B és D pontokra illeszkedő kör metszi egymást. Ha a pontok nem választják el egymást, akkor az AC és a BD szakaszra rajzolt Thalész-körök nem metszik egymást.

A (3) állításnál, ha a pontok az O középpontú körön nem választják el egymást, akkor a nem metsző körök középpontjának az A és C pontokba illetve a B és D pontokba húzott érintőpárok metszéspontjait használhatjuk. Ha az egyik ilyen metszéspont nem jön létre, akkor az egyik érintőn egy a körtől elegendően távol lévő pontot használunk. Ezek a körök nem metszik egymást, hiszen a D és C ponton átmenő, azokban rendre a BD és AC köreit érintő kör a BD körét tartalmazza, de belül van az AC körén.



Ha a pontok elválasztják egymást, akkor az $\overline{AC}$ húr a B , illetve a D pontból egymást kiegészítő szög alatt látszik, így bármely az $\overline{AC}$ húrra rajzolt kör egyik látószöge kisebb, a másik pedig nagyobb lesz, mint a B és D pontokból mért látószög, tehát az egyik a körön belül, a másik a körön kívülre kerül.

Ezzel a tétel minden állítását minden esetben beláttuk. ■

Tétel. (Radon) *Az egymástól különböző AC és BD pontpárok akkor és csak akkor választják el egymást, ha az A és C ponton átmenő minden kör metszi a B és D ponton átmenő összes kört.*

Az egymástól különböző AC és BD pontpárok akkor és csak akkor választják el egymást, ha $\overline{AC} \cap \overline{BD} \neq \emptyset$.

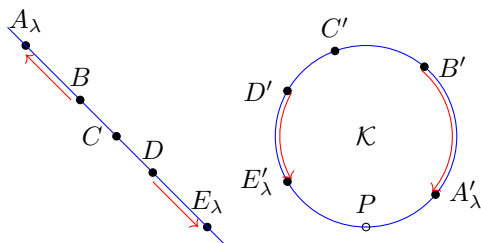
Ennek könnyű bizonyítása az olvasóra marad, de máris alkalmazzuk a körtartó transzformációkra, hiszen ezen eredmény szerint a körtartó transzformációk az elválasztást is tartják.

Tétel. *A sík bijektív, körtartó transzformációi dilatációk.*

Bizonyítás. Legyen φ egy bijektív, körtartó transzformáció.

Tegyük fel, hogy $C \in \overline{BD}$, és a $B' = \varphi(B)$, $C' = \varphi(C)$ és $D' = \varphi(D)$ pontok nem kollineárisak. Legyen $\mathcal{K}$ a $B'C'D'$ háromszög köré írt kör.

Tekintsük azt az A^λ és E^λ pontot, melyre $A_C^\lambda = \lambda \cdot B_C$ és $E_C^\lambda = \lambda \cdot D_C$.



Ekkor az A^λ, B, C és D pontok, valamint a B, C, D és E^λ pontok is elválasztják egymást minden $1 < \lambda$ valós számra, sőt pontosan ezek azok a pontok, melyek a B, C, D pontokkal együtt elválasztják egymást. Sőt, nyilvánvalóan a λ és az A^λ és E^λ pontok rendezése monoton kapcsolatban van, vagyis

$1 < \mu < \lambda$ esetén $C \prec D \prec E^\mu \prec E^\lambda$ és $E^\lambda \prec E^\mu \prec C \prec B$ pontnégyesek elválasztják egymást.

Az elválasztás tartása miatt $A'_\lambda = \varphi(A^\lambda)$ és $E'_\lambda = \varphi(E^\lambda)$ pontok olyanok, hogy az A'_λ, B', C', D' és B', C', D', E'_λ pontnégyesek is elválasztják egymást minden $1 < \lambda$ valós számra, valamint az A'_λ és E'_λ pontok rendezése is monoton kapcsolatban van a λ számmal. Minthogy az A^λ, B, D és E^λ pontok mindig elválasztják egymást, ugyanez igaz az $A'_\lambda, B', D', E'_\mu$ pontokra is, ezért minden A'_λ pont a B', E'_μ íven van, és minden E'_μ pont a A'_λ, D' íven van minden $1 < \mu$ és $1 < \lambda$ esetén.

Eszerint léteznek az A'_λ és az E'_μ pontok halmazának nem a B és D pontokba eső A'_0 és E'_0 határai, és ezekre A'_0, B', D', E'_0 elválasztják egymást. Következésképpen van olyan X' pont, melyre $A'_\lambda, Y', E'_\lambda, X'$ elválasztják egymást minden $Y \in \{B, C, D\}$ és minden $1 < \lambda$ esetén.

A bijektivitás miatt létezik egy X pont, melyre $X' = \varphi(X)$. Az X nem lehet az AB egyenesen, hiszen azon nincsen olyan pont, amire $A^\lambda, Y, E^\lambda, X$ elválaszthatná egymást minden $Y \in \{B, C, D\}$ és minden $1 < \mu$ és $1 < \lambda$ esetén (ugyanis X nem lehet a $\overline{BD}$ szakaszon, viszont elegendően nagy $1 < \lambda$ esetén mindenképpen bele fog esni az $\overline{A^\lambda E^\lambda}$ szakaszba).

Mivel X nem esik a BCD egyenesre, a B, C, D, X pontok sem egy egyenesre, sem egy körre nem esnek, tehát nem is választják el egymást, ami ellentmond annak, hogy a B', C', D', X' pontok viszont elválasztják egymást.

Az a feltevésünk tehát, hogy kollineáris pontok transzformáltja lehet nem kollineáris is, ellentmondásra vezetett, ami azt bizonyítja, hogy φ egyenességtartó.

Eszerint φ egy körtartó kollineáció. A kollineációk tartják a paralelogrammákat, a körtartó leképezések pedig a négyszögek körbeírhatóságát, így téglalap φ melletti téglalap. Mivel bármely derékszögű háromszög kiegészíthető téglalappá, a derékszögű háromszögeket is tartja a φ . Ez azt jelenti, hogy a derékszögeket tartja,

akkor viszont a négyzeteket is, hiszen az olyan téglalap, melynek az átlói merőlegesek egymásra. Ezért, ha ABC egy egyenlő szárú derékszögű háromszög, akkor a $\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)$ háromszög is egyenlő szárú derékszögű háromszög.

Egy kollineációt viszont meghatároz három pont és a képe, ami jelen esetben nyilván egy $B \mapsto \varphi(B)$ eltolásból, egy B körüli forgatásból, ami a BC félegyenest a $\varphi(B)\varphi(C)$ félegyenestbe viszi, és egy B_λ centrális dilatációból rakható össze, ahol $\lambda = d(\varphi(B), \varphi(C))/d(B, C)$, hiszen $\varphi(A)$ épp akkora távolságra van a B ponttól, mint a $\varphi(C)$.

Ezzel az állítást beláttuk. ■

3.7. Inverzió

Inverzív síknak nevezzük az $\mathcal{S}$ sík egy formális ∞ ponttal való bővítését, vagyis az $\mathcal{S} \cup \{\infty\}$ halmazt, ahol a ∞ pontot minden egyenesre illeszkedőnek tételezzük fel.

Definíció. Az O középpontú ϱ sugarú $\mathcal{K}$ körre vonatkozó *inverzió*-nak nevezzük az $\iota: \mathcal{S} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathcal{S} \cup \{\infty\}$ leképezést, melyre

$$\iota(P) = \begin{cases} P', & \text{ahol } P'_O = P_O \varrho^2 / d^2(P, O), \text{ ha } P \neq O \text{ és } P \neq \infty, \\ \infty, & \text{ha } P = O, \text{ és} \\ O, & \text{ha } P = \infty. \end{cases}$$

A $\mathcal{K}$ kört és O pontot az inverzió *alapkörének*, illetve *középpontjának* nevezzük. ▲

Könnyű megfigyelni, hogy az inverzió

- (1) bijektív;
- (2) fixpontjai pontosan az alapkörének pontjai;
- (3) az alapkörének belső pontjait az alapkörön kívülre viszi;
- (4) az alapkörének külső pontjait az alapkörön belülre viszi;
- (5) a középpontján átmenő egyenesek középpontján kívüli pontjainak halmazát invariánsan hagyja.

Azt is könnyű látni egy kis számolással és az azonos szögű derékszögű háromszögek hasonlóságát használva, hogy

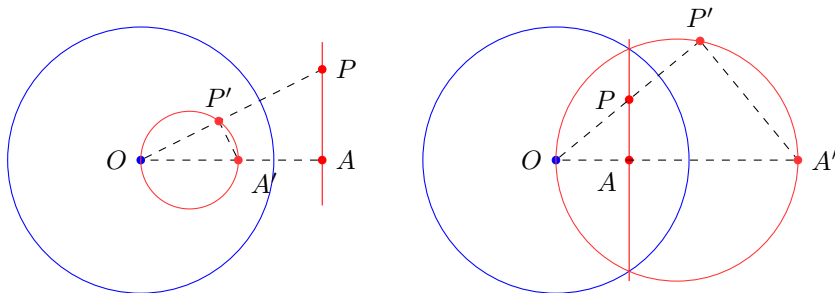
- (6) az azonos O középpontú, ϱ_1 , illetve ϱ_2 sugarú körre vonatkozó ι_1 és ι_2 inverziók $\iota_2 \circ \iota_1$ szorzata egy $\lambda = (\varrho_2/\varrho_1)^2$ együtthatós O_λ centrális dilatáció;
- (7) ha az alapkörön kívüli P pont alapkörhöz húzott érintője a T pontban érinti az O középpontú alapkört, akkor az OPT derékszögű háromszög T csúcsának az OP oldalegyenesre vett merőleges vetülete a P pont képe.

Tétel. Az *inverzió*

- (8) a középpontján nem átmenő egyenest a középpontján átmenő körbe viszi;

- (9) a középpontján átmenő kört a középpontján nem átmenő egyenesbe viszi;
 (10) a középpontján nem átmenő kört a középpontján nem átmenő körbe viszi.

Bizonyítás. A (8) igazolásához tekintsünk egy egyenest, amely nem megy át az inverzió O középpontján. Legyen az O merőleges vetülete erre az egyenesre A , ennek az ι inverzió melletti képe A' .



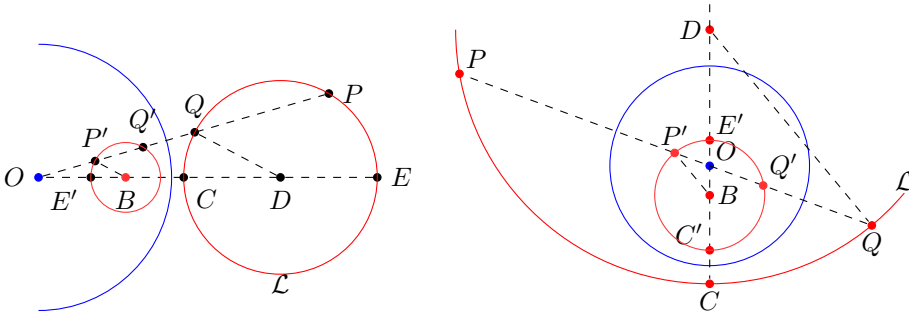
Az egyenesen vett bármely P pontnak legyen az inverze P' . Ekkor az inverzió szerinti $d(O, P)d(O, P') = \varrho^2 = d(O, A)d(O, A')$ egyenlőség miatt $d(O, P)/d(O, A) = d(O, P')/d(O, A')$ adódik. Mivel az OAP és $OP'A'$ háromszögeknek az O pontnál közös szögük van, az OAP háromszög hasonló az $OP'A'$ háromszöghöz. Mivel az OAP háromszög derékszögű, és derékszöge az A pontnál van, a P' pontból az $\overline{OA'}$ szakasz derékszög alatt látszik, vagyis az egyenes képe az $\overline{OA'}$ szakasz fölötti Thalész-kör.

Mivel a fentiek szerint az egyenes és a Thalész-kör között bijektív kapcsolat jön létre (az O ponton átmenő egyenesek egyszerre metszik őket, és akkor mindkettőt pontosan egy pontban), az is igaz, hogy a Thalész-kör képe az egyenes, amiért a (8) és (9) is teljesül.

Tekintsünk most egy olyan D középpontú $\mathcal{L}$ kört, amely nem megy át az ι inverzió O középpontján. Ha $D = O$, akkor az $\mathcal{L}$ kör képe egy vele koncentrikus, tehát az O pontot szintén nem metsző kör lesz, ezért innentől csak a $D \neq O$ esetet vizsgáljuk.

Legyen az OD egyenes metszete ezzel a körrel a C és E pont. Legyen P egy tetszőleges pont az $\mathcal{L}$ körön, és messe az $\mathcal{L}$ kör az OP egyenest még a Q pontban is, ami érintő esetén megegyezik a P ponttal.

Ekkor az OPC és OQE háromszögek hasonlóak, hiszen van egy közös szögük az O pontnál, továbbá a P pontnál és az E pontnál egyforma a szögük a $\overline{CQ}$ szakasz látókörén. Eszerint $d(O, Q)/d(O, C) = d(O, E)/d(O, P)$, vagyis $d(O, Q)d(O, P) = d(O, E)d(O, C)$ állandó.



Legyen $\lambda = \frac{\varrho^2}{d(O,E)d(O,C)}$, ahol ϱ az inverzió alapkörének sugara. Legyen $P' = O_\lambda(Q)$. Ekkor az $\mathcal{L}$ kör minden P pontjára $d(O, P')d(O, P) = \varrho^2$, tehát $P' = \iota(P)$, és a P' pontok éppen az $\mathcal{L}$ kör O_λ melletti képén vannak, ami természetesen kör, és ezzel a (10) állítást bebizonyítottuk. ■

A bizonyítás közben felfedezett, de a jelen könyvben terjedelmi okokból nem tárgyalt, $d(O, Q)d(O, P) = d(O, E)d(O, C)$ állandó az O pontnak az $\mathcal{L}$ körre vonatkozó hatványaként ismert.

Az egyenesek és a körök közös halmazát a *kögyenesek* halmazának mondjuk, elemeiket pedig *kögyenesnek* nevezzük. Egy kögyenes tehát egyenes vagy kör, és minden egyenes, illetve minden kör is kögyenes. Két metsző kögyenes *szögén* azt a szöget értjük, amelyet a metszéspontjukban őket érintő két egyenes zár be.

Ezzel a fogalommal az inverzió egy kögyenest tartó bijekció az inverzív síkon.

Tétel. (11) *Az inverzió tartja a kögyenesek szögét.*

Bizonyítás. Egy egyenes inverzív képe mindig átmegy az origón, és a kép origóbeli érintője párhuzamos az eredeti egyenessel, ezért két egyenes szöge megegyezik képeik szögével.

Az inverzió tartja az érintőket és a kögyenesek szögét mindig a metszéspontjukban húzott érintők határozzák meg. Az egyenesek szögét az inverziók tartják, ami a tételt bizonyítja. ■

A körtartásra már ismert tétel átvihető a kögyenest tartó leképezésekre.

Tétel. *Az inverzív síkon minden bijektív, kögyenest tartó φ leképezéshez van olyan O pont, hogy φ egy O pontot fixen hagyó dilatació, vagy egy O pontot fixen hagyó dilatació és egy O középpontú inverzió szorzata.*

Bizonyítás. Ha a ∞ pont képe a φ mellett az O pont, akkor vegyünk egy O középpontú ι inverziót, és legyen $\phi = \iota \circ \varphi$. A ϕ leképezés is bijektív kögyenestartó leképezés az inverzív síkon, és $\phi(\infty) = \infty$.

Mivel $\phi(\infty) = \infty$, az egyenesek képe csak egyenes, a körök képe csak kör lehet, hiszen a köröknek nem eleme a ∞ pont. Tehát ϕ egy bijektív körtartó kollineáció, amiről már bizonyítottuk a körtartó leképezéseknél, hogy dilatáció. Ezzel a tételt beláttuk. ■

A sík azon leképezéseit, amelyek tartják a szögeket, *szögtartónak* vagy *konformnak* nevezzük. Míg az affin sík kollineációi közül a dilatációk a szögtartók, addig az inverzív síkon minden kögyenestartó bijektív leképezés szögtartó.

3.8. Transzformációcsoportok és szabályos pontrendszerek

Bár ebben a szakaszban csak a síkról lesz szó, sok bemutatott fogalom és néhány eredmény a térben is használható illetve bizonyítható. Gyakran fogjuk használni az eltolások és vektoruk, illetve a forgatások és szögük összefüggéseinek vizsgálatokor bevezetett ε_u^t jelölést a tu vektorú eltolásra és a φ_O^α jelölést az O pont körüli α szögű forgatásra.

Tétel. *Egy csak forgatásokból álló csoport minden nem identikus elemének ugyanaz a középpontja.*

Ha egy forgatásokból álló Φ csoport véges (a 2π szöggel eltérő forgatásokat nem tekintjük különbözőnek), akkor ciklikus, és valamely O pontra és $n \in \mathbb{N}$ számra $\Phi = \{\varphi_O^{2k\pi/n} : k = 0, 1, \dots, n-1\}$.

Bizonyítás. Legyen Φ egy forgatásokból álló csoport. Ha valamely két különböző $A \neq B$ pontra Φ tartalmaz egy φ_A^α és egy φ_B^β nem identikus forgatást, akkor a $\varphi_C^\gamma = \varphi_A^\alpha \varphi_B^\beta$ és $\varphi_D^\delta = \varphi_B^\beta \varphi_A^\alpha$ forgatások is az Φ csoportban vannak.

Világos, hogy $\varphi_D^\delta = \varphi_B^\beta \varphi_C^\gamma \varphi_B^{-\beta} = \varphi_{\varphi_B^\beta C}^\gamma$, ezért egyfelől $\delta = \gamma$, másfelől $D = \varphi_B^\beta C$. Ugyanígy $\varphi_C^\gamma = \varphi_A^\alpha \varphi_D^\delta \varphi_A^{-\alpha} = \varphi_{\varphi_A^\alpha D}^\gamma$, amiért $C = \varphi_A^\alpha D$.

Mivel $\varphi_C^\gamma, \varphi_D^\delta \in \Phi$, következik, hogy $\varphi_D^{-\delta} \in \Phi$, és a $\varphi_D^{-\delta} \varphi_C^\gamma$ szorzat is az Φ csoporthoz tartozik. Ez a szorzat egy eltolás, így csak a Φ csoportban csak úgy lehet, ha identikus, vagyis $\varphi_C^\gamma = \varphi_D^\delta$, amiből $C = D$ következik. Minthogy $D = \varphi_B^\beta C$ és $C = \varphi_A^\alpha D$, $B = C = D = A$ adódik, tehát az Φ csoport minden eleme ugyanazon pont körüli forgatás. Ez a tétel első állítása.

Legyen a továbbiakban Φ véges csoport, melynek elemei egy O pont körüli φ_O^α forgatások, ahol $0 \leq \alpha < 2\pi$. Legyen α a legkisebb pozitív szög, melyre $\varphi_O^\alpha \in \Phi$.

Világos, hogy $\varphi_O^\alpha \in \Phi$ esetén $\varphi_O^{m\alpha} = (\varphi_O^\alpha)^m$ is Φ eleme minden $m \in \mathbb{N}$ természetes számra, amiért az inverzelem léte miatt minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $\varphi_O^{k\alpha} \in \Phi$. Az Φ csoport végeessége miatt így lenni kell olyan $k, m \in \mathbb{N}$ számoknak, melyekre $\varphi_O^{k\alpha} = \varphi_O^{m\alpha}$, amiért $\varphi_O^{(m-k)\alpha} = \text{id}$, vagyis $(m-k)\alpha = 2\pi$. Legyen $n \in \mathbb{N}$ az a legkisebb természetes szám, melyre $n\alpha = 2\pi$.

Ha $\varphi_O^\beta \in \Phi$, akkor a $\varphi_O^\gamma = \varphi_O^\beta \varphi_O^{-\alpha[\beta/\alpha]}$ forgatás is Φ eleme, de $\beta \neq \alpha[\beta/\alpha]$ esetén, $0 < \gamma = \beta - \alpha[\beta/\alpha] < \alpha$ lenne, ami lehetetlen, mert α a legkisebb előforduló szög, ezért $\beta = \alpha[\beta/\alpha]$, ami igazolja a tétel második állítását. ■

Legyen Σ az izometriák egy részcs csoportja. Egy P pont Σ melletti *pályáján* a $\Sigma(P) = \{\iota(P) : \iota \in \Sigma\}$ halmazt értjük.

Egy ι izometriát egy $\mathcal{P}$ ponthalmaz *szimmetriájának* mondunk, ha $\iota(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{P}$. E tartalmazásra alkalmazva az ι izometriát $\mathcal{P} \subseteq \iota^{-1}(\mathcal{P})$ következik, amit összevetve a kiindulási tartalmazással, azt kapjuk, hogy minden szimmetriára $\iota(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.

Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{P}$ ponthalmaz az izometriák valamely Σ csoportjára nézve *invariáns*, ha $\mathcal{P}$ minden pontjának pályája a $\mathcal{P}$ ponthalmazon belül marad. Világos, hogy ekkor Σ elemei a $\mathcal{P}$ ponthalmaz szimmetriái.

Ha ι_1 és ι_2 a $\mathcal{P}$ szimmetriái, akkor $\iota_1(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$, és $\iota_2(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$, amiért $\iota_2(\iota_1(\mathcal{P})) = \mathcal{P}$ is teljesül, ezért a $\mathcal{P}$ ponthalmazt szimmetriái csoportot alkotnak.

Definíció. Egy ponthalmaz *szimmetriacsoportján* a szimmetriái csoportját értjük. ▲

A szimmetriacsoport tehát az izometriacsoport legbővebb, a ponthalmazt invariánsan hagyo részcs csoportja. Figyeljük meg, hogy a $\mathcal{P}$ ponthalmaz izometrikus transzformációi izomorfiától eltekintve nem változtatják meg a szimmetriacsoportot, hiszen $\iota'(\zeta(\mathcal{P})) = \zeta(\mathcal{P})$ akkor és csak akkor, ha $\zeta^{-1} \circ \iota' \circ \zeta(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$, vagyis az $\iota \mapsto \zeta \circ \iota \circ \zeta^{-1}$ konjugálás a régi szimmetriacsoportot az újra képezi. Ez a leképezés viszont nyilván izomorfizmus az izometriák csoportjában, így annak minden részcs csoportján is.

Világos, hogy korlátos ponthalmaz esetén a szimmetriacsoport nem tartalmazhat sem eltolást, sem csúsztatva tükrözést, és — éppen ezért — a szimmetriacsoportban lévő összes tükrözés tengelyének egy közös pontra kell illeszkednie, valamint ezen tükrözéseken túl csak ezek közös pontja körüli forgatásokat tartalmazhat, melyek ezen tükrözések szorzataiból állnak.

A szimmetriacsoportbeli mozgásokat *fedőmozgásoknak*, ezek csoportját *fedőcsoportnak* nevezzük.

Véges ponthalmaz szimmetriacsoportja véges, hiszen ekkor a szimmetriacsoport izomorf a $\mathcal{P}$ teljes permutációcsoportjának valamely nem feltétlenül valódi részcs csoportjával.

Például a szabályos háromszög csúcsai halmazának szimmetriacsoportja a három elemű halmaz teljes permutációcsoportja. Ennek igazolására sorszámozza 1, 2 és 3 a háromszög csúcsait, legyen O a háromszög középpontja, egyben a csúcsokon átmenő magasságvonalak metszete, melyekre vonatkozó tengelyes tükrözést jelölje

τ_i , ha a magasságvonal éppen az i -vel számozott csúcson megy át. Ekkor a

$$\begin{array}{cccccc} \text{id} & \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 & \varphi_O^{2\pi/3} & \varphi_O^{-2\pi/3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

leképezés egy izomorfizmus a szimmetriacsoportról három elem teljes permutációcsoportjára. Jegyezzük meg azt is, hogy $\varphi_O^{2\pi/3} = \tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_3 = \tau_3\tau_1$ és $\varphi_O^{-2\pi/3} = \tau_2\tau_1 = \tau_3\tau_2 = \tau_1\tau_3$.

Euklidészi síkon egy sokszöget *szabályosnak* mondunk, ha minden rendezett csúcs- vagy élpárjához van olyan szimmetriája, mely a pár első elemét a másodikban viszi. Ilyen szabályos sokszöget kapunk, ha csúcsait egy $P \neq O$ pontnak a ciklikus $\Phi = \{\varphi_O^{2k\pi/n} : k = 0, 1, \dots, n-1\}$ ($n \in \mathbb{N}$) forgáscsoport szerinti pályája elemeiként adjuk meg sorban. Az O ponto a szabályos *sokszög középpontjának* nevezzük.

Tétel. *A szabályos n -szög csúcsai halmazának szimmetriacsoportja $2n$ elemű.*

Bizonyítás. Világos, hogy a szabályos n oldalú sokszögnek szimmetriatengelyei

- az oldalal oldalfelező merőlegesei, és
- páros n esetén az egymással szemben található csúcspárok egyenesei.

Ez összességében paritástól függetlenül n szimmetriatengelyt jelent. Ezek közül egyhez valamely másikat választva kapjuk a forgatásokat. Az identikus leképezéssel ez $1 + n + n - 1 = 2n$ izometriát ad.

Most igazoljuk, hogy nincs további izometria a szimmetriacsoportban.

A szabályos n oldalú sokszög minden pontja egyforma távolságra van a sokszög középpontjától, ezért ez a pont a szimmetriacsoport minden elemének fixpontja, vagyis minden szimmetriatengely és minden forgatás középpontja a sokszög középpontjára illeszkedik.

A tengelyekre vonatkozó tükrözések a tengelyre nem eső, ahhoz legközelebbi csúcspontot egy ugyanolyan távolságra lévő csúcspontba kell vigyék, amiért ha a tengelyre nem esik csúcspont, akkor ez a két pont a sokszög egy oldalát alkotja.

Ha a csoportban lévő valamely forgatást úgy állítunk elő két tükrözés szorzataként, hogy az egyik tükrözés tengelye a felsoroltak közül kerül ki (ezt megtehetjük, hiszen az egyik tengelyt szabadon választjuk), akkor a másik tükrözés is a csoport eleme kell legyen (hiszen előáll a csoportbeli forgatás és egy csoportbeli tükrözés szorzataként), így a fentiek szerint annak tengelye is a felsoroltak közé kell essen. Ezzel az állítást igazoltuk. ■

Definíció. Egy $\mathcal{P}$ ponthalmazt *szabályosnak* nevezzük, ha minden $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ pontpárhoz létezik a $\mathcal{P}$ szimmetriacsoportjában olyan ι izometria, mely az első pontot a másodikba viszi, vagyis $\iota(P_1) = P_2$. ▲

Vegyük észre, hogy szabályos ponthalmaz minden egyes pontjának a szabályos ponthalmaz szimmetriacsoportja melletti pályája az egész szabályos ponthalmaz.

Véges szabályos ponthalmazok a szabályos n -szögek csúcshalmazai, de ide tartozik a téglalap csúcshalmaza is, és minden egy, illetve kettő elemű ponthalmaz. Az ilyen véges szabályos ponthalmazok szimmetriacsoportjai megegyeznek a szabályos sokszögek szimmetriacsoportjaival, mert a pontoknak a szimmetriatengelyek metszéspontjától azonos távolságra kell lenniük, és a tengelyek közti szögek közül a végesség miatt lennie kell legkisebbnek, amiért a többi szög ennek egész számú többszöröse kell legyen, hiszen különben kisebb szögű forgatás is lenne a csoportban. A legkisebb forgatás szöge ezek szerint $2\pi/n$ valamely $n \in \mathbb{N}$ természetes számra.

Végtelen számosságú szabályos ponthalmaz például a kör, az egyenes, a sík vagy a négyzetrács.

Diszkrétnek nevezünk egy ponthalmazt, ha a pontjai közti távolságok alsó határa pozitív (nem nulla).

Figyeljük meg, hogy a diszkrét ponthalmazoknak minden korlátos tartományba csak véges sok pontja esik. Ezt könnyen láthatjuk az „oroszlánfogási” módszer alkalmazásával. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{P}$ diszkrét ponthalmaznak végtelen sok eleme esik az r oldalú $\mathcal{N}_0$ négyzetbe és a pontpárjai közti legkisebb távolság ρ . Vágjuk fel az $\mathcal{N}_0$ négyzetet két középvonala mentén. Ezzel négy $r/2$ oldalú négyzetet kapunk. Világos, hogy a $\mathcal{P}$ diszkrét ponthalmaznak legalább az egyik $r/2$ oldalú négyzetbe végtelen sok pontja esik, különben nem lehetne végtelen sok pontja az $\mathcal{N}_0$ négyzetben. Legyen $\mathcal{N}_1$ tehát az egyik olyan $r/2$ oldalú négyzet, amelybe a $\mathcal{P}$ diszkrét ponthalmaznak végtelen sok pontja esik. A mostanihoz hasonlóan lépést most az $\mathcal{N}_1$ négyzettel téve, majd egyre tovább, egymásba skatulyázott négyzetek olyan $\mathcal{N}_i$ sorozatát kapjuk, hogy mindegyikbe végtelen sok pontja esik a $\mathcal{P}$ diszkrét ponthalmaznak, miközben oldala hossza $r/2^i$. Minthogy egy ilyen négyzet két pontja közti legnagyobb távolság $\sqrt{2}r/2^i$, ami elég nagy $i \in \mathbb{N}$ számra tetszőlegesen kicsiny lehet, ez ellentmond a $\rho < \sqrt{2}r/2^i$ követelménynek. Tehát diszkrét ponthalmazoknak minden korlátos tartományba csak véges sok pontja esik.

Szabályos pontrendszernek hívjuk a végtelen, diszkrét, szabályos ponthalmazokat. Szabályos pontrendszert legegyszerűbben úgy kaphatunk, ha vesszük lineárisan független egységnyi helyvektorok egész együtthatós lineáris kombinációinak végpontjait. Az ilyen szabályos pontrendszereket *rácsnak* nevezzük. A rácsok úgy is előállíthatók, hogy veszünk $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ lineárisan független egységvektorokat, és tekintjük valamely tetszőleges O pont pályáját az $\mathcal{E} = \{\varepsilon_{\mathbf{v}}^{\ell s} \varepsilon_{\mathbf{u}}^{kt} : k, \ell \in \mathbb{Z}\}$ csoport mellett.

Azon pontok halmazát, melyek közelebb vannak egy adott rácsponthoz, mint a többi rácsponthoz, a rács *Dirichlet-cellájának*, vagy *Voronoi-sokszögének* nevezzük.

Barlow tétele. *Egy síkrács szimmetriacsoportjának forgatásokból álló részcsoporthai 2, 3, 4 vagy 6 elemű ciklikus forgáscsoportok.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{R} = \mathcal{E}(P)$ a rács, ahol $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ lineárisan független egységvektorok, és $\mathcal{E} = \{\varepsilon_{\mathbf{v}}^{\ell s} \varepsilon_{\mathbf{u}}^{mt} : \ell, m \in \mathbb{Z}\}$. Az $\mathcal{E}$ csoport nyilván részcsoporthja a rács Σ szimmetriacsoportjának.

Legyen Φ a rács Σ szimmetriacsoportjának egy forgatásokból álló részcsoporthja. Ahogy fentebb már láttuk, ekkor Φ minden eleme ugyanazon, mondjuk, O pont körüli forgatás.

Ha $P \neq O$ a rács egy pontja, akkor a $\Phi(P)$ pálya a $d(O, P)$ sugarú kör és a rács közös részhalmaza, így csak véges sok pontot tartalmaz. Mivel két forgatás megegyezik, ha közös középpontjukon kívül egy másik pontot is ugyanabba a pontba forgatnak, következik, hogy az Φ csoport véges (a 2π szöggel eltérő forgatásokat nem tekintjük különbözőnek), tehát $\Phi = \{\varphi_O^{2k\pi/n} : k = 0, 1, \dots, n-1\}$ valamely $n \in \mathbb{N}$ számra.

Tekintsünk a Σ szimmetriacsoport bármely n -edrendű Φ_A és Φ_B forgatásokból álló részcsoporthját, ahol A és B jelenti a forgatások középpontját. Ezek elemeinek szorzatai nyilván a szimmetriacsoport elemei, és a következő típusúak lehetnek:

$$\varphi_B^{2\ell\pi/n} \varphi_A^{2k\pi/n} = \begin{cases} \varphi_C^{2(k+\ell)\pi/n} & \text{forgatás, ha } k + \ell \neq n, \\ \varepsilon_{\mathbf{w}}^{2d(A,B)\sin(\ell\pi/n)} & \text{eltolás, ha } k + \ell = n. \end{cases}$$

Ez azt jelenti, hogy $\varepsilon_{\mathbf{w}}^{2d(A,B)\sin(\ell\pi/n)}$ is a szimmetriacsoport eleme, amiért az eltolás hosszára $\min(s, t) \leq 2d(A, B) \sin(\ell\pi/n) \leq 2d(A, B)$ teljesül.

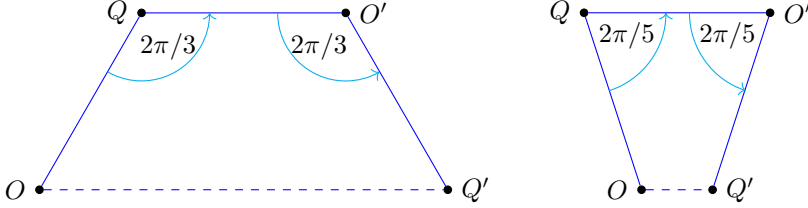
Beláttuk tehát, hogy azon A pontok $\mathcal{H}$ halmaza, melyekben a rács szimmetriacsoportja egy n -edrendű forgatásokból álló részcsoporthot tartalmaz, olyan, hogy minden pontjának $\frac{1}{2} \min(s, t)$ sugarú körén belül nincsen még egy pont, vagyis $\mathcal{H}$ diszkrét ponthalmaz.

Most igazoljuk, hogy $\mathcal{H}$ elemszáma végtelen.

Mivel Φ és $\mathcal{E}$ elemeinek szorzatai is a rács Σ szimmetriacsoportjában vannak, a $\varphi_{\varepsilon_{\mathbf{v}}^{\ell s} \varepsilon_{\mathbf{u}}^{mt}(O)}^{2k\pi/n} = \varepsilon_{\mathbf{v}}^{\ell s} \varepsilon_{\mathbf{u}}^{mt} \varphi_O^{2k\pi/n} \varepsilon_{\mathbf{u}}^{-mt} \varepsilon_{\mathbf{v}}^{-\ell s}$ forgatás is a rács Σ szimmetriacsoportjának eleme, és így az $\varepsilon_{\mathbf{v}}^{\ell s} \varepsilon_{\mathbf{u}}^{mt}(O)$ pontokban is van forgatások egy Φ csoporttal izomorf n -edrendű $\Phi_{\varepsilon_{\mathbf{v}}^{\ell s} \varepsilon_{\mathbf{u}}^{mt}(O)}$ csoportja, mely a rács Σ szimmetriacsoportjának részcsoporthja.

Legyen Q a $\mathcal{H}$ halmaz egyik O ponthoz legközelebb eső pontja. Ilyen van, hiszen a $\mathcal{H}$ ponthalmaz diszkrét. Ekkor a $\varphi_{O'}^{2\pi/n} = \varphi_{\varphi_Q^{2\pi/n}(O)}^{2\pi/n} = \varphi_Q^{2\pi/n} \varphi_O^{2\pi/n} \varphi_Q^{-2\pi/n}$ forgatás is n -edrendű és a rács Σ szimmetriacsoportjában van, tehát $O' \in \mathcal{H}$. Ugyanígy a $\varphi_{Q'}^{2\pi/n} = \varphi_{\varphi_{O'}^{2\pi/n}(Q)}^{2\pi/n} = \varphi_{O'}^{2\pi/n} \varphi_Q^{2\pi/n} \varphi_{O'}^{-2\pi/n}$ is a rács Σ szimmetriacsoportjában van, tehát $Q' \in \mathcal{H}$ eleme.

Nyilván $d(O, Q) = d(Q, O') = d(O', Q')$, és mivel Q a $\mathcal{H}$ egyik O ponthoz legközelebbi pontja, $d(O, O') \geq d(Q, O)$ és $d(O, Q') \geq d(Q, O)$ is teljesül.



Ha $n > 6$, akkor $d(O, O') < d(Q, O)$. Ha $n = 6$, akkor OQO' egy szabályos háromszög, tehát $2\pi/n = 2\pi/6$. Ha $n = 5$, akkor $d(O, Q') < d(Q, O)$, hiszen $2\pi/6 < \pi/2$. Eszerint $n \leq 4$, ami az állítás volt. ■

Definíció. Ha izometriák egy $\mathcal{I}$ csoportja mellett minden P pont pályájának csak véges sok pontja esik minden korlátos tartományba, akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{I}$ *diszkrét izometriacsoport*. Ha $\mathcal{I}$ minden eleme mozgás, akkor *diszkrét mozgáscsoportról* beszélünk.

Izometriák egy $\mathcal{I}$ csoportjára nézve *alaptartománynak* nevezünk egy összefüggő tartományt, ha minden pont pályája *pontosan* egy pontban metszi. ▲

Egy $\mathcal{I}$ csoportnak több alaptartománya is lehet, és ezeket a $\mathcal{I}$ csoport elemei egymásba transzformálják. Eszerint az alaptartományok nem metszik egymást, és együtt lefedik a síkot, mert minden pontnak tartalmazza pontosan egy pályaelemét. A matematikai gyakorlatban poligonokat szokás alaptartománynak választani, de a választás szabadságának művészi felhasználása is lehetséges, ahogy azt *M.C. Escher* képei mutatják.

Minden rács bármely Dirichlet-cellája a rácsot előállító $\mathcal{E}$ eltoláscsoport alaptartománya, mert $\mathcal{E}$ elemei nyilván minden Dirichlet-cellát egymásba transzformálnak — tehát ezek egymás eltoltjai —, miközben az összes ilyen tartomány uniója nyilván lefedi a síkot, mert minden pont valamelyik rácsponthoz közelebb van, mint az összes többihez.

Tétel. Bármely $\mathcal{M}$ diszkrét mozgáscsoport bármely $\mathbf{u}$ vektor irányú összes eltolása egy $\mathcal{E} = \{\varepsilon_{\mathbf{u}}^{kt} : k \in \mathbb{Z}\}$ alakú részcsoportot alkot valamely $t > 0$ számra.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{E}$ az $\mathcal{M}$ egy részcsoportja, hiszen $\mathbf{u}$ irányú eltolások szorzata és inverze is $\mathbf{u}$ irányú. Emiatt $\mathcal{E}$ diszkrét mozgáscsoport.

Tekintsünk egy tetszőleges P pontot. Az $\mathcal{E}(P)$ pálya egy egyenes részhalmaza, ezért az $\mathcal{E}(P)$ pályaelemei közül legfeljebb kettő olyan van, amely nincs távolabb a P ponttól, mint bármely másik pályaelem. Legyen $Q = \varepsilon_{\mathbf{u}}^t(P)$ ezek közül az, amelyre $t > 0$. Nyilván $\varepsilon_{\mathbf{u}}^{kt} \in \mathcal{E}$ minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén.

Legyen most $\varepsilon_{\mathbf{u}}^s \in \mathcal{E}$ tetszőleges eltolás. Akkor az $\varepsilon_{\mathbf{u}}^r = \varepsilon_{\mathbf{u}}^s \varepsilon_{\mathbf{u}}^{-t[s/t]}$ eltolás is $\mathcal{E}$ eleme. Az $s \neq t[s/t]$ esetben $r < t$ lenne, ami lehetetlen, mert akkor $\varepsilon_{\mathbf{u}}^r(P)$ közelebb lenne a P ponthoz, mint a Q pont, így $s = t[s/t]$, ami igazolja a tételt. ■

Tétel. Minden $\mathcal{M}$ diszkrét mozgáscsoport bármely forgatásokból álló részcsoportha $\Phi = \{\varphi_O^{2k\pi/n} : k = 0, 1, \dots, n-1\}$ alakú valamely O pontra és $n \in \mathbb{N}$ számra.

Bizonyítás. Legyen Φ az $\mathcal{M}$ diszkrét mozgáscsoport egy forgatásokból álló részcsoportha. Ahogy fentebb már láttuk, ekkor Φ minden eleme ugyanazon, mondjuk, O pont körüli forgatás.

Legyen $P \neq O$ egy pont. Ekkor az $\Phi(P)$ pálya a $d(O, P)$ sugarú kör és az $\mathcal{M}(P)$ pálya közös részhalmaza, így csak véges sok pontot tartalmaz. Mivel két forgatás megegyezik, ha közös középpontjukon kívül egy másik pontot is ugyanabba a pontba forgatnak, következik, hogy az Φ csoport véges (a 2π szöggel eltérő forgatásokat nem tekintjük különbözőnek), vagyis $\Phi = \{\varphi_O^{2k\pi/n} : k = 0, 1, \dots, n-1\}$ valamely $n \in \mathbb{N}$ számra, ahogy állítottuk. ■

Tétel. (Diszkrét mozgáscsoportok osztályozása). *Síkmozgások egy nem triviális $\mathcal{M}$ csoportja akkor és csak akkor diszkrét mozgáscsoport, ha*

- (1) egyetlen $2\pi/n$ ($n \in \mathbb{N}$) szögű forgatás, vagy
- (2) egyetlen eltolás, vagy
- (3) egyetlen eltolás és egy π szögű forgatás, vagy
- (4) kettő független eltolás, vagy
- (5) kettő független eltolás és egy π szögű forgatás, vagy
- (6) kettő független eltolás és egy $2\pi/3$ szögű forgatás, vagy
- (7) kettő független eltolás és egy $\pi/2$ szögű forgatás, vagy
- (8) kettő független eltolás és egy $\pi/3$ szögű forgatás

generálja.

A bizonyítás előtt jegyezzük meg, hogy Barlow tétele miatt a kettő független eltolást tartalmazó diszkrét mozgáscsoportok csak $2\pi/2$, $2\pi/3$, $2\pi/4$ vagy $2\pi/6$ szögű forgatásokat tartalmazhatnak, hiszen minden $\mathcal{M}$ mozgáscsoport nyilván részcsoportha bármely P pont $\mathcal{M}(P)$ pályája szimmetriacsoportjának.

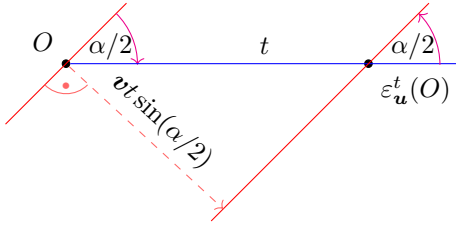
A diszkrét mozgáscsoportok tételünk szerinti osztályozása alapján valóban van példa is olyan rendű forgatások előfordulására, melyet Barlow tétele megenged. A most következő bizonyításban a szögek eme korlátozását a koncentráltág kedvéért másként bizonyítjuk a 2. pontban.

Bizonyítás. Minden síkmozgás eltolás vagy pont körüli forgatás, ezért $\mathcal{M}$ csak ilyen transzformációkból áll. Több esetet vizsgálunk, ezeket fastruktúra szerint sorszámozzuk.

1. *Ha $\mathcal{M}$ nem tartalmaz eltolást.* Ekkor $\mathcal{M}$ minden eleme forgatás. Tekintsünk ezek közül két különböző φ_A^α és φ_B^β nem identikus forgatást. Ekkor a $\varphi_C^\gamma = \varphi_A^\alpha \varphi_B^\beta \varphi_A^{-\alpha}$ forgatás is $\mathcal{M}$ eleme. Nyilván $\gamma = \beta$, és $B = \varphi_A^{-\alpha} C$, hiszen $C = \varphi_C^\gamma(C)$. Csakhogy $C \neq B$ esetén a $\varphi_C^\gamma \varphi_B^{-\beta} \in \mathcal{M}$ egy eltolás lenne, ami kizárt, ezért $C = B$, és így $A = B$, vagyis az $\mathcal{M}$ minden eleme ugyanazon pont körüli forgatás. Alkalmazva fentebbi, forgatásokra vonatkozó tételünket, éppen az (1) pont állításához jutunk.

2. *Ha $\mathcal{M}$ tartalmaz eltolást.* Legyen P egy tetszőleges pont, $\mathcal{E}$ pedig az $\mathcal{M}$ összes eltolásából álló részcsoportha.

Mivel $\mathcal{M}$ diszkrét mozgáscsoport, az $\mathcal{E}$ is diszkrét mozgáscsoport, ezért az $\mathcal{E}(P)$ pályának léteznek a P ponthoz legközelebbi pontjai. Legyen egy ilyen $Q = \varepsilon_{\mathbf{u}}^t(P)$, ahol $\mathbf{u}$ egységnyi, vagyis $d(P, Q) = t$.



Ha van egy φ_O^α forgatás az $\mathcal{M}$ mozgáscsoportban, akkor $\varphi_{\varepsilon_{\mathbf{u}}^t(O)}^\alpha = \varepsilon_{\mathbf{u}}^t \varphi_O^\alpha \varepsilon_{\mathbf{u}}^{-t}$ is az $\mathcal{M}$ csoport eleme. Eszerint az $\varepsilon_{\mathbf{v}}^{2t \sin(\alpha/2)} = \varphi_{\varepsilon_{\mathbf{u}}^t(O)}^\alpha \varphi_O^{-\alpha}$ eltolás is $\mathcal{M}$ eleme, ahol $\mathbf{v}$ egy alkalmas egységnyi vektor (lásd az ábrát). Ebből következőleg $t \leq 2t \sin(\alpha/2)$, amiért $1/2 \leq$

$\sin(\alpha/2)$, vagyis $\pi/6 \leq \alpha/2 \leq 5\pi/6$. Minthogy ez minden forgatásra érvényes, az O pont körüli legkisebb szögű forgatásra is teljesülnie kell, mely fentebbi tételünk értelmében csak $\alpha = 2\pi/n$ és $n = 2, 3, 4, 5, 6$ esetében igaz.

Tovább szűkíthetjük a választékot, ha figyelembe vesszük, hogy $\varphi_O^{2\alpha} \in \mathcal{M}$ is teljesül, és így az $\varepsilon_{\mathbf{u}}^t \varepsilon_{\varphi_O^{2\alpha}(\mathbf{u})}^t$ eltolás is az $\mathcal{M}$ eleme. Ha $\alpha < \pi/2$, akkor ennek hossza $2t \sin(\pi/2 - \alpha)$, amiért $t \leq 2t \cos(\alpha)$, vagyis $\alpha \leq \pi/3$ következik. Ezt nem teljesíti a lehetséges minimális forgásszögek listájából a $2\pi/5$ szög, tehát a legkisebb forgásszögek csak π , $2\pi/3$, $\pi/2$ vagy $\pi/3$ lehetnek.

2/a. *Ha $\mathcal{M}$ nem tartalmaz két független irányú eltolást.* Ekkor az $\mathcal{M}$ csoportnak van olyan $\varepsilon_{\mathbf{u}}^t$ eltolása, hogy minden eltolása $\varepsilon_{\mathbf{u}}^{kt}$ alakú, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

2/a/a. *Ha az $\mathcal{M}$ csoportban nincsen forgatás.* Ekkor $\mathcal{M} = \{\varepsilon_{\mathbf{u}}^{kt} : k \in \mathbb{Z}\}$, ami igazolja a (2) pont állítását.

2/a/b. *Ha az $\mathcal{M}$ csoportban létezik nem identikus forgatás.* Legyen $\varphi_O^\alpha \in \mathcal{M}$ nem identikus forgatás. Ekkor az $\varepsilon_{\varphi_O^\alpha(\mathbf{u})}^t = \varphi_O^\alpha \varepsilon_{\mathbf{u}}^t \varphi_O^{-\alpha}$ eltolás is $\mathcal{M}$ eleme, amiért $\varphi_O^\alpha(\mathbf{u}) = \pm \mathbf{u}$, és így $\alpha = \pi$ következik.

Eszerint a $\varphi_{\varepsilon_{\mathbf{u}}^{kt}(O)}^\pi = \varepsilon_{\mathbf{u}}^{kt} \varphi_O^\pi \varepsilon_{\mathbf{u}}^{-kt}$ forgatások is az $\mathcal{M}$ csoportban vannak minden $k \in \mathbb{N}$ esetén. Ezek és egy $\varepsilon_{\mathbf{u}}^{mt}$ eltolás szorzata a $\varphi_{\varepsilon_{\mathbf{u}}^{t(k+m/2)}(O)}^\pi = \varphi_{\varepsilon_{\mathbf{u}}^{kt}(O)}^\pi \varepsilon_{\mathbf{u}}^{mt}$ forgatás, amit az is igazol, hogy egy ilyen forgatás és egy eltolás $\varepsilon_{\mathbf{u}}^{mt} \varphi_{\varepsilon_{\mathbf{u}}^{kt/2}(O)}^\pi$ szorzata φ_P^π ,

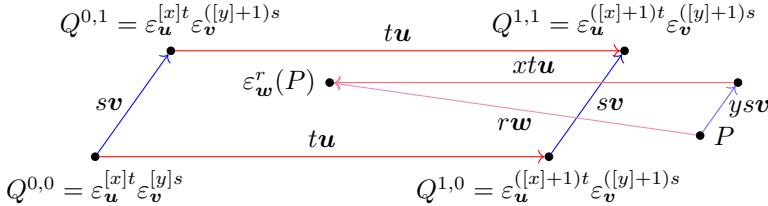
ahol $P = \varepsilon_{\mathbf{u}}^{t(k+m)/2} O$, amit a következő bizonyít:

$$\begin{aligned}
 P &= \varphi_P^{\pi/2} P \\
 &= \varepsilon_{\mathbf{u}}^{mt} \varphi_{\varepsilon_{\mathbf{u}}^{kt/2}(O)}^{\pi} \varepsilon_{\mathbf{u}}^{t(k+m)/2}(O) = \varepsilon_{\mathbf{u}}^{mt} (\varepsilon_{\mathbf{u}}^{kt/2} \varphi_O^{\pi} \varepsilon_{\mathbf{u}}^{-kt/2}) \varepsilon_{\mathbf{v}}^{t(\ell+n)/2} \varepsilon_{\mathbf{u}}^{t(k+m)/2}(O) \\
 &= \varepsilon_{\mathbf{u}}^{t(k+2m)/2} \varphi_O^{\pi} \varepsilon_{\mathbf{u}}^{tm/2}(O) = \varepsilon_{\mathbf{u}}^{t(k+2m)/2} \varepsilon_{\varphi_O^{\pi}(\mathbf{u})}^{tm/2} \varphi_O^{\pi}(O) = \varepsilon_{\mathbf{u}}^{t(k+2m)/2} \varepsilon_{-\mathbf{u}}^{tm/2}(O) \\
 &= \varepsilon_{\mathbf{u}}^{t(k+m)/2}(O).
 \end{aligned}$$

Két ilyen forgatás szorzata pedig újra az $\varepsilon_{\mathbf{v}}^{(k-\ell)t} = \varphi_{\varepsilon_{\mathbf{u}}^{kt/2}(O)}^{\pi} \varphi_{\varepsilon_{\mathbf{u}}^{t\ell/2}(O)}^{\pi}$ eltolás, vagyis $\mathcal{M}$ összes elemét megtaláltuk: $\mathcal{M} = \{\varepsilon_{\mathbf{u}}^{kt}, \varphi_{\varepsilon_{\mathbf{u}}^{t\ell/2}(O)}^{\pi}\}$, ahol $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Ez bizonyítja a (3) pont állítását.

2/b. *Ha $\mathcal{M}$ tartalmaz független irányú eltolásokat.* Miután fentebb már kiválasztottuk a legkisebb távolságra mozgató $\varepsilon_{\mathbf{u}}^t$ eltolást, legyen $\mathcal{E}' = \{\varepsilon_{\mathbf{v}}^s : \varepsilon_{\mathbf{v}}^s \in \mathcal{M} \text{ és } \mathbf{u}, \mathbf{v} \text{ függetlenek}\}$. Ez $\mathcal{M}$ részcsoportha, ezért diszkrét mozgáscsoport, amiért az $\mathcal{E}'(P)$ pályának létezik a P ponthoz az összes többinél nem messzebb lévő pontja. Legyen ez a $Q = \varepsilon_{\mathbf{v}}^s(P)$, ahol $\mathbf{v}$ egységnyi, vagyis $d(P, Q) = s$.

Legyen most $\varepsilon_{\mathbf{w}}^r$ egy tetszőleges eltolás az $\mathcal{M}$ csoportban. Mivel a síkban vagyunk, és $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ függetlenek, léteznek olyan x, y valós számok, hogy $r\mathbf{w} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$. Legyen $Q^{i,j} = \varepsilon_{\mathbf{u}}^{-([x]+i)t} \varepsilon_{\mathbf{v}}^{-([y]+j)s} \varepsilon_{\mathbf{w}}^r(P)$, ahol $i, j = 0, 1$.



Ezek a pontok egy paralelogramma négy csúcsát alkotják. E paralelogramma oldalainak hossza s és t , és belsejében tartalmazza a P pontot. Ha P nem esik a csúcsok valamelyikébe, akkor távolsága az egyik csúcsától kisebb, mint a paralelogramma egyik oldalának hossza (ennek az egyszerű ténynek az elemi bizonyítása az olvasóra marad), holott az $\mathcal{E}(P)$ pálya két legközelebbi eleme s , illetve t távolságra van a P ponttól. Tehát a P pont a paralelogramma valamelyik csúcsába esik, vagyis $P = Q^{i,j}$ valamely $i, j = 0, 1$ esetén. Ez azt jelenti, hogy $\varepsilon_{\mathbf{w}}^r = \varepsilon_{\mathbf{u}}^{([x]+i)t} \varepsilon_{\mathbf{v}}^{([y]+j)s}$ valamely $i, j = 0, 1$ esetén, tehát $\mathcal{E} = \{\varepsilon_{\mathbf{v}}^{\ell s} \varepsilon_{\mathbf{u}}^{kt} : k, \ell \in \mathbb{Z}\}$.

2/b/a. *Ha az $\mathcal{M}$ csoportban nincsen forgatás.* Ekkor $\mathcal{M} = \mathcal{E}$, ami igazolja a (4) pont állítását.

2/b/b. *Ha az $\mathcal{M}$ csoportban létezik nem identikus forgatás.* Ekkor a 2. pontban igazoltak szerint a legkisebb szögű nem identikus forgatás csak φ_O^{π} , $\varphi_O^{2\pi/3}$, $\varphi_O^{\pi/2}$ vagy $\varphi_O^{\pi/3}$ lehet valamely O pontra. Most ezeket vesszük sorra.

2/b/b/a. Ha $\varphi_O^\pi \in \mathcal{M}$ a legkisebb szögű forgatás. Ekkor nem lehet a csoportban más szögű forgatás, mert a többi lehetséges szög ennél kisebb lenne.

A 2/a/b indoklása alapján tudjuk, hogy egy eltolás és egy π szögű forgatás $\varepsilon_v^{nt} \varepsilon_u^{mt} \varphi_{\varepsilon_v^{\ell t/2} \varepsilon_u^{kt/2}(O)}^\pi$ szorzata φ_P^π , melynek középpontja $P = \varepsilon_v^{t(\ell+n)/2} \varepsilon_u^{t(k+m)/2}(O)$.

Mivel az összes lehetséges szorzás eredményét láttuk, megállapítjuk, hogy $\mathcal{M} = \{\varepsilon_v^{\ell s} \varepsilon_u^{kt}, \varphi_{\varepsilon_v^{\ell s/2} \varepsilon_u^{kt/2}(O)}^\pi : k, \ell \in \mathbb{Z}\}$. Ez igazolja az (5) pont állítását.

2/b/b/b. Ha $\varphi_O^\alpha \in \mathcal{M}$ a legkisebb szögű forgatás, ahol $\alpha \neq \pi$. Ekkor $\mathcal{M}$ tartalmazza az $\varepsilon_{\varphi_O^\alpha(u)}^t = \varphi_O^\alpha \varepsilon_u^t \varphi_O^{-\alpha}$ eltolást is. Azonban $\mathcal{M}$ pontosan kettő független irányú eltolást tartalmaz, ezért $\pm v = \varphi_O^\alpha(u)$ és $s = t$.

2/b/b/b/a. Ha $\varphi_O^{2\pi/3} \in \mathcal{M}$ a legkisebb szögű forgatás. Ekkor a csoportban nem fordulhat elő a π szögű forgatás, mert e forgatások szorzásakor $\pi - 2\pi/3 = \pi/3$ szögű forgatás jönne létre, holott feltételünk szerint $2\pi/3$ a legkisebb szögű forgatás a csoportban. Tehát az $\mathcal{M}$ csoportban csak $\pm 2\pi/3$ szögű forgatások vannak.

Az $\mathcal{M}$ csoport tartalmazza a $\varphi_{\varepsilon_v^{\ell t} \varepsilon_u^{kt}(O)}^{2\pi/3} = \varepsilon_v^{\ell t} \varepsilon_u^{kt} \varphi_O^{2\pi/3} \varepsilon_v^{-\ell t} \varepsilon_u^{-kt}$ forgatásokat.

Két ilyen $\varphi_{\varepsilon_v^{\ell t} \varepsilon_u^{kt}(O)}^{2\pi/3}$ és $\varphi_{\varepsilon_v^{nt} \varepsilon_u^{mt}(O)}^{2\pi/3}$ forgatás szorzata $\varphi_P^{4\pi/3}$, ahol a P középpont nyilván a két forgatás $A = \varepsilon_v^{\ell t} \varepsilon_u^{kt}(O)$ és $B = \varepsilon_v^{nt} \varepsilon_u^{mt}(O)$ középpontjait szabályos háromszögre kiegészítő pont. Eszerint

$$\begin{aligned} P &= \varphi_A^{\pi/3} B = \varphi_A^{\pi/3} \varepsilon_v^{nt} \varepsilon_u^{mt}(O) = \varepsilon_{\varphi_A^{\pi/3} v}^{nt} \varepsilon_{\varphi_A^{\pi/3} u}^{mt} \varphi_A^{\pi/3}(O) = \varepsilon_{\varphi_A^{\pi/3} v}^{nt} \varepsilon_{\varphi_A^{\pi/3} u}^{mt} \varphi_O^{-\pi/3} A \\ &= \varepsilon_{\varphi_A^{\pi/3} v}^{nt} \varepsilon_{\varphi_A^{\pi/3} u}^{mt} \varphi_O^{-\pi/3} \varepsilon_v^{\ell t} \varepsilon_u^{kt}(O) = \varepsilon_{\varphi_A^{\pi/3} v}^{nt} \varepsilon_{\varphi_A^{\pi/3} u}^{mt} \varepsilon_{\varphi_O^{-\pi/3} v}^{\ell t} \varepsilon_{\varphi_O^{-\pi/3} u}^{kt} \varphi_O^{-\pi/3}(O) \\ &= \varepsilon_{\varphi_A^{\pi/3} v}^{nt} \varepsilon_{\varphi_O^{-\pi/3} v}^{\ell t} \varepsilon_{\varphi_A^{\pi/3} u}^{mt} \varepsilon_{\varphi_O^{-\pi/3} u}^{kt} \varphi_O^{-\pi/3}(O) = \varepsilon_{-u}^{nt} \varepsilon_{u+v}^{\ell t} \varepsilon_{u+v}^{mt} \varepsilon_{-v}^{kt}(O) \\ &= \varepsilon_u^{(m+\ell-n)t} \varepsilon_v^{(m+\ell-k)t}(O), \end{aligned}$$

vagyis $\varphi_P^{4\pi/3} = \varphi_{\varepsilon_u^{(m+\ell-n)t} \varepsilon_v^{(m+\ell-k)t}(O)}^{4\pi/3}$ nem új csoportelem.

Egy eltolás és egy forgatás $\varepsilon_v^{nt} \varepsilon_u^{mt} \varphi_{\varepsilon_v^{\ell t} \varepsilon_u^{kt}(O)}^{2\pi/3}$ szorzata $\varphi_P^{2\pi/3}$, melynek közép-pontja $P = \varepsilon_v^{t(3\ell+m+n)/3} \varepsilon_u^{t(3k+2m-n)/3}(O)$, mert

$$\begin{aligned} P &= \varphi_P^{2\pi/3} P = \varepsilon_v^{nt} \varepsilon_u^{mt} (\varepsilon_v^{\ell t} \varepsilon_u^{kt} \varphi_O^{2\pi/3} \varepsilon_v^{-\ell t} \varepsilon_u^{-kt}) (\varepsilon_v^{t(3\ell+m+n)/3} \varepsilon_u^{t(3k+2m-n)/3}(O)) \\ &= \varepsilon_v^{(\ell+n)t} \varepsilon_u^{(k+m)t} \varphi_O^{2\pi/3} \varepsilon_v^{t(m+n)/3} \varepsilon_u^{t(2m-n)/3}(O) \\ &= \varepsilon_v^{(\ell+n)t} \varepsilon_u^{(k+m)t} \varepsilon_{\varphi_O^{2\pi/3} v}^{t(m+n)/3} \varepsilon_{\varphi_O^{2\pi/3} u}^{t(2m-n)/3} \varphi_O^{2\pi/3}(O) \\ &= \varepsilon_v^{(\ell+n)t} \varepsilon_u^{(k+m)t} \varepsilon_{-u-v}^{t(m+n)/3} \varepsilon_v^{t(2m-n)/3}(O) \\ &= \varepsilon_v^{t(3\ell+m+n)/3} \varepsilon_u^{t(3k+2m-n)/3}(O). \end{aligned}$$

Ezeket a most vizsgált szorzatokat tekintve, az utóbbi formulák részleteiből világos, hogy sem ezek egymással, sem ezek eltolással vett szorzatai nem vezetnek újabb

forgatásokhoz, ezért $\mathcal{M}$ összes eleme $\{\varepsilon_v^{\ell t} \varepsilon_u^{kt}, \varphi_{\varepsilon_v^{\ell t} \varepsilon_u^{kt}(O)}^{\pm 2\pi/3}\}$, ahol $i, j \in \mathbb{Z}$ és $i+j \equiv 0 \pmod{3}$. Ez igazolja a (6) állítást.

2/b/b/b/b. Ha $\varphi_O^{\pi/2} \in \mathcal{M}$ a legkisebb szögű forgatás. Ekkor a $\varphi_O^{\pi/2}$ ismételt végrehajtása miatt van a csoportban π szögű forgatás is. Nem fordulhat elő a csoportban $2\pi/3$ szögű forgatás, mert e forgatások szorzásakor $\pi - 2\pi/3 = \pi/3$ szögű forgatás jönne létre, holott feltételünk szerint $\pi/2$ a legkisebb szögű forgatás a csoportban. Tehát az $\mathcal{M}$ csoportban csak $\pm\pi/2$ és π szögű forgatások vannak.

Az ilyen $\mathcal{M}$ csoport szintén tartalmazza a $\varphi_{\varepsilon_v^{\ell t} \varepsilon_u^{kt}(O)}^{\pi/2} = \varepsilon_v^{\ell t} \varepsilon_u^{kt} \varphi_O^{\pi/2} \varepsilon_u^{-kt} \varepsilon_v^{-\ell t}$ forgatásokat.

Két $\varphi_{\varepsilon_v^{\ell t} \varepsilon_u^{kt}(O)}^{\pi/2}$ alakú forgatás szorzatának középpontja éppen a két forgatás középpontját mint átfogót egyenlő szárú derékszögű háromszögre kiegészítő pont, ezért az eredmény a $\varphi_{\varepsilon_v^{\ell t} \varepsilon_u^{kt/2} O}^{\pi}$ formában írható. Ezen π szögű forgatások szorzatát az eltolásokkal már ismerjük a π szögű forgatás esetéből (2/b/b/a).

Egy eltolás és egy $\pi/2$ szögű forgatás $\varepsilon_v^{nt} \varepsilon_u^{mt} \varphi_{\varepsilon_v^{\ell t} \varepsilon_u^{kt}(O)}^{\pi/2}$ szorzata $\varphi_P^{\pi/2}$, melynek középpontja $P = \varepsilon_v^{t(2\ell+m+n)/2} \varepsilon_u^{t(2k+m-n)/2}(O)$, mert

$$\begin{aligned} P &= \varphi_P^{\pi/2} P = \varepsilon_v^{nt} \varepsilon_u^{mt} (\varphi_{\varepsilon_v^{\ell t} \varepsilon_u^{kt}(O)}^{\pi/2}) (\varepsilon_v^{t(2\ell+m+n)/2} \varepsilon_u^{t(2k+m-n)/2})(O) \\ &= \varepsilon_v^{nt} \varepsilon_u^{mt} (\varepsilon_v^{\ell t} \varepsilon_u^{kt} \varphi_O^{\pi/2} \varepsilon_u^{-kt} \varepsilon_v^{-\ell t}) (\varepsilon_v^{t(2\ell+m+n)/2} \varepsilon_u^{t(2k+m-n)/2})(O) \\ &= \varepsilon_v^{(n+\ell)t} \varepsilon_u^{(k+m)t} \varphi_O^{\pi/2} \varepsilon_v^{t(m+n)/2} \varepsilon_u^{t(m-n)/2}(O) \\ &= \varepsilon_v^{(n+\ell)t} \varepsilon_u^{(k+m)t} \varepsilon_v^{t(m+n)/2} \varepsilon_u^{t(m-n)/2} \varphi_O^{\pi/2}(O) \\ &= \varepsilon_v^{(n+\ell)t} \varepsilon_u^{(k+m)t} \varepsilon_{-u}^{t(m+n)/2} \varepsilon_v^{t(m-n)/2}(O) \\ &= \varepsilon_v^{t(2\ell+m+n)/2} \varepsilon_u^{t(2k+m-n)/2}(O). \end{aligned}$$

Ezeket a most vizsgált szorzatokat tekintve, az utóbbi formula részleteiből világos, hogy sem ezek egymással, sem ezek eltolással vett szorzatai nem vezetnek újabb forgatásokhoz, ezért $\mathcal{M}$ összes eleme $\{\varepsilon_v^{\ell t} \varepsilon_u^{kt}, \varphi_{\varepsilon_v^{\ell t} \varepsilon_u^{kt/2}(O)}^{\pi/2}, \varphi_{\varepsilon_v^{t h/2} \varepsilon_u^{t i/2}(O)}^{\pi}, \varphi_{\varepsilon_v^{t h/2} \varepsilon_u^{t i/2}(O)}^{\pi/3}\}$, ahol $h, l, i, j \in \mathbb{Z}$ és $i+j \equiv 0 \pmod{2}$. Ez igazolja a (7) állítást.

2/b/b/b/c. Ha $\varphi_O^{\pi/3} \in \mathcal{M}$ a legkisebb szögű forgatás. Ekkor a csoportban nem fordulhat elő $\pi/2$ szögű forgatás, mert $\pi/2 - \pi/3 = \pi/6$ kisebb mint $\pi/3$, holott a feltétel szerint $\pi/3$ a legkisebb forgásszög. Ugyanakkor vannak a csoportban a π és $2\pi/3$ szögű forgatások a $\varphi_O^{\pi/3}$ ismételt végrehajtása miatt.

Az $\mathcal{M}$ csoport természetesen tartalmazza a $\varphi_{\varepsilon_v^{\ell t} \varepsilon_u^{kt}(O)}^{\pi/3} = \varepsilon_v^{\ell t} \varepsilon_u^{kt} \varphi_O^{\pi/3} \varepsilon_u^{-kt} \varepsilon_v^{-\ell t}$ forgatásokat is. Két ilyen $\varphi_{\varepsilon_v^{\ell t} \varepsilon_u^{kt}(O)}^{\pi/3}$ és $\varphi_{\varepsilon_v^{nt} \varepsilon_u^{mt}(O)}^{\pi/3}$ forgatás $\varphi_P^{2\pi/3}$ szorzatának P középpontja éppen a két forgatás középpontjának szakaszára mint alapra rajzolt egyenlőszárú, $\pi/6$ alapszögű háromszög csúcsa. Állítjuk, hogy $P =$

$\varepsilon_v^{t(-k+\ell+m+2n)/3} \varepsilon_u^{t(2k+\ell+m-n)/3}(O)$, mert

$$\begin{aligned}
 P &= \varphi_P^{2\pi/3} P \\
 &= (\varphi_{\varepsilon_v^{\ell t} \varepsilon_u^{kt}}^{\pi/3}(O)) (\varphi_{\varepsilon_v^{nt} \varepsilon_u^{mt}}^{\pi/3}(O)) (\varepsilon_v^{t(-k+\ell+m+2n)/3} \varepsilon_u^{t(2k+\ell+m-n)/3}(O)) \\
 &= (\varepsilon_v^{\ell t} \varepsilon_u^{kt} \varphi_O^{\pi/3} \varepsilon_v^{-kt} \varepsilon_u^{-\ell t}) (\varepsilon_v^{nt} \varepsilon_u^{mt} \varphi_O^{\pi/3} \varepsilon_v^{-mt} \varepsilon_u^{-nt}) \varepsilon_v^{t(-k+\ell+m+2n)/3} \varepsilon_u^{t(2k+\ell+m-n)/3}(O) \\
 &= \varepsilon_v^{\ell t} \varepsilon_u^{kt} \varphi_O^{\pi/3} \varepsilon_v^{(n-\ell)t} \varepsilon_u^{(m-k)t} \varphi_O^{\pi/3} \varepsilon_v^{t(-k+\ell+m-n)/3} \varepsilon_u^{t(2k+\ell-2m-n)/3}(O) \\
 &= \varepsilon_v^{\ell t} \varepsilon_u^{kt} \varepsilon_{\varphi_O^{\pi/3} v}^{(n-\ell)t} \varepsilon_{\varphi_O^{\pi/3} u}^{(m-k)t} \varepsilon_{\varphi_O^{2\pi/3} v}^{t(-k+\ell+m-n)/3} \varepsilon_{\varphi_O^{2\pi/3} u}^{t(2k+\ell-2m-n)/3} \varphi_O^{2\pi/3}(O) \\
 &= \varepsilon_v^{\ell t} \varepsilon_u^{kt} \varepsilon_{v-u}^{(n-\ell)t} \varepsilon_v^{(m-k)t} \varepsilon_{-u}^{t(-k+\ell+m-n)/3} \varepsilon_{v-u}^{t(2k+\ell-2m-n)/3}(O) \\
 &= \varepsilon_v^{t(-k+\ell+m+2n)/3} \varepsilon_u^{t(2k+\ell+m-n)/3}(O).
 \end{aligned}$$

A $2\pi/3$ szögű forgatások szorzatát az eltolásokkal már ismerjük a $(2/b/b/b/a)$ esetből. Ugyancsak ismerjük a π szögű forgatások szorzatát az eltolásokkal a $(2/b/b/a)$ esetből.

Összességében újabb csoportelem már nem kerülhet elő, ezért $\mathcal{M}$ összes eleme $\{\varepsilon_v^{\ell t} \varepsilon_u^{kt}, \varphi_{\varepsilon_v^{\ell t} \varepsilon_u^{kt}}^{\pi/3}(O), \varphi_{\varepsilon_v^{ti/3} \varepsilon_u^{tj/3}}^{2\pi/3}(O), \varphi_{\varepsilon_v^{th/2} \varepsilon_u^{tl/2}}^{\pi}(O)\}$, ahol $\ell, k, h, l, i, j \in \mathbb{Z}$, $i - j \equiv 0 \pmod{3}$ és $h + l \equiv 0 \pmod{2}$. Ez igazolja a (8) állítást, és ezzel a bizonyítást be is fejeztük. ■

A tétel állításánál jóval többet igazoltunk, hiszen meg is adtuk az egyes generált $\mathcal{M}$ csoportok elemeit is. Nyilvánvaló, hogy az alaptartomány az első három diszkrét csoport esetében nem korlátos, a többiben korlátos, de azt is fontos megjegyezni, hogy az origó megváltoztatásával a megadott csoportjaink is változnak, habár izomorf módon.

A tér geometriája

Ez a fejezet szemléletében az *Affin sík* és az *Euklidészi sík* című fejezetek folytatásának tekinthető, de nem hagyja figyelmen kívül a *A sík felfedezése* című fejezet tapasztalatait sem. Célja, hogy ezekre építve kiemelve a tér geometriájának a síkbeli esettel mutatkozó analógiáit, és rámutasson a különbségekre.

4.1. A tér axiómái

Legyen adott egy $\mathcal{T}$ halmaz. Ennek elemeit *pontoknak* nevezzük. Legyen ugyancsak adott $\mathcal{T}$ részhalmazainak egy $\mathcal{G}$ és $\mathcal{S}$ halmaza. Előbbi elemeit *egyeneseknek*, utóbbi elemeit *síkoknak* nevezzük.

Ha a $g \in \mathcal{G}$ egyenesre és a $P \in \mathcal{T}$ pontra $P \in g$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a P pont *illeszkedik* a g egyenesre, vagy a g egyenes *illeszkedik* a P ponton.¹

Ha az $S \in \mathcal{S}$ síkra és a $P \in \mathcal{T}$ pontra $P \in S$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a P pont *illeszkedik* az S síkra, vagy a S síkon van.

Ha az $f, g \in \mathcal{G}$ egyenesekhez létezik olyan $S \in \mathcal{S}$ sík, melyre $f \cup g \subset S$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy az f és g egyenesek egy síkra illeszkednek.

Ha több pont közös egyenesre illeszkedik, akkor a pontokat *kollinéarisnak*, Ha több pont vagy egyenes közös síkra illeszkedik, akkor őket *komplanárisnak* mondjuk. *Általános helyzetűnek* nevezzük a pontokat, ha nem komplanárisak. Ha több sík vagy egyenes közös pontra illeszkedik, akkor őket *konkurrensnek* nevezzük.

Illeszkedési axiómák.

- (J₁) Minden egyenesre legalább két különböző pont illeszkedik.
- (J₂) Két különböző pontra pontosan egy egyenes illeszkedik.
- (J₃) Három nem kollinéaris pontra pontosan egy sík illeszkedik.
- (J₄) Ha egy egyenes két különböző pontja egy síkra illeszkedik, akkor az egyenes minden pontja a síkra illeszkedik.
- (J₅) Ha két síknak van közös pontja, akkor létezik legalább még egy ettől különböző közös pontjuk is.

¹Ahogy a síknál, a térben is igen sok nem definiált, de szemléletes megfogalmazás létezik, melyeket használni szeretnénk. Ezeket a megfelelő definiált fogalommal egyenértékűnek fogadjuk el.

- (J₆) *Létezik három nem kollineáris, és négy nem komplanáris pont.*
 (J₇) (Párhuzamossági axióma). *Minden egyeneshez és rajta kívüli ponthoz pontosan egy olyan egyenes létezik, amely benne van az egyenest tartalmazó valamely síkban, illeszkedik a pontra, és nem metszi az egyenest.*

Jegyezzük meg, hogy a (J₁), (J₂) és (J₇) tulajdonképpen csak a sík megfelelő axiómáinak jelen helyzetéhez szükséges mértékű módosításai.

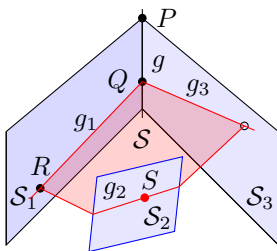
Párhuzamosnak mondunk egy síkot és egyenest, ha metszetük üres, vagy a sík tartalmazza az egyenest.

Két egyenest *párhuzamosnak* mondunk, ha közös síkra illeszkednek, és ebben a síkban síkbeli értelemben párhuzamosak. Két síkot *párhuzamosnak* mondunk, ha pontonként megegyeznek, vagy nincs közös pontjuk. Világos, hogy mindkét most definiált párhuzamossági reláció, melyeket egyaránt $\parallel$ jelöl, szimmetrikus és reflexív.

Ha két különböző egyenes nem illeszkedik közös síkra, akkor *kitérő*, ha közös síkra illeszkednek, de nem párhuzamosak, akkor *metsző* egyenesekről beszélünk.

Tétel. *Nem párhuzamos síkok metszete egy egyenes. A síkok közti párhuzamosság ekvivalencia-reláció.*

Bizonyítás. Az első állítással kezdjük. Legyen P a nem párhuzamos $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_3$ síkok egy közös pontja.



A (J₅) axióma szerint van még egy $Q \neq P$ pont is az $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_3$ metszetben. A (J₄) axióma szerint a $Q \neq P$ pontok g egyenese is az $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_3$ metszet része. Ha volna az $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_3$ metszetben olyan pont, mely nem esik a g egyenesre, akkor a (J₃) axióma miatt $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_3$ lenne, ami nem lehet, mert nem párhuzamosak. Ezzel beláttuk az első állítást.

Tekintsük az $\mathcal{S}_1 \parallel \mathcal{S}_2 \parallel \mathcal{S}_3$ síkokat. Ha az $\mathcal{S}_2$ sík egybeesik az $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_3$ síkok valamelyikével, akkor $\mathcal{S}_1 \parallel \mathcal{S}_3$ következik, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy $\mathcal{S}_1 \neq \mathcal{S}_2 \neq \mathcal{S}_3$.

Ha $\mathcal{S}_1 \parallel \mathcal{S}_3$, akkor az első állítás szerint egy közös $g = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_3$ egyenesben metszik egymást. Az $\mathcal{S}_2$ sík nem metszi a g egyenest, hiszen $\mathcal{S}_1 \parallel \mathcal{S}_2 \parallel \mathcal{S}_3$.

Tekintsük a $Q \in g$, $R \in \mathcal{S}_1 \setminus g$ és $S \in \mathcal{S}_2$ tetszőleges pontokat, és legyen $\mathcal{S}$ a Q , R és S nem kollineáris pontok egyetlen közös síkja. Az $\mathcal{S}$ sík metszi az $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ és $\mathcal{S}_3$ síkokat, hiszen mindegyikkel van közös pontja, vagyis mindhárom síkot egy-egy egyenesben metszi.

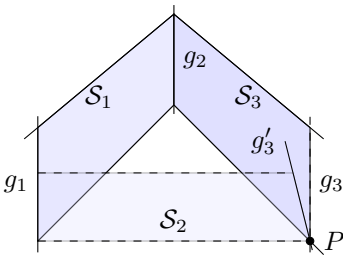
A $g_1 = \mathcal{S} \cap \mathcal{S}_1$, $g_2 = \mathcal{S} \cap \mathcal{S}_2$ és $g_3 = \mathcal{S} \cap \mathcal{S}_3$ egyenesekre $\mathcal{S}_1 \parallel \mathcal{S}_2 \parallel \mathcal{S}_3$ miatt $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3$ teljesül, így a párhuzamossági axióma miatt $g_1 = g_3$, hiszen mindkét egyenes átmegy a Q ponton, és párhuzamos a g_2 egyenessel.

Minthogy $R \in g_1 = g_3 \subseteq \mathcal{S}_3$, miközben $R \in \mathcal{S}_1 \setminus g$, a (J_3) axióma miatt $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_3$ következik. Ez ellentmond a $\mathcal{S}_1 \parallel \mathcal{S}_3$ feltételezésnek, így igazolja az állítást. ■

Tétel. *Az egyenesek közti párhuzamosság ekvivalencia-reláció.*

Bizonyítás. Tekintsük a $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3$ egyeneseket. Ha bármely kettő egybeesik, akkor a tétel állítása teljesül, így a további vizsgálatokhoz feltesszük, hogy az egyenesek páronként különbözőek.

Ha a $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3$ egyenesek egy síkba esnek, akkor az egyenesek síkbeli párhuzamosságának tranzitivitásából következik $g_1 \parallel g_3$.



Legyen $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_3$ rendre a g_1 és g_2 , illetve a g_2 és g_3 egyenesek közös síkja.

Ha az $\mathcal{S}_1$ síknak és a g_3 egyenesnek van egy közös pontja, akkor az nem lehet a g_2 pontja, ezért az $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_3$ síkoknak van három nem kollineáris közös pontjuk, amiért egybeesnek, mely esetben már beláttuk az állítást.

Legyen P a g_3 egyenes egy tetszőleges pontja, $\mathcal{S}_2$ pedig az a (J_3) axióma szerint egyértelmű sík, amely tartalmazza a g_1 egyenest és a P pontot. Legyen g'_3 az $\mathcal{S}_2$ és $\mathcal{S}_3$ sík metszete. Nyilván $P \in g'_3 \cap g_3$.

Amennyiben a g'_3 egyenes metszi a g_2 egyenest, akkor az $\mathcal{S}_2$ sík egybeesik az $\mathcal{S}_1$ síkkal, mert a közös g_1 egyenesükre nem illeszkedő $g'_3 \cap g_2$ pont is közös pontjuk. Emiatt a $P \in g'_3 \subset \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1$, amiért $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_3$, és ebből már beláttuk az állítást.

Amennyiben a g'_3 egyenes nem metszi a g_2 egyenest, akkor az $\mathcal{S}_3$ síkban a g_2 egyenesre és a P pontra alkalmazva a párhuzamossági axiómát, $g'_3 = g_3$ adódik, vagyis a g_1 és a g_3 egyenes is benne van az $\mathcal{S}_2$ síkban. Ha nem metszik egymást, akkor párhuzamosak, ami éppen a bizonyítandó állítás. Ha metszik egymást, akkor $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_3$, mely esetben már beláttuk az állítást. ■

Tétel.

- (1) *Két egyenes vagy párhuzamos, vagy kitérő, vagy pedig metsző.*
- (2) *Ha a g és h egyenesek kitérőek, akkor a g egyenesre pontosan egy, a h egyenessel párhuzamos sík illeszthető.*
- (3) *Ha egy egyenes nem párhuzamos egy síkkal, akkor pontosan egy pontban metszi.*
- (4) *Három síknak vagy nincs közös pontja, vagy egyetlen közös pontjuk van, vagy pedig egy közös egyenesre illeszkednek.*
- (5) *Ha három síknak nincs közös pontja, akkor páronkénti metszésvonalaik párhuzamosak.*
- (6) *Egy síkhoz egy ponton keresztül pontosan egy párhuzamos sík van.*

- (7) *Párhuzamos egyenesekre illeszkedő metsző síkok metszésvonala párhuzamos az egyenesekkel.*

Bizonyítás. Az (1), (3) és (4) állítások a definícióból közvetlenül következnek.

A (2) állításhoz azt kell észrevenni, hogy a g pontjain áthaladó, a h egyenessel párhuzamos egyenesek uniója egy sík, hiszen a párhuzamossági reláció tranzitivitása miatt ezek az egyenesek mind párhuzamosak egymással.

Az (5) állítás a (4) közvetlen következménye.

A (6) állítás igazolásához vegyük észre, hogy két ilyen sík (4) miatt egybeesik, ezért elég mutatnunk egy ilyen síkot. Ha az adott $\mathcal{S}$ síkban veszünk egy e egyenest, és azzal párhuzamosan egy f egyenest az adott P ponton át, majd valamely az e egyenest metsző g egyenesre és az f egyenesre alkalmazzuk a (2) eredményt, akkor épp egy kívánt síkot kapunk.

A (7) állítás az (5) közvetlen következménye. ■

Rendezési axiómák.

- (R₁) *Minden egyenesen adott két teljes rendezés, amelyek egymás megfordítottjai.*
 (R₂) *Minden síkban igaz a síkbeli Pasch-axióma.*

Irányítottan mondunk egy egyenest, ha rögzítjük valamely rendezését, amit most is $\prec$ jelöl. Ezzel a síkbeli esethez teljesen hasonló módon bevezethetők a *szakasz*, *félegyenes* és a *félsík* fogalmak.

Ha $\mathcal{S}$ egy sík, akkor a $\mathcal{T} \setminus \mathcal{S}$ P és Q pontjáról azt mondjuk, hogy az $\mathcal{S}$ síkra vonatkozólag $\mathcal{S}$ -partosak, ha $\overline{PQ} \cap \mathcal{S} = \emptyset$. Pasch axiómájából (a síkbeli esethez hasonlóan) igazolható, hogy az $\mathcal{S}$ -partosság ekvivalencia-reláció, amelynek legfeljebb két ekvivalencia-osztálya van. A folytathatósági axiómából következik, hogy pontosan két ekvivalencia-osztály van. Ezeket az $\mathcal{S}$ két *nyílt félterének* nevezzük.

Folytonossági axiómák.

- (F₁) *Minden egyenesen teljesül a folytathatósági axióma.*
 (F₂) *Minden egyenesen teljesül a Dedekind-axióma.*

Definíció. Az eddigi — illeszkedési, rendezési és folytonossági — axiómákat teljesítő $\mathfrak{T} = (\mathcal{T}, \mathcal{S}, \mathcal{G})$ rendszereket *affin térnek* nevezzük. ▲

Tétel. *Az affin tér minden síkja affin sík, vagyis pontjainak halmaza, az általa tartalmazott egyenesek halmaza, az affin tér illeszkedési és rendezési relációival olyan rendszert alkot, mely teljesíti az affin sík axiómarendszerét.*

E tétel bizonyítása az olvasóra marad azzal a megjegyzéssel, hogy a (J₃) és (J₄) axiómák biztosítják a térbeli egyenesekre vonatkozó axiómák síkbeli egyenesekre való alkalmazhatóságát.

A (J_3) axióma szerint három pont mindig komplanáris, ezért a *háromszög* fogalmát, ahogy a vele kapcsolatos többi fogalmat is, a síkban már definiált fogalommal megegyezően értelmezzük. Minthogy a párhuzamos egyenesek komplanárisak, a *paralelogramma* fogalmát és a vele kapcsolatos többi fogalmat is, a síkban már definiált fogalommal azonosan értelmezzük.

A $\varphi: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ leképezéseknek az egyenesekkel kapcsolatos típusait, az *egyenest* tartót, az *egyenestartót* és a *kollineációt* is a síknál megadott módon definiáljuk.

Két affin teret *izomorf*nak mondunk, ha van közöttük egy kollineáció. A $\varphi: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ leképezéseket a tér *transzformációinak* nevezzük. Az ilyen kollineációk a tér bijektív transzformációcsoportjának részcsoportját alkotják. Ennek bizonyítása a síkbeli esethez hasonló.

Nyitott könyv tétele. Ha $AA'B'B$ egy paralelogramma, akkor a B, B', C', C pontok akkor és csak akkor alkotnak paralelogrammát, ha az A, A', C', C pontok is paralelogrammát alkotnak.

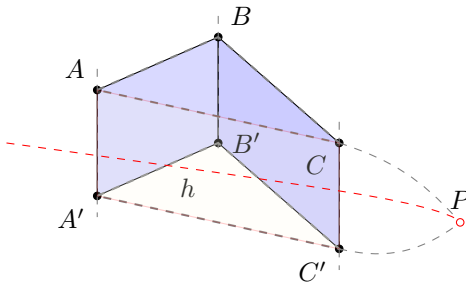
Bizonyítás. Mivel az AA' és a BB' szerepe az állításban felcserélhető, elegendő csak az „akkor” irányt igazolni, az egyben a „csak akkor” állítást is igazolja.

Mindenekelőtt vegyük észre, hogy ha $AA'B'B$ és $B'BCC'$ egyike elfajuló paralelogramma, akkor a tétel állítása a síkbeli esetben elvégzett bizonyítás szerint következik, hiszen ilyenkor az A, A', B, B', C és C' pontok egy síkba esnek.

A továbbiakban $AA'B'B$ és $B'BCC'$ is nem elfajuló paralelogramma.

Az egyenesek párhuzamosságának tranzitivitása miatt $AA' \parallel C'C$, és így az A, A', C' és C pontok mind egy síkba esnek.

Ha az AC és $A'C'$ egyeneseknek nincs közös pontja, akkor definíció szerint $AC \parallel A'C'$, ami az iménti észrevétel miatt éppen a tétel állítása.

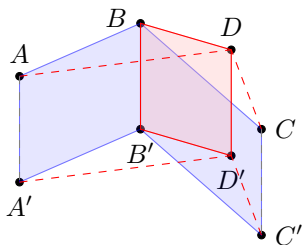


Tegyük fel, hogy az $AA'B'B$ síkja nem esik egybe a $B'BCC'$ síkjával.

Ha az AC és $A'C'$ egyeneseknek van közös pontja, jelölje ezt P . Ez azt jelenti, hogy az ABC és $A'B'C'$ síkoknak van közös pontja, amiért van közös h egyenese is. Ha h metszi az $ABB'B$ síkot, akkor ez a metszéspont az ABC és az $A'B'C'$ síkon is rajta van, így raj-

ta van ezeknek az $ABB'B$ síkkal vett metszetén is. Ezek a metszéspontok éppen az AB és $A'B'$ egyenesek, melyek viszont párhuzamosak, tehát nincs metszetük. Eszerint h nem metszi az $ABB'B$ síkot és ugyanezzel a gondolatmenettel igazolhatóan nem metszi a $B'BCC'$ síkot sem. Tehát h párhuzamos a BB' egyenesre illeszkedő $ABB'B$ és $B'BCC'$ síkkal is, amiért e két sík megegyezik.

Az ellentmondás bizonyítja, hogy $AC \parallel A'C'$, ha az $AA'B'B$ sík nem esik egybe a $B'BCC'$ síkkal.



Ha az $AA'B'B$ és $B'BCC'$ síkjai egybeesnek, az állítást visszavezetjük a most bizonyított eredményünkre.

Legyen $\mathcal{S}$ az $AA'B'B$, egyben a $B'BCC'$ síkja is. Vegyünk fel egy tetszőleges D pontot ezen a síkon kívül, majd vegyük azt a D' pontot, amivel a $BB'D'D$ négyszög paralelogramma lesz. Ilyen pontosan egy van, hiszen ez a pont a B' ponton keresztül a BD , illetve a D ponton keresztül a BB' egyenesel párhuzamos egyenesek metszete. Minthogy a $BDD'B'$ síkja nem esik egybe az $\mathcal{S}$ síkkal, előbbi eredményünk értelmében $ADD'A'$ és $CDD'C'$ is paralelogramma. Ezekre újra előbbi eredményünket használva kapjuk, hogy $AC \parallel A'C'$, ahogy a tétel állítja. ■

Az egyenesek párhuzamossági reláció szerinti ekvivalencia-osztályait most is *ideális pontoknak*, ezek halmazát viszont *ideális síknak* nevezzük. A síkok párhuzamosság szerinti ekvivalencia-osztályait *ideális egyeneseknek* hívjuk.

A háromszögek pontra, illetve egyenesre való *perspektivitásának* fogalma meg egyezik a síknál megadottal, itt azonban a Desargues-tulajdonság mindig teljesül.

Desargues-tétel. Tekintsünk olyan nem elfajuló ABC és $A'B'C'$ háromszögeket, amelyekre $A \neq A'$, $B \neq B'$, és $C \neq C'$.

Az ideális elemekkel kiegészített térben az ABC és $A'B'C'$ háromszögek akkor és csak akkor perspektívek pontra nézve, ha egyenesre nézve is perspektívek.

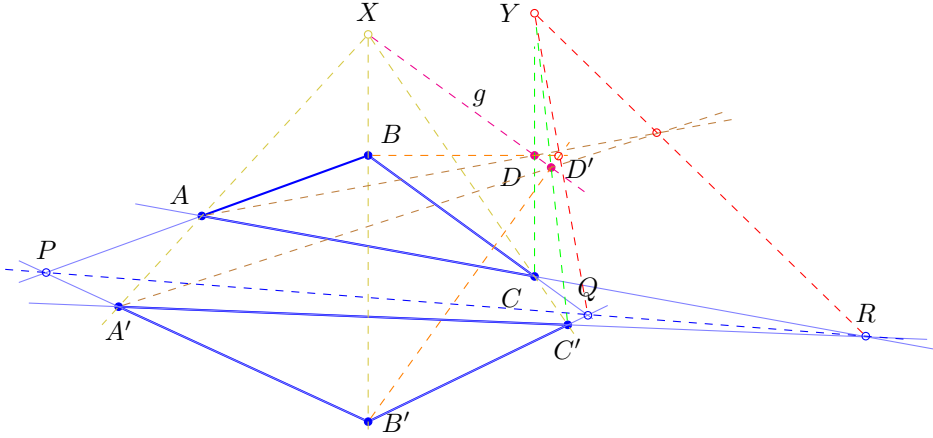
Bizonyítás. 1. eset: A két háromszög síkjai nem esnek egybe.

Pontra perspektivitás $\Rightarrow$ egyenesre perspektivitás. A feltétel szerint az A, B, B', A' pontok egy síkban vannak, miközben az AB egyenes az ABC háromszög, az $A'B'$ egyenes az $A'B'C'$ háromszög síkjába esik. E két egyenes metszéspontja ezért az említett három sík metszéspontjába kell essen. Eszerint a megfelelő oldal-egyenesek metszéspontjai mindig a két háromszög síkjának metszésvonalára esnek, ami bizonyítja az állítást.

Egyenesre perspektivitás $\Rightarrow$ pontra perspektivitás. A feltétel szerint a megfelelő oldalpárok pontjai, vagyis az $\{A, B, B', A'\}$, $\{A, C, C', A'\}$ és $\{B, C, C', B'\}$ pontnégységek is egy-egy síkra illeszkednek. E három sík páronként metszi egymást az AA' , BB' és CC' egyenesekben. Ha két ilyen egyenesnek van közös pontja, az mindhárom síknak közös pontja, így rajta kell legyen mindhárom egyenesen, vagyis az egyenesek egy ponton, a három sík egyetlen közös pontján mennek át. Ha ilyen közös pont nincsen, akkor az egyenesek párhuzamosak, hiszen nincsen metszetük, de páronként

egy síkba esnek.

2. eset: A két háromszög ugyanarra a síkra illeszkedik. Használjuk az ábra jelöléseit, ahol az ABC és $A'B'C'$ háromszögek az X pontra és a PQR egyenesre perspektívek, D egy, a háromszögek $\mathcal{S}$ síkján kívül eső pont, g az az egyenes, mely átmegy a D ponton és párhuzamos a CC' egyenessel, ha $AA' \parallel BB' \parallel CC'$, különben viszont átmegy az $X = AA' \cap BB' \cap CC'$ ponton; $Y \neq C, D$ pedig olyan pont a CD egyenesen, melyre az $YC' \parallel g$.



Pontra perspektivitás $\Rightarrow$ egyenesre perspektivitás. Ekkor a Q, R és Y pontokra illeszkedő $\mathcal{S}'$ sík nem esik egybe az $\mathcal{S}$ síkkal, hiszen Y nincs az $\mathcal{S}$ síkon, és a g metszi a $C'Y$ egyenest valamely D' pontban.

Az ACD és $A'C'D'$, a BCD és $B'C'D'$, végül az ABD és $A'B'D'$ nem elfajuló háromszögpárok pontra nézve perspektívek, így az 1. esetben látottak szerint a következők figyelhetők meg:

- $AC \cap A'C' = R$, $CD \cap C'D' = Y$, és $AD \cap A'D'$ egy egyenesre esik,
- $BC \cap B'C' = Q$, $CD \cap C'D' = Y$, és $DB \cap D'B'$ egy egyenesre esik.
- $BA \cap B'A' = P$, $AD \cap A'D'$, és $DB \cap D'B'$ is egy egyenesre esik.

Az első két megfigyelés miatt $BD \cap B'D'$ és $AD \cap A'D'$ is az $\mathcal{S}'$ síkra esik, az utolsó megfigyelés miatt pedig a $P \in \mathcal{S}'$ is teljesül, vagyis a P pont az $\mathcal{S}$ és $\mathcal{S}'$ síkra is illeszkedik, ahogy definíciója miatt a Q és R pontok is az $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}'$ egyenesre esnek, ami igazolja az állítást.

Egyenesre perspektivitás $\Rightarrow$ pontra perspektivitás. Legyen C'' az a pont az $A'C'$ egyenesen, melyre az ABC és az $A'B'C''$ háromszögek az $AA' \cap BB'$ — esetleg ideális — pontra nézve perspektívek.

Ekkor az iméntiek miatt ABC és $A'B'C''$ egyenesre nézve is perspektív, mégpedig a PR egyenesre, mert $P = AB \cap A'B'$ és $R = AC \cap AC' = AC \cap AC''$.

Eszerint a $B'C'$ egyenes és a $B'C''$ egyenes is ugyanazon $Q = PR \cap BC$ pontban metszi a PR egyenest, amiért $C' = PR \cap B'Q = C''$, amit bizonyítani kellett. ■

Az axiómák áttekintése és Desargues tétele vezet a következő felismeréshez.

4.1.1. Tétel. *Az affin tér síkjai Desargues-tulajdonságúak.*

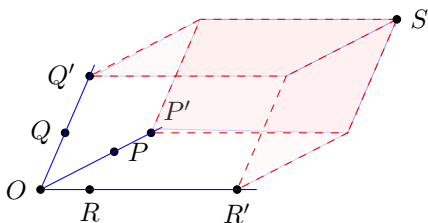
4.2. Koordinátázások és transzformációk

Most is a rendezett pontpárok a kötött vektorok, ezek p -reláció szerinti osztályai a szabad vektorok, melyek összeadása és szorzása is ugyanúgy történik.

A helyvektorok is ugyanúgy keletkeznek, ugyancsak vektortér struktúrát kapnak. Az O pont által meghatározott helyvektorok halmazát $T_O\mathfrak{T}$ jelöli. Most is a paralelogramma-szabály határozza meg az összeadásukat.

Tétel. *A tér helyvektorterei három dimenziósak.*

Bizonyítás. Legyenek a P , Q és R pontok a térben olyanok, hogy O , P , Q és R nem esnek egy síkra.



Tetszőleges S ponthoz legyenek P' , Q' és R' azon pontok, melyeket rendre az S pontra illeszkedő, az OQR , OPR , illetve OPQ síkkal párhuzamos sík metsz ki az OP , OQ és OR egyeneseken. Ekkor a síkokban kimetszett négyszögek paralelogrammák lesznek.

Eszerint $S_O = P'_O + Q'_O + R'_O = \kappa P_O + \lambda Q_O + \mu R_O$, vagyis minden helyvektor előáll a P_O , Q_O és R_O helyvektorok lineáris kombinációjaként. A P_O , Q_O és R_O helyvektorok függetlenek is, hiszen a P , Q , R és O pontok nincsenek egy síkban, vagyis $\{P_O, Q_O, R_O\}$ a $T_O\mathfrak{T}$ helyvektortér bázisa. ■

Tétel. *A tér pontjai bijektíven rendelhetők az $\mathbb{R}^3$ rendezett számhármasaihoz.*

Bizonyítás. Legyen O egy pont, $T_O\mathfrak{T}$ pedig az ebből induló helyvektorok tere. Jelölje ξ_O a bijektív $P \mapsto P_O$ hozzárendelést.

Legyen a $T_O\mathfrak{T}$ tér egy bázisa $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$, valamint legyen minden $\mathbf{h} \in T_O\mathfrak{T}$ helyvektorra $\mathbf{h} = \kappa_{\mathbf{h}}\mathbf{u} + \lambda_{\mathbf{h}}\mathbf{v} + \mu_{\mathbf{h}}\mathbf{w}$. Jelölje χ_B a bijektív $\mathbf{h} \mapsto (\kappa_{\mathbf{h}}, \lambda_{\mathbf{h}}, \mu_{\mathbf{h}})$ hozzárendelést. Ekkor a $\varphi = \chi_B \circ \xi_O$ a kívánt tulajdonságú $\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés. ■

Definíció. A tér fentiek szerint definiált $\varphi: \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^3$ bijektív leképezéseit a tér *koordinátázásának* nevezzük. A koordinátázások során kapott valós számhármások halmazát *koordinátatérnek* hívjuk.

A tér azon egyeneseit, melyek tartalmazzák az origót és a választott bázis elemeinek végpontjait, a *koordinátázás tengelyeinek* nevezzük. ▲

Tétel. Az $\mathbb{R}^3$ koordinátatér vektorteret alkot az

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \text{ és} \\ \lambda \cdot (x_1, x_2, x_3) := (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$$

műveletekkel, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges, és minden $i = 1, 2, 3$ természetes számra $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ tetszőleges számok.

A vektortér-feltételek ellenőrzése most is olyan egyszerű, hogy a bizonyítás az olvasóra marad, ahogy a bázisbontással kezelhető alábbi állítás igazolása is.

Tétel. A tér minden $T_O \mathfrak{T}$ helyvektortere izomorf az $(\mathbb{R}^3, +, \{\lambda \cdot\}_{\lambda \in \mathbb{R}})$ vektortérrel.

Ez az izomorfia nem kanonikus, mert nem független a bázisok megválasztásától, de azt is jelenti, hogy a tér helyvektorterei egymással is izomorfak, ami amúgy a kanonikus $v_P \mapsto v_Q$ izomorfia is biztosít.

Tétel. A tér egy $\mathcal{S}$ részhalmaza akkor és csak akkor sík, ha bármely koordinátázásához léteznek olyan $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ számok, hogy $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ és a tér (x, y, z) koordinátájú pontja pontosan akkor eleme az $\mathcal{S}$ ponthalmaznak, ha $ax + by + cz = d$.

Bizonyítás. Ha $\mathcal{S}$ egy az O origón átmenő sík, akkor vegyünk olyan P és Q pontot rajta, melyre O, P, Q nem kollinéarisak. Ekkor az $\mathcal{S}$ sík $T_O \mathcal{S}$ helyvektorsíkjaiban a P_O és Q_O helyvektorok egy $\mathcal{B}$ bázist alkotnak, ahogy azt már láttuk. Eszerint

$$\mathcal{S} = \{R \in \mathcal{T} : R_O = \lambda P_O + \mu Q_O, \quad \text{ahol} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$

ami azt jelenti, hogy a $\varphi = \chi_{\mathcal{B}} \circ \xi_O$ koordinátázásnál

$$\varphi(\mathcal{S}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \lambda \varphi(P) + \mu \varphi(Q), \quad \text{ahol} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$

vagyis $\varphi(\mathcal{S})$ pontjainak koordinátái $(\lambda x_P + \mu x_Q, \lambda y_P + \mu y_Q, \lambda z_P + \mu z_Q)$ alakúak, ahol $\varphi(P) = (x_P, y_P, z_P)$, és $\varphi(Q) = (x_Q, y_Q, z_Q)$. Legyen $a = y_P z_Q - z_P y_Q$, $b = z_P x_Q - x_P z_Q$ és $c = x_P y_Q - y_P x_Q$. Ekkor a $\varphi(\mathcal{S})$ elemei az $ax + by + cz = 0$ egyenlet megoldásai, ami egyszerű helyettesítéssel ellenőrizhető.

Ha az a, b és c együtthatók mind nullák, akkor $y_P z_Q = z_P y_Q$, $z_P x_Q = x_P z_Q$ és $x_P y_Q = y_P x_Q$, és feltételezve, hogy $x_P \neq 0$ (hiszen $\varphi(P) \neq 0$ miatt nem lehet $\varphi(P)$ összes koordinátája nulla), $\frac{x_Q}{x_P} \varphi(P) = \varphi(Q)$. Mivel $\varphi(P)$ és $\varphi(Q)$ bázist alkot

a sík helyvektorterében, ez nem lehetséges, tehát az a , b és c együtthatók nem mind nullák, mondjuk $c \neq 0$.

Ha (x_0, y_0, z_0) és (x_1, y_1, z_1) is az $ax + by + cz = 0$ egyenlet megoldása, akkor tetszőleges $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ számokra $(\lambda x_0 + \mu x_1, \lambda y_0 + \mu y_1, \lambda z_0 + \mu z_1)$ is megoldás, ezért az $ax + by + cz = 0$ egyenlet megoldásai egy $\mathcal{M}$ vektorteret² alkotnak. Ha $0 = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q) = (\lambda x_P + \mu x_Q, \lambda y_P + \mu y_Q, \lambda z_P + \mu z_Q)$, akkor $\lambda x_P = -\mu x_Q$, $\lambda y_P = -\mu y_Q$, és $\lambda z_P = -\mu z_Q$, amiből $\lambda c = \lambda(x_P y_Q - y_P x_Q) = -\mu x_Q y_Q + \mu y_Q x_Q = 0$, és $\mu c = \mu(x_P y_Q - y_P x_Q) = x_P(-\lambda y_P) - y_P(-\lambda x_P) = 0$, vagyis $\lambda = \mu = 0$ adódik. Eszerint a $\varphi(P)$ és $\varphi(Q)$ bázist alkot az $\mathcal{M}$ vektortérben, és így

$$\begin{aligned}\varphi(\mathcal{S}) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q), \text{ ahol } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\},\end{aligned}$$

ahogy a tétel állítja.

A tétel másik, fordított állításához tekintsük az $ax + by + cz = 0$ egyenletet. Mivel $a, b, c \in \mathbb{R}$ nem egyszerre nulla számok, egyikük, mondjuk c , biztosan nem nulla, amiért $(-c, 0, a)$ és $(0, -c, b)$ az egyenlet egymásnak nem többszörös megoldásai, és az egyenlet bármely (x, y, z) megoldására $(x, y, z) = \frac{x}{-c}(-c, 0, a) + \frac{y}{-c}(0, -c, b)$, hiszen $\frac{x}{-c}a + \frac{y}{-c}b = \frac{xa+yb}{-c} = \frac{-cz}{-c} = z$. Eszerint az $\mathcal{M}$ kétdimenziós vektortér, melyben $(-c, 0, a)$ és $(0, -c, b)$ egy bázis. Minthogy φ bijektív, léteznek olyan P és Q pontok, hogy $\varphi(P) = (-c, 0, a)$ és $\varphi(Q) = (0, -c, b)$, vagyis

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

A jobb oldalon felismerhető a P, Q pontokra és az O origóra illeszkedő $\mathcal{S} = \{R : R_O = \lambda P_O + \mu Q_O, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ sík $\varphi(\mathcal{S})$ képe, ami igazolja az állítást az origón átmenő $\mathcal{S}$ sík, illetve az $ax + by + cz = 0$ egyenletek esetére.

Ha $\mathcal{S}'$ tetszőleges sík, legyen $\mathcal{S}$ ezzel párhuzamos, az origón átmenő sík. Legyen $O' \in \mathcal{S}$, és $P, Q \in \mathcal{S}$, az origóval nem kollineáris pont. Ekkor

$$\mathcal{S}' = \{R' \in \mathcal{T} : R'_O = O'_O + \lambda P_O + \mu Q_O, \text{ ahol } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Ha az O' koordinátája (x_0, y_0, z_0) , akkor eszerint $\mathcal{S}'$ pontosan azon pontokból áll, melynek koordinátái $(x_0, y_0, z_0) + \lambda(x_P, y_P, z_P) + \mu(x_Q, y_Q, z_Q)$, ahol $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Az $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ eset fentebbi vizsgálata alapján pontosan ezek a koordináták az $ax + by + cz = d$ egyenlet megoldásai, ahol $d = ax_0 + by_0 + cz_0$. Ezzel a tétel egészét igazoltuk. ■

Tétel. *Két sík a térben akkor és csak akkor párhuzamos, ha a valamely koordinátázásban nekik megfelelő $ax + by + cz = d$ és $a'x + b'y + c'z = d'$ egyenletekhez létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ szám, melyre $\lambda a = a'$, $\lambda b = b'$ és $\lambda c = c'$ teljesül.*

²Lásd a Függelék F.3. szakaszát!

Bizonyítás. Ahogy fentebb, most is a két egyenlet közös megoldásait kell megkeresnünk. Egyszerű helyettesítéssel látható, hogy

$$\begin{aligned} \text{ha } a'b - ab' &\neq 0, \text{ akkor } \left(\frac{a'd - ad'}{a'b - ab'}, \frac{b'd - bd'}{ab' - b'a}, 0 \right), \\ \text{ha } b'c - bc' &\neq 0, \text{ akkor } \left(0, \frac{b'd - bd'}{b'c - bc'}, \frac{c'd - cd'}{bc' - b'c} \right), \\ \text{ha } c'a - ca' &\neq 0, \text{ akkor } \left(\frac{a'd - ad'}{c'a - ca'}, 0, \frac{c'd - cd'}{ca' - c'a} \right), \end{aligned}$$

az egyenleteink közös megoldásai.

Ha tehát a két síknak nincsen közös pontja, akkor $bc' = b'c$, $ca' = c'a$ és $ab' = a'b$ is teljesül. Vegyük figyelembe, hogy $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ miatt $a \neq 0$, $b \neq 0$ vagy $c \neq 0$. Ha $a \neq 0$, akkor létezik egy $\lambda \in \mathbb{R}$ szám, melyre $\lambda a = a'$, és így $0 = a'b - ab' = \lambda ab - ab' = \lambda b - b'$, vagyis $b' = \lambda b$ is teljesül, és ugyanígy $c' = \lambda c$ is adódik. Hasonlóan járhatunk el a $b \neq 0$ és a $c \neq 0$ esetben is, ami igazolja a tétel állítását különböző síkok esetében.

Ha a két sík egybeesik, akkor a $ax + by + cz = d$ és $a'x + b'y + c'z = d'$ egyenletek megoldásai egybeesnek. Tegyük fel, hogy (x_0, y_0, z_0) egy közös megoldás. Mivel $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, feltehető, hogy az egyik, mondjuk, az a szám nem nulla.

Minden $\mu \in \mathbb{R}$ esetén $(x_0, y_0, z_0) + \mu(b, -a, 0)$ is közös megoldás, hiszen $a(x_0 + \mu b) + b(y_0 - \mu a) + cz_0 = ax_0 + by_0 + cz_0 = d$, és a megoldások egybeesnek. Eszerint $a'(x_0 + \mu b) + b'(y_0 - \mu a) + c'z_0 = d'$ is teljesül, amiért $a'x_0 + b'y_0 + c'z_0 = d'$ miatt $a'\mu b - b'\mu a = 0$ minden μ esetén, vagyis $ab' = a'b$. Ugyanígy kapjuk az $ac' = a'c$ összefüggést is, melyekből $a \neq 0$ miatt a $\lambda a = a'$ egyenletet teljesítő $\lambda \in \mathbb{R}$ számra $b' = \lambda b$ és $c' = \lambda c$ is adódik, ahogy a tétel állítja. ■

Itt is érdemes az összes egymással párhuzamos sík (ko)normálisairól beszélni. Az $ax + by + cz = d$ egyenletű egyenesek esetén ezek a $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ számhármások ($\lambda \in \mathbb{R}$ nem nulla).

Most a könnyebb kezelhetőség érdekében elnevezzük a síkok képeit a koordinátatérben, habár később látni fogjuk, hogy valójában ezek is síkok.

Definíció. Az $\mathbb{R}^3$ koordinátatérben az $ax + by + cz = d$ ($a^2 + b^2 + c^2 > 0$) alakú egyenletek megoldáshalmazait *koordinátasíknak* nevezzük. Ezek halmazát $\mathcal{S}_k$ jelöli. ▲

Ennek értelmében beszélünk $ax + by + cz = d$ (egyenletű) koordinátasíkról.

Ha két koordinátasík metszete nem üres, és nem esnek egybe, akkor metszetük egy koordinátaegyenes. A fenti jelöléseket használva ugyanis tegyük fel, hogy (x_0, y_0, z_0) egy közös megoldás. Ekkor minden $\mu \in \mathbb{R}$ esetén az $(x_0, y_0, z_0) + \mu(bc' -$

$b'c, ca' - c'a, ab' - a'b$) is megoldás, hiszen

$$\begin{aligned} a(bc' - b'c) + b(ca' - c'a) + c(ab' - a'b) &= 0, \\ a'(bc' - b'c) + b'(ca' - c'a) + c'(ab' - a'b) &= 0, \end{aligned}$$

márpedig $(bc' - b'c, ca' - c'a, ab' - a'b)$ csak akkor $(0, 0, 0)$, ha a két sík párhuzamos egymással.

Tétel. *A koordinátaterек egyenesein a lexicografikus rendezéssel az $(\mathbb{R}^3, \mathcal{S}_k, \mathcal{G}_k)$ rendszer affin teret alkot.*

A bizonyítás az összes axióma ellenőrzését kívánja meg. Ez lényegében ugyanúgy megy mint a sík esetén. Az $(\mathbb{R}^3, \mathcal{S}_k, \mathcal{G}_k)$ rendszert valós affin térnek nevezzük.

Tétel. *Az affin terek izomorfak a valós affin térrel.*

A tér esetén is sok különböző koordinátázás létezik, az ezek közti kapcsolat most is a síkhoz hasonlóan alakul. A $\varphi = \chi_B \circ \xi_O$ és $\varphi' = \chi_{B'} \circ \xi_{O'}$ koordinátázások

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{T} \\ \downarrow \varphi & \searrow \varphi' & \downarrow \varphi \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R}^3 \end{array} \quad \text{bijektívek, így a}$$

$$\begin{aligned} \phi &= \varphi' \circ \varphi^{-1} = \chi_{B'} \circ \xi_{O'} \circ \xi_O^{-1} \circ \chi_B^{-1}, \\ \psi &= \varphi^{-1} \circ \varphi' = \xi_O^{-1} \circ \chi_B^{-1} \circ \chi_{B'} \circ \xi_{O'} \end{aligned}$$

átmenetleképezések is bijektívek. A ϕ a koordinátatér, a ψ pedig az affin sík transzformációja, ezért ahogy a sík esetén, előbbi most is *koordinátatranszformációnak*, utóbbit pedig *affin transzformációnak* nevezzük.

A síkbeli esettel teljesen analóg módon az affin transzformációk kollineációk, a koordinátatranszformációk pedig tartják a koordinátaegyeneseket és bijektívek.

Vegyük észre, hogy a kollineációk ezúttal a síkokat is tartják, valamint a síktartó bijekciók tartják az egyeneseket is, emiatt a síknál tapasztalt eredmények szinte változatlan formában maradnak érvényben a tér esetére.

Tétel. *Az $\mathbb{R}^3$ koordinátatranszformációi éppen az*

$$(x, y, z) \mapsto (x_0, y_0, z_0) + (x, y, z) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

alakú transzformációk, ahol a mátrix determinánsa nem nulla. A tér affin transzformációi éppen a tér kollineációi.

Tétel. *Tetszőleges négy általános helyzetű (x_1, y_1, z_1) , (x_0, y_0, z_0) , (x_{-1}, y_{-1}, z_{-1}) és (x_i, y_i, z_i) koordinátaponthoz létezik az $\mathbb{R}^3$ koordinátatér pontosan egy olyan φ*

koordinátatranszformációja, melyre $(x_1, y_1, z_1) = \varphi(1, 0, 0)$, $(x_0, y_0, z_0) = \varphi(0, 0, 0)$, $(x_{-1}, y_{-1}, z_{-1}) = \varphi(0, 1, 0)$, és $(x_i, y_i, z_i) = \varphi(0, 0, 1)$.

Az affin tér tetszőleges két általános helyzetű pontnégyeséhez pontosan egy olyan affinitás létezik, mely az egyik pontnégyest a másikba viszi.

4.2.1. Tétel. Egy egyenességet tartó leképezés akkor és csak akkor kollineáció, ha tartja az osztóviszonyt, és van négy általános helyzetű pont, melyek képe is általános helyzetű.

Tétel. Egy affinitás mátrixai egymás konjugáltjai, ahol a konjugálás mátrixa a koordinátázások közti koordinátatranszformáció mátrixa.

Bizonyítás.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{T} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{T} \\
 \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi' \\
 \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{R}^3 \\
 \downarrow \phi = \varphi' \circ \varphi^{-1} & & \downarrow \phi \\
 \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\Psi'} & \mathbb{R}^3
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \varphi' \\
 \\
 \varphi'
 \end{array}$$

Tekintsük az ábrán láthatónak megfelelően a φ és φ' koordinátázásokat. A ψ affinitásnak a φ koordinátázásban a Ψ , a φ' koordinátázásban a Ψ' koordinátatranszformáció felel meg. A φ és φ' koordinátázások közti koordinátatranszformáció legyen $\phi = \varphi' \circ \varphi^{-1}$.

A bizonyítás befejezése az **Affin sík** fejezet 1.4.2. Tétéle bizonyításával teljesen analóg. ■

Eszerint egy affinitás mátrixaiból ezúttal is kiolvashatók azon invariánsok, amelyek az affinitások geometriai jellemzői, vagyis amelyek a konjugálással nem változnak meg. Ezúttal is a mátrix determinánsa³ a legfontosabb ilyen, és ahogy a sík affinitásai esetében, úgy ezúttal is irányításváltó, illetve irányítástartó affinitásról beszélünk aszerint, hogy az affinitás determinánsa negatív vagy pozitív.

Az eltolás, a tengelyes affinitás, az affin középpontos tükrözés, az affin homotécia és a nyírás definíciója megegyezik a síkbeli esettel, de van néhány különbség ezek viselkedésében.

Az affin középpontos tükrözések a térben irányításváltók, míg az affin homotéciák a főátlóbeli elemük előjelétől függően tartják vagy fordítják az irányítást.

4.3. Euklidészi tér

Ahogy a síkon, most is érdemes az affin tér pontpárjain értelmezett olyan d függvényeket vizsgálni, melyekhez van olyan φ koordinátázás, hogy

$$d(\varphi^{-1}(x_0, y_0, z_0), \varphi^{-1}(x_1, y_1, z_1)) = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}$$

minden (x_0, y_0, z_0) és (x_1, y_1, z_1) koordinátára. Ahogy a síkon, itt is bizonyítandó, hogy ez a függvény teljesíti a szigorú háromszög-egyenlőtlenséget. A kulcs itt

³Lásd a Függelék F.6. szakaszát!

is a **Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség**, melyet megint egy egyszerű algebrai összegzés, a

$$\begin{aligned} (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - (x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1)^2 \\ = (x_0y_1 - y_0x_1)^2 + (y_0z_1 - z_0y_1)^2 + (z_0x_1 - x_0z_1)^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

formula igazol. A d függvény tehát affin metrika, amit ezúttal is *euklidészi metrikának* nevezünk. Az olyan affin tereket, melyek ilyen metrikával ellátottak *euklidészi térnek* nevezzük. Két euklidészi teret *izomorf*nak mondunk, ha van köztük egy kölcsönös egyértelmű leképezés, amely tartja a távolságot.

Ahogy a síkon, úgy a tér esetén is teljesül, hogy bármely d és d' euklidészi metrika esetén van olyan φ affinitás, melyre $d'(P, Q) = d(\varphi(P), \varphi(Q))$. Ennek megfelelően minden euklidészi tér izomorf.

A síknál látott módon vezethető be az

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \frac{1}{4}(|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2).$$

euklidészi szorzás is, melynek ugyanazon tulajdonságai vannak.

Két metsző egyenest akkor mondunk *merőlegesnek*, irányvektoraik ortogonálisak, ami az euklidészi szorzatuk eltűnését jelenti.

Egymást metsző egyenest és síkot *merőlegesnek* nevezünk, ha az egyenesnek a síkra vett merőleges vetülete egyetlen pont. Ilyenkor a vetületi pont megegyezik a metszésponttal és minden a síkban ezen áthaladó egyenes merőleges a metsző egyenesre.

Két metsző síkot *merőlegesnek* mondunk, ha a metszéspontjukra merőleges bármely síkkal vett metszéspontjaik merőlegesek.

Tétel. *Két kitérő egyeneshez pontosan egy mindkettőre merőleges egyenes van.*

Bizonyítás. Korábban már láttuk, hogy a g és h kitérő egyeneseket pontosan egy-egy olyan sík tartalmazza, amely párhuzamos a másik egyenessel. Mindkét egyenest merőlegesen vetítve a másik síkjára, a vetület, amely nem lehet párhuzamos az abban a síkban lévő másik egyenessel, metszi az ottani másik egyenest. A metszéspontokat összekötő egyenes eszerint olyan, hogy mindkét síkra és mindkét egyenesre merőleges.

Ha e és f egyenes is merőleges a g és h kitérő egyenesekre, akkor jelölje ezek metszéspontjait a g és h egyenesekkel rendre E_g, E_h és F_g, F_h . Az e egyenesre az E_g és E_h pontokban merőleges S_g és S_h síkok rendre tartalmazzák a g és h egyeneseket és párhuzamosak. Ugyanez igaz az F_g és F_h pontokban az f egyenesre merőleges síkokra, amiből következik, hogy ezek is az S_g és S_h síkok. Emiatt $f \parallel e$, amiért e és f komplanáris. Ha különbözőek, akkor ebből következik, hogy e és f is komplanáris, tehát $e = f$, ami bizonyítja az egyértelműséget. ■

A két kitérő egyenesre egyszerre merőleges egyenest a kitérő egyenesek *normáltranszverzálisának* nevezzük.

A térben az $\langle X_O, \mathbf{n} \rangle = c$ egyenletű ponthalmaz egy $\mathcal{S}$ sík, és ezzel ugyanúgy definiáljuk a tér síkra vonatkozó $\tau_{\mathcal{S}}: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ tükrözését:

$$(\tau_{\mathcal{S}}(P))_O := P_O + 2(c - \langle P_O, \mathbf{n} \rangle)\mathbf{n}.$$

Ennek megfelelően a szakaszfelező merőleges egy sík, amely átmegy a szakasz felezőpontján és amelyre való tükrözés az egyetlen tükrözés, mely felcseréli a szakasz végpontjait.

Fixponttétel. *Legyen ι egy térizometria.*

- (1) *Ha ι négy, nem egy síkra illeszkedő pontot fixen hagy, akkor az identikus transzformáció.*
- (2) *Ha ι három nem kollineáris pontot fixen hagy, akkor identitás, vagy a három fixpont síkjára vonatkozó tükrözés.*
- (3) *Ha ι kettő különböző pontot fixen hagy, akkor identitás, vagy a két fixponton átmenő valamely síkra vonatkozó tükrözés, vagy két ilyen síkra vonatkozó tükrözés szorzata.*
- (4) *Ha ι fixen hagy egy pontot, akkor identitás, vagy a fixponton átmenő valamely síkra vonatkozó tükrözés, vagy két ilyen síkra vonatkozó tükrözés szorzata, vagy három ilyen síkra vonatkozó tükrözés szorzata.*

Bizonyítás. Először jegyezzük meg, hogy minden Q pont és annak $\iota(Q)$ képe azonos távolságra van minden fixponttól, mert $d(F, Q) = d(\iota(F), \iota(Q)) = d(F, \iota(Q))$.

(1) Ha egy Q pont nem egyezik meg a $\iota(Q)$ képével, akkor a megjegyzésünk szerint minden fixpont a $\overline{Q\iota(Q)}$ felező merőleges síkjára illeszkedik, ami nem lehet, hiszen a fixpontok nem illeszkednek egy síkra. Tehát minden Q pontra $Q = \iota(Q)$.

(2) Ha egy a fixpontok síkjára nem illeszkedő Q pont esetén $Q = \iota(Q)$, akkor (1) szerint $\iota = \text{id}$.

Ha egy a fixpontok síkjára nem illeszkedő Q pont nem egyezik meg az $\iota(Q)$ képével, akkor megjegyzésünk szerint minden fixpont a $\overline{Q\iota(Q)}$ felező merőleges $\mathcal{S}$ síkjára illeszkedik, ezért a $\tau_{\mathcal{S}}\iota$ izometria a három fixponttal együtt a Q pontot is helyben hagyja, így (1) szerint $\tau_{\mathcal{S}}\iota = \text{id}$, amiből átszorzással $\iota = \tau_{\mathcal{S}}$ adódik.

(3) Ha egy a fixpontok egyenesére nem illeszkedő Q pont esetén $Q = \iota(Q)$, akkor (2) szerint ι identitás vagy a fixpontokra illeszkedő síkra vonatkozó tükrözés.

Ha egy a fixpontok egyenesére nem illeszkedő Q pont nem egyezik meg az $\iota(Q)$ képével, akkor megjegyzésünk szerint minden fixpont a $\overline{Q\iota(Q)}$ felező merőleges $\mathcal{S}$ síkjára illeszkedik, ezért a $\tau_{\mathcal{S}}\iota$ helyben hagyja a fixpontokat és a Q pontot. Ekkor

(2) szerint $\tau_S \iota$ identitás vagy a fixpontokra illeszkedő síkra vonatkozó tükrözés. A τ_S tükrözéssel átszorozva az állítás adódik.

(4) Ha egy fixponttól különböző Q pont esetén $Q = \iota(Q)$, akkor (3) szerint ι identitás, vagy a fixponton átmenő valamely síkra vonatkozó tükrözés, vagy két ilyen síkra vonatkozó tükrözés szorzata.

Ha egy fixponttól különböző Q pont esetén $Q \neq \iota(Q)$, akkor megjegyzésünk szerint a fixpont a $\overline{Q\iota(Q)}$ felező merőleges $\mathcal{S}$ síkjára illeszkedik, ezért a $\tau_S \iota$ helyben hagyja a fixpontot és a Q pontot. Ekkor (3) szerint $\tau_S \iota$ identitás, vagy a fixponton átmenő valamely síkra vonatkozó tükrözés, vagy két ilyen síkra vonatkozó tükrözés szorzata. A τ_S tükrözéssel átszorozva az állítás adódik. ■

Tétel. Minden ι térizometria előállítható legfeljebb négy síkra vonatkozó tükrözés szorzataként.

Bizonyítás. Ha $\iota \neq \text{id}$, akkor létezik olyan Q pont, amelyre $Q \neq \iota(Q)$. Legyen $\mathcal{S}$ a $\overline{Q\iota(Q)}$ szakasz felező merőlegese. Ebben az esetben a $\tau_S \iota$ izometriánál a Q pont fixen marad, ezért a fixpont-tétel utolsó esete szerint a $\tau_S \iota$ legfeljebb három tükrözés szorzata. A τ_S tükrözéssel átszorozva a tétel adódik. ■

Tétel. Ha két síkra tükrözésre $\tau_{\mathcal{S}_1} = \tau_{\mathcal{S}_2}$ érvényes, akkor $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$.

Bizonyítás. Válasszunk három nem kollineáris $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{S}_1$ pontot. A feltétel szerint $\iota = \tau_{\mathcal{S}_2} \tau_{\mathcal{S}_1}$ identitás, ezért helybenhagyja a $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{S}_1$ pontokat. Viszont $P_i = \iota(P_i) = \tau_{\mathcal{S}_2} \tau_{\mathcal{S}_1}(P_i) = \tau_{\mathcal{S}_2}(P_i)$ ($i = 1, 2, 3$) azt jelenti, hogy az $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{S}_1$ pontok a $\tau_{\mathcal{S}_2}$ tükrözés fixpontjai, és ezért az $\mathcal{S}_2$ síkra kell esnek, amiért az $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ síkok három nem kollineáris közös ponttal rendelkeznek, így egybe kell esnek. ■

Legyen w az $\mathcal{S}$ síkjára merőleges egyenes, a síkkal vett metszete legyen O , és vegyünk két, egymásra merőleges u és v egyenest az O ponton keresztül az $\mathcal{S}$ síkban. Ekkor a $\mathcal{T}_O$ helyvektortérben az u, v és w egyeneseken választott bázis-helyvektorok által meghatározott koordinátázásban vizsgálva a τ_S tükrözést, a koordinátatérben

$$\tau_S: (x, y, z) \mapsto (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

adódik. Ebből azonnal látszik, hogy a síkra tükrözések irányítást váltó affin tükrözések. Ez bizonyítja a következőt.

Tétel. Páratlan sok tükrözés szorzata nem lehet egyenlő páros sok szorzatával.

Tétel. (tükrözés konjugálása) Tetszőleges ι térizometriára és τ_S tükrözésre $\iota \tau_S \iota^{-1} = \tau_{\iota(\mathcal{S})}$ érvényes.

Bizonyítás. A tételben szereplő egyenlet bal oldala a $\iota(\mathcal{S})$ sík pontjait fixen hagyja, ezért csak erre a síkra vonatkozó tükrözés vagy az identikus leképezés lehet. Utóbbiból azonban $\tau_{\mathcal{S}} = \text{id}$ következne, amely bizonyítja a tételt. ■

A tükrözés konjugálási szabályát alkalmazva, az $\iota\tau_{\mathcal{S}} = \tau_{\iota(\mathcal{S})}\iota$ felcserélési szabályhoz jutunk. Az alábbi tétel ebből a sík esetéhez hasonlóan, könnyen igazolható, bizonyítása az olvasóra marad.

Tétel. *Két síkra vonatkozó tükrözés szorzatában a tényezők akkor és csak akkor cserélhetők fel egymással, ha a síkok megegyeznek vagy pedig merőlegesek egymásra. Az izometriák merőleges síkokat merőleges síkokba transzformálnak.*

Tételünk alapján a síkra vonatkozó tükrözés invariánsan hagyja a síkjára merőleges síkokat, ami lehetővé teszi a közös merőleges síkkal rendelkező síkokra vonatkozó tükrözések szorzatai viselkedésének a közös merőleges síkon való vizsgálatát, hiszen a merőlegesség miatt a közös merőleges síkok mind invariánsak lesznek az ilyen tükrözések szorzataival szemben is.

Definíció. Két metsző síkra vonatkozó tükrözés szorzatát *tengely körüli forgatásnak*, a két sík metszésvonalát a *forgatás tengelyének* hívjuk. Ha a két sík merőlegesen metszi egymást, akkor a tengely körüli forgatást *tengelyes tükrözésnek* nevezzük. ▲

Mivel a tengely körüli forgatás minden, a tengelyére merőleges síkot invariánsan hagy, az alábbi tétel állításainak bizonyítását a síkbeli forgatással való erős analógiára utalva az olvasóra hagyjuk.

Tétel. *A tengely körüli forgatásokra teljesülnek a következők.*

- (1) *Két közös határoló egyenessel rendelkező félsíkhöz pontosan egy tengely körüli forgatás létezik, amelyik az egyik félsíkot a másikba viszi;*
- (2) *A közös tengely körüli forgatások kommutatív csoportot alkotnak.*
- (3) *Egy tengely körüli forgatás két tükröző síkját a tengely körül tetszőlegesen egyszerre elforgatva az általuk meghatározott tengely körüli forgatás nem változik.*

A térbeli tengelyes tükrözésre teljesülnek a következők:

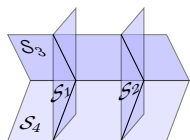
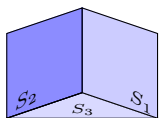
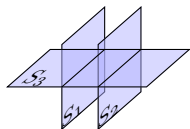
- (4) *Tengelye által egyértelműen meghatározott, vagyis független a tükröző síkok választásától;*
- (5) *Bármely, nem a tengelyre illeszkedő P pont képe az az egyértelműen meghatározott P' pont, amelyre a tengely metszi a $\overline{PP'}$ szakaszt, és a $\overline{PP'}$ felezőmerőleges síkjában van.*

Definíció. Két egymással párhuzamos síkra vonatkozó tükrözés szorzatát *párhuzamos eltolásnak* nevezzük. ▲

A párhuzamos eltolás invariánsan hagyja a síkjaira merőleges síkokat, ezért az alábbi állítások a síkbeli eltolásokra vezethetők vissza. Ez most az olvasóra marad.

Tétel. *A párhuzamos eltolásokra teljesülnek a következők.*

- (1) *Egy párhuzamos eltolás tükröző síkjait tetszőlegesen egyszerre párhuzamosan eltolva az általuk meghatározott párhuzamos eltolás nem változik.*
- (2) *Két ponthoz pontosan egy párhuzamos eltolás létezik, amelyik az egyik pontot a másikba viszi.*
- (3) *A párhuzamos eltolások minden egyenest és (így) minden síkot is önmagukkal párhuzamos egyenesbe, illetve síkba transzformálnak.*
- (4) *A párhuzamos eltolások kommutatív csoportot alkotnak.*
- (5) *Két tengelyes tükrözés szorzata párhuzamos eltolás, és minden párhuzamos eltolás kifejezhető két tengelyes tükrözés szorzataként.*



Az $\iota = \tau_{S_3}\tau_{S_2}\tau_{S_1}$ izometriát *csúsztatva tükrözéseknek* mondjuk, ha $S_1 \parallel S_2$, $S_1 \perp S_3$ és $S_2 \perp S_3$ teljesül. Mivel a merőlegesség miatt a $\tau_{S_3}\tau_{S_2}\tau_{S_1} = \tau_{S_2}\tau_{S_1}\tau_{S_3}$ felcserélhetőség érvényes, ezeket az izometriákat néha *tükrözve csúsztatásnak* is nevezzük.

Az $\iota = \tau_{S_3}\tau_{S_2}\tau_{S_1}$ izometriát *forgatva tükrözésnek* nevezzük, ha az egymást metsző S_1 és S_2 síkok merőlegesek az S_3 síkra. A $\tau_{S_3}\tau_{S_2}\tau_{S_1} = \tau_{S_2}\tau_{S_1}\tau_{S_3}$ felcserélhetőség miatt *tükrözve forgatásnak* is mondjuk.

Az $\iota = \tau_{S_4}\tau_{S_3}\tau_{S_2}\tau_{S_1}$ alakú izometriákat, ahol $S_1 \parallel S_2$, $S_3 \perp S_1$, és $S_4 \perp S_1$, *csavarmozgásoknak* nevezzük. A csavarmozgásoknál is érvényes a $(\tau_{S_4}\tau_{S_3})(\tau_{S_2}\tau_{S_1}) = (\tau_{S_2}\tau_{S_1})(\tau_{S_4}\tau_{S_3})$ felcserélés, ezért néha *csúsztatva forgatásnak* vagy *forgatva csúsztatásnak* is hívják őket.

Nyilvánvaló, hogy a párhuzamos eltolások és a tengely körüli forgatások voltaképpen olyan csavarmozgások, amelyekben a forgatás illetve az eltolás (csúsztatás) az identikus leképezés, ezért az olyan csavarmozgásokat, amelyek két síkra tükrözés szorzataként nem fejezhetők ki, *valódi csavarmozgásnak* nevezzük.

A síkok választásának szabadsága és a merőleges síkokra vonatkozó tükrözések felcserélhetősége miatt az egymást valamely C pontban metsző, páronként merőleges $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ és $\mathcal{Q}$ síkokat tetszőlegesen és tetszőleges sorrendben választva a $\tau_{\mathcal{R}}\tau_{\mathcal{S}}\tau_{\mathcal{Q}} = \tau_{\mathcal{S}}\tau_{\mathcal{Q}}\tau_{\mathcal{R}} = \tau_{\mathcal{Q}}\tau_{\mathcal{R}}\tau_{\mathcal{S}} = \tau_{\mathcal{Q}}\tau_{\mathcal{S}}\tau_{\mathcal{R}} = \tau_{\mathcal{S}}\tau_{\mathcal{R}}\tau_{\mathcal{Q}} = \tau_{\mathcal{R}}\tau_{\mathcal{Q}}\tau_{\mathcal{S}}$ izometria egyértelműen meghatározott.

Definíció. Ezt az egyértelműen meghatározott izometriát a τ_C jellel jelöljük, és a C pontra vonatkozó *centrális tükrözésnek* hívjuk. ▲

A centrális tükrözések involúciók, és C felezi a pont és képe közötti szakaszokat. A fenti is és az alábbi állítások is a síkbeli esethez hasonlóan bizonyíthatók, így az olvasóra maradnak.

Tétel. *A centrális tükrözések teljesítik a következőket.*

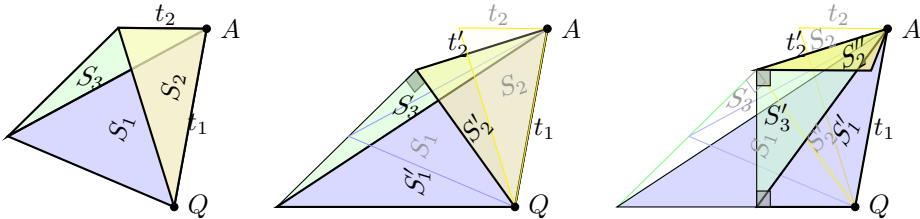
- (1) *A centrumon áthaladó egyeneseket, és így a centrumon áthaladó síkokat is invariánsan hagyják.*
- (2) *A centrumra nem illeszkedő egyenesek és síkok párhuzamosak a képükkel.*
- (3) *Két centrális tükrözés szorzata párhuzamos eltolás, és minden párhuzamos eltolás kifejezhető két centrális tükrözés szorzataként.*
- (4) *Három centrális tükrözés szorzata centrális tükrözés.*
- (5) *Tetszőleges három A, B, C centrumra $\tau_A \tau_B \tau_C = \tau_C \tau_B \tau_A$.*
- (6) *Párhuzamos eltolások centrális tükrözések szorzatával való előállításánál akár az első, akár a második centrum szabadon választható, a másik centrum pedig ezzel már egyértelműen meghatározott.*

A következőkben a fixpontok száma szerint határozzuk meg a térizometriák típusait. Ha egynél több fixpontja van egy izometriának, akkor a fentiek szerint csak tengely körüli forgatás, vagy síkra való tükrözés lehet.

Tétel. *Ha az ι térizometriának pontosan egy fixpontja van, akkor olyan forgatva tükrözés, amelynél a három tükröző sík a fixpontra illeszkedik.*

Bizonyítás. A fixpont-tétel (4) pontja szerint ι identitás, vagy a fixponton átmenő síkra vonatkozó tükrözés, vagy két ilyen síkra vonatkozó tükrözés szorzata, vagy három ilyen síkra vonatkozó tükrözés szorzata.

Az utolsót kivéve végtelen sok fixpontja lenne a ι izometriának, tehát $\iota = \tau_{S_3} \tau_{S_2} \tau_{S_1}$ adódik, ahol az A fixpontra $A = S_1 \cap S_2 \cap S_3$ teljesül.



Legyen $t_1 := S_1 \cap S_2$ és $t_2 := S_3 \cap S_2$. Forgassuk el a t_1 egyenes körül az S_1 és S_2 síkokat olyan S'_1, S'_2 síkba, hogy $S_3 \perp S'_2$ teljesüljön. Ezek után az S_3 és S'_2 síkokat forgassuk el a $t'_2 := S_3 \cap S'_2$ tengely körül addig, hogy az S'_3 merőlegesen messe az S'_1 síkot. Ekkor $S'_1 \perp S'_3$ és $S'_3 \perp S'_2$, valamint $S'_1 \cap S'_2 \cap S'_3 = A$ teljesül. Így az ι izometriára $\iota = \tau_{S_3} \tau_{S_2} \tau_{S_1} = \tau_{S_3} \tau_{S'_2} \tau_{S'_1} = \tau_{S'_3} \tau_{S'_2} \tau_{S'_1}$ adódik, ami egy forgatva tükrözés. ■

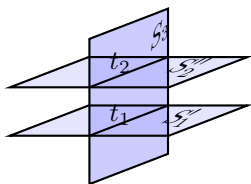
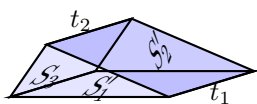
Tétel. Ha az ι térizometriának nem létezik fixpontja, akkor nem identikus párhuzamos eltolás, vagy valódi csúsztatva tükrözés, vagy valódi csavarmozgás.

Bizonyítás. Legyen Q egy tetszőleges pont, és legyen $\mathcal{S}$ a $\overline{Q\iota(Q)}$ szakasz felező merőleges síkja. A $\tau_{\mathcal{S}}\iota$ izometria a Q pontot fixen hagyja. Ez az izometria nem lehet az identikus leképezés, mert különben $\iota = \tau_{\mathcal{S}}$ állna, és a ι az $\mathcal{S}$ síkot pontonként fixen hagyná. Ezért a korábbi fixponttételek alapján a következő esetek lehetségesek.

1. $\tau_{\mathcal{S}}\iota = \tau_{\mathcal{S}_1}$.
2. $\tau_{\mathcal{S}}\iota = \tau_{\mathcal{S}_2}\tau_{\mathcal{S}_1}$, ahol $\mathcal{S}_1 \neq \mathcal{S}_2$ és $Q \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$.
3. $\tau_{\mathcal{S}}\iota = \tau_{\mathcal{S}_3}\tau_{\mathcal{S}_2}\tau_{\mathcal{S}_1}$, ahol $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{S}_3 = Q$.

Az 1. esetben $\iota = \tau_{\mathcal{S}}\tau_{\mathcal{S}_1}$, és az $\mathcal{S}$ és $\mathcal{S}_1$ síkok nem metszik egymást, mert különben a metszetük fix lenne. Tehát az ι nem identikus párhuzamos eltolás.

A 2. esetben az $\mathcal{S}_2$ és $\mathcal{S}_1$ síkok a t_1 tengelyben metszik egymást. Ez a tengely nem metszheti az $\mathcal{S}$ síkot, mert a metszet fixen maradna az ι izometriánál. Legyen $\mathcal{S}_3 = \mathcal{S}$, így $\iota = \tau_{\mathcal{S}_3}\tau_{\mathcal{S}_2}\tau_{\mathcal{S}_1}$.

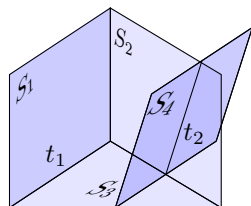


Forgassuk el az $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ síkokat a $t_1 := \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ tengely körül addig, hogy az $\mathcal{S}'_2$ merőlegesen messe az $\mathcal{S}_3$ síkot. Legyen $t_2 := \mathcal{S}'_2 \cap \mathcal{S}_3$. Ezután a t_2 tengely körül forgassuk el az $\mathcal{S}_3$ és $\mathcal{S}'_2$ síkokat addig, hogy az $\mathcal{S}'_3$ merőlegesen messe az $\mathcal{S}'_1$ síkot. Így az $\mathcal{S}'_2$ párhuzamos lesz az $\mathcal{S}'_1$ síkkal. Ekkor a

$$\iota = \tau_{\mathcal{S}_3}\tau_{\mathcal{S}_2}\tau_{\mathcal{S}_1} = \tau_{\mathcal{S}_3}\tau_{\mathcal{S}'_2}\tau_{\mathcal{S}'_1} = \tau_{\mathcal{S}'_3}\tau_{\mathcal{S}'_2'}\tau_{\mathcal{S}'_1'}$$

izometria csúsztatva tükrözés, hiszen az $\mathcal{S}'_1 \parallel \mathcal{S}'_2$, $\mathcal{S}'_1 \perp \mathcal{S}'_3$ és $\mathcal{S}'_2 \perp \mathcal{S}'_3$ relációk teljesülnek.

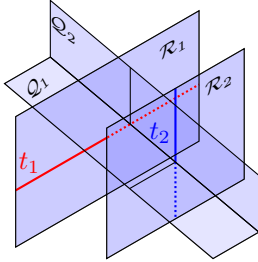
A 3. esetben legyen $\mathcal{S}_4 = \mathcal{S}$, így $\iota = \tau_{\mathcal{S}_4}\tau_{\mathcal{S}_3}\tau_{\mathcal{S}_2}\tau_{\mathcal{S}_1}$.



Mivel az $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ síkoknak egyetlen közös pontjuk létezik, a forgatva tükrözésre vonatkozó tételünk értelmében feltehető, hogy az $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ síkok metszők és merőlegesen metszik az $\mathcal{S}_3$ síkot. Legyen $t := \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$. Ha az $\mathcal{S}_4$ párhuzamos az $\mathcal{S}_3$ síkkal, akkor az ι nyilván csavarmozgás.

Ha $\mathcal{S}_4 \parallel \mathcal{S}_3$, akkor a következőképpen járunk el. Az $\mathcal{S}_2$ síkról feltehető, hogy merőleges az $\mathcal{S}_3$ és az $\mathcal{S}_4$ síkra is, mert különben az $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ síkokat addig forgatjuk a t metszéspontjuk körül, amíg az $\mathcal{S}_2$ képe merőlegesen nem metszi az $\mathcal{S}_4$ síkot. Az $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ síkok így is a t tengelyben metszik egymást, és merőlegesen az $\mathcal{S}_3$ síkra, továbbá az $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ síkok egyetlen közös pontja a Q pont. Az $\mathcal{S}_4$ nem illeszkedik erre a Q pontra, mert különben az ι fixen hagyná a Q pontot, ezért a $t_2 = \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{S}_4$ és $t_1 = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_3$ egyenesek kitérőek. Ugyanakkor a merőlegességi viszonyok miatt $\iota = \tau_{\mathcal{S}_4}\tau_{\mathcal{S}_3}\tau_{\mathcal{S}_2}\tau_{\mathcal{S}_1} = (\tau_{\mathcal{S}_4}\tau_{\mathcal{S}_2})(\tau_{\mathcal{S}_3}\tau_{\mathcal{S}_1})$.

Mivel $\mathcal{S}_4 \perp \mathcal{S}_2$, és $\mathcal{S}_3 \perp \mathcal{S}_1$, az ι a fenti zárójelezés alapján nem más, mint a t_1 és t_2 tengelyekre vonatkozó tükrözések szorzata, tehát $\iota = \tau_{t_2} \tau_{t_1}$.



Legyen most $\mathcal{R}_1$ a t_1 egyenesre illeszkedő és a t_2 egyenessel párhuzamos sík, illetve $\mathcal{R}_2$ a t_2 egyenesre illeszkedő és a t_1 egyenessel párhuzamos sík. Ha $\mathcal{Q}_1$ illetve $\mathcal{Q}_2$ a t_1 illetve t_2 tengelyre illeszkedő és az $\mathcal{R}_1$ és $\mathcal{R}_2$ síkokra merőleges síkok, akkor $\tau_{t_1} = \tau_{\mathcal{Q}_1} \tau_{\mathcal{R}_1}$ és $\tau_{t_2} = \tau_{\mathcal{Q}_2} \tau_{\mathcal{R}_2}$, így a merőlegességi relációk alapján $\iota = \tau_{\mathcal{Q}_2} \tau_{\mathcal{R}_2} \tau_{\mathcal{Q}_1} \tau_{\mathcal{R}_1} = \tau_{\mathcal{Q}_2} \tau_{\mathcal{Q}_1} \tau_{\mathcal{R}_2} \tau_{\mathcal{R}_1}$. Eszerint az ι valódi csavarmozgás, hiszen $\mathcal{R}_1 \parallel \mathcal{R}_2$, a $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$ síkok merőlegesen metszik az $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ síkokat, és egymást is metszik mégpedig a t_1 és t_2 kitérő egyenesek normáltranszverzálisában. ■

Az eddigi eredményeket összefoglalva a következő tételt kapjuk.

Tétel. (klasszifikáció) *A térizometriák összes lehetséges típusai az identitás, a síkra vonatkozó tükrözés, a tengely körüli forgatás, a párhuzamos eltolás, a forgatva tükrözés, a csúsztatva tükrözés és a csavarmozgás.*

Az alábbi definíció konkretizálja az affinitásokra már korábban bevezetett irányítástartási fogalom tartalmát a térizometriákra.

Definíció. A páros számú síkra tükrözés szorzataként kifejezhető izometriákat *térmozgásoknak*, a páratlan számú síkra tükrözés szorzataként kifejezhető izometriákat pedig *irányításváltó izometriáknak* vagy *átfordításoknak* nevezzük. ▲

Az irányításváltó izometriák nem alkotnak csoportot, mert két ilyen szorzata térmozgás.

A *térmozgások csoportja* nyilván részcsoportot alkot a térizometriák csoportjában, hiszen két térmozgás szorzata is térmozgás, és egy térmozgás inverze is térmozgás. A klasszifikáció szerint a térmozgások összes lehetséges típusai az identitás, a tengely körüli forgatás, a párhuzamos eltolás és a csavarmozgás.

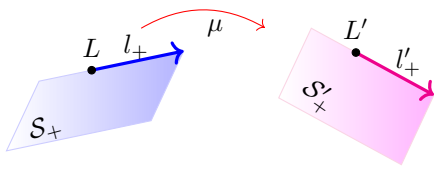
Tétel.

- (1) *A mozgások pontosan a (nem csak valódi) csavarmozgások.*
- (2) *Az átfordítások pontosan a síkra vett tükrözések, a forgatva tükrözések és a csúsztatva tükrözések.*

Ha a térben egy nyílt félsíkhöz hozzávesszük az egyik zárt határoló félegyeneseinek a pontjait, akkor az így nyert alakzatot *zászlónak* nevezzük.

Tétel. *Tetszőleges $(\mathcal{S}_+, l_+)$ és $(\mathcal{S}'_+, l'_+)$ zászlóhoz egy és csak egy μ mozgás létezik, amelyre $\mu(\mathcal{S}_+) = \mathcal{S}'_+$, és $\mu(l_+) = l'_+$.*

Bizonyítás. Legyen az l_+ és a l'_+ kezdőpontja rendre L és L' .



Az egzisztencia bizonyításához legyen ε az a párhuzamos eltolás, amelyre $\varepsilon(L) = L'$ teljesül, φ_t az a tengely körüli forgatás, amelynek t tengelye a L' pontban merőleges a l'_+ és $\varepsilon(l_+)$ félegyenesekre, és az $\varepsilon(l_+)$ félegyenest a l'_+ félegyenésbe forgatja.

Végül, legyen $\varphi_{l'}$ az a l' tengely körüli forgatás, amely a $\varphi_t(\mathcal{S}_+)$ félsíkot a $\mathcal{S}'_+$ félsíkba forgatja. Ez a $\mu = \varphi_{l'}\varphi_t\varepsilon$ mozgás teljesíti a tétel feltételét.

Az unicitás bizonyításához, ha μ_1 és μ_2 két olyan mozgás, amelyik az $(\mathcal{S}_+, l_+)$ zászlót a $(\mathcal{S}'_+, l'_+)$ zászlóra képezi, akkor a $\mu_1^{-1}\mu_2$ mozgás a l_+ félegyenest és az $\mathcal{S}_+$ félsíkot is helyben hagyja, így a $\mu_1^{-1}\mu_2$ izometria a fixpontok száma alapján csak az identitás vagy az $\mathcal{S}$ síkra vonatkozó tükrözés lehet. Utóbbi eset kizárt, hiszen nem mozgás, ezért $\mu_1 = \mu_2$, ami az unicitást igazolja. ■

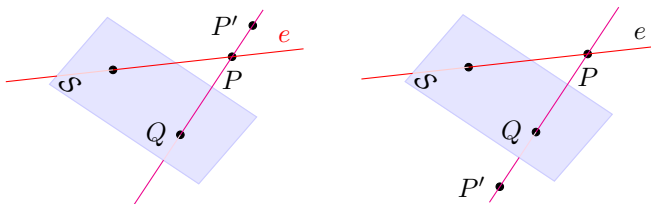
Az euklidészi tér dilatációinak annyira analógok a tulajdonságai az euklidészi sík dilatációival, hogy itt csak egy, a nem izometrikus dilatációk fixpontjára vonatkozó eredményt közlünk.

Tétel. *Euklidészi térben a nem izometrikus térdilatációknak van invariáns egyenese, egy erre merőleges invariáns síkja és pontosan egy fixpontja ezek metszetében.*

Bizonyítás. Mivel a nem izometrikus dilatáció megváltoztatja a pontok távolságát, legfeljebb egy fixpont létezhet, így annak is csak a létezését kell kimutatnunk.

Tekintsük a $\lambda \neq 1$ együtthatós δ dilatációt, és legyen $\kappa = -1/\lambda$, ha δ irányítást váltó, illetve $\kappa = 1/\lambda$, ha δ irányítást tartó.

Mivel δ nem identikus, van olyan P pont, melyre $P' \neq P$. A PP' egyenesen vegyük azt a Q pontot, melyre $(PP'Q) = \kappa$.



Világos, hogy a Q_κ homotécia a P' pontot a P pontba viszi, és Q_κ a δ dilatációval együtt irányítást tartó, illetve váltó, ezért a $\mu = Q_{1/\lambda}\delta$ szorzat irányítást tartó izometria, vagyis mozgás. A P pont a μ mozgásnak fixpontja, ezért a mozgás olyan e tengely körüli forgatás, amelynél az e tengely a P pontra illeszkedik. Legyen $\mathcal{S}$ a Q pontra illeszkedő és az e egyenesre merőleges sík. Az $\mathcal{S}$ síkot mind a μ mozgás, mind a Q_κ homotécia invariánsan hagyja, ezért a $\delta = Q_{1/\kappa}\mu$ dilatációra nézve is invariáns. Az $\mathcal{S}$ síkban ezért a δ dilatációnak van egy F fixpontja. Mivel a dilatációk tartják

a merőlegességet, az F pontban az $\mathcal{S}$ síkra állított f egyenes képe átmegy az F ponton, és merőleges az $\mathcal{S}$ síkra, amiért $\delta(f) = f$, vagyis f invariáns a δ dilatációra nézve, ami a tételt igazolja. ■

A tér $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ pontthalmazának egybevágóságán ugyanazt értjük, mint a sík esetén: létezik olyan szürjektív $\psi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ leképezés, amely tartja a távolságot. Ezt a leképezést most is egybevágósági transzformációnak, vagy röviden egybevágóságnak nevezzük.

Ha az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ alakzatok egybevágóak, azt $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ jelöli. Az alakzatok közötti $\cong$ egybevágóság nyilvánvalóan ekvivalencia-reláció.

Tétel. Az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ alakzatok akkor és csak akkor egybevágóak, ha létezik olyan ι izometria, melyre $\iota(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.

A bizonyítás a síkbeli eljáráshoz annyira analóg módon történik, hogy csak annyit kell megjegyezni, hogy ezúttal a síkra vonatkozó tükrözéseket kell használni. Ez az olvasóra marad.

Ebből a tételből azonnal adódik, hogy két tetraéder egybevágó, ha megfelelő éleik páronként azonos hosszúságúak.

Definíció. A tér $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ pontthalmazát most is *hasonlóknak* nevezzük, ha létezik olyan szürjektív $\chi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ leképezés és pozitív $\lambda \in \mathbb{R}$ szám, hogy az $\mathcal{A}$ minden P, Q pontpárjára $d(\chi(P), \chi(Q)) = \lambda d(P, Q)$ teljesül. A hasonlóság jelölésére az $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ jelet használjuk, a λ értéket most is a *hasonlóság együtthatójának* hívjuk. ▲

A hasonlóság nyilván ekvivalencia-reláció.

Tétel. Az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ alakzatok akkor és csak akkor hasonlóak, ha létezik olyan δ dilatáció, hogy $\delta(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.

Bizonyítás. Ha a δ dilatációra $\delta(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$, akkor $\delta|_{\mathcal{A}}$ bizonyítja, hogy $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$.

Ha $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$, akkor létezik olyan szürjektív $\psi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ leképezés és $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ szám, hogy az $\mathcal{A}$ minden P, Q pontpárjára $d(\psi(P), \psi(Q)) = \lambda d(P, Q)$ teljesül. Ekkor a $\psi' = O_{1/\lambda} \psi: \mathcal{A} \rightarrow O_{1/\lambda}(\mathcal{B})$ transzformáció egybevágóság, tehát létezik egy ι izometria, melyre $\iota|_{\mathcal{A}} = \psi'$ és $\iota(\mathcal{A}) = O_{1/\lambda}(\mathcal{B})$. Legyen most $\delta = O_{\lambda} \iota$. Ez olyan dilatáció, melyre $\psi = \delta|_{\mathcal{A}}$, ami igazolja az állítást. ■

Ebből a tételből azonnal adódik, hogy két tetraéder hasonló, ha megfelelő oldalpárjaik hosszainak aránya egyenlő.

A térben a szabad szög fogalmát módosítani kell, mert a térbeli(!) tengelyes tükrözés mozgás és ugyanakkor a (g_+, h_+) kötött szög f szögfelezőjére való térbeli(!) tengelyes tükrözés a (g_+, h_+) kötött szöget a (h_+, g_+) kötött szögbe viszi, amiért a síkkal ellentétben ezek most egyezőnek mutatkoznak, vagyis az irányított szög síkbeli fogalmát így nem lehet a térbe átvinni.

Definíció. Az (e_+, f_+) és a (g_+, h_+) kötött szögeket *i-relációban* állónak mondjuk, ha valamely $i \in \mathcal{I}$ izometriára $i(e_+) = g_+$, és $i(f_+) = h_+$. Az *i-relációt* $\overset{i}{\sim}$ jelöli. ▲

A sík esetével analóg módon bizonyítható, hogy az *i-reláció* ekvivalencia reláció.

Definíció. A kötött szögek *i-reláció* szerinti ekvivalencia-osztályait *térbeli szabad szögeknek* nevezzük. A szabad szögek halmazát $\mathcal{A}$ jelöli. Az (e_+, f_+) kötött szög által reprezentált szabad szöget $\triangleleft(e_+, f_+)$ jelöli. ▲

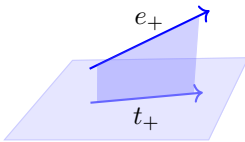
A térben nem igaz az egyértelmű reprezentálás tétele: könnyen belátható, hogy egy síkon belül pontosan két reprezentánsa van egy térbeli szabad szögnek, és az ezen két kötött szög által a síkban reprezentált szabad szögek összege nullszög.

Mivel pedig két helyvektor egy síkot feszít ki, most is adódik az

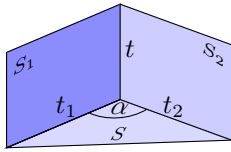
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cos \triangleleft(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (4.3.2)$$

összefüggés, valamint a $\sin \triangleleft(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ megfelelő értelmezése.

Két félegyenes *szögét* úgy értelmezzük, hogy a két félegyenest párhuzamos eltolással közös kezdőpontú félegyenesekbe toljuk, és az így nyert kötött szög által reprezentált szabad szög a két félegyenes szöge. Mivel ezek a kötött szögek csak párhuzamos eltolásban különböznek egymástól, ezért ez a szabad szög egyértelműen meghatározott.



Tetszőleges e_+ félegyenes és $\mathcal{S}$ sík szögét az e_+ félegyenes $\mathcal{S}$ síkra vett t_+ merőleges vetületének és az e_+ félegyenes szögével értelmezzük, ha t_+ nem egyetlen pont. Ha az e_+ vetülete egyetlen pont, akkor az egyenesszög felével értelmezzük az e_+ félegyenes és $\mathcal{S}$ sík szögét.



A közös t határoló egyenessel rendelkező $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ félsíkokból a t egyenesre merőleges valamely $\mathcal{S}$ sík messe ki a t_1 és t_2 félegyeneseket. Ezek szögét a $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ félsíkok *szögének* nevezzük. A félsíkok szöge egyértelműen meghatározott, mert bármely két, a t egyenesre merőleges sík által kimetszett

félegyenespár a t egyenes menti eltolással egymásba vihető.

4.4. Konvex politópok: Euler formulája

Ahogy korábban, pontok egy $\mathcal{K}$ halmazára azt mondjuk, hogy *konvex*, ha bármely két pontjának zárt szakaszát is tartalmazza. Konvex halmazok metszete is konvex, egy adott $\mathcal{P}$ ponthalmazt tartalmazó összes konvex halmaz metszete pedig $\text{conv}(\mathcal{P})$, a *konvex burok*.

Véges sok pont konvex burkát *politóp*nak nevezzük. Négy nem egy síkra eső pont konvex burkát *tetraédernek* nevezzük.

Definíció. Egy politópot 3-dimenziósnek mondunk, ha nem tartalmazza egyetlen sík sem. Egy politópot 2-dimenziósnek mondunk, ha tartalmazza egy sík, de nem tartalmazza egyetlen egyenes sem. Egy politópot 1-dimenziósnek mondunk, ha tartalmazza egy egyenes, de nem egy pont. A pontokat 0-dimenziósnek politópnek nevezzük. ▲

Definíció. A 3-dimenziós politóp *támaszfélterének* hívjuk azokat a zárt féltereket, amelyek tartalmazzák.

Egy ilyen félteret a politóp *lényeges támaszfélterének* nevezzük, ha határoló síkjának metszete a politóppal egy 2-dimenziós politóp. A lényeges támaszfélterek határoló síkjait a politóp *támaszsíkjának*, a kimetszett 2-dimenziós politópot (2-dimenziós) *lapnak* mondjuk. ▲

A (2-dimenziós politóp) lap *támaszfélsíkjának* hívjuk azokat a zárt félsíkokat a síkjában, amelyek tartalmazzák a lapot. Egy ilyen félsíkot *lényegesnek* nevezzük, ha határoló egyenese 1-dimenziós politópban metszi a lapot. Az így kimetszett 1-dimenziós politópokat (1-dimenziós lapnak), vagy *élnek*.

Az (1-dimenziós politóp) él két végpontját *csúc*snek nevezzük.

A lapok mindig konvex sokszögek, az élek szakaszok, a csúcsok pedig pontok.⁴

Tétel. (Euler) *Az affin térben bármely konvex politópra $l - e + c = 2$, ahol c a konvex politóp csúcsainak, e az éleinek, l pedig a lapjainak száma.*

Bizonyítás. Válasszuk ki a politóp egyik lapját, és fessük be az összes élet és csúcsát. Ezután fessük be a politóp éleit és csúcsait úgy, hogy az élekkel együtt mindig az él két csúcsát is befestjük, és csak olyan éleket festünk, amelyeknek már legalább egy csúcsa be van festve.

Festés közben két lapot társaknak mondunk, ha van közös festetlen élük. Ismerősnek mondjuk az $\mathcal{L}_1$ és $\mathcal{L}_2$ lapot, ha $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$, vagy van olyan lapsorozat, amelynek első lapja $\mathcal{L}_1$, utolsó lapja $\mathcal{L}_2$ és a sorozat bármely két szomszédos lapja társ. Az ismerőség nyilván ekvivalencia reláció, és ha egyetlen él sincs befestve, akkor az összes lap ismerős az összes többi lappal. Az egymással ismerős lapok osztályát laptársaságnak hívjuk.

Egy laptársaság lapjainak festett éleit belsőnek, illetve határolónak nevezzük, ha azok két lapja ugyanazon, illetve különböző laptársasághoz tartozik. Egy laptársaság lapjainak azon csúcsait, amelyekhez két határoló él csatlakozik határoló

⁴E témakör pontos kifejtése az *Affin geometria* fejezet 5.3. szakaszában található.

csúcsoknak mondjuk. Egy laptársaság lapjainak azon csúcsait, melyek nem határolók, belső csúcsoknak nevezzük.

Vegyük észre, hogy festési szabályunk értelmében az egymáshoz csatlakozó belső élek halmaza mindig egyetlen éllel csatlakozik egy határoló csúcshoz, többi éle pedig belső csúcsokat köt össze úgy, hogy vagy belső éleket köt össze, vagy belső éleket festetlen élekhez köt.

Festés közben számoljuk a festett csúcsok és élek számát, valamint számon tartjuk a laptársaságok számát.

A festés kezdetén egyetlen lap összes éle van befestve, amiért a befestett csúcsok c száma és a befestett élek e száma egyenlő, a laptársaságok ℓ száma pedig kettő, tehát $\ell - e + c = 2$ teljesül. Innentől minden még festhető él olyan, hogy

- (1) egy már befestett csúcsot egy még nem befestett csúcscsal köt össze, vagy
- (2) két már befestett csúcsot köt össze.

Az első esetben a c és az e is eggyel nő, a laptársaságok ℓ száma pedig változatlan marad, hiszen a festetlen csúcsot „körülvevő” lapok egy laptársaságban maradnak.

A második esetben a c változatlan marad, az e eggyel nő, az ℓ pedig szintén eggyel nő, mert a most befestett él két csúcsa

- (2a) vagy egyformán határoló,
- (2b) vagy az egyik határoló, a másik festett belső csúcs,
- (2c) vagy egyformán festett belső csúcs,

így mindhárom esetben csúcsaiból festett éleken keresztül határoló csúcsokhoz lehet jutni, amiért a befestés eredményeképpen ez az él maga is határoló éllel válik.

Eszerint az (1) és (2) esetben is a $\ell - e + c$ érték változatlan marad, tehát a festés közben végig $\ell - e + c = 2$ teljesül. Ugyanakkor, ha minden él befestésre kerül, akkor minden lap minden éle festett lesz, tehát minden lap egyedül alkot egy laptársaságot, vagyis ekkor $\ell = l$, ami igazolja a tétel állítását. ■

Most olyan politópokat keresünk, melyeknek minden csúcsát ugyanannyi, mondjuk h , él tartalmazza és minden lapjának ugyanannyi, mondjuk i éle van. Világos, hogy $h \geq 3$, és $i \geq 3$, valamint Euler formulája alapján

$$2 = l - e + c = \frac{2e}{i} - e + \frac{2e}{h}, \text{ vagyis } \frac{1}{i} + \frac{1}{h} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e}, \text{ tehát } \frac{1}{i} + \frac{1}{h} > \frac{1}{2}$$

Ha $h \geq 6$ vagy $i \geq 6$, akkor $h \geq 3$ és $i \geq 3$ miatt $\frac{1}{i} + \frac{1}{h} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$, vagyis csak $h = 3, 4, 5$ és $i = 3, 4, 5$ lehetséges.

Ha $h, i \geq 4$, akkor $\frac{1}{i} + \frac{1}{h} \leq \frac{1}{2}$, ezért $(h, i) \in \{(3, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3)\}$.

Euklidészi metrika jelenlétében egy politópot *szabályosnak* mondunk, ha minden rendezett csúcs-, él- és lappárjához van olyan szimmetriája, mely a pár első elemét a másodikban viszi. Ez persze azt jelenti, hogy élei, élszögei és lapszögei is egyenlőek, a lapjai és a csúcsszöglei is egybevágóak. Ezek a *platóni testek*.

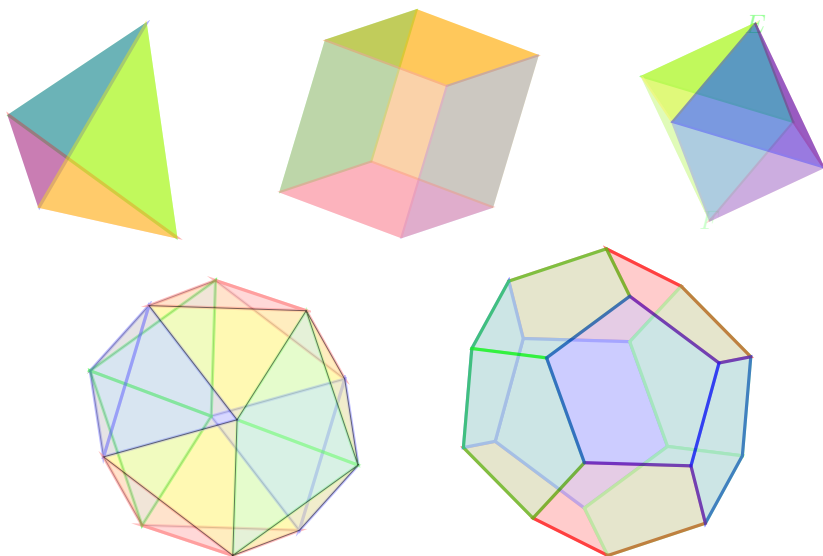
Világos, hogy minden platóni test valamelyik (h, i) párhoz tartozik. Megmutatjuk, hogy minden ilyen (h, i) számpárhoz van is megfelelő platóni test.

Egy platóni test lapjai $i = 3$, $i = 4$ vagy $i = 5$ oldalú szabályos sokszögek, melyeket egy $2\pi/i$ szögű forgatás generál egy nem origóba eső pont pályájaként. Ez megadja, hogy mekkorák az élszögek, a h pedig megadja, hogy mennyi ilyen élszögnek kell becsatlakoznia egy csúcsba. Mivel a csúcsszögletek egybevágóak, a csúcson át van egy egyenes, amellyel minden él és lap egyforma szöget zár be, így kiszámíthatóak a lapszögek. Így már kiszámíthatók a következők:

h	i	l	e	c	név	koordináták
3	3	4	6	4	tetraéder	$(1,1,1), (1,-1,-1), (-1,1,-1), (-1,-1,1)$
3	4	6	12	8	hexaéder kocka	$(\pm 1,1,1), (\pm 1,1,-1), (\pm 1,-1,1), (\pm 1,-1,-1)$
4	3	8	12	6	oktaéder	$(\pm 1,0,0), (0,\pm 1,0), (0,0,\pm 1)$
5	3	20	30	12	ikozaéder	$(0,1,\pm\varphi), (0,-1,\pm\varphi), (1,\pm\varphi,0),$ $(-1,\pm\varphi,0), (1,0,\pm\varphi), (-1,0,\pm\varphi)$
3	5	12	30	20	dodekaéder	$(1,1,1), (1,-1,-1), (-1,1,-1), (-1,-1,1),$ $(0,1/\varphi,\pm\varphi), (0,-1/\varphi,\pm\varphi), (1/\varphi,0,\pm\varphi)$ $(-1/\varphi,0,\pm\varphi), (1/\varphi,\pm\varphi,0), (-1/\varphi,\pm\varphi,0)$

Platóni testek adatai(a hexaéder a kocka); $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$.

A platóni testek tehát a következőképpen néznek ki:



Tetraéder, hexaéder (kocka), oktaéder, ikozaéder és dodekaéder

4.5. Térfogat, térfogatformák és vektoriális szorzás

A következőkben a konvex politópok térfogatának meghatározását tűzzük ki célul. Jelölje ezek halmazát $\mathcal{B}$.

*Paralelepipedon*nak hívjuk hat olyan zárt féltér metszetét, amelyek határoló síkjai közül három pár egymással párhuzamos, és ezen párokban mind a két féltér tartalmazza a másik féltér határoló síkját. A paralelepipedonnak nyolc csúcsa van, élei három párhuzamossági osztályba sorolhatók. Ha az azonos csúcsba befutó élek páronként merőlegesek, akkor *téglatest*nek, ha pedig ezen élek hossza is egyforma, akkor *kockának* nevezzük a paralelepipedont.

Egy 2-dimenziós politóp (síkbeli konvex sokszög) csúcsaihoz hozzávéve azoknak a politóp $\mathcal{S}$ síkját megváltoztató eltolással kapott képeit, a kapott pontthalmaz konvex burka egy 3-dimenziós politóp, melyet *hasábnak* nevezünk. Ha az eltolás merőleges a síkra, akkor *egyenes hasábról* beszélünk. A kiindulási politópot a hasáb *alaplajának* (alapjának), az $\mathcal{S}$ távolságát az eltoltjától a hasáb *magasságának* nevezzük. A paralelepipedon egy paralelogramma alaplapú hasáb. A téglatest egy téglalap alapú egyenes hasáb.

Tétel. Pontosan egy olyan $v: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ hozzárendelés létezik, amelyre minden $\mathcal{K}, \mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$ konvex politóp esetén teljesülnek a következők:

- (0) $v(\mathcal{K}) \geq 0$;
- (1) ha $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$ és a $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$ metszet közös lap, akkor $v(\mathcal{K}) = v(\mathcal{K}_1) + v(\mathcal{K}_2)$;
- (2) minden φ izometriára $v(\varphi(\mathcal{K})) = v(\mathcal{K})$;
- (3) valamely egységnyi oldalú kockához a v az 1 értéket rendeli.

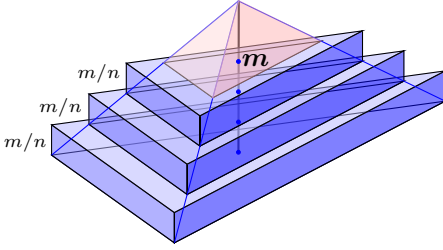
Bizonyítási vázlat. *Egzisztencia.* Egy megfelelő v hozzárendelést kell konstruálnunk. A területmérés konstrukciójához hasonlóan a v térfogatfüggvény konstruálását is azzal kezdjük, hogy a tetraéderekhez v értékeként a $t \cdot m/3$ értéket rendeljük hozzá, ahol t a tetraéder valamely alapjának területe, m pedig a hozzá tartozó magasság hossza. Ennek a hozzárendelt értéknek az alap választásától való függetlenségét a tetraéder lapszögeinek felhasználásával lehet igazolni.

A következő lépésben a konvex politópokat úgy bontjuk tetraéderekre, hogy egy csúcsból és az összes öt nem tartalmazó lap háromszögekre bontásának háromszögeiből képezzük a tetraédereket. Egy ilyen tetraéderre bontás által kapott tetraéderekhez v által rendelt értékek összegét rendelhetjük v értékeként a politóphoz. Ennek a hozzárendelt értéknek a tetraéderre bontástól való függetlenségét nem könnyű igazolni.

Az így meghatározott v teljesíti a tétel összes feltételét.

Unicitás. Egy a tétel feltételeit teljesítő v függvényről az additivitás és homogenitás közötti, a függelékben bizonyított kapcsolatot használva tudjuk bizonyítani,

hogy a téglatestekhez a $v = t \cdot m$ számot rendeli, ahol t a téglatest egyik lapjának területe, m pedig az ehhez tartozó magasság hossza. Ebből a téglalapok és háromszögek egymásba darabolhatósága miatt következik, hogy az egyenes hasábokhoz a v a $v = t \cdot m$ számot rendeli, ahol t a hasáb alapjának területe, m pedig az ehhez tartozó magasság hossza.



Vegyünk egy $\mathcal{K}$ tetraédert, legyen m a kiválasztott laphoz tartozó magassága hossza, és osszuk fel a magasságát n egyenlő részre, majd az osztáspontokban vegyünk fel az alappal párhuzamos síkokat. E síkokon a tetraéder nem alapon lévő csúcsába befutó három éle háromszögeket metsz ki, és a térfogat pozitivitása miatt azonnal felírhatjuk,

hogy $\sum_{i=0}^{n-1} \check{v}_i < v(\mathcal{K}) < \sum_{i=1}^n \hat{v}_i$, ahol $\hat{v}_i = t_i m/n = \check{v}_{i-1}$, és t_i az i -edik osztópont-ra fektetett síkban kimetszett háromszög területe.

A párhuzamos szelők tétele miatt az i -edik ilyen háromszög alapja és magassága is (i/n) -szerese a tetraéder alapháromszöge alapjának és magasságának, ezért $t_i = (i/n)^2 \cdot t$, ahol t a tetraéder alapjának területe. Ezt behelyettesítve

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{t}{n^2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i^2 < v(\mathcal{K}) < \frac{m}{n} \cdot \frac{t}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n i^2$$

$$mt \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} < v(\mathcal{K}) < mt \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

adódik. Az alsó és a felső becslés is az $mt/3$ értékhez tart, ha $n \rightarrow \infty$, amiből a rendőrlv szerint következik, hogy $v(\mathcal{K}) = mt/3$.

Mivel minden konvex politóp tetraéderekre bontható, az additivitási tulajdonság miatt ez igazolja a v függvény egyértelműségét. ■

Definíció. A $v(\mathcal{K})$ értéket a $\mathcal{K}$ politóp *térfogatának* nevezzük. ▲

A síkbeli analógia — az átdarabolhatósági reláció — azt sugallja, hogy a tetraéder térfogatának kiszámítására fentebb vázlatosan bemutatott módszernél elemibb megoldás is lehet, azoban ez nem így van. *Max Dehn* 1910-ben bizonyította, hogy a tetraéderek általában nem darabolhatók át téglatestekbe véges sok lépéssel, vagyis az általános tetraéder térfogatának meghatározására mindenképpen más módszert kell használni.

Világos, hogy ha síkokkal „szétvágva” több konvex politópra osztunk fel egy konvex politópot, és abból összeállítunk egy másik konvex politópot, akkor a kapott politóp térfogata megegyezik a felvágott politóp térfogatával.

Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$ politópok *átdarabolhatók*, és ezt $\mathcal{K}_1 \bowtie \mathcal{K}_2$ jelöli, ha a $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$ politópok véges sok síkkal egyforma konvex politópokra vágható szét. ▲

Világos, hogy az „átdarabolhatóság” egy ekvivalencia-reláció.⁵

Tétel. (Dehn) *Szabályos tetraéder és kocka nem darabolható át egymásba.*

Bizonyítás. Ha egy síkkal ketté vágunk egy konvex politópot, két konvex politópot kapunk. Figyeljük meg, hogy ezek lapszögei

- megegyeznek az eredeti politóp lapszögeivel, vagy
- két újonnan keletkezett lapszög összege π , vagy
- két újonnan keletkezett lapszög összege az eredeti politóp valamely lapszöge,

így ha az esetleges további daraboláskor kapott összes politóp összes lapszögét összegezzük, akkor abban az összegben az eredeti politóp lapszögeinek és a π szögnek természetes számú többszöröseit fogjuk találni.

A $\mathcal{D}$ szabályos tetraéder minden lapszöge egyforma, legyen ez α . A $\mathcal{K}$ egység-kocka minden lapszöge $\pi/2$. Ha $\mathcal{D} \bowtie \mathcal{K}$, akkor iménti megfigyelésünk értelmében

$$k_1 \cdot \alpha + k_2 \pi = n_1 \frac{\pi}{2} + n_2 \pi$$

teljesül valamely $k_1, k_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ természetes számokra. Ebből következik, hogy α racionális többszöröse a π számnak, vagyis $\alpha = p\pi/q$, ahol $1 \leq q \in \mathbb{N}$ és $0 \neq p \in \mathbb{Z}$. Ugyanakkor világos, hogy $\cos \alpha = 1/3$ (és így $\sin \alpha = \sqrt{8}/3$), hiszen a szabályos tetraéder magasságának talppontja a szabályos háromszög alaplap súlypontja.

Mivel $\cos(q\alpha) = \cos(p\pi) = \pm 1$, a szögfüggvények addíciós formulái miatt

$$\begin{aligned} \pm 3^q &= 3^q \cos(q\alpha) \\ &= 3^q \sum_{i=0}^{[q/2]} (-1)^i \binom{q}{2i} \cos^{q-2i} \alpha \sin^{2i} \alpha = 3^q \sum_{i=0}^{[q/2]} (-1)^i \binom{q}{2i} \frac{8^i}{3^q} \\ &\stackrel{(\text{mod } 3)}{\equiv} \sum_{i=0}^{[q/2]} \binom{q}{2i} = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^q \binom{q}{j} (-1)^j + \sum_{j=0}^q \binom{q}{j} (+1)^j \right) \\ &= \frac{1}{2} ((1-1)^q + (1+1)^q) = 2^{q-1}. \end{aligned}$$

Ez az ellentmondás igazolja a tétel állítását. ■

Dehn eredményét úgy is lehet fogalmazni, hogy az átdarabolhatóság relációja nem egyezik a térfogatok egyenlőségével. Mindazonáltal néhány esetben, működik az átdarabolás⁶, amire jó példa a síkbeli eljárással analóg módon bizonyítható állítás,

⁵Dehn eredeti tételében ennél általánosabb átdarabolások is megengedettek [1].

⁶Lásd a [1, 25] könyveket.

hogy egy paralelepipedon és egy téglatest térfogata akkor és csak akkor egyezik meg, ha egymásba darabolhatók. Ez bizonyítja, hogy egy paralelepipedon térfogata is egyik alaplapja területének és az ahhoz tartozó magasságának a szorzata.

Ha azzal próbáljuk megkerülni Dehn tételét, hogy az átdarabolhatóság definíciójában megengedünk bármely véges sok egybevágó részre való felbontást, akkor a *Banach–Tarski paradoxon*⁷ ütközik, mely szerint bármely két, egy-egy akár-mekkora gömböt tartalmazó térbeli halmaz egymásba darabolható.

A síkbeli vizsgálatokkal analóg módon egy paralelepipedont meghatározunk bármely csúcsából induló élei, melyeket kézenfekvő helyvektoroknak tekinteni, így egy a helyvektor-halmazokon értelmezett függvényhez jutunk, ha ezen helyvektorok halmazaihoz rendeljük az általuk meghatározott paralelepipedon térfogatát. A térfogat invariáns az eltolásokkal szemben, így a helyvektor-halmazokhoz a térfogatot rendelő ezen függvény a szabad vektorok $\mathcal{V}$ terében is értelmezhető.

Világos, hogy egy vektorhalmaz akkor és csak akkor alkot bázist, ha az általa meghatározott paralelepipedon nem elfajuló, vagyis a térfogata nem nulla. Függvényünk szoros kapcsolatát a bázisokhoz tovább erősíthetjük a bázisok közti átmenetek figyelembevételével.

A síkbeli fogalmat bővítve egy $F: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *antiszimmetrikusnak* mondunk, ha bármely két argumentuma felcserélésének hatására előjelet vált, vagyis $F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -F(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = -F(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) = F(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}) = -F(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w})$, ami persze ekvivalens az $F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -F(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w})$ és $F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -F(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v})$ formulák teljesülésével.

Egy antiszimmetrikus függvényre persze $F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) = -F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0$ teljesül.

Definíció. Egy $F: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *térfogatformának* nevezzük, ha antiszimmetrikus, és egyik változójában lineáris. Ha ez azonosan nulla, akkor eltűnő formáról beszélünk. ▲

Vegyük észre, hogy a tér szabad vektorain nem eltűnő területforma is létezik.

Világos, hogy egy F nem eltűnő térfogatforma (mindjárt bizonyítjuk, hogy ilyen van) és egy P pont esetén az $\hat{F}_P(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ egy területforma, ha $\mathbf{w}$ az $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ által meghatározott sík P pont felé mutató egységnyi normálisa.

Vegyük a $T_O \mathcal{T}$ helyvektortér egy $\{\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0\}$ bázisát. Egy másik $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1\}$ bázist választva pontosan egy olyan φ koordináta-transzformáció van, amely az előbbi bázist az utóbbiba viszi. Legyen

$$\varepsilon(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1) = \begin{cases} +1, & \text{ha } \varphi \text{ irányítást tartó,} \\ 0, & \text{ha } \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1 \text{ nem bázis,} \\ -1, & \text{ha } \varphi \text{ irányítást váltó.} \end{cases}$$

⁷Lásd a [25] könyvet.

Az ε nem nulla értéke a bázisokat két osztályba sorolja, és a két osztály független a kiindulási bázis választásától.

4.5.1. Tétel. Az $F(U_O, V_O, W_O) = \varepsilon(U_O, V_O, W_O)v(OUVPVQSR)$ függvény, ahol $P_O = U_O + V_O$, $Q_O = U_O + W_O$, $R_O = V_O + W_O$, $S_O = U_O + V_O + W_O$ és $v(OUVPVQSR)$ az $OUVPVQSR$ paralelepipedon térfogata, egy térfogatforma.

Az F függvény antiszimmetriája, homogenitása és additivitása a területforma esetével teljesen analóg módon bizonyítható. Ez az olvasóra marad.

4.5.2. Tétel. Két nem eltűnő térfogatforma egymás valós számmal vett többszöröse.

A bizonyítás a síkbeli eljárással teljesen analóg módon működik, ennek elvégzése is az olvasóra marad. Ugyanakkor jegyezzük meg, hogy ezúttal

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= c(\kappa_w(\lambda_u \mu_v - \mu_u \lambda_v) - \mu_w(\lambda_u \kappa_v - \kappa_u \lambda_v) + \lambda_w(\mu_u \kappa_v - \kappa_u \mu_v)) \\ &= c \det \begin{pmatrix} \lambda_u & \mu_u & \kappa_u \\ \lambda_v & \mu_v & \kappa_v \\ \lambda_w & \mu_w & \kappa_w \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

adódik, ahol $c = F(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0)$.

A térfogatformákat használva az affinitások egyszerű jellemzéséhez jutunk.

Tétel. Az euklidészi tér egy φ tetraédertartó leképezése akkor és csak akkor affinitás, ha létezik olyan $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ valós szám, hogy minden $\mathcal{K}$ tetraéderre $v(\varphi(\mathcal{K})) = \lambda v(\mathcal{K})$.

Bizonyítás. Előbb az „akkor” állítással foglalkozunk. A térfogat és térfogatforma közti kapcsolat alapján elegendő belátni, hogy a térfogatformához létezik az állításnak megfelelő konstans.

Tekintsünk egy tetszőleges φ affinitást és egy O pontot. Legyen ε az az eltolás, melyre $\varepsilon(\varphi(O)) = O$, és $\hat{\varphi}$ az O ponthoz tartozó helyvektortér azon transzformációja, melyre $\hat{\varphi}(P_O) = (\varepsilon\varphi(P))_O$. Mivel φ affinitás, a $\hat{\varphi}$ transzformáció lineáris.

Ha F a szokásos térfogatforma, akkor $\hat{\varphi}$ linearitása miatt az $\hat{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = F(\hat{\varphi}(\mathbf{u}), \hat{\varphi}(\mathbf{v}), \hat{\varphi}(\mathbf{w}))$ is térfogatforma, ezért ennek egyértelműsége miatt létezik olyan ν konstans, hogy $\hat{F} = \nu F$, ami igazolja a tétel „akkor” állítását.

A fordított, „csak akkor” állítás igazolásához legyen v a szokásos térfogatfüggvény, és tekintsünk a téren egy $\varphi: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ transzformációt, melyhez feltételünk szerint létezik olyan $\lambda > 0$ konstans, hogy $v \circ \varphi = \lambda \cdot v$.

Ekkor a φ transzformáció olyan, hogy

$$\begin{aligned} A, B, C, D \text{ komplanáris pontok} &\Leftrightarrow 0 = v(ABCD) \\ &\Leftrightarrow 0 = \lambda v(ABCD) = v(\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)\varphi(D)) \\ &\Leftrightarrow \varphi(A), \varphi(B), \varphi(C), \varphi(D) \text{ komplanáris pontok.} \end{aligned}$$

Tehát a φ általános helyzetű pontnégyest általános helyzetű pontnégyesbe visz.

Tetszőleges $\mathcal{S}$ síkhoz válasszunk egy S pontot azon kívül, és tekintsünk az $\mathcal{S}$ síkon tetszőleges A, B, C pontokat. Ekkor

$$\begin{aligned} A, B, C \text{ kollineáris pontok} &\Leftrightarrow \varphi(A), \varphi(B), \varphi(C), \varphi(S) \text{ komplanáris pontok} \\ &\Leftrightarrow 0 = v(ABCS) \\ &\Leftrightarrow 0 = \lambda v(ABCS) = v(\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)\varphi(S)) \\ &\Leftrightarrow \varphi(A), \varphi(B), \varphi(C), \varphi(S) \text{ komplanáris pontok} \\ &\Leftrightarrow \varphi(A), \varphi(B), \varphi(C) \text{ kollineáris pontok.} \end{aligned}$$

Tekintsünk most nem kollineáris A, B, C pontokat ezen az $\mathcal{S}$ síkon, az AC egyenesen pedig egy tetszőleges D pontot. A φ fentebbi tulajdonsága miatt a D pont $\varphi(D)$ képe a $\varphi(A)\varphi(C)$ egyenesre esik, viszont $\varphi(B) \notin \varphi(A)\varphi(C)$, ezért

$$\frac{d(A, D)}{d(A, C)} = \frac{v(ABDS)}{v(ABCS)} = \frac{\lambda v(ABDS)}{\lambda v(ABCS)} = \frac{v(\varphi(A)\varphi(B)\varphi(D)\varphi(S))}{v(\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)\varphi(S))} = \frac{d(\varphi(A), \varphi(D))}{d(\varphi(A), \varphi(C))},$$

vagyis a φ tartja a metrikus osztóviszonyt. Minthogy pontosan az affin leképezések tartják a metrikus osztóviszonyt és a pontnégyesek általános helyzetét, ez igazolja az állítás „csak akkor” részét. Ezzel a bizonyítást befejeztük. ■

A tételünk által az affinitáshoz rendelt egyértelmű pozitív valós szám kiszámításához elegendő egy kocka képének térfogatát megnéznünk. Mivel az affinitások tartják a párhuzamosságot, a kocka képe paralelepipedon. A térfogatformák vizsgálatakor láttuk, hogy ezek térfogata az egy csúcsból kiinduló éleikhez tartozó vektorokból összeállított mátrix determinánsa, ezért a tételben szereplő egyértelmű szám valójában az *affinitás determinánsa*.

Térfogattartónak nevezzük azon φ affin transzformációkat, melyekre nézve a térfogat invariáns. Világos, hogy az izometriák tartják a térfogatot, de nem csak az izometriák ilyenek. Elég a $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$ mátrixú affinitásokra gondolni.

4.6. Vektorok szorzásai a térben

Gram–Schmidt-eljárás.⁸ Minden lineárisan független $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorhoz léteznek olyan $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ és $\mathbf{e}_3$ egymásra páronként ortogonális egységvektorok, hogy $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$ és $\mathbf{w} = w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2 + w_3\mathbf{e}_3$ valamely $u_1 \neq 0, v_1, v_2 \neq 0, w_1, w_2, w_3 \neq 0 \in \mathbb{R}$ valós számokra.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{e}_1$ egy olyan egységvektor, melyre $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1$ valamely $u_1 \in \mathbb{R}$ valós számra. Az $\mathbf{e}_2$ egységvektor legyen olyan, melyre $\mathbf{v} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 = v_2\mathbf{e}_2$ valamely

⁸A Gram–Schmidt-eljárás általánosabb esetben is működik.

$v_2 \in \mathbb{R}$ valós számra. Legyen $v_1 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle$. Mivel az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok lineárisan függetlenek, a v_2 nem lehet 0, ugyanakkor $v_2 \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{v} - v_1 \mathbf{e}_1 \rangle = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{e}_1, v_1 \mathbf{e}_1 \rangle = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{v} \rangle - v_1 = 0$, tehát $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$.

Válasszuk az $\mathbf{e}_3$ egységvektort úgy, hogy $\mathbf{w} - \langle \mathbf{w}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 - \langle \mathbf{w}, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2 = w_3 \mathbf{e}_3$ legyen valamely $w_3 \in \mathbb{R}$ valós számra, és vezessük be a $w_1 = \langle \mathbf{w}, \mathbf{e}_1 \rangle$ és $w_2 = \langle \mathbf{w}, \mathbf{e}_2 \rangle$ jelöléseket. Mivel az $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok lineárisan függetlenek, a w_3 nem nulla. Eszerint a $w_3 \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_3 \rangle = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{w} - w_1 \mathbf{e}_1 - w_2 \mathbf{e}_2 \rangle = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{e}_i, w_1 \mathbf{e}_1 \rangle - \langle \mathbf{e}_i, w_2 \mathbf{e}_2 \rangle = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{w} \rangle - w_i = 0$ egyenlet azt mutatja, hogy $i = 1$ és $i = 2$ esetén is $\mathbf{e}_i \perp \mathbf{e}_3$. ■

Figyeljük meg, hogy $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ egy bázis, mert az $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok függetlenek. A páronként ortogonális egységnyi vektorokból álló bázisokat *ortonormált bázisnak* nevezzük. Az egységnyi élű kocka bármely csúcsából a szomszédaiba mutató helyvektorok ilyen ortonormált bázist alkotnak. Eszerint a szokásos térfogatból adódó F térfogatforma minden ortonormált bázisra 1-et ad eredményül.

4.6.1. Tétel. Legyen F az a térfogatforma, melynek értéke minden ortonormált bázisra 1, és vegyünk egy-egy $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektort. Ekkor létezik olyan $\mathbf{x}$ vektor, melyre $F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle$ minden $\mathbf{w}$ vektorra.

Bizonyítás. *Unicitás.* Ha az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorra is $\langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle = F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{y}, \mathbf{w} \rangle$ minden $\mathbf{w}$ vektor esetén, akkor $\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{w} \rangle = 0$ minden $\mathbf{w}$ vektorra, így az $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ vektorra is, amiért $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 0$, és így $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Egzisztencia. Ha $F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ minden $\mathbf{w}$ vektorra nullát ad, akkor a nullvektort választva készen vagyunk, ezért innentől feltesszük, hogy valamely $\hat{\mathbf{w}}$ vektorra $F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \hat{\mathbf{w}}) \neq 0$. Ekkor $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \hat{\mathbf{w}}$ bázist alkot a 4.5.1. Tétel szerint.

Vegyük a Gram–Schmidt-eljárással adódó $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ortonormált bázist, melyre $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1$, $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2$ és $\hat{\mathbf{w}} = \hat{w}_1 \mathbf{e}_1 + \hat{w}_2 \mathbf{e}_2 + \hat{w}_3 \mathbf{e}_3$ valamely $u_1 \neq 0$, $v_1, v_2 \neq 0$ és $\hat{w}_1, \hat{w}_2, \hat{w}_3 \neq 0 \in \mathbb{R}$ valós számokra.

Ha $\mathbf{w} = w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2 + w_3 \mathbf{e}_3$, akkor a (4.5.1) formula szerint

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = u_1 v_2 w_3 F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \langle u_1 v_2 \mathbf{e}_3, \mathbf{w} \rangle,$$

ami bizonyítja az állítást az $\mathbf{x} = u_1 v_2 \mathbf{e}_3$ választással. ■

A tétel szerinti leképezés a *vektoriális szorzás*, vagy más néven *keresztiszorzás*. Az $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ vektoriális szorzatát $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ jelöli.

Tétel. *Tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorokra*

- (1) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ (*antiszimetria*);
- (2) $(\lambda \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\lambda \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ (*homogenitás*);
- (3) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ (*disztributivitás*);
- (4) $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, akkor és csak akkor nulla, ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ párhuzamosak;

- (5) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{v} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{u}$ (kifejtési tétel);
 (6) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} + (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{u} + (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = 0$ (Jacobi-azonosság);
 (7) $|\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 + |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2$ (Lagrange-azonosság).

Bizonyítás. A minden $\mathbf{x}$ vektorra érvényes

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle &= F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}) = -F(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{x}) = -\langle \mathbf{v} \times \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle, \\ \langle (\lambda \mathbf{u}) \times \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle &= F(\lambda \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}) = \lambda F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}) = \langle \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v}), \mathbf{x} \rangle, \\ \langle (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle &= F(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}) = F(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{x}) + F(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}) \\ &= \langle \mathbf{u} \times \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{v} \times \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle \end{aligned}$$

formulák rendre igazolják az (1), (2) és (3) állításokat.

A (4) állítás igazolásához rögzítsünk egy O pontot, egy rá illeszkedő $\mathcal{S}$ síkot és egy azon kívül eső Z pontot. Ekkor az $f: (U_O, V_O) \mapsto F(U_O, V_O, Z_O)$ leképezés, ahol $U, V \in \mathcal{S}$, egy területforma, hiszen mindkét változójában lineáris és antiszimmetrikus. A területformákra bizonyított egyértelműség alapján ebből az következik, hogy $|F(U_O, V_O, Z_O)| = c|U_O||V_O|\sin \angle(U_O, V_O)$ valamely $c > 0$ konstansra. Az U_O, V_O, Z_O vektorokból a Gram–Schmidt-eljárással adódó egymásra páronként ortogonális $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ és $\mathbf{e}_3$ egységvektorokra eszerint $|F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)| = c$ érvényes.

A (6) azonosság azonnal következik a kifejtési tételből.

A (6) állítás következik a (4) és az euklidészi szorzat (4.3.2) formulájából.

Végül az (5) bizonyítás. Ha az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ egymás többszöröse, akkor a formula triviálisan teljesül, ezért feltesszük, hogy $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ lineárisan függetlenek.

Vegyük a Gram–Schmidt-eljárással adódó egymásra páronként ortogonális $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ és $\mathbf{e}_3$ egységvektorokat, melyekre $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1$, $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2$ és $\mathbf{w} = w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2 + w_3 \mathbf{e}_3$ valamely $u_1 \neq 0, v_1, v_2 \neq 0, w_1, w_2, w_3 \neq 0 \in \mathbb{R}$ valós számokra.

Ekkor $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = u_1 v_2 \mathbf{e}_3$, és így

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} &= w_1 u_1 v_2 \mathbf{e}_2 - w_2 u_1 v_2 \mathbf{e}_1 = w_1 u_1 (v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2) - u_1 (w_1 v_1 + w_2 v_2) \mathbf{e}_1 \\ &= w_1 u_1 \mathbf{v} - (w_1 v_1 + w_2 v_2) \mathbf{u} = \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{v} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Ezzel a tételt teljesen bizonyítottuk. ■

Vegyük észre, hogy a Lagrange-azonosság nem más mint a térbeli Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenséghez felhasznált (4.3.1) azonosság.

Az (4.5.1) formula alapján az ortonormált $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ bázisban

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{e}_3(\lambda_u \mu_v - \mu_u \lambda_v) - \mathbf{e}_2(\lambda_u \kappa_v - \kappa_u \lambda_v) + \mathbf{e}_1(\mu_u \kappa_v - \kappa_u \mu_v),$$

amit az

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \lambda_u & \mu_u & \kappa_u \\ \lambda_v & \mu_v & \kappa_v \end{pmatrix}$$

formális determináns alakjában is szokás írni.

Mivel a rögzített térfogatforma $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ alakban írható, a térfogatformát *vegyesszorzásnak* is szokás hívni, és erre az $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ jelölés használatos. A térfogatforma egyértelműsége miatt a vegyesszorzatban bármelyik két tag keresztszorzatának a harmadikkal való euklidészi szorzata ugyanazt az eredményt adja, vagyis például $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \times \mathbf{w} \rangle$.

Affin geometria

A Desargues-tulajdonságú affin sík és a tér példáján láttuk, hogy a rendezett pontpárok ekvivalencia-osztályaiból valós vektortér konstruálható. Ez adja az ötletet az affin sík és tér alábbi általánosítására, melyben az axiómákból felépített affin és euklidészi geometriák alacsony dimenziós esetként jelennek meg.

Az affin geometria ezen általánosítását nem axiómarendszerre, hanem a vektorterek már létező algebrai struktúrájára építve hozzuk létre.

5.1. Véges dimenziós affin geometriák

Definíció. Legyen $\mathcal{V}$ egy vektortér. Az $\mathcal{A}$ halmazon adott $\Phi: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{V}$ leképezést *affin struktúrának* nevezzük, ha

- (1) minden $O \in \mathcal{A}$ pont esetén a $\Phi_O: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{V}$ ($\Phi_O: P \mapsto \Phi(O, P)$) leképezés bijektív, és
- (2) minden $P, Q, R \in \mathcal{A}$ pont esetén $\Phi(P, Q) + \Phi(Q, R) = \Phi(P, R)$.

Az $\mathfrak{A} := (\mathcal{A}, \Phi)$ rendszert *affin geometriának* nevezzük.

Az $(\mathcal{A}, \Phi)$ és $(\mathcal{A}', \Phi')$ affin geometriákat *izomorf*nak mondunk, ha van olyan $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ bijektív leképezés, melyre a $\Phi(P, Q) \mapsto \Phi'(\varphi(P), \varphi(Q))$ kanonikus izomorfia.



A részletek előtt jegyezzük meg, hogy amennyiben $\mathcal{V}$ valamely (kommutatív) test felett adott, akkor a megfelelő test feletti affin geometriáról beszélünk. Ha éppen egy véges testet választunk, akkor véges affin geometriát kapunk. Ezek szerkezetében jelentős eltérések lehetnek, melyeket a test tulajdonságai határoznak meg.

A továbbiakban $\mathcal{V}$ valós vektortér.

Valós affin geometriának hívjuk az $\mathbb{R}^n$ koordinátateret a $\Phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ affin struktúrával, ha $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} - \mathbf{y}$.

Az $\mathcal{A}$ elemeit *pontoknak*, a $\mathcal{V}$ vektortér elemeit (*szabad*) *vektoroknak* mondjuk, és ennek megfelelően be is vezetjük a $\overrightarrow{PQ} := \Phi(P, Q)$ jelölést, valamint a pontok rendezett (P, Q) párját e szabad vektor *reprezentánsának* nevezzük.

Definiáljuk minden $O \in \mathcal{A}$ ponthoz a $T_O\mathcal{A} = \{O\} \times \mathcal{V}$ halmazt, és jelöljük ennek elemeit a $\mathbf{v}_O := (O, \mathbf{v})$ szerint. Az a $\Phi'_O: T_O\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{V}$ leképezés, melyre $\Phi'_O: (O, \mathbf{v}) \mapsto$

$\mathbf{v}$, nyilván bijektív, ami lehetővé teszi a $T_O\mathcal{A}$ halmazon egy vektortérstruktúra bevezetését a $x\mathbf{u}_O + y\mathbf{u}_O := (x\mathbf{u} + y\mathbf{u})_O$ definícióval ($\mathbf{uv} \in \mathcal{V}$ és $x, y \in \mathbb{R}$). Az így definiált vektorteret *helyvektortérnek*, az elemeit ezért *helyvektoroknak* nevezzük. A konstrukció miatt a helyvektorterek mind izomorfak egymással, és a (szabad) vektorok terével. A $\Phi'_O: \mathcal{A} \rightarrow T_O\mathcal{A}$ leképezés, ahol $\Phi'_O: P \mapsto (O, \Phi_O(P))$, bijektív, hiszen Φ_O bijektív, ezért bevezetjük a $P_O := (O, \Phi_O(P))$ jelölést is.

Az $\mathcal{A}$ halmaz különböző P és Q pontjaihoz rendelt $PQ := \{R \in \mathcal{A} : \text{létezik } x \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \overrightarrow{PR} = x\overrightarrow{PQ}\}$ alakú részhalmazait *egyenesnek* nevezzük. A $\overrightarrow{PQ}$ vektort a PQ egyenes egy *irányvektorának* hívjuk. Világos, hogy az egyenes irányvektorai egymásnak nem nulla valós többszörösei.

Az $\mathcal{A}$ halmaz különböző P és Q pontjaihoz rendelt $\overline{PQ} = \{R \in \mathcal{A} : \text{létezik } x \in [0, 1], \text{ hogy } \overrightarrow{PR} = x\overrightarrow{PQ}\}$ alakú halmazait *szakaszoknak* nevezzük. Ha a P és Q pontokat kivesszük, akkor *nyílt szakaszról* beszélünk.

Affin altérnek nevezzük azon $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}$ részhalmazokat, melyekre $(\mathcal{H}, \Phi|_{\mathcal{H}, \mathcal{H}})$ affin geometria, vagyis $\Phi(\mathcal{H} \times \mathcal{H})$ a $\mathcal{V}$ vektortér lineáris altere, más szóval léteznek olyan független $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok, hogy $\Phi(\mathcal{H} \times \mathcal{H})$ elemei pontosan a $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineáris kombinációi. Az affin altér *dimenzióján* a független vektorok számát értjük. Világos, hogy a pont 0-dimenziós, az egyenes pedig 1-dimenziós affin altér. A $\mathfrak{A}$ affin térben $\mathcal{A}$ egy $(\dim \mathcal{V})$ -dimenziós altér, ezért ezt értjük az affin geometria $\dim \mathfrak{A}$ dimenzióján. A $(\dim \mathfrak{A} - 1)$ -dimenziós affin altereket *hipersíknak* nevezzük.

Az $\mathcal{A}_1$ és $\mathcal{A}_2$ affin altereket *párhuzamosnak* mondjuk, ha megegyeznek, vagy metszetük üres, de $\Phi(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_1)$ és $\Phi(\mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_2)$ egyike tartalmazza a másikat.

Az egyenesek esetén a párhuzamosság nyilván azt jelenti, hogy irányvektoraik egymás többszörösei.

A $PQRS$ rendezett pontnégyest *paralelogrammának* mondjuk, ha $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$, ami nyilván ekvivalens a $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS}$ feltétellel. A P, Q, R, S pontokat a $PQRS$ paralelogramma *csúcsainak*, a PQ, RS, QR és PS egyeneseket a paralelogramma *oldalegyeneseseinek*, a $\overline{PQ}, \overline{RS}, \overline{QR}$ és $\overline{PS}$ szakaszokat a paralelogramma *oldala-inak* vagy *éleinek* nevezzük. A közös csúcsot tartalmazó oldalakat (oldalegyeneseket) *szomszédosnak*, a közös csúcsot nem tartalmazó oldalakat (oldalegyeneseket) *szemköztinek* mondjuk. Eszerint a paralelogramma szemközti oldalegyenesesei párhuzamosak egymással. Nem kollineáris P, Q, R, S pontokra utóbbi fordítottja is igaz, hiszen amennyiben $PQ \neq RS$, $PQ \parallel RS$ és $QR \parallel PS$ is teljesül, akkor valamely $\mu_1, \mu_2 \neq 0$ valós számokra $\overrightarrow{PQ} = \mu_1 \overrightarrow{SR}$ és $\overrightarrow{QR} = \mu_2 \overrightarrow{PS}$, amiért $\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \mu_1 \overrightarrow{SR} + \mu_2 \overrightarrow{PS}$. Mivel $PQ \neq RS$ miatt $P \notin RS$, az $\overrightarrow{SR}$ és $\overrightarrow{PS}$ vektorok lineárisan függetlenek, amiért fenti formulánkból $\mu_1 = \mu_2 = 1$ következik.

Az $\mathcal{A}$ affin tér $P^0, P^1, \dots, P^k$ pontjait *affin függetleneknek*, vagy az eddigi

elnevezés bővítésével *általános helyzetűeknek* nevezzük, ha a $\overrightarrow{P^0P^1}, \dots, \overrightarrow{P^0P^k} \in \mathcal{V}$ vektorok lineárisan függetlenek. Az affin függetlenség nem függ a pontok sorrendjétől. Válasszuk ugyanis bármely másikat, mondjuk az utolsó pontot, akkor a $\overrightarrow{P^kP^0}, \dots, \overrightarrow{P^kP^{k-1}}$ vektorokra

$$\overrightarrow{P^kP^0} = -\overrightarrow{P^0P^k}, \quad \overrightarrow{P^kP^i} = -\overrightarrow{P^0P^k} + \overrightarrow{P^0P^i} \quad (i = 1, \dots, k),$$

teljesül, amiért

$$\sum_{i=0}^{k-1} x_i \overrightarrow{P^kP^i} = \sum_{i=1}^{k-1} x_i \overrightarrow{P^0P^i} + \left(\sum_{i=1}^{k-1} x_i - x_0 \right) \overrightarrow{P^0P^k}.$$

Ez azt mutatja, hogy a két vektorhalmaz pontosan ugyanakkor lineárisan független.

Legyen $O, P^1, \dots, P^k$ az $\mathcal{A}$ tér $k+1$ affin független pontja. Azon $P \in \mathcal{A}$ pontok, melyekre $P_O = \sum_{i=1}^k x_i P_O^i$ valamely $x_i \in \mathbb{R}$ számokra, nyilván az $\mathcal{A}$ tér k -dimenziós affin alterét alkotják. Az $O, P^1, \dots, P^k$ pontokról ilyenkor azt mondjuk, hogy *kifeszítik* az affin alteret. Világos, hogy az affin altér nem függ az őt kifeszítő pontok sorrendjétől, hiszen egy affin altér pontosan azon pontokból áll, amelyek az alappontokkal affin függő rendszert alkotnak.

Legyen $\dim \mathcal{A} = n$, és $O, P^1, \dots, P^n \in \mathcal{A}$ affin független pontok. Ekkor a $P_O^1, \dots, P_O^n$ vektorok függetlenek, ezért bázist alkotnak az $T_O \mathcal{A}$ helyvektortérben, amiért minden $X \in \mathcal{A}$ pont esetén az X_O helyvektorhoz léteznek olyan egyértelmű $x_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) valós számok, hogy $X_O = \sum_{i=1}^n x_i P_O^i$.

Definíció. Az $x: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($X \mapsto \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$) hozzárendelést az $\mathcal{A}$ affin geometria *affin koordinátázásának*, az $\mathbf{x}$ koordinátáit az X pont $O, P^1, \dots, P^n$ pontokra vonatkozó *affin koordinátáinak* nevezzük.

Az $O, P^1, \dots, P^n \in \mathcal{A}$ pontokat az affin koordinátázás *alappontjainak*, az O pontot a koordinátázás *origójának* nevezzük. ▲

Bármely x és y affin koordinátázások közti $y \circ x^{-1}$ átmenetleképezést *koordinátatranszformációnak* nevezzük. Az $x^{-1} \circ y$ átmenetleképezéseket *affin transzformációnak* nevezzük.

Tétel. Legyenek x az n -dimenziós $\mathcal{A}$ affin tér egy affin koordinátázása.

- (1) Ha y is az n -dimenziós $\mathcal{A}$ affin tér egy affin koordinátázása, akkor az azonos pontokhoz rendelt $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ és $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ koordináták között az $\mathbf{y} = \mathbf{xM} + \mathbf{p}$ lineáris összefüggés teljesül, ahol $\mathbf{M}$ nem elfajuló, $(n \times n)$ -típusú mátrix, és $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$.
- (2) Ha $y: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ olyan, hogy valamely nem elfajuló, $(n \times n)$ -típusú $\mathbf{M}$ mátrix és $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ esetén $\mathbf{y} = \mathbf{xM} + \mathbf{p}$, akkor y is affin koordinátázás.

Bizonyítás. Az x és y affin koordinátázások alappontjait jelölje $O, P^1, \dots, P^n$ és $O', Q^1, \dots, Q^n$. Ekkor a $\mathcal{V}$ vektortér $\overrightarrow{OP^1}, \dots, \overrightarrow{OP^n}$ és $\overrightarrow{O'Q^1}, \dots, \overrightarrow{O'Q^n}$ bázisaihoz létezik pontosan egy nem elfajuló $\mathbf{M}$ mátrix, melyre $\overrightarrow{OP^j} = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i^j \overrightarrow{O'Q^i}$.

Minden R pont $(x_1, \dots, x_n)$ koordinátáira

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O'R} &= \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OR} = \sum_{j=1}^n x_j \overrightarrow{OP^j} + \overrightarrow{O'O} = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i^j \overrightarrow{O'Q^i} + \sum_{i=1}^n p_i \overrightarrow{O'Q^i} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n x_j \mathbf{M}_i^j + p_i \right) \overrightarrow{O'Q^i} = \sum_{i=1}^n y_i \overrightarrow{O'Q^i} \end{aligned}$$

bizonyítja az első állítást.

A fenti eljárást „visszafelé olvasva” látható, hogy az y_i koordináták pontosan azon affin független $O', Q^1, \dots, Q^n$ alappontokból származnak, melyekre

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O'O} &= \sum_{i,k=1}^n p_k \hat{\mathbf{M}}_i^k \overrightarrow{OP^i} \\ \overrightarrow{O'Q^j} &= \sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{M}}_i^j \overrightarrow{OP^i} = \overrightarrow{O'O} + \sum_{i=1}^n \left(\hat{\mathbf{M}}_i^j - \sum_{k=1}^n p_k \hat{\mathbf{M}}_i^k \right) \overrightarrow{OP^i} \end{aligned}$$

teljesül, ahol $\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{M}^{-1}$. ■

Ahogy a teljes $\mathcal{A}$ tér koordinátázásaira láttuk, ugyanúgy az affin alterekre is bizonyítható, hogy két különböző koordinátázása között lineáris transzformációk teremtenek kapcsolatot.

Tétel. Az n -dimenziós $\mathcal{A}$ affin tér bármely x affin koordinátázásában minden k -dimenziós affin altérhez létezik olyan $n - k$ lineárisan független egyenletből álló

$$\sum_{j=1}^n A_i^j x_j + p_i = 0, \quad i = k+1, k+2, \dots, n \quad (5.1.1)$$

lineáris egyenletrendszer, amelyet egy X pont $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ affin koordinátája akkor és csak akkor teljesít, ha az affin altér eleme.

Fordítva, mindazok a pontok, amelyek koordinátái egy (5.1.1) típusú egyenletrendszert elégítenek ki, k -dimenziós affin alteret alkotnak.

Bizonyítás. Válasszuk az $\mathcal{A}$ affin térben az $O, B^1, \dots, B^n$ affin független pontokat úgy, hogy az $O, B^1, \dots, B^k$ pontok kifeszítsék a k -dimenziós affin alteret. Legyen az ezzel meghatározott affin koordinátázás $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$. Ekkor az affin alteret

pontosan azok a pontok alkotják, amelyek koordinátái kielégítik az $y_{k+1} = y_{k+2} = \dots = y_n = 0$ egyenleteket.

Egy $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ koordinátázásra áttérve, a koordinátatranszformációkra vonatkozó iménti eredményünk szerint pontosan az affin altér pontjaira érvényesek a $0 = \sum_{j=1}^n \mathbf{M}_i^j x_j + p_i$ ($i = k+1, \dots, n$) egyenletek. Ezek független egyenletek, mert az $\mathbf{M}$ mátrix nem elfajuló.

Fordítva, ha valamely x koordinátázásban adott egy (5.1.1) szerinti egyenletrendszer, akkor az $(\mathbf{M}_i^j)_{i=k+1}^n$ együttható-mátrixot egészítsük ki $(n \times n)$ -típusú nemelfajuló $\mathbf{M}$ mátrixszá, valamint a $p_{k+1}, \dots, p_n$ valós számokat egészítsük ki a $p_1, \dots, p_k, p_{k+1}, \dots, p_n$ számsorral.

Ez az $\mathbf{M}$ mátrix és $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_k, p_{k+1}, \dots, p_n)$ számsor meghatároz egy koordináta-transzformációt, mely egy valamilyen y koordinátázást az x koordinátázásba visz. Ebben az esetben az egyenleteket pontosan azon pontok x -koordinátái elégítik ki, amelyek y -koordinátáira $y_{k+1} = y_{k+2} = \dots = y_n = 0$.

Legyenek az affin független $O, B_1, \dots, B_n$ pontok az y koordinátázás alapontjai. A $B_0, B_1, \dots, B_k$ affin független pontokra illeszkedő affin altér éppen azon pontokat tartalmazza, melyekre $y_{k+1} = y_{k+2} = \dots = y_n = 0$. ■

Eredményünk bizonyítja, hogy az affin geometriák izomorfak a velük egyező dimenziójú valós affin geometriával.

A $(\dim \mathcal{A} - 1)$ -dimenziós affin altereket *hipersíknak* nevezzük. Ilyen a síkban az egyenes, a térben pedig a sík. A hipersík kettévágja az affin teret aszerint, hogy a nem rá illeszkedő pontokra a tétel (5.1.1) képlete pozitív vagy negatív eredményt ad. Világos, hogy különböző előjelhez tartozó pontokat összekötő szakasz metszi a hipersíkot, az azonos előjelhez tartozó pontok szakasza viszont nem. Mindkét előjelhez tartozó pontok halmazait nyílt *affin féltérnek* nevezzük. Zárt affin féltérrel beszélünk, ha a nyílt féltér pontjaihoz hozzávesszük a hipersík pontjait is.

Tétel. Az n -dimenziós $\mathcal{A}$ affin tér valamely $B^0, B^1, \dots, B^{n-1}$ affin független pontjaira illeszkedő hipersík egyenlete egy x affin koordinátázásban

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & 1 \\ b_1^0 & b_2^0 & \dots & b_n^0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ b_1^{n-1} & b_2^{n-1} & \dots & b_n^{n-1} & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

ahol b_j^i a B^i pont x szerinti affin koordinátáit jelöli.

Bizonyítás. Világos, hogy a B^i ($i = 0, \dots, n-1$) pontok $\{b_j^i\}_{j=1}^n$ affin koordinátái kielégítik a determinánssal adott lineáris egyenletet, hiszen ezeket behelyette-

sítve a determinánsban két azonos sor szerepel. Ezért a determináns kifejtése a $B^0, B^1, \dots, B^{n-1}$ affin független pontrendszer által feszített hipersík egyenletének valamely λ valós számú többszöröse, hiszen az affin altér pontjai megoldását adják a determinánssal felírt lineáris egyenletnek is.

A λ nem lehet nulla, mert a

$$\begin{pmatrix} b_1^0 & b_2^0 & \dots & b_n^0 & 1 \\ b_1^1 & b_2^1 & \dots & b_n^1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_1^{n-2} & b_2^{n-2} & \dots & b_n^{n-2} & 1 \\ b_1^{n-1} & b_2^{n-1} & \dots & b_n^{n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix rangja $n-1$, hiszen a $\overrightarrow{B_0 B_i}$ vektorok lineárisan függetlenek, így a determináns első sora szerinti kifejtésében van olyan aldetermináns, amelynek nem nulla az értéke.

Mivel $\lambda \neq 0$, a determináns kifejtésével nyert egyenlet ekvivalens a hipersík egyenletével, ami igazolja az állítást. ■

Fentiek alapján egy $\mathcal{A}^{n-1}$ hipersík és egy $\mathcal{A}^k$ ($k < n$) affin altér pontosan akkor párhuzamos, ha $\mathcal{A}^k \subseteq \mathcal{A}^{n-1}$ vagy $\mathcal{A}^k \cap \mathcal{A}^{n-1} = \emptyset$. Az $\mathcal{A}^k$ és $\mathcal{A}^\ell$ affin altereket pedig pontosan akkor párhuzamosak, ha létezik olyan $\mathcal{A}^m$ affin altér, amelyik mind a kettőt tartalmazza, az egyik altér hipersík benne, és ott a két altér az imént megfogalmazottak szerint párhuzamos.

Két affin altér *kitérő*, ha metszetük üres, de nem párhuzamosak. *Metszőnek* nevezzük őket, ha nem párhuzamosak és metszetük nem üres.

Tétel. *Két affin altér párhuzamos, kitérő, vagy metszi egymást olyan affin altérben, amelynek dimenziója kisebb, mint a két altéré. Egy hipersík és egy k -dimenziós altér párhuzamos, vagy $(k-1)$ -dimenziós affin altérben metszik egymást.*

A bizonyításhoz a lineáris egyenletrendszerek elméletét kell alkalmazni az alterek egyenletekkel való leírására. Ez most az olvasóra marad. A következő tételt 2 dimenzióban már igazoltuk, most azonban mások a körülmények, ezért az ottani módszert adaptáljuk.

Tétel. *Egy affin geometria φ transzformációja akkor és csak akkor kollineáció, ha minden O ponthoz létezik olyan $\hat{\varphi}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ nemelfajuló lineáris leképezés, hogy minden X pontra $\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(X)} = \hat{\varphi}(\overrightarrow{OX})$.*

Bizonyítás. Legyen $\hat{\varphi}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ egy tetszőleges nemelfajuló lineáris leképezés, O és P két tetszőleges pont, a $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ leképezés pedig olyan, melyre $P = \varphi(O)$ és

$X \neq O$ esetén $\overrightarrow{P\varphi(X)} = \hat{\varphi}(\overrightarrow{OX})$. Ekkor φ nyilván bijektív, és az X, Y különböző pontokra illeszkedő XY egyenest a

$$\begin{aligned}\varphi(XY) &= \{\varphi(Z) \in \mathcal{A} : \exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{XZ} = \lambda \overrightarrow{XY}\} \\ &= \{\varphi(Z) \in \mathcal{A} : \exists \lambda \in \mathbb{R}, \hat{\varphi}(\overrightarrow{XZ}) = \lambda \hat{\varphi}(\overrightarrow{XY})\} \\ &= \{\varphi(Z) \in \mathcal{A} : \exists \lambda \in \mathbb{R}, \hat{\varphi}(\overrightarrow{OZ}) - \hat{\varphi}(\overrightarrow{OX}) = \lambda(\hat{\varphi}(\overrightarrow{OY}) - \hat{\varphi}(\overrightarrow{OX}))\} \\ &= \{\varphi(Z) \in \mathcal{A} : \exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{P\varphi(Z)} - \overrightarrow{P\varphi(X)} = \lambda(\overrightarrow{P\varphi(Y)} - \overrightarrow{P\varphi(X)})\} \\ &= \{Z' \in \mathcal{A} : \exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{\varphi(X)Z'} = \lambda \overrightarrow{\varphi(X)\varphi(Y)}\} = \varphi(X)\varphi(Y)\end{aligned}$$

egyenestbe transzformálja, tehát kollineáció.

A fordított irány bizonyításához legyen $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ egy kollineáció. Több lépésben bizonyítunk.

1. Legyen $\mathcal{S}$ tetszőleges 2-dimenziós affin altér (vagyis sík), és tekintsük ebben az f és g metsző egyeneseket. A bijektivitás miatt a $\varphi(f)$ és $\varphi(g)$ egyenesek is metszik egymást, ezért van közös $\mathcal{S}'$ síkjuk (2-dimenziós affin alterük). Bármely $X \in \mathcal{S} \setminus (f \cup g)$ ponton keresztül létezik h egyenes, mely különböző pontokban metszi az f és g egyeneseket. A h képe olyan h' egyenes, amely két különböző pontban metszi a $\varphi(f)$ és $\varphi(g)$ egyeneseket, ezért a h' az $\mathcal{S}'$ síkra illeszkedik. Eszerint minden $X \in \mathcal{S}$ pont esetén $\varphi(X) \in \mathcal{S}'$, tehát az $\mathcal{S}$ sík képe az $\mathcal{S}'$ sík.

2. Ha f és g az $\mathcal{S}$ sík egymással párhuzamos egyenesei, akkor a φ bijektivitása miatt a $\varphi(f), \varphi(g)$ egyenesek is párhuzamosak az $\mathcal{S}'$ síkban, tehát a kollineáció a párhuzamos egyeneseket párhuzamos egyenesekbe transzformálja.

3. Mivel párhuzamos egyenesek párhuzamos egyenesekbe transzformálódnak, a paralelogrammák képe is paralelogramma. Ha tehát P, Q, R, S egy paralelogramma négy csúcsa, akkor $\varphi(P), \varphi(Q), \varphi(R), \varphi(S)$ is paralelogramma. Ez azt jelenti, hogy a $\hat{\varphi}(\overrightarrow{PQ}) := \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}$ formulával definiált $\hat{\varphi}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ leképezés jól definiált, hiszen $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ akkor és csak akkor, ha $\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)} = \overrightarrow{\varphi(S)\varphi(R)}$.

4. A $\hat{\varphi}$ a nullvektort a nullvektorba viszi, mert $\hat{\varphi}(\mathbf{0}) = \hat{\varphi}(\overrightarrow{PP}) = \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(P)} = \mathbf{0}$.

5. A következő néhány kisebb lépésben megmutatjuk, hogy $\hat{\varphi}$ additív.

5/a. Legyen $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$, és $\mathbf{v} = \overrightarrow{PS}$. A Φ_P bijektivitása miatt van pontosan egy olyan R pont, melyre $\overrightarrow{PR} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. Ekkor $PQRS$ egy paralelogramma, és $\varphi(P)\varphi(Q)\varphi(R)\varphi(S)$ is paralelogramma, mert φ tartja a párhuzamosságot. Ekkor

$$\hat{\varphi}(\mathbf{u}) + \hat{\varphi}(\mathbf{v}) = \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)} + \overrightarrow{\varphi(Q)\varphi(R)} = \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(R)} = \hat{\varphi}(\overrightarrow{PR}) = \hat{\varphi}(\mathbf{u} + \mathbf{v}),$$

vagyis $\hat{\varphi}$ független vektorokon additív.

5/b. Ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ tetszőleges vektorok, akkor létezik ezektől független $\mathbf{w}$ vektor, amelyre az $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ és $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ vektorok lineárisan függetlenek. Ezekre

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \hat{\varphi}((\mathbf{u} + \mathbf{w}) + (\mathbf{v} - \mathbf{w})) = \hat{\varphi}(\mathbf{u} + \mathbf{w}) + \hat{\varphi}(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \\ &= \hat{\varphi}(\mathbf{u}) + \hat{\varphi}(\mathbf{w}) + \hat{\varphi}(\mathbf{v}) - \hat{\varphi}(\mathbf{w}) = \hat{\varphi}(\mathbf{u}) + \hat{\varphi}(\mathbf{v}),\end{aligned}$$

teljesül, amiért $\hat{\varphi}$ minden vektorra nézve additív.

6. Minden $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ vektorhoz létezik egy olyan $f(\cdot, \mathbf{u}): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelyre $\hat{\varphi}(\lambda \mathbf{u}) = f(\lambda, \mathbf{u})\hat{\varphi}(\mathbf{u})$, mert ha $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$, és $\lambda \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR}$, akkor $R \in PQ$ és φ egyenestartása miatt $\varphi(R) \in \varphi(P)\varphi(Q)$ is teljesül, amiért $\varphi(P)\varphi(Q)$ definíciója értelmében van olyan $\mu \in \mathbb{R}$, melyre $\overrightarrow{\mu\varphi(P)\varphi(Q)} = \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(R)}$, és így $\hat{\varphi}(\lambda \mathbf{u}) = \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(R)} = \overrightarrow{\mu\varphi(P)\varphi(Q)} = \mu\hat{\varphi}(\mathbf{u})$.

6/a. Az f függvény additív az első változójában, mert

$$\begin{aligned}f(\lambda + \mu, \mathbf{u})\hat{\varphi}(\mathbf{u}) &= \hat{\varphi}((\lambda + \mu)\mathbf{u}) = \hat{\varphi}(\lambda \mathbf{u}) + \hat{\varphi}(\mu \mathbf{u}) \\ &= f(\lambda, \mathbf{u})\hat{\varphi}(\mathbf{u}) + f(\mu, \mathbf{u})\hat{\varphi}(\mathbf{u}) = (f(\lambda, \mathbf{u}) + f(\mu, \mathbf{u}))\hat{\varphi}(\mathbf{u}).\end{aligned}$$

6/b. Az f függvény multiplikatív az első változójában, mert

$$\begin{aligned}f(\lambda\mu, \mathbf{u})\hat{\varphi}(\mathbf{u}) &= \hat{\varphi}(\lambda\mu\mathbf{u}) = f(\lambda, \mu\mathbf{u})\hat{\varphi}(\mu\mathbf{u}) = f(\lambda, \mu\mathbf{u})f(\mu, \mathbf{u})\hat{\varphi}(\mathbf{u}) \\ &= f(\lambda, \mathbf{u})f(\mu, \mathbf{u})\hat{\varphi}(\mathbf{u}).\end{aligned}$$

6/c. Az f nem függ a második változójától, mert $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ független vektorokra

$$f(\lambda, \mathbf{u})\hat{\varphi}(\mathbf{u}) + f(\lambda, \mathbf{v})\hat{\varphi}(\mathbf{v}) = \hat{\varphi}(\lambda \mathbf{u}) + \hat{\varphi}(\lambda \mathbf{v}) = \hat{\varphi}(\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v})) = f(\lambda, \mathbf{u} + \mathbf{v})\hat{\varphi}(\mathbf{u} + \mathbf{v})$$

miatt $f(\lambda, \mathbf{u}) = f(\lambda, \mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\lambda, \mathbf{v})$, ha pedig az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok függők, akkor egy tőlük független $\mathbf{w}$ vektorra $f(\lambda, \mathbf{u}) = f(\lambda, \mathbf{u} + \mathbf{w}) = f(\lambda, \mathbf{w}) = f(\lambda, \mathbf{w} + \mathbf{v}) = f(\lambda, \mathbf{v})$. Innentől kezdve ezért nem tüntetjük fel az f második változóját.

7. Az f definíciójából nyilvánvaló, hogy $f(0) = 0$. A multiplikativitásból $f(1) = 1$ és $f(\lambda^2) = f(\lambda\lambda) = (f(\lambda))^2 \geq 0$ következik. Eszerint ha $\lambda > \mu$, akkor $f(\lambda) = f(\mu) + f(\sqrt{\lambda - \mu^2}) \geq f(\mu)$, vagyis az f függvény monoton növekvő. Az additivitás és homogenitás közötti, a Függelék F.10. szakaszában bizonyított kapcsolat következtében az f függvény homogén is, vagyis $f(1) = 1$ miatt $f(\lambda) = \lambda$.

8. A $\hat{\varphi}$ leképezés lineáris, mert

$$\hat{\varphi}(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}) = \hat{\varphi}(\lambda \mathbf{u}) + \hat{\varphi}(\mu \mathbf{v}) = f(\lambda, \mathbf{u})\hat{\varphi}(\mathbf{u}) + f(\mu, \mathbf{v})\hat{\varphi}(\mathbf{v}) = \lambda\hat{\varphi}(\mathbf{u}) + \mu\hat{\varphi}(\mathbf{v}).$$

9. Mivel φ bijektív, minden $\mathbf{u} \neq 0$ vektorra $\hat{\varphi}(\mathbf{u}) \neq 0$, vagyis $\hat{\varphi}$ is bijektív.

Ezzel a tételt beláttuk. ■

Fontos következmény, hogy ha két affin geometria között van kollineáció, akkor azok izomorfak.

Tétel. *Az affin tér egy transzformációja akkor és csak akkor kollineáció, ha valamely x affin koordinátázásban $x \mapsto xM + p$ alakú, ahol M nemelfajuló mátrix.*

A bizonyítás a síkon alkalmazott módszer alapján következik, ezúttal az olvasóra marad. Közvetlen következmény, hogy az affin transzformációk pontosan a kollineációk, és a valós affin geometriákban ezek megegyeznek a koordináta-transzformációkkal.

Affinitások alaptétele. *Egy n -dimenziós valós affin tér bármely két affin független pontokból álló $(P^0, \dots, P^n)$ és $(Q^0, \dots, Q^n)$ pontrendszeréhez pontosan egy affinitás létezik, amelyik a P^i pontokat rendre a Q^i pontokba viszi.*

Az affinitások affin független pontokat affin független pontokba visznek.

A síkbeli esettel teljesen analóg bizonyítás az olvasóra marad. Közvetlen következmény, hogy az affinitások a k -dimenziós affin altereket k -dimenziós affin alterekbe viszik, mégpedig valamely affin független pontokra illeszkedő affin alteret a képpontokra illeszkedő affin altérbe.

Nyilvánvaló, hogy az affinitások csoportot, azon belül az irányítást tartó, illetve ezen belül is az 1-determinánsú affinitások is részcsoportot alkotnak, és további csoportokat kapunk, ha ezek közül csak az origót fixen tartó affinitásokat tekintjük. Ezek közül a legfontosabbak a következők:

- $AL(n)$ az affinitások csoportja (*affin lineáris csoport*),
- $GL(n) := \{\phi \in AL(n) : \phi(0) = 0\}$ az *általános lineáris csoport*,
- $SL(n) := \{\phi \in GL(n) : \det \phi = 1\}$ a *speciális lineáris csoport*,

ahol $n = \dim \mathcal{A}$. Jegyezzük meg, hogy $SL(n)$ irányítást tartó affinitásokból áll, és minden irányítást tartó vagy váltó affinitás előáll $SL(n)$ egy elemének és egy tengelyes affinitásnak a szorzataként.

5.2. Konvexitás, konvex burok

Ebben a szakaszban csak az affin geometria eszközeit használjuk, ami a konvexitás itt megismételt definíciója alapján természetes is.

Definíció. Valamely ponthalmazt *konveknnek* nevezünk, ha bármely két pontjával együtt a pontokat összekötő zárt szakasz pontjait is tartalmazza.

Egy P pontot a $\mathcal{K}$ konvex halmaz *belső pontjának* mondunk, ha minden rá illeszkedő egyenesen van olyan nyílt szakasz, mely teljes egészében a $\mathcal{K}$ konvex halmazban van. A belső pontok halmazát a $\mathcal{K}$ konvex halmaz *belsejének* nevezzük.

Egy konvex ponthalmazt *szigorúan konvexnek* mondunk, ha bármely két pontja nyílt szakaszának pontjai belső pontjai. ▲

Világos, hogy az affin alterek, a síkban a félsík, a térben a féltér (akár zárt, akár nyitott) konvex ponthalmazok. Az is nyilvánvaló, hogy konvex ponthalmazok metszete is konvex ponthalmaz.

Definíció. Egy $\mathcal{P}$ ponthalmaz *konvex burkán* mindazon konvex ponthalmazok metszetét értjük, amelyek a $\mathcal{P}$ halmazt tartalmazzák. A konvex burok jelölésére a $\text{conv } \mathcal{P}$ jelölést alkalmazzuk. ▲

A konvex burok minimális abban az értelemben, hogy valahányszor egy konvex halmaz tartalmazza a $\mathcal{P}$ halmazt, akkor tartalmazza a $\text{conv } \mathcal{P}$ halmazt is.

A $\mathcal{P}$ konvex burkának előállítására a $\mathcal{P}$ pontjaiból is lehetséges. Most ezt fogjuk vizsgálni. A kényelem kedvéért az n számot mindvégig a vizsgált affin tér dimenziójaként értelmezzük.

A szakasz előállítására mintájára tetszőleges $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok $\sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{v}_i$, lineáris kombinációját, ahol $\lambda_i \geq 0$ és $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$, a $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok *konvex lineáris kombinációjának* nevezzük. Minden $m \in \mathbb{N}$ számra vezessük be a

$$\text{comb}_m \mathcal{P} = \left\{ P : P_O = \sum_{i=0}^m \lambda_i P_O^i, \text{ ahol } P^i \in \mathcal{P}, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}$$

jelölést. Így például a $\text{comb}_1 \mathcal{P}$ azon pontok halmaza, melyek a $\mathcal{P}$ halmaz pontjai által meghatározott zárt szakaszokon vannak. Ezzel a jelöléssel egy $\mathcal{K}$ halmaz akkor és csak akkor konvex, ha $\text{comb}_1 \mathcal{K} = \mathcal{K}$.

Világos, hogy $\text{comb}_m \mathcal{P} \subseteq \text{comb}_{m+1} \mathcal{P}$, hiszen a konvex lineáris kombináció nem változik, ha egyik vektorát nulla együtthatóval hozzávesszük. Legyen $\text{comb } \mathcal{P} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \text{comb}_i \mathcal{P}$.

Tétel. $\text{conv } \mathcal{P} = \text{comb } \mathcal{P}$.

Bizonyítás. Tetszőleges

$$\mathbf{v} = \sum_{i=0}^m \lambda_i \mathbf{v}_i \text{ és } \mathbf{u} = \sum_{j=0}^k \mu_j \mathbf{u}_j, \text{ ahol } \lambda_i, \mu_j \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, \text{ és } \sum_{j=0}^k \mu_j = 1,$$

és tetszőleges $\lambda + \mu = 1$, $\lambda, \mu > 0$ számok esetén $\lambda \lambda_i, \mu \mu_j \geq 0$, és

$$\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{u} = \sum_{i=0}^m \lambda \lambda_i \mathbf{v}_i + \sum_{j=0}^k \mu \mu_j \mathbf{u}_j, \text{ ahol } \sum_{i=0}^m \lambda \lambda_i + \sum_{j=0}^k \mu \mu_j = \lambda + \mu = 1,$$

ami azt jelenti, hogy $\text{comb}_1(\text{comb}_m \mathcal{P} \cup \text{comb}_k \mathcal{P}) \subseteq \text{comb}_{m+k} \mathcal{P} \subseteq \text{comb } \mathcal{P}$.

Eszerint $\text{comb } \mathcal{P}$ konvex, akkor pedig a konvex burok definíciója értelmében $\text{conv } \mathcal{P} \subseteq \text{comb } \mathcal{P}$.

Már csak azt kell látnunk, hogy $\text{comb } \mathcal{P} \subseteq \text{conv } \mathcal{P}$. Ehhez elég látni, hogy $\text{comb}_m \mathcal{P} \subseteq \text{conv } \mathcal{P}$, amit teljes indukcióval bizonyítunk.

Világos, hogy $\text{comb}_0 \mathcal{P} = \mathcal{P} \subseteq \text{conv } \mathcal{P}$, és $\text{comb}_1 \mathcal{P} \subseteq \text{conv } \mathcal{P}$, hiszen $\text{conv } \mathcal{P}$ tartalmazza a két pontja közötti szakaszok pontjait.

Tegyük fel, hogy $\text{comb}_m \mathcal{P} \subseteq \text{conv } \mathcal{P}$ is teljesül valamely $1 < m \in \mathbb{N}$ esetén.

Ha $P \in \text{comb}_{m+1} \mathcal{P}$, akkor

$$P_O = \lambda_0 P_O^0 + \lambda_1 P_O^1 + \cdots + \lambda_m P_O^m + \lambda_{m+1} P_O^{m+1}, \text{ ahol } P^i \in \mathcal{P}, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^{m+1} \lambda_i = 1.$$

Ha $\lambda_0 = 0$, akkor $P \in \text{comb}_m \mathcal{P}$, és így az indukciós feltétel következtében $P \in \text{conv } \mathcal{P}$.

Ha $\lambda_0 = 1$, akkor P_O egy egytagú lineáris kombináció, ezért $P \in \text{comb}_0 \mathcal{P} \subseteq \text{conv } \mathcal{P}$.

Ha $\lambda_0 \in (0, 1)$, akkor a $\lambda'_i = \lambda_i / (1 - \lambda_0)$ számokra

$$\sum_{i=1}^{m+1} \lambda'_i = \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_0} = \frac{1}{1 - \lambda_0} \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = \frac{1}{1 - \lambda_0} (1 - \lambda_0) = 1,$$

ezért a $P'_O = \lambda'_1 P_O^1 + \cdots + \lambda'_m P_O^m + \lambda'_{m+1} P_O^{m+1}$ helyvektor P' végpontja benne van a $\text{comb}_m \mathcal{P}$ ponthalmazban. Az indukciós feltétel szerint így $P' \in \text{conv } \mathcal{P}$ is teljesül. Viszont

$$P_O = \lambda_0 P_O^0 + (1 - \lambda_0) \sum_{i=1}^{m+1} \lambda'_i P_O^i = \lambda_0 P_O^0 + (1 - \lambda_0) P'_O,$$

így $P \in \text{comb}_1 \mathcal{P} \subseteq \text{conv } \mathcal{P}$, amiért $P \in \text{conv } \mathcal{P}$.

Ezzel a tételt beláttuk. ■

Lemma. *Ha egy vektor előáll valamely vektorok konvex lineáris kombinációjaként, akkor előáll ugyanezek közül legfeljebb $n + 1$ konvex lineáris kombinációjaként is.*

Bizonyítás. Legyen

$$\mathbf{v} = \sum_{i=0}^m \lambda_i \mathbf{v}_i, \quad \text{ahol } \lambda_i \geq 0 \text{ és } \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1,$$

és tegyük fel, hogy $\mathbf{v}$ nem áll elő ennél kevesebb $\mathbf{v}_i$ vektor konvex lineáris kombinációjaként. Ebből persze $\lambda_i > 0$ következik minden i -re.

Tegyük fel, hogy $m \geq n + 1$. Ekkor a $\mathbf{v}_i$ vektorok közül $n + 1$ már lineárisan függő, ezért léteznek olyan μ_i és μ'_i valós számok, hogy $0 = \sum_{i=0}^n \mu_i \mathbf{v}_i$, $0 = \sum_{i=1}^{n+1} \mu'_i \mathbf{v}_i$, és $\mu_0 = \mu'_{n+1} = -1$. Legyen $\mu = \sum_{i=0}^n \mu_i$, és $\mu' = \sum_{i=1}^{n+1} \mu'_i$.

Ha $\mu + \mu' = 0$, akkor legyen $\lambda'_0 = \mu_0$, $\lambda'_i = \mu_i + \mu'_i$, ha $0 < i < m + 1$, és $\lambda'_{n+1} = \mu'_{n+1}$.

Ha $\mu + \mu' \neq 0$, és $\mu' \neq 0$, akkor legyen $\lambda'_0 = \mu_0$, $\lambda'_i = \mu_i - \mu'_i\mu/\mu'$, ha $0 < i < m + 1$, és $\lambda'_{n+1} = -\mu'_{n+1}\mu/\mu'$.

Ha $\mu + \mu' \neq 0$, és $\mu' = 0$, akkor $\mu \neq 0$, és legyen $\lambda'_0 = -\mu'_0\mu/\mu'$, $\lambda'_i = \mu'_i - \mu_i\mu'/\mu$, ha $0 < i < m + 1$, és $\lambda'_{n+1} = \mu'_{n+1}$.

Egyszerű behelyettesítéssel látható, hogy a λ'_i számokra

$$0 = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda'_i \mathbf{v}_i, \quad \text{és} \quad 0 = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda'_i,$$

valamint $\lambda'_0 = -1$ és $\lambda'_{n+1} = -1$ legalább egyike teljesül.

Legyen $s = \min(\{\lambda_j / -\lambda'_j : \lambda'_j < 0\})$. Nyilván $s > 0$, és valamely j sorszámra $s = \lambda_j / -\lambda'_j$, hiszen véges sok pozitív szám minimuma, továbbá $\lambda_i + s\lambda'_i \geq 0$, hiszen az s és λ_i nem negatív, ha pedig $\lambda'_i < 0$, $s \leq \lambda_i / -\lambda'_i$ az s definíciója miatt.

Eszerint

$$\mathbf{v} = \sum_{i=0}^m \lambda_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=0}^m \lambda_i \mathbf{v}_i + s \sum_{i=0}^{n+1} \lambda'_i \mathbf{v}_i, \quad \text{és} \quad \sum_{i=0}^m \lambda_i + s \sum_{i=0}^{n+1} \lambda'_i = \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1,$$

és ebben a konvex lineáris kombinációban a j sorszámra $\lambda_j + s\lambda'_j = \lambda_j + \frac{\lambda_j}{-\lambda'_j} \lambda'_j = 0$.

Tehát a $\mathbf{v}$ vektort ez a konvex lineáris kombináció a feltételezett minimumnál eggyel kevesebb taggal állítja elő. Ez az ellentmondás bizonyítja a lemmát. ■

Tétel. (Carathéodory) $\text{conv } \mathcal{P} = \text{comb}_n \mathcal{P}$, ahol n az affin tér dimenziója.

Bizonyítás. Minthogy $\text{conv } \mathcal{P} = \text{comb } \mathcal{P}$, elég belátni, hogy $\text{conv } \mathcal{P} \subseteq \text{comb}_n \mathcal{P}$. Ehhez $\text{conv } \mathcal{P}$ definíciója miatt elég látni, hogy $\text{comb}_n \mathcal{P}$ konvex halmaz.

Már láttuk, hogy $\text{comb}_1(\text{comb}_n \mathcal{P}) \subseteq \text{comb}_{2n+1} \mathcal{P}$, másfelől iménti lemmánk értelmében $\text{comb}_{2n+1} \mathcal{P} \subseteq \text{comb}_n \mathcal{P}$, így $\text{comb}_1(\text{comb}_n \mathcal{P}) = \text{comb}_n \mathcal{P}$, tehát $\text{comb}_n \mathcal{P}$ konvex, ami bizonyítja a tételt. ■

Tétel. (Radon) Egy legalább $2 + \dim \mathfrak{A}$ különböző pontból álló halmaz két olyan diszjunkt részhalmazra osztható, hogy ezek konvex burkainak metszete nem üres.

Bizonyítás. Legyenek a pontok helyvektorai $P_O^0, P_O^1, \dots, P_O^{m-1}$, $m \geq 2 + \dim \mathfrak{A}$.

Az $\mathbf{u}_i := P_O^i - P_O^0$ helyvektorok lineárisan függők, így léteznek olyan λ_i nem mind nulla valós számok, hogy $\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \mathbf{u}_i = 0$. Legyen $\lambda_0 = -\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i$. Ekkor

$$\sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i P_O^i = 0, \quad \text{és} \quad \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i = 0.$$

Legyen $\mathcal{I}_{0<} = \{i : \lambda_i > 0\}$, $\mathcal{I}_{\leq 0} = \{i : \lambda_i \leq 0\}$. Mivel nem az összes λ_i egyútt-ható nulla, az $\mathcal{I}_{0<}$ halmaz és így a $\mathcal{I}_{\leq 0}$ halmaz sem üres, és definiálhatjuk a $\lambda'_i = \lambda_i / \sum_{j \in \mathcal{I}_{0<}} \lambda_j$ számokat.

Legyen

$$P_O^{0<} = \sum_{j \in \mathcal{I}_{0<}} \lambda'_j P_O^j, \quad \text{ahol } \{P_O^j : j \in \mathcal{I}_{0<}\},$$

$$P_O^{\leq 0} = \sum_{j \in \mathcal{I}_{\leq 0}} -\lambda'_j P_O^j, \quad \text{ahol } \{P_O^j : j \in \mathcal{I}_{\leq 0}\}.$$

Ezek nyilván konvex lineáris kombinációk, így a $P^{0<}$ pont a $\mathcal{P}_{0<} = \{P^j : j \in \mathcal{I}_{0<}\}$ pontthalmaz, a $P^{\leq 0}$ pont a $\mathcal{P}_{\leq 0} = \{P^j : j \in \mathcal{I}_{\leq 0}\}$ pontthalmaz konvex burkában van, vagyis $P^{0<} \in \text{conv } \mathcal{P}_{0<}$ és $P^{\leq 0} \in \text{conv } \mathcal{P}_{\leq 0}$.

Mivel $\mathcal{P}_{0<}$ és $\mathcal{P}_{\leq 0}$ nem üres, $\mathcal{P}_{0<} \cap \mathcal{P}_{\leq 0} = \emptyset$, és $\mathcal{P}_{0<} \cup \mathcal{P}_{\leq 0} = \mathcal{P}$, valamint fentebbi formulánk szerint $P_O^{0<} = P_O^{\leq 0}$, és így $\text{conv } \mathcal{P}_{0<} \cap \text{conv } \mathcal{P}_{\leq 0} \neq \emptyset$, a $\mathcal{P}_{0<}$ és $\mathcal{P}_{\leq 0}$ pontthalmazok teljesítik a tétel követelményét. ■

A Radon-tétel értelmében ha egy síkon négy pont közül bármely három általános helyzetben van, akkor a négy pont közül valamelyik kettő olyan egyenest határoz meg, amelynek a másik két pont két különböző oldalára esik. A térben ha öt pont közül bármely négy általános helyzetben van, akkor az öt pont valamely három pontja olyan síkot határoz meg, amelynek a másik két pont két különböző oldalára esik.

Tétel. (Helly) *Ha m számú konvex pontthalmaz közül bármely $(1 + \dim \mathcal{A})$ pontthalmaz metszete nem üres, akkor az összes metszete sem üres.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{K}_i$ konvex pontthalmaz ($i = 1, \dots, m$). Teljes indukcióval bizonyítunk.

Az $m \leq n + 1 = 1 + \dim \mathcal{A}$ esetben az állítás trivialis.

Legyen most $m = n + 2$, és $\mathcal{K}_i^* = \mathcal{K}_1 \cap \dots \cap \mathcal{K}_{i-1} \cap \mathcal{K}_{i+1} \cap \dots \cap \mathcal{K}_{n+2}$. A feltétel szerint $\mathcal{K}_i^* \neq \emptyset$, ezért választhatunk egy $P^i \in \mathcal{K}_i^*$ pontot. A P^i pont minden $\mathcal{K}_j$ halmaznak eleme, ha $j \neq i$, így ha még $P^i \in \mathcal{K}_i$ is teljesül, akkor a P^i pont mindegyik $\mathcal{K}_j$ pontthalmazba beleesik, és a tétel állítása teljesül.

A továbbiakban feltesszük, hogy $P^i \notin \mathcal{K}_i$ minden indexre, vagyis a $\mathcal{P} = \{P^1, P^2, \dots, P^{n+2}\}$ halmazban P^i az egyetlen, amely nem eleme a $\mathcal{K}_i$ halmaznak.

Radon tétele alapján osszuk a $\mathcal{P}$ pontthalmazt két olyan $\mathcal{P}_0$ és $\mathcal{P}_1$ részhalmazra, hogy $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_1 = \emptyset$, és $\text{conv } \mathcal{P}_0 \cap \text{conv } \mathcal{P}_1 \neq \emptyset$. Legyen P egy pont a $\text{conv } \mathcal{P}_0 \cap \text{conv } \mathcal{P}_1$ halmazból.

Mivel a $\mathcal{K}_j$ pontthalmaz tartalmazza az összes nem j indexű P^ℓ pontot, és $P^j \in \mathcal{P}_i$ ($i = 0, 1$) esetén $P^j \notin \mathcal{P}_{1-i}$, következik, hogy $\mathcal{P}_{1-i} \subseteq \mathcal{K}_j$, ha $P^j \in \mathcal{P}_i$

($i = 0, 1$). A $\mathcal{K}_j$ konvexitása miatt, ebből $\text{conv } \mathcal{P}_{1-i} \subseteq \mathcal{K}_j$ is adódik a $P^j \in \mathcal{P}_i$ ($i = 0, 1$) esetén.

Eszerint $\text{conv } \mathcal{P}_0 \cap \text{conv } \mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{K}_j$, mert minden j index esetén $\text{conv } \mathcal{P}_i \subseteq \mathcal{K}_j$, és $\text{conv } \mathcal{P}_{1-i} \subseteq \mathcal{K}_j$ közül pontosan egy teljesül, hiszen $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_1 = \emptyset$.

Mivel $P \in \text{conv } \mathcal{P}_0 \cap \text{conv } \mathcal{P}_1$, minden j indexre $P \in \mathcal{K}_j$, vagyis $P \in \bigcup_{j=1}^{n+2} \mathcal{K}_j$, ami az $m = n + 2$ esetre igazolja az állítást.

Tegyük fel, hogy az állítás teljesül valamely $m - 1$ esetén, és tekintsünk a tétel feltételeit kielégítő $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m$ konvex ponthalmazokat.

Legyen $\mathcal{K}'_{m-1} = \mathcal{K}_{m-1} \cap \mathcal{K}_m$. Ekkor a $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_{m-2}, \mathcal{K}'_{m-1}$ rendszerre érvényes a tétel feltétele, hiszen ha a ponthalmazok közül olyan $n + 1$ metszetét nézzük, amelyben a $\mathcal{K}'_{m-1}$ tag nem szerepel, akkor a metszet a tétel feltétele miatt nem üres, ha pedig a $\mathcal{K}'_{m-1}$ ponthalmaz is szerepel a vizsgált $n + 1$ ponthalmaz között, akkor az $(n + 2)$ -tagú metszetre már igazoltak miatt nem lesz üres a metszet.

Az indukciós feltétel miatt tehát $\mathcal{K}_1 \cap \dots \cap \mathcal{K}_{m-2} \cap \mathcal{K}'_{m-1} \neq \emptyset$, így $\mathcal{K}_1 \cap \dots \cap \mathcal{K}_m = \mathcal{K}_1 \cap \dots \cap \mathcal{K}_{m-2} \cap \mathcal{K}'_{m-1}$ sem üres. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

Helly tételének erejét demonstrálja a most bemutatásra kerülő két tétel.

Tétel. Ha az $\mathcal{A}_+^1, \dots, \mathcal{A}_+^m$ affin félterek lefedik az egész teret, akkor közülük kiválasztható legfeljebb $1 + \dim \mathcal{A}$, amelyek szintén lefedik az egész affin teret.

Bizonyítás. Tekintsük a $\mathcal{A}_-^i = \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_+^i$ komplementer féltereket. Mivel a $\mathcal{A}_+^i$ félterek együtt lefedik a $\mathcal{A}$ teret,

$$\bigcap_{i=1}^m \mathcal{A}_-^i = \bigcap_{i=1}^m (\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_+^i) = \mathcal{A} \setminus \bigcup_{i=1}^m \mathcal{A}_+^i = \emptyset.$$

Helly tétele szerint, ha a $\mathcal{A}_-^i$ halmazok közül egyik $1 + n = 1 + \dim \mathcal{A}$ metszete sem lenne üres, akkor az összes metszete sem lenne üres, így feltételünk értelmében lennie kell $1 + n$ olyan $i_0, \dots, i_n$ indexnek, amelyekre $\bigcap_{j=0}^n \mathcal{A}_-^{i_j} = \emptyset$ érvényes. Ebből viszont következik, hogy a $\mathcal{A}_+^{i_0}, \dots, \mathcal{A}_+^{i_n}$ félterek lefedik az egész teret, hiszen $\bigcup_{j=0}^n \mathcal{A}_+^{i_j} = \mathcal{A} \setminus \bigcap_{j=0}^n \mathcal{A}_-^{i_j} = \mathcal{A}$. ■

Tétel. Ha az euklidészi síkon a $P^1, \dots, P^m$ pontok minden párjára $d(P^i, P^j) \leq 1$ érvényes, akkor létezik olyan $\sqrt{3}/3$ sugarú körlap, amely az összes $P^1, \dots, P^m$ pontot tartalmazza.

Bizonyítás. Tekintsük bármely $P^{i_1} P^{i_2} P^{i_3}$ háromszöget. Ennek legnagyobb szöge biztosan nem kisebb $\pi/3$ -nál, ezért a $P^{i_1} P^{i_2} P^{i_3}$ háromszög legnagyobb oldala, mondjuk ez éppen $\overline{P^{i_1} P^{i_2}}$, legalább $\pi/3$ szög alatt látszik a P^{i_3} pontból. Eszerint a P^{i_3} pont a $\overline{P^{i_1} P^{i_2}}$ szakasz $\pi/3$ szögű látóköre belül van. Ennek a látókörnek a középpontjából a $\overline{P^{i_1} P^{i_2}}$ szakasz $2\pi/3$ szög alatt látszik, a kör r sugarával kalkulálva a

$\overline{P^{i_1}P^{i_2}}$ szakasz hossza $r \sin(\pi/3)$. Mivel $d(P^{i_1}, P^{i_2}) < 1$, ebből $r \leq \sqrt{3}/3$ következik, vagyis bármely három ponthoz van olyan pont, mely mind a három ponttól legfeljebb $\sqrt{3}/3$ távolságra esik.

Írjunk minden pont köré $\sqrt{3}/3$ sugarú körlapot. Az iméntiek szerint ezek közül bármely három metszi egymást, így Helly tétele miatt az összes ilyen körnek létezik közös P pontja. A P köré vett $\sqrt{3}/3$ sugarú kör nyilván lefedi a $P^1, \dots, P^m$ pontrendszert. ■

5.3. Konvex politópok és poliéderek

Mivel a konvex ponthalmazok rendszere zárt a metszésre és a konvex burok képzésére, kézenfekvő, hogy triviális konvex ponthalmazokat használva ezekkel a „műveletekkel” konstruáljuk meg a konvex ponthalmazok legegyszerűbb példáit.

A térben és a síkon is volt már szó a politópokról, ezért itt csak emlékeztetünk a definícióra és azokra a tulajdonságokra, ahol a különbségek mutatkoznak.

Definíció. Véges sok pont konvex burkát *konvex politóp*nak nevezzük.

A politópot előállító pontok egy ilyen rendszerét *definiáló rendszernek*, a pontokat *definiáló pontoknak* mondjuk. Ezek közül azokat, amelyek elhagyásával a politóp pontjainak halmaza megváltozik (ez persze csak szűkülés lehet), *lényegesnek* nevezzük. Egy politóp valamely definiáló rendszerét *minimálisnak* nevezzük, ha minden eleme lényeges. ▲

Jegyezzük meg, hogy egyetlen pont maga is egy politóp, és minimális definiáló rendszerek léteznek, mert bármely definiáló rendszerből elhagyva a nem lényeges pontokat, végül csak lényeges pontok maradnak.

Egy fontos politópot, az úgynevezett *keresztpolitópot* úgy kapjuk, hogy veszünk $1 + n$ ($n \in \mathbb{N}$) általános helyzetű pontot, majd az egyikre tükrözve a többi pontot, az összesen $1 + 2n$ pont konvex burkát vesszük. Azt a pontot, amelyre a tükrözést végezzük a keresztpolitóp középpontjának hívjuk, és természetesen nem lényeges definiáló pont.

Definíció. Az affin tér k darab általános helyzetű pontjának konvex burkát *szimplexnek* nevezzük. A definiáló pontokat a szimplex *csúcsainak* mondjuk.

A szimplex *belsején* azon pontok halmazát értjük, amelyekhez tartozó konvex lineáris kombinációban minden együttható pozitív. A szimplex belsejét *nyílt szimplexnek* is nevezik. ▲

A szimplexek is politópok. A 0-, 1-, 2- és 3-dimenziós szimplexek rendre a pont, a szakasz, a háromszög és a tetraéder. Carathéodory tétele értelmében min-

den konvex burok a generáló ponthalmaz pontjaiból képzett szimplexek — nem feltétlenül véges — uniója.

Definíció. Egy politópot k -dimenziósnek mondunk, ha k -dimenziós affin altér tartalmazza, de egyetlen $(k - 1)$ -dimenziós affin altér sem nem tartalmazza. ▲

Eszerint egy szimplex *dimenziója* éppen eggyel kisebb, mint csúcsainak száma. Egy féltér dimenziója pedig megegyezik a befogadó affin tér dimenziójával.

Definíció. Egy politópot tartalmazó m -dimenziós zárt feltéreket a politóp m -dimenziós *támaszféltereinek* mondjuk.

Egy m -dimenziós támaszfélteret a politóp *lényeges támaszfélterének* nevezzük, ha az $(m - 1)$ -dimenziós határoló affin altere egy $(m - 1)$ -dimenziós politópban metszi a politópot. E metszetet a politóp $(m - 1)$ -*dimenziós lapjának* nevezzük.

A 0-dimenziós lapokat a konvex politóp *csúcsának* mondjuk. ▲

Vegyük észre, hogy egy k -dimenziós politóp egyetlen k -dimenziós lapja önmaga, a többi ℓ -dimenziós lapja pedig mindig valamely $(\ell + 1)$ -dimenziós lapjának is ℓ -dimenziós lapja. Egy politóp lapjai eszerint a tartalmazásra nézve egy rendezett halmazt alkotnak, melyet a politóp *laphálójának* nevezzük.

Világos, hogy egy szimplex csúcsai közül $\ell + 1$ darab által meghatározott szimplex a szimplex ℓ -dimenziós lapja.

Egy politóp olyan támaszfélterének határoló affin alterét, melynek határán is van a politópnak pontja, *támasznak* mondjuk. Ebben az értelemben beszélünk támaszegyenesről, támaszsíkról és támaszhipersíkról.

Az n -dimenziós affin térben lévő n -dimenziós politóp $(n - 1)$ -dimenziós lapjait a politóp *hiperlapjának*, az $(n - 2)$ -dimenziós lapjait a politóp *hiperélének* nevezzük. A térben elhelyezett tetraéder hiperlapjai tehát a lapjai, hiperélei pedig az élei.

5.3.1. Tétel. n -dimenziós politóp a lényeges n -dimenziós támaszainak metszete.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{A}$ egy n -dimenziós affin tér mely tartalmazza a $\mathcal{P}$ politópot. Legyen $\mathcal{X} = \{X_i\}_{i=1}^m$ a $\mathcal{P}$ politópot definiáló pontok halmaza. Legyen $\mathcal{P}'$ a politóp lényeges támaszféltereinek metszete.

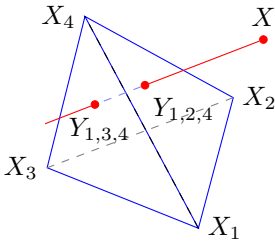
Nyilván $\mathcal{P} = \text{conv } \mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}'$, hiszen $\mathcal{P}'$ konvex, és $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}'$. Eszerint a továbbiakban már elegendő a fordított, $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ tartalmazást, vagyis az $X \notin \mathcal{P} \implies X \notin \mathcal{P}'$ implikációt igazolni.

Legyen $X \notin \mathcal{P}$.

Mivel a $\mathcal{P}$ politóp n -dimenziós, léteznek a definiáló pontoknak olyan $X_{i_1}, \dots, X_{i_n}$ részhalmazai, amelyekre az $X, X_{i_1}, \dots, X_{i_n}$ pontok általános helyzetűek. Jelölje Σ az ilyen részhalmazokból alkotott $\mathcal{S}_{i_1, \dots, i_n} = \text{simpl}(X_{i_1}, \dots, X_{i_n})$ szimplexek halmazát.

Jelölje Λ a definiáló pontok általános helyzetű $X_{i_1}, \dots, X_{i_n}$ részhalmazából képzett $\text{simpl}(X_{i_1}, \dots, X_{i_n})$ szimplexeinek legfeljebb $(n-1)$ -dimenziós lapjai halmazát.

A Σ minden $\mathcal{S}_{i_1, \dots, i_n}$ eleméhez létezik az X ponton keresztül olyan egyenes, amely belemetsz ezen $\mathcal{S}_{i_1, \dots, i_n}$ szimplexbe, de nem metszi a Λ egyetlen elemét sem, hiszen az X pontból kiinduló, a Λ elemeire illeszkedő legfeljebb $(n-1)$ -dimenziós affin alterek csak véges sok hipersík uniójának részei. Legyen $\ell_{i_1, \dots, i_n}$ egy ilyen egyenes. Ennek nyilván véges sok metszete van a Σ elemeivel, melyeket jelöljön $Z_{j_1, \dots, j_n; i_1, \dots, i_n} := \ell_{i_1, \dots, i_n} \cap \mathcal{S}_{i_1, \dots, i_n}$.



Minden $(j_1, \dots, j_n)$ esetén legyen $Y_{k_1, \dots, k_n}$ az a pont a $Z_{j_1, \dots, j_n; i_1, \dots, i_n}$ pontok közül, amely az $\ell := \ell_{i_1, \dots, i_n}$ egyenesen elválasztja az összes $Z_{j_1, \dots, j_n; i_1, \dots, i_n}$ pontot az X ponttól, amennyiben $(i_1, \dots, i_n) \neq (k_1, \dots, k_n)$.

Megmutatjuk, hogy a kiválasztott $X_{k_1}, \dots, X_{k_n}$ általános helyzetű definiáló pontok $\mathcal{H}_{k_1, \dots, k_n}$ hipersíkja olyan, hogy annak különböző partján van az X pont és a $\mathcal{P}$ politóp.

Indirekten tegyük fel, hogy, mondjuk az $X_m \in \mathcal{X}$ pont a $\mathcal{H}_{k_1, \dots, k_n}$ ugyanazon oldalára esik, mint az X pont. Az X pont nem eshet bele a $\mathcal{M} = \text{conv}(X_m, X_{k_1}, \dots, X_{k_n})$ szimplexbe, mert akkor feltevésünkkel szemben $X \in \text{conv } \mathcal{X} = \mathcal{P}$ lenne. Ugyanakkor az ℓ egyenest úgy választottuk, hogy nem metszi a $\mathcal{M}$ szimplex egyetlen lapját sem, miközben belső pontban metszi a $\mathcal{S}_{k_1, \dots, k_n}$ szimplexet, ami az $\mathcal{M}$ szimplex egy lapja.

A Pasch-axióma szerint ez azt jelenti, hogy az ℓ egyenes az $\mathcal{M}$ szimplex egy $\mathcal{S}_{m, k_{i_1}, \dots, k_{i_{n-1}}}$ lapját egy belső $Z_{j_1, \dots, j_n; m, k_{i_1}, \dots, k_{i_{n-1}}}$ pontban metszi a $\{k_1, \dots, k_n\}$ valamely $n-1$ elemű $\{k_{i_1}, \dots, k_{i_{n-1}}\}$ részhalmazára.

Nyilvánvalóan adódik, hogy az $X_m, X_{k_{i_1}}, \dots, X_{k_{i_{n-1}}}$ pontok általános helyzetűek, és $Z_{j_1, \dots, j_n; m, k_{i_1}, \dots, k_{i_{n-1}}} \in \overline{Y_{k_1, \dots, k_n} X}$, hiszen X_m és X a $\mathcal{H}_{k_1, \dots, k_n}$ ugyanazon oldalán van. Ez ellentmond az $Y_{k_1, \dots, k_n}$ kiválasztásának, ezért X_m mégis a $\mathcal{H}_{k_1, \dots, k_n}$ másik, az $\mathcal{X}$ pontot nem tartalmazó oldalán kell legyen.

Eszerint létezik olyan lényeges támaszfélter, amelyik az X pontot nem tartalmazza, vagyis $X \notin \mathcal{P}'$ érvényes. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. ■

Definíció. Véges sok zárt k -dimenziós affin félter metszetét *konvex poliédernek* nevezzük.

A poliédert előállító félterek egy ilyen rendszerét *definiáló rendszernek*, benne az affin féltereket *definiáló féltereknek* hívjuk. Ezek közül azokat, amelyek elhagyásával a poliéder pontjainak halmaza megváltozik (ez persze csak bővülés lehet),

lényegesnek nevezzük. Egy poliéder valamely definiáló rendszerét *minimálisnak* nevezünk, ha minden eleme lényeges.

Egy poliédert m -dimenziósnak mondunk, ha nem tartalmazza egyetlen $m - 1$ -dimenziós affin altér sem, de valamely m -dimenziós affin altér tartalmazza.

Egy konvex poliéder *belseje* a definiáló feltételeinek megfelelő nyílt feltételek metszete. ▲

A 0-, 1- és 2-dimenziós poliéderek rendre a pont, a szakasz, a félegyenes és az egyenes, továbbá a legalább három általános pontot tartalmazó poligonok.

Jegyezzük meg, hogy egy affin feltér maga is egy poliéder, és minimális definiáló rendszerek léteznek, mert bármely definiáló rendszerből elhagyva a nem lényeges affin feltételeket, végül csak lényeges feltételek maradnak.

Az alábbi tétel is teljes analógiát mutat a poligonokra már igazolt hasonló tartalmú állítással, az ottani bizonyítás adaptálása most is az olvasóra marad.

Tétel. *A n -dimenziós konvex poliéder metszete valamely öt definiáló rendszer lényeges definiáló feltérének határoló affin alterével $(n - 1)$ -dimenziós poliéder.*

Bármely konvex poliédernek pontosan egy minimális definiáló rendszere van.

Mivel a minimális definiáló rendszer egyértelmű, a lényeges definiáló feltételek is egyértelműen meghatározottak (ti. a minimális definiáló rendszer elemei).

Definíció. Egy k -dimenziós lényeges definiáló feltér határoló affin alterének a poliéderrel alkotott metszetét a konvex poliéder $(k - 1)$ -dimenziós *lapjának* nevezzük.

Egy n -dimenziós poliéder $(n - 1)$ -dimenziós lapjainak unióját a konvex poliéder *határának* nevezzük. A 0-dimenziós lapokat a konvex poliéder *csúcsának* mondjuk. ▲

Világos, hogy egy konvex poliéder határtól különböző része éppen a belseje.

Az n -dimenziós affin térben lévő n -dimenziós poliéder $(n - 1)$ -dimenziós lapjait a poliéder *hiperlapjának*, az $(n - 2)$ -dimenziós lapjait a poliéder *hiperélének* nevezzük.

A 3-dimenziós térben a tetraéder hiperlapjai tehát a lapjai, hiperélei pedig az élei.

Tétel. *Egy $\mathcal{P}$ konvex poliédernek egy Q pontja akkor és csak akkor nem csúcs, ha létezik olyan szakasz a $\mathcal{P}$ poliéderben, amely belső pontként tartalmazza a Q pontot.*

Bizonyítás. A $\mathcal{P}$ konvex poliéder n dimenziója szerinti indukcióval bizonyítunk.

Ha $n = 1$, akkor $\mathcal{P}$ egy egyenes, félegyenes, vagy szakasz, így ha P nem csúcs, akkor a $\mathcal{P}$ belső pontja, tehát teljesül az állítás.

Tegyük fel, hogy minden $k < n$ esetén teljesül az állítás, és $P \in \mathcal{P}$ nem csúcs.

Ha a P pontot egy $(n - 1)$ -dimenziós lap tartalmazza, akkor az indukciós feltétel miatt van olyan szakasz az $(n - 1)$ -dimenziós lapban, amely belső pontként tartalmazza a P pontot, így az állítás teljesül.

Ha a P pontot egyik $(n - 1)$ -dimenziós lap sem tartalmazza, akkor P a poliéder belső pontja, így bármely rajta áthaladó egyenesen van olyan őt tartalmazó nyílt szakasz, mely a poligon belsejében van.

Ezzel az állítás „akkor” részét igazoltuk.

A fordított állítás igazolásához, legyen a Q pont a $\mathcal{P}$ poliéderben lévő $\overline{PR}$ szakasz belső pontja.

Ha $n = 1$, akkor $\mathcal{P}$ egy egyenes, félegyenes, vagy szakasz, így ha P ebben lévő szakasz belső pontja, akkor nem csúcs, tehát teljesül az állítás.

Tegyük fel, hogy minden $k < n$ esetén teljesül az állítás.

Ha a $\overline{PR}$ szakaszt egy $(n - 1)$ -dimenziós lap tartalmazza, akkor az indukciós feltétel miatt Q nem csúcs, vagyis az állítás teljesül.

Ha a $\overline{PR}$ szakaszt egyik $(n - 1)$ -dimenziós lap sem tartalmazza, akkor egyik végpontja a poliéder belső pontja, amiért Q is belső pont, tehát nem csúcs. Ezzel a bizonyítás teljes. ■

Az alábbi tétel alapján a konvex politópok osztálya egybeesik a korlátos konvex poliéderek osztályával.

Tétel. *Minden korlátos konvex poliéder csúcsainak konvex burkaként áll elő.*

Bizonyítás. Legyen n a konvex poliéder dimenziója, és jegyezzük meg, hogy minden korlátos konvex poliéder minden lapja is korlátos, ezért léteznek csúcsok.

Jelölje $\mathcal{P}'$ a $\mathcal{P}$ korlátos konvex poliéder $\{P_i\}_{i=1}^m$ csúcspontjainak konvex burkát. Mivel a $\mathcal{P}$ konvex, ezért a $\mathcal{P}' = \text{conv}\{P_i\}_{i=1}^m \subseteq \mathcal{P}$ tartalmazás teljesül, így csak a $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$ tartalmazást kell a továbbiakban igazolnunk.

Tegyük fel, hogy van olyan $X \in \mathcal{P}$ pont, amelyre $X \notin \mathcal{P}'$ teljesül.

Az 5.3.1. Tétel bizonyítása alapján a $\mathcal{P}'$ politóp valamely $\mathcal{H}$ lényeges támaszhipersíkja olyan, hogy a $\mathcal{P}'$ politóp és az X pont a $\mathcal{H}$ különböző oldalára esik. Toljuk párhuzamosan a $\mathcal{H}$ támaszhipersíkot az X irányába, akár az X ponton túlra is mindaddig, amíg a $\mathcal{P}$ poliédert metszi, de tovább tolva már nem metszené. A $\mathcal{P}$ korlátossága miatt ilyen $\mathcal{H}'$ hipersík létezik. Legyen $\mathcal{P}^* = \mathcal{H}' \cap \mathcal{P}$. Ez nyilván korlátos konvex poliéder.

Ha a $\mathcal{P}^*$ valamely Y csúcsa a $\mathcal{P}$ poliéder belső pontja, akkor tartalmazza egy szakasz a $\mathcal{P}$ belsejében, amely

- (1) nem metszi a $\mathcal{H}'$ hipersíkot, hiszen a $\mathcal{P}$ poliéder teljes egészében az $\mathcal{H}'$ egyik zárt féltérében van, és
- (2) nem halad a $\mathcal{H}'$ hipersíkban, mert akkor Y nem lehetne a $\mathcal{P}^*$ csúcsa.

Eszerint $\mathcal{P}^*$ minden csúcsa a $\mathcal{P}$ poliédernek is csúcsa.

Ugyanakkor $\mathcal{H}'$ nem metszi a $\mathcal{P}'$ politópot, hiszen az a $\mathcal{H}$ támaszhipersík X pontot tartalmazó oldalán van, így a $\mathcal{H}'$ tartalmazza $\mathcal{P}$ néhány csúcsát, de nem metszi a $\mathcal{P}'$ politópot, vagyis a $\mathcal{P}$ ezen csúcsai nincsenek benne a $\mathcal{P}' = \text{conv}\{P_i\}_{i=1}^m$ konvex burookban. Ez az ellentmondás azt mutatja, hogy a feltételezett tulajdonságú X pont nem létezik, vagyis $X \in \mathcal{P}$ következtében $X \notin \mathcal{P}'$ is teljesül, amit bizonyítanunk kellett. ■

Tételünk azonnali következménye, hogy az affin térben a hipersíkok a konvex politópokból mindig konvex politópokat metszenek ki.

Végül bizonyítás nélkül közöljük Euler formuláját az általános esetben.

Tétel. (Euler) *Bármely n -dimenziós konvex politópra*

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \ell_i = 1,$$

ahol ℓ_i a konvex politóp i -dimenziós lapjainak száma.

Affin metrikák

Az **affin metrika** fogalmát már definiáltuk az **Euklidészi sík** fejezet elején. Ez a fejezet különféle affin metrikákat és azok egymáshoz való viszonyát tárgyalja. Mivel csak affin metrikák kerülnek szóba, az affin jelző általában elmarad. Rövidség kedvéért egy affin metrikával ellátott affin geometriát *metrikus affin geometriának* nevezzük. Két ilyen *izomorf*nak mondunk, ha létezik köztük olyan φ kollineáció, melyre

$$d(P, Q) = d(R, S) \iff d'(\varphi(P), \varphi(Q)) = d'(\varphi(R), \varphi(S)),$$

ahol d és d' a két metrikus affin geometrián adott metrika.

Fontos észrevétel, hogy egy d affin metrika esetén a háromszög-egyenlőtlenség miatt $d(D, C) \leq d(D, A) + d(A, B) + d(B, C)$, és $d(A, B) \leq d(A, D) + d(D, C) + d(C, B)$, amiért

$$|d(D, C) - d(A, B)| \leq d(A, D) + d(C, B), \quad (6.0.1)$$

vagyis a szakaszhoz a hosszát rendelő függvény folytonos a szakaszok végpontjainak távolságösszegére nézve.

Tétel. *Egy metrikus affin geometria minden egyenesén a távolság az egyenes valamely pontjától a ponthoz tartozó két félegyenes egyikén a pontok rendezettsége szerint szigorúan monoton növekvő, másikán szigorúan monoton fogyó függvény.*

Bizonyítás. Tekintsük az e egyenesen az O pont által a $\prec$ rendezés által meghatározott egy-egy félegyeneset. Legyen $O \prec P \prec Q$ az egyik, és $Q' \prec P' \prec O$ a másik félegyenesen. Ekkor P elválasztja az O és Q pontokat, így a metrika pozitivitása és additivitása miatt $d(O, P) < d(O, P) + d(P, Q) = d(O, Q)$. Ugyanakkor a P' elválasztja az O és Q' pontokat, így a metrika pozitivitása és additivitása miatt $d(O, P') < d(O, P') + d(P', Q') = d(O, Q')$. ■

Egy metrikát *Darboux-tulajdonságúnak* mondunk, ha tetszőleges nyílt $\overline{PR}$ szakasz esetén minden $\lambda \in (0, d(P, R))$ valós számhoz van olyan $Q \in \overline{PR}$ pont, melyre $d(P, Q) = \lambda$. Egy Darboux-tulajdonságú metrikát *Darboux-metrikának* nevezzük.

Tétel. *Darboux-metrikus affin geometriában minden nyílt $\overline{PS}$ szakaszon tetszőleges $\lambda \in (0, d(P, R))$ számhoz pontosan egy $Q \in \overline{PS}$ pont létezik, amelyre $\lambda = d(P, Q)$.*

Bizonyítás. A Darboux-tulajdonság miatt létezik olyan $Q \in \overline{PS}$ pont, melyre $\lambda = d(P, Q)$. Tegyük fel, hogy van egy másik $R \in \overline{PS}$ pontra is $\lambda = d(P, S)$. A metrika additivitása miatt ekkor $d(Q, S) = |d(Q, P) - d(S, P)| = 0$, amiből a metrika definitisége adja a tétel állítását. ■

Definíció. A rendezett, kollineáris, nem mind egybeeső P, Q, R ponthármas *metrikus osztóviszonyának* nevezzük azt a (nem feltétlenül létező) $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$ számot, amelyre $\lambda d(Q, R) = d(P, Q)$. Ennek jelölésére a $(PRQ)_d$ formát használjuk. ▲

A metrikus osztóviszony $R = Q$ esetén nem definiált, $R = P$ esetén 0. Darboux-metrikus affin geometriában a $(PR)_d: \overline{PR} \mapsto [0, \infty)$ leképezés bijektív, így létezik pontosan egy olyan F pont a $\overline{PR}$ szakaszon, melyre $d(P, F) = d(F, R)$. Ezt az F pont a $\overline{PR}$ szakasz *metrikus felezőpontja*.

Affin Darboux-metrika választásához természetes feltételek a következők:

- (1) a metrikus osztóviszony egyenlő az affin osztóviszony abszolút értékével,
- (2) az affin felezőpont megegyezik a metrikus felezőponttal,
- (3) a paralelogrammák szemközti oldalhosszai egyenlők (*Minkowski-tulajdonság*),
- (4) a paralelogrammák oldalhosszainak négyzetösszege egyenlő az átlóhosszainak négyzetösszegével (*paralelogramma azonosság*),
- (5) minden hipersíkhoz van olyan izometria, mely a hipersík minden pontját helyben hagyja, a két felterét viszont felcseréli (*tükrözéssel tulajdonság*).

Ki fog derülni, hogy az első három feltétel valamint az utolsó kettő ekvivalens.

6.1. Izometrikus leképezések

Definíció. Metrikus affin geometriák közt egy $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ leképezést *izometrikusnak* nevezzünk, ha megőrzi — vagy más szóval tartja — a pontok távolságát, vagyis minden $P, Q \in \mathcal{M}$ pontpárra $d(P, Q) = d'(\varphi(P), \varphi(Q))$ (d' a $\mathcal{M}'$ geometrián értelmezett metrika). Az izometrikus leképezéseket *izometriának* is nevezzük. ▲

Tétel. Az izometriák injektívek és szorzatuk is izometria.

Bizonyítás. Ha valamely $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ izometriára és P, Q pontokra, $\varphi(P) = \varphi(Q)$, akkor $0 = d'(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(P, Q)$ alapján a metrika definitisége miatt $P = Q$ következik, ami φ injektivitását igazolja.

Legyen ϕ a $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$, $\psi: \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}''$ izometriák szorzata, P és Q tetszőleges pontok a $\mathcal{M}$ geometriában, d , d' és d'' pedig a megfelelő geometriákon értelmezett metrika. Ekkor

$$d''(\phi(P), \phi(Q)) = d''(\psi(\varphi(P)), \psi(\varphi(Q))) = d'(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(P, Q)$$

igazolja, hogy izometriák szorzata is izometria. ■

Tétel. *Az izometriák tartják az egyenességet, szakaszt szakasz, félegyenest félegyenes, egyenest egyenes és síkot sík részhalmazába visznek.*

Bizonyítás. Legyen $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ egy izometria, d és d' pedig a megfelelő geometriákon értelmezett metrika.

Tekintsünk először egy $\overline{PR}$ szakaszt, és annak egy Q pontját. Ekkor a φ távolságtartása miatt a

$$d'(\varphi(P), \varphi(Q)) + d'(\varphi(Q), \varphi(R)) = d(P, Q) + d(Q, R) = d(P, R) = d'(\varphi(P), \varphi(R))$$

egyenlőséget kapjuk. A szigorú háromszög-egyenlőtlenség alkalmazásával ebből azt kapjuk, hogy a $\varphi(Q)$ pont az $\overline{\varphi(P)\varphi(R)}$ szakaszra esik, vagyis a φ tartja az egyenességet, és a $\overline{PR}$ szakasz képe a $\overline{\varphi(P)\varphi(R)}$ szakasz része.

Ha a P és R pontok közrefogják a Q pontot, akkor az $\varphi(P)$ és $\varphi(R)$ pontok közrefogják az $\varphi(Q)$ pontot. Ebből pedig nyilvánvalóan következik, hogy a P pontból kiinduló és a Q pontot is tartalmazó félegyenes a $\varphi(P)$ pontból kiinduló és a $\varphi(Q)$ pontot tartalmazó félegyenes részhalmazába képződik.

Mivel egy egyenes előáll mint bármely két pontjából kiinduló, egymást tartalmazó félegyenesek uniója, a fentiek értelmében egy egyenes képe része a két pontjának képe által meghatározott egyenesnek.

Mivel egy sík előáll két metsző egyenesének pontjait összekötő egyenesek uniójaként, és metsző egyenesek képeinek is van közös pontja, a fentiek értelmében egy sík képe két metsző egyenes képeinek pontjait összekötő egyenesek uniójának része. Mivel az egyenesek képei egyenesek részhalmazai, ebből következik a tétel utolsó állítása.

Ezzel a tételt teljesen igazoltuk. ■

Tétel. *Affin geometriák közti szűrjektív izometriák affinitások.*

Bizonyítás. Az izometriák injektívek, így tehát a szűrjektivitás következtében bijektívek. Fentiek szerint tartják az egyeneseket is, tehát kollineációk, ami éppen azt jelenti, hogy affinitások. ■

Azonnali következmény, hogy minden szűrjektív izometria tartja a párhuzamosságot, és az n -dimenziós affin térben meghatározott n általános helyzetű pont és azok képei által.

Darboux-metrikában, ha $Q' \in \overline{\varphi(P)\varphi(R)}$, akkor a pontok és távolságok szakaszon bizonyított bijektív kapcsolata következtében létezik olyan $Q \in \overline{PR}$, melyre $d(P, Q) = d'(\varphi(P), Q')$, és akkor a távolságtartás miatt $Q' = \varphi(Q)$ is teljesül. A φ tehát szűrjektív a $\overline{\varphi(P)\varphi(R)}$ szakaszra, vagyis a φ izometria tartja a szakaszt.

Tétel. Ha valamely Darboux-metrikus affin geometriában $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} d(O, P^\lambda)$, ahol $P_O^\lambda = \lambda P_O$, független az $O \neq P$ pontoktól, akkor minden izometrikus transzformációja affin.

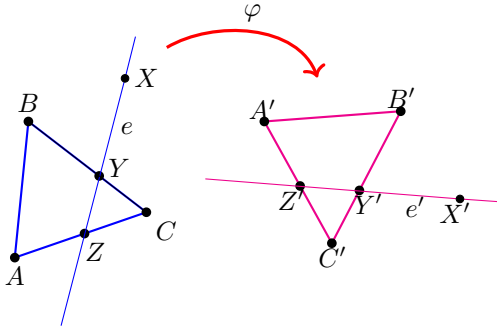
Bizonyítás. Legyen φ az $\mathcal{M}$ egy izometrikus transzformációja. Korábbi eredményeink miatt elegendő megmutatni, hogy φ szűrjektív.

Tekintsünk egy tetszőleges e egyenest, azon egy O pontot, az $e' = \varphi(e)$ egyenesen pedig az $O' = \varphi(O)$ és X' pontokat. Nyilván $d(O', X') < \bar{d}$, ezért létezik az e egyenes O által kijelölt mindkét félegyenesén pontosan egy olyan X_0 és X_1 pont, melyre $d(O, X_0) = d(O, X_1) = d(O', X')$. Az e' egyenes O' által kijelölt mindkét félegyenesén is pontosan egy olyan X'_0 és X'_1 pont létezik, melyre $d(O', X'_0) = d(O', X'_1) = d(O', X')$. Mivel φ izometrikus, ezekből

$$d(O', X'_0) = d(O', X'_1) = d(O', \varphi(X_0)) = d(O', \varphi(X_1))$$

következik. A d metrika definítsége és φ injektivitása miatt ez azt jelenti, hogy $X'_i = \varphi(X_i)$ vagy $X'_{1-i} = \varphi(X_i)$ ($i = 0, 1$), ami azt mutatja, hogy φ szűrjektív az egyeneseken.

Tekintsük most a síkon az A, B és C nem kollineáris pontokat, ezek $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$ és $C' = \varphi(C)$ képeit, valamint az X' pontot.



Vegyünk egy Y' pontot a $\overline{B'C'}$ szakaszon. A Pasch-axióma miatt ekkor az $e' = X'Y'$ egyenes metszeni fogja az $\overline{A'B'}$ vagy $\overline{A'C'}$ szakaszt valamely Z' pontban. Mi most az utóbbi esettel foglalkozunk, de a másik eset is ugyanígy kezelhető, hiszen csak a betűzés tér el.

Mivel φ izometria, nyilván $d(A', C') = d(A, C)$ és $d(B', C') = d(B, C)$, ezért a szakaszokra igazolt fentebbi tételünk szerint létezik pontosan egy olyan Z és Y pont rendre az $\overline{AC}$ és $\overline{BC}$ szakaszokon, hogy $d(A, Z) = d(A', Z')$ és $d(B, Y) = d(B', Y')$.

Mivel az egyeneseken a φ izometria bijektív, az $e = ZY$ egyenest bijektív módon képezi le az $e' = Z'Y' = \varphi(e)$ egyenesre, így létezik pontosan egy olyan X pont, melyre $X' = \varphi(X)$, ami igazolja a tétel állítását a sík esetében.

Az affin tér esetében négy általános helyzetű pontot és azok képeit felvéve, a síkra vezethetjük vissza az állítást, hiszen a tér minden pontja rajta van egy olyan síkon, mely a tetraédernek pontosan három élét metszi, és ezek a metszéspontok nem kollineárisak.

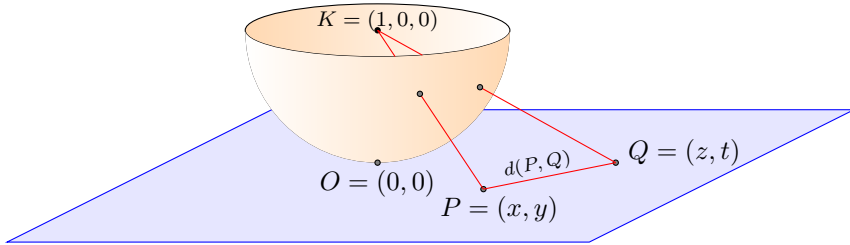
Általános affin geometria esetében ugyanez egy szimplexszel végezhető el. Ezzel az állítást teljes egészében bizonyítottuk. ■

6.2. Minkowski-metrikák

Egy affin Darboux-metrikát *Minkowski-metrikának* nevezünk, ha minden paralelogramma szemközti oldalhosszai egyenlőek. Nem minden Darboux-féle affin metrika Minkowski-féle. Például a valós affin síkon a gömbfelületről leképezett

$$d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \pi) \subset \mathbb{R} \quad ((x, y), (z, t)) \mapsto \arccos \left(\frac{1 + xz + yt}{\sqrt{1 + x^2 + y^2} \sqrt{1 + z^2 + t^2}} \right)$$

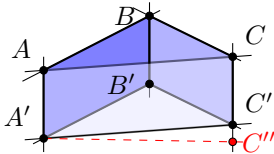
affin metrika¹ nem Minkowski-féle, mert $d((n, 0), (n + 1, 0))$ nem konstans, hanem szigorúan monoton módon nullához tart ha $\mathbb{N} \ni n \rightarrow \infty$.



Innentől ebben a szakaszban d végig Minkowski-metrikát jelöl.

Tétel. Ha egy affin síkon van egy Minkowski-féle metrika, akkor Desargues-tulajdonságú.

Bizonyítás. Azt kell belátnunk, hogy amennyiben egy affin síkon adott egy Minkowski-metrika akkor az a sík **nyitott könyv tulajdonságú**.



Tekintsük az $AA'B'B$ és $B'BCC'$ paralelogrammákat. A párhuzamosság tranzitivitása miatt $AA' \parallel CC'$, másrészt a d Minkowski-metrikában $d(A, A') = d(B, B') = d(C, C')$. Legyen a $C'' \in CC'$ pont olyan, hogy $A'ACC''$ paralelogramma, amiért $d(A, A') = d(C, C'')$.

Ha az ABC háromszög elfajul, akkor a párhuzamossági feltételek folytán $A'B'C'$ is elfajul, így $C' = C''$ és ezzel a tétel állítása igazolást nyer.

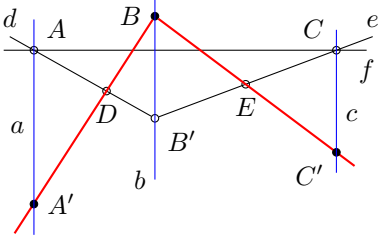
A továbbiakban feltételezzük, hogy az A , B és C pontok nem kollineárisak.

¹Ennek igazolása az olvasóra marad, de megjegyezzük, hogy a gömbi háromszögekre érvényes háromszög-egyenlőtlenség miatt ez teljesíti a háromszög-egyenlőtlenséget.

Ha $BB' \parallel AC$, akkor $AA' \parallel BB' \parallel AC$ és $CC' \parallel BB' \parallel AC$ miatt $AA'CC'$ minden pontja az AC egyenesre esik, és a feltétel éppen azt mondja, hogy ez egy elfajuló paralelogramma.

A továbbiakban feltételezzük, hogy BB' és AC nem párhuzamosak.

Legyen $f = AC$, $e = CB'$ és $d = B'A$, valamint $b = BB'$, $a = AA'$ és $c = CC'$. Mivel a paralelogramma átlói metszik egymást, léteznek a $D = \overline{BA'} \cap \overline{B'A}$ és a $E = \overline{BC'} \cap \overline{B'C}$ pontok. Most igazoljuk, hogy az A' és C' pontok f -partosak!



Jelölje $\mathcal{S}_f^{B'}$, $\mathcal{S}_e^A$ és $\mathcal{S}_d^C$ rendre a B' ponttal f -partos, az A ponttal e -partos és a C ponttal d -partos pontok félsíkjait, és legyen

$$\begin{aligned} a_+ &= a \cap \mathcal{S}_d^C, & a_- &= a \cap \mathcal{S}_f^{B'}, \\ b_+ &= b \cap \mathcal{S}_d^C = b \cap \mathcal{S}_e^A, & b_- &= b \setminus b_+, \\ c_+ &= c \cap \mathcal{S}_e^A, & c_- &= c \cap \mathcal{S}_f^{B'}, \end{aligned}$$

ahol $a_\pm$, $b_\pm$ és $c_\pm$ az a , b és c félegyenesei. Esze-

rint

$$\begin{aligned} B \in b_+ &\Rightarrow \begin{cases} B \in \mathcal{S}_d^C \Rightarrow A' \notin \mathcal{S}_d^C \Rightarrow A' \in a_- \Rightarrow A' \in \mathcal{S}_f^{B'}, \\ B \in \mathcal{S}_e^A \Rightarrow C' \notin \mathcal{S}_e^A \Rightarrow C' \in c_- \Rightarrow C' \in \mathcal{S}_f^{B'}, \end{cases} \\ B \in b_- &\Rightarrow \begin{cases} B \notin \mathcal{S}_d^C \Rightarrow A' \in \mathcal{S}_d^C \Rightarrow A' \in a_+ \Rightarrow A' \notin \mathcal{S}_f^{B'}, \\ B \notin \mathcal{S}_e^A \Rightarrow C' \in \mathcal{S}_e^A \Rightarrow C' \in c_+ \Rightarrow C' \notin \mathcal{S}_f^{B'}, \end{cases} \end{aligned}$$

vagyis A' és C' pontok f -partosak.

Ugyanakkor A' és C'' is partosak az AC egyenesre nézve, hiszen a paralelogramma szemközti oldalai nem metszik egymást.

Eszerint $C \notin \overline{C'C''}$ és $d(C, C') = d(A, A') = d(C, C'')$ is teljesül, így a metrika definitésége miatt C' és C'' egybeesik, tehát $A'ACC'$ paralelogramma, ami igazolja a nyitott könyv tételének állítását. ■

Ha $(P, Q) \mathcal{L} (R, S)$, akkor a d Minkowski-metrika definíciója szerint $d(P, Q) = d(R, S)$ teljesül, ami azt jelenti, hogy a $|\cdot| : \overrightarrow{PQ} \mapsto d(P, Q)$ függvény jól definiált.

Tétel. *A d Minkowski-metrikából a vektorokon definiált $|\cdot|$ függvényre teljesül, hogy*

- (0) *minden $\mathbf{v}$ szabad vektor esetén $0 \leq |\mathbf{v}|$, és $0 = |\mathbf{v}|$ esetén $\mathbf{v} = \mathbf{0}$,*
- (1) *minden $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ szabad vektorra $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$, és*
- (2) *minden $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{v}$ szabad vektor esetén $|\lambda \mathbf{v}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{v}|$,*
- (3) *minden $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ szabad vektorra $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$, akkor és csak akkor, ha $\lambda \mathbf{u} = \mathbf{v}$ valamely $\lambda \geq 0$ számra vagy $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{OR}$ és $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{OQ}$.

A (0) állítás a definícióból nyilvánvaló.

(1) Mivel a d metrika szubadditív, és az O, P, Q, R paralelogrammán is teljesül a Minkowski-tulajdonság, $d(O, Q) \leq d(O, P) + d(P, Q) = d(O, P) + d(O, R)$ adódik, amiből $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$, ahogy vártuk.

(3) Ha $\lambda \mathbf{u} = \mathbf{v}$ valamely $\lambda \geq 0$ számra, akkor $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (1 + \lambda)\mathbf{u}$, amiért $P \in \overline{OQ}$ és így az affin metrika additivitása és Minkowski-tulajdonsága miatt $d(O, Q) = d(O, P) + d(P, Q) = d(O, P) + d(O, R)$ adódik, amiből $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$, ahogy vártuk.

Ha $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$, akkor a metrika Minkowski-tulajdonsága miatt $d(O, Q) = d(O, P) + d(O, R) = d(O, P) + d(P, Q)$, amiért a távolság additivitása miatt $P \in \overline{OQ}$, vagyis valamely $\mu \geq 1$ valós számra $\overline{OQ} = \mu \overline{OP}$, vagy $O = P$. Eszerint $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mu \mathbf{u}$, amiért $\mathbf{v} = (\mu - 1)\mathbf{u}$, vagy $\mathbf{u} = 0$, ahogy az állításban van.

(2) Ha $x < y$ pozitív valós számok, akkor a metrika additivitása és pozitivitása miatt $|x\mathbf{u}| < |x\mathbf{u}| + |(y - x)\mathbf{u}| = |y\mathbf{u}|$ teljesül, vagyis a nem negatív valós számokon értelmezett $x \mapsto |x\mathbf{u}|$ függvény nem csak additív, de monoton is. A Függelék F.10. Tétele szerint ez azt jelenti, hogy a nem negatív x valós számokra $|x\mathbf{u}| = x|\mathbf{u}|$. Ugyanakkor a metrika szimmetriája miatt

$$|\mathbf{u}| = d(O, P) = d(P, O) = |-\mathbf{u}| = |(-1) \cdot \mathbf{u}|,$$

amiért a fentiből $|x\mathbf{v}| = |x| \cdot |\mathbf{v}|$ következik minden $x \in \mathbb{R}$ számra. ■

Eszerint a szabad vektorok vektorterén értelmezett $|\cdot|$ függvény a vektorterek megszokott, és a kényelem kedvéért a Függelék F.3. szakaszában is vizsgált, *norma*. A (0), (1), (2) és (3) tulajdonságok rendre a norma pozitív definitisége, szubadditivitása (háromszög-egyenlőtlenség), homogenitása és additivitása. Előbbi tételünknel kicsit tovább léphetünk.

Tétel. *A d affin metrika akkor és csak akkor Minkowski-féle, ha a vektorok terén van olyan $|\cdot|: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_{0\leq}$ norma, melyre $|\overrightarrow{PQ}| = d(P, Q)$ minden (P, Q) pontpárra.*

Bizonyítás. Előbbi tételünk fényében csak azt kell belátnunk, hogy amennyiben a $\mathcal{V}$ normált vektortér egy $|\cdot|$ normájával adunk meg az affin geometria pontpárjain egy $d: (P, Q) = |\overrightarrow{PQ}|$ függvényt, akkor az Minkowski-féle affin metrika.

A norma definitisége és szimmetriája miatt nyilvánvaló, hogy $d(P, Q) = 0$ esetén $P = Q$ teljesül, valamint $d(P, Q) = d(Q, P)$ is érvényes.

A norma szubadditivitása miatt

$$d(P, Q) + d(Q, R) = |\overrightarrow{PQ}| + |\overrightarrow{QR}| \geq |\overrightarrow{PR}| = d(P, R),$$

ami igazolja a háromszög-egyenlőtlenséget.

Ha a különböző P , Q és R pontokra $d(P, Q) + d(Q, R) = d(P, R)$, akkor $|\overrightarrow{PQ}| + |\overrightarrow{QR}| = |\overrightarrow{PR}|$, így a norma additivitása miatt a $\overrightarrow{QP}$ és $\overrightarrow{RQ}$ szabad vektorok egymás nemnegatív valóssal vett többszörösei, amiért Q a $\overline{PR}$ szakaszra esik, ami d additivitását igazolja.

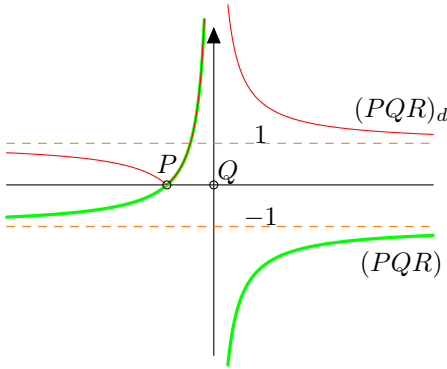
Ha $PQRS$ egy paralelogramma, átlóinak metszéspontja pedig T , akkor

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{KQ} - \overrightarrow{KP}| = |-\overrightarrow{KS} + \overrightarrow{KR}| = |\overrightarrow{RS}| = d(R, S),$$

ami igazolja a Minkowski-tulajdonságot. Ezzel a tételt beláttuk. ■

Jegyezzük meg, hogy a Minkowski-metrikából levezetett normából levezetett metrika megegyezik az eredetivel.

A szabad vektorok tere és bármely helyvektortér —mondjuk $T_O\mathfrak{A}$ — közötti $\overrightarrow{OP} \mapsto P_O$ kanonikus izomorfia a $|\cdot|$ normát is átviszi a $T_O\mathfrak{A}$ egy normájába, Eszerint a helyvektorterek közötti $P_O \mapsto (\overrightarrow{OP})_Q$ kanonikus izomorfia is normatartó, ezért innentől nem különböztetjük meg, hogy egy normát a szabad vektorok terén, vagy valamely helyvektortéren használunk.

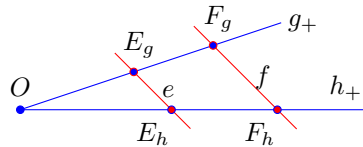


Rendezett, kollineáris, nem mind egybeeső P, Q, R ponthármasokra $(PRQ)_d := \frac{d(P, Q)}{d(Q, R)}$ a *metrikus osztóviszony*. Mint-hogy az affin osztóviszonyra $(PRQ)\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PQ}$, azonnal kapjuk, hogy $(PRQ)_d = |(\overrightarrow{PRQ})|$, vagyis Minkowski-metrika esetén a metrikus osztóviszony értéke éppen az affin osztóviszony abszolút értéke. Ez indokolja, hogy a PR egyenes ∞ ideális pontjára élünk a metrikus osztóviszony $(PR\infty)_d = 1$ kiterjesztésével.

Ennek megfelelően általánosíthatjuk a párhuzamos szelők tételének az euklideszi sík esetén már igazolt **metrikus változatát**.

Párhuzamos szelők tétele. Legyenek g_+ és h_+ közös O kezdőpontú nyílt félegyenesek, d pedig egy Minkowski-metrika. Messék az O ponton nem átmenő e és f egyenesek a g_+ és h_+ félegyeneseket az E_g és F_g , illetve E_h és F_h pontokban. Az e és f egyenesek akkor és csak akkor párhuzamosak, ha

$$\frac{d(O, F)}{d(O, E)} = \frac{d(O, F_h)}{d(O, E_h)} = \frac{d(F, F_h)}{d(E, E_h)}.$$



Tétel. Egy $\mathfrak{A}$ affin geometrián adott d affin metrika akkor és csak akkor Minkowski-féle, ha $d(Q, R)|(PRQ)| = d(P, Q)$ minden kollineáris $P, Q \neq R$ ponthármásra.

Bizonyítás. Minkowski-metrika esetén már láttuk, hogy $|(PRQ)| = (PRQ)_d$, így itt csak ennek fordítottját igazoljuk.

Legyen $R \neq O$ és $Q = X_O(\lambda, R)$.

Ha $\lambda > 1$, akkor R elválasztja az O és Q pontokat, amiért $(ORQ) < 0$, vagyis

$$\frac{\lambda}{\lambda - 1} = -(ORQ) = \frac{d(O, Q)}{d(Q, R)} = 1 + \frac{d(O, R)}{d(Q, R)},$$

tehát

$$d(Q, O) = d(Q, R) + d(R, O) = \frac{1}{\frac{\lambda}{\lambda-1} - 1} d(O, R) + d(R, O) = \lambda d(O, R).$$

Ha $\lambda < 0$, akkor O elválasztja az R és Q pontokat, amiért $(ORQ) < 0$, vagyis

$$\frac{\lambda}{\lambda - 1} = -(ORQ) = \frac{d(O, Q)}{d(Q, R)} = 1 - \frac{d(O, R)}{d(Q, R)},$$

tehát

$$d(Q, O) = d(Q, R) - d(R, O) = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\lambda-1}} d(O, R) - d(R, O) = -\lambda d(O, R).$$

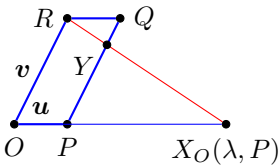
Ha $0 < \lambda < 1$, akkor $Q \in \overline{RO}$, amiért $(ORQ) > 0$, vagyis

$$\frac{\lambda}{1 - \lambda} = (ORQ) = \frac{d(O, Q)}{d(Q, R)} = \frac{d(O, R)}{d(Q, R)} - 1,$$

tehát

$$d(Q, O) = d(O, R) - d(R, Q) = d(O, R) - \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{1-\lambda}} d(O, R) = \lambda d(O, R).$$

Eszерint minden $\lambda \in \mathbb{R}$ számra $d(X_O(\lambda, R), O) = |\lambda| d(O, R)$.



Tekintsünk egy $OPQR$ paralelogrammát, annak OP oldalegyenesén az $X = X_O(\lambda, P)$ pontot, ahol $\lambda \geq 0$ valós, és legyen $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}$ és $\mathbf{v} = \overrightarrow{OR}$. Ekkor $\mathbf{x} := \overrightarrow{OX} = \lambda \mathbf{u}$, valamint $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{OQ}$.

Legyen Y az a pont, melyre $\mathbf{y} := \overrightarrow{OY} = \mathbf{u} + \frac{\lambda-1}{\lambda} \mathbf{v}$. Ekkor $Y \in \overline{XR} \cap \overline{PQ}$ és $Y \rightarrow Q$ ha $\lambda \rightarrow \infty$, hiszen

$$\frac{\lambda-1}{\lambda} \overrightarrow{XR} = \frac{\lambda-1}{\lambda} (\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OR}) = \overrightarrow{XP} + \overrightarrow{PY} = \overrightarrow{XY}.$$

A párhuzamos szelők tétele szerint $(XYR) = (XPO) = \lambda$, a háromszög-egyenlőtlenségből pedig $|d(O, X) - d(R, X)| \leq d(O, R)$ következik. Eszerint

$$\frac{d(Y, R)}{d(P, O)} = \frac{d(Y, R)\lambda}{d(P, O)\lambda} = \frac{d(Y, R)(XYR)}{d(P, O)(XPO)} = \frac{d(X, R)}{d(X, O)},$$

amiért

$$\left| \frac{d(Y, R)}{d(P, O)} - 1 \right| = \left| \frac{d(X, R)}{d(X, O)} - 1 \right| = \frac{|d(X, R) - d(X, O)|}{d(X, O)} \leq \frac{d(O, R)}{d(X, O)} = \frac{d(O, R)}{d(P, O)} \frac{1}{\lambda},$$

amit a $\lambda \rightarrow \infty$ határátmenettel alkalmazva

$$d(Q, R) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} d(Y, R) = d(P, O) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{d(Y, R)}{d(P, O)} = d(P, O)$$

adódik. Tehát a paralelogrammák szemközti oldalai egyforma hosszúak, vagyis d egy Minkowski-metrika. ■

Tételünk tovább élesíthető.

6.2.1. Tétel. *Egy d metrika akkor és csak akkor Minkowski-féle, ha $(PRQ) = 1$ esetén $d(P, Q) = d(Q, R)$ minden kollineáris P, Q, R ponthármasra.*

Bizonyítás. A „csak akkor” irányú állítás nyilvánvaló.

A fordított, „akkor” irányú állítás bizonyításához tekintsünk két különböző O és P pontot és az

$$f_{O,P}(\lambda) := \frac{d(O, X_O(\lambda, P))}{d(O, P)}$$

függvényt. Világos, hogy $f_{O,P}(0) = 0$, és $f_{O,P}(1) = 1$.

Mivel $(OX_O(2, P)P) = 1$, a feltétel szerint $d(O, P) = d(P, X_O(2, P))$, amiért $f_{O,P}(2) = 2$, és teljes indukcióval a metrika additivitására építve ugyanígy belátható minden természetes $k \in \mathbb{N}$ számra, hogy $f_{O,P}(k) = k$.

Mivel $(X_O(-1, P)PO) = 1$, a feltétel szerint $d(X_O(-1, P), O) = d(O, P)$, amiért $f_{O,P}(-1) = 1$, és így megint teljes indukcióval a metrika additivitásán át minden természetes $k \in \mathbb{N}$ számra adódik, hogy $f_{O,P}(-k) = k$.

Ha $\varrho = m/n$, akkor

$$\begin{aligned} f_{O,P}(\varrho) &= \frac{d(O, X_O(\frac{m}{n}, P))}{d(O, P)} = \frac{d(O, X_O(m, X_O(\frac{1}{n}, P)))}{d(O, X_O(\frac{1}{n}, P))} \frac{d(O, X_O(\frac{1}{n}, P))}{d(O, X_O(n, X_O(\frac{1}{n}, P)))} \\ &= \frac{f_{O, X_O(\frac{1}{n}, P)}(m)}{f_{O, X_O(\frac{1}{n}, P)}(n)} = \frac{m}{n}. \end{aligned}$$

Minthogy $f_{O,P}$ a pozitív valós számokon a metrika additivitása miatt szigorúan monoton növekvő, és minden r racionális számra $f_{O,P}(r) = r$, a rendőrelv szerint $f_{O,P}(x) = x$ minden pozitív valós számra. Minthogy $f_{O,P}$ a negatív valós számokon a metrika additivitása miatt szigorúan monoton fogyó, és minden r racionális számra $f_{O,P}(r) = r$, a rendőrelv szerint $f_{O,P}(y) = -y$ következik minden negatív valós számra. Tehát $f_{O,P}(z) = |z|$.

Ha most P , Q és R kollineáris pontok, akkor pontosan egy $\lambda \in \mathbb{R}$ számra $P = X_Q(\lambda, R)$, és így

$$\frac{d(P, Q)}{d(Q, R)} = \frac{d(Q, X_Q(\lambda, R))}{d(Q, R)} = f_{Q,R}(\lambda) = |\lambda| = |(X_Q(\lambda, R)RQ)| = |(PRQ)|.$$

Ebből pedig előző tételünk alapján következik e tétel állítása. ■

Eredményünk úgy is fogalmazható, hogy egy affin metrika akkor és csak akkor Minkowski-féle, ha bármely szakasz affin felezőpontja megegyezik a metrikus felezőpontjával.

Tétel. Egy $\mathfrak{A}$ Minkowski-metrikus affin geometriában egy egyenességet tartó leképezés akkor és csak akkor affinitás, ha tartja a metrikus osztóviszonyt, és van $1 + \dim \mathfrak{A}$ számú általános helyzetű pont, melyek képe is általános helyzetű.

Mivel az affinitások tartják az osztóviszonyt, e tétel állításának „akkor” iránya nyilván teljesül. A „csak akkor” irány bizonyítása viszont pontosan úgy történik, mint az euklidészi esetnél a 2.1.2. Tételben.

Legyen φ egy affinitás. Az osztóviszony tartását kifejező $(PQR) = (\varphi(P)\varphi(Q)\varphi(R))$ és $(SRQ) = (\varphi(S)\varphi(R)\varphi(Q))$ azonosságokat a

$$\frac{d(\varphi(P), \varphi(R))}{d(P, R)} = \frac{d(\varphi(R), \varphi(Q))}{d(R, Q)} = \frac{d(\varphi(S), \varphi(Q))}{d(S, Q)}$$

formába alakítva, az adódik, hogy minden e egyenesen van egy olyan $\lambda_e \in \mathbb{R}$ szám, melyre $0 < \lambda_e = d(\varphi(P), \varphi(R))/d(P, R)$ minden $P, R \in e$ pontpárra. A φ affinitás $\hat{\varphi}$ lineáris összetevőjét és a normát használva, azt kapjuk, hogy

$$\lambda_e = \frac{d(\varphi(P), \varphi(R))}{d(P, R)} = \frac{|\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(R)}|}{|\overrightarrow{PR}|} = \frac{|\hat{\varphi}(\overrightarrow{PR})|}{|\overrightarrow{PR}|} = \left| \hat{\varphi}\left(\frac{1}{|\overrightarrow{PR}|}\overrightarrow{PR}\right) \right|.$$

Eszerint λ_e valójában csak az e egyenes egységnyi irányvektorától függ, és emiatt úgy tekinthető, mint egy szimmetrikus $\tilde{\varphi}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvény az $\mathcal{I}$ indikátrix $\partial\mathcal{I}$ határán, amelyre $\tilde{\varphi}(\mathbf{u}) = |\hat{\varphi}(\mathbf{u})|$.

6.2.2. Tétel. Minkowski-metrikus affin geometriában a φ_1 és φ_2 affinitásokra $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_2$ akkor és csak akkor, ha $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ izometria.

Bizonyítás. ($\Leftarrow$) Ha $\iota = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ izometria, akkor minden $\mathbf{u} \in \partial\mathcal{I}$ vektorra

$$\tilde{\varphi}_2(\mathbf{u}) = |\hat{\varphi}_2(\mathbf{u})| = |\hat{\iota} \circ \hat{\varphi}_2(\mathbf{u})| = |\hat{\varphi}_1(\mathbf{u})| = \tilde{\varphi}_1(\mathbf{u}),$$

ahogy a tétel állítja.

($\Rightarrow$) Ha $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_2$ és $\psi = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$, akkor minden $\mathbf{u} \in \partial\mathcal{I}$ vektorra

$$|\hat{\varphi}_2(\mathbf{u})| = \tilde{\varphi}_2(\mathbf{u}) = \tilde{\varphi}_1(\mathbf{u}) = |\hat{\varphi}_1(\mathbf{u})| = |\hat{\psi}(\hat{\varphi}_2(\mathbf{u}))|,$$

vagyis $1 = |\hat{\psi}(\varphi_2(\mathbf{u})/|\hat{\varphi}_2(\mathbf{u})|)$. Elég tehát belátni, hogy a $\check{\varphi}_2: \mathbf{u} \mapsto \varphi_2(\mathbf{u})/|\hat{\varphi}_2(\mathbf{u})|$ leképezés bijektív az indikátor $\partial\mathcal{I}$ határán, mert az azt jelenti, hogy $\hat{\psi}$ tartja a normát, vagyis ψ izometria.

Injektivitás. Ha $\check{\varphi}(\mathbf{u}_1) = \check{\varphi}(\mathbf{u}_2)$, akkor $\hat{\varphi}(\mathbf{u}_1)\tilde{\varphi}(\mathbf{u}_2) = \tilde{\varphi}(\mathbf{u}_1)\hat{\varphi}(\mathbf{u}_2)$, amiért $\hat{\varphi}(\tilde{\varphi}(\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_1 - \tilde{\varphi}(\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_2) = 0$, amiből $\hat{\varphi}$ bijektivitása miatt $\tilde{\varphi}(\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_1 = \tilde{\varphi}(\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_2$ következik. Mivel $\mathbf{u}_1$ és $\mathbf{u}_2$ az indikátor határán vannak, annak szigorú konvexitása és $\tilde{\varphi}$ pozitivitása miatt $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ adódik.

Szürjektivitás. Legyen $\mathbf{v} \in \partial\mathcal{I}$ tetszőleges, $\nu = |\hat{\varphi}^{-1}(\mathbf{v})|$, és legyen $\mathbf{u} \in \partial\mathcal{I}$ olyan, hogy $\nu\mathbf{u} = \hat{\varphi}^{-1}(\mathbf{v})$. Ekkor

$$\check{\varphi}(\mathbf{u}) = \frac{\hat{\varphi}(\hat{\varphi}^{-1}(\mathbf{v})/\nu)}{\tilde{\varphi}(\hat{\varphi}^{-1}(\mathbf{v})/\nu)} = \frac{\mathbf{v}}{\nu|\hat{\varphi}(\hat{\varphi}^{-1}(\mathbf{v})/\nu)|} = \mathbf{v}.$$

Ezzel a tételt beláttuk. ■

Jegyezzük meg, hogy

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi^{-1}(\check{\varphi}(\mathbf{u}))}\tilde{\varphi}(\mathbf{u}) &= |\widehat{\varphi^{-1}(\check{\varphi}(\mathbf{u}))}|\tilde{\varphi}(\mathbf{u}) = |\widehat{\varphi^{-1}} \circ \hat{\varphi}(\mathbf{u})| \\ &= |\widehat{\varphi^{-1} \circ \varphi}(\mathbf{u})| = \widetilde{\varphi^{-1} \circ \varphi}(\mathbf{u}) = 1. \end{aligned}$$

Definíció. A $\mathcal{G}_{d,O} = \{P : d(O, P) \leq 1\}$ ponthalmazt a d Minkowski-metrikus affin tér O középpontú *egységömbjének*, sík esetében *egységkörlapjának* nevezzük.

A $\partial\mathcal{G}_{d,O} = \{P : d(O, P) = 1\}$ ponthalmazt *egységömbfelületnek*, sík esetén *egységkörnek* nevezzük.

Az egységömb, illetve egységkörlap belsejének hívjuk azon pontjaik halmazát, melyek nem tartoznak a $\partial\mathcal{G}_{d,O}$ halmazba. ▲

A d metrikában az O középponttól legfeljebb r távolságra lévő pontok $\mathcal{G}_{d,O}(r)$ halmazát O középpontú *gömbnek*, illetve sík esetén *körlapnak* nevezzük. Ha $r = 1$, akkor $\mathcal{G}_{d,O}$ *egységömb*ről beszélünk. A $\mathcal{G}_{d,O}(r)$ gömb azon pontjait, melyekre $d(O, P) < r$, *belső pontoknak*, a többi *határpontnak* nevezzük. A $\mathcal{G}_{d,O}(r)$ gömbhöz nem tartozó pontokat *külsőnek* mondjuk.

Tétel. A $\mathcal{G}_{d,O}$ egységgömb olyan, hogy

- (0) elemeiből kiválasztható az O ponton kívül $\dim \mathfrak{A}$ számú olyan pont, hogy ezek az O ponttal együtt általános helyzetűek,
- (1) korlátos,
- (2) szimmetrikus az O pontra, és
- (3) szigorúan konvex.

Bizonyítás. A (0) és (1) állítások nyilvánvalóak.

A (2) állításban a szimmetriához azt kell látni, hogy $\mathcal{G}_{d,O}$ invariáns az O pontra vonatkozó τ_O affin tükrözésre. Ez következik abból, hogy tetszőleges P és Q pontok esetén az $PQ\tau_O(P)\tau_O(Q)$ egy paralelogramma.

A (3) állításhoz azt kell igazolni, hogy ha egy szakasz két végpontja az egységgömb határán van, akkor belső pontjai az egységgömb belsejébe esnek. Ha $Q \in \overline{PR}$, akkor van olyan $\lambda \in (0,1)$ szám, melyre $Q_O = \lambda P_O + (1 - \lambda)R_O$. Ha a P, R pontok az egységgömb határán vannak, és $R \notin OP$, akkor ebből $d(O, Q) = |Q_O| = |\lambda P_O + (1 - \lambda)R_O| < \lambda|P_O| + (1 - \lambda)|R_O| = 1$ következik, ami bizonyítja az állítást. ■

Definíció. Egy $\mathcal{G}$ ponthalmazt *gömbszerűnek* nevezünk, ha szigorúan konvex, korlátos, szimmetrikus valamely O pontra, és elemeiből kiválasztható $\dim \mathfrak{A}$ számú pont úgy, hogy ezek az O középponttal együtt általános helyzetben vannak. ▲

A $\mathcal{G}$ gömbszerű ponthalmaz középpontján áthaladó egyenesek által a $\mathcal{G}$ ponthalmazból kimetszett szakaszokat *átmérőnek* hívjuk.

Tétel. Minden gömbszerű $\mathcal{G}$ ponthalmazhoz kanonikusan létezik pontosan egy olyan Minkowski-metrika, melynek $\mathcal{G}$ az egységgömbje (egységkörlapja).

Bizonyítás. Legyen O a gömbszerű $\mathcal{G}$ ponthalmaz középpontja, és definiáljuk az $\mathcal{I}_{\mathcal{G}} = \{P_O : P \in \mathcal{G}\}$ vektorhalmazt az O origójú helyvektortérben. Mivel $\mathcal{G}$ gömbszerű, az $\mathcal{I}_{\mathcal{G}}$ egy indikátrix az O origójú helyvektortérben, amiért a Függelék F.5 szakaszában leírtak szerint létezik pontosan egy olyan $|\cdot|$ norma, melynek $\mathcal{I}_{\mathcal{G}}$ az indikátora. Az ebből a normából levezethető d Minkowski-metrika olyan, hogy $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{d,O}$, hiszen $P \in \mathcal{G}_{d,O}$ esetén $1 \geq d(O, P) = |P_O|$, amiért $P_O \in \mathcal{I}_{\mathcal{G}}$, vagyis $P \in \mathcal{G}$, továbbá minden $P \in \mathcal{G}$ pontra $P_O \in \mathcal{I}_{\mathcal{G}}$, amiért $1 \geq |P_O| = d(O, P)$, vagyis $P \in \mathcal{G}_{d,O}$. ■

Mivel $d(O, P) = 1$ megegyezik a $|P_O|^2 = 1$ egyenlőséggel, egy gömbszerű $\mathcal{G}$ ponthalmaz határa a valós affin síkon egy négyzetesen homogén $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{0\leq}$ függvény $f(P) = 1$ szintgörbéje. Ha f egy polinom, akkor eszerint legalább másodfokú, amiért $\partial \mathcal{G}$ egy másodrendű görbe. Világos, hogy ezek közül egyedül az ellipszis felel meg a gömbszerűség követelményének, így azt mondhatjuk, hogy az affin síkon az euklidészi a legegyszerűbb Minkowski-metrika.

Más gömbszerű ponthalmazok is vannak. A síkon például minden $k \in \mathbb{N}$ számra gömbszerű ponthalmazt ad az $f(x, y) = x^{2k} + y^{2k}$ függvény is, hiszen az x^{2k} valós függvény alulról nézve konvex. Ha $k > 2$, akkor az ezzel definiált Minkowski-sík nem izomorf az euklidészivel, hiszen utóbbi egységköre minden koordinátázásban ellipszis, de az $1 = x^{2k} + y^{2k}$ egyenlettel megadott egységkör nem ellipszis.

6.3. Euklidészi metrika

Egy n -dimenziós affin geometriában egy $\mathcal{E}$ ponthalmazt *ellipszoidnak* nevezünk, ha valamely φ koordinátázásban $\mathcal{E} = \{\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}$. A $\partial\mathcal{E} = \{\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$ halmazt az ellipszoid határának mondjuk.

6.3.1. Tétel. *Egy n -dimenziós affin geometrián ($n \in \mathbb{N}$) adott kétváltozós d függvényre az alábbiak ekvivalensek.*

(1) *Van olyan φ koordinátázás, melyre*

$$d^2(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n), \varphi^{-1}(y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2$$

minden $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ koordinátára;

(2) *Darboux-metrika, mely minden $ABCD$ paralelogrammára teljesíti a*

$$d^2(A, B) + d^2(B, C) + d^2(C, D) + d^2(D, A) = d^2(A, C) + d^2(B, D)$$

paralelogramma-azonosságot;

(3) *Minkowski-metrika, melynek egységgömbje ellipszoid;*

Bizonyítás. Sorban bizonyítjuk az egyes állítások közötti következtetéseket.

(1) $\Rightarrow$ (2) Ahogy a síknál és a térnél már láttuk, annak bizonyítása, hogy d affin metrika nem más mint a **Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség** alkalmazása. A paralelogramma-azonosság igazolása is ugyanúgy megy, ahogy a síkon, ezért ezek az olvasóra maradnak.

(2) $\Rightarrow$ (3) Először igazoljuk, hogy a metrika Minkowski-féle. Ehhez a 6.2.1. Tétel szerint elegendő belátni, hogy a metrikus és affin felezőpontok egybeesnek. Ehhez elég látni, hogy bármely nem elfajuló paralelogramma átlóinak metszéspontja a szemközti csúcsoktól egyforma távolságra van.

Legyen O a nem elfajuló $ABCD$ paralelogramma átlóinak metszéspontja. Az AC egyenesen vegyük az $X_O(\lambda, A)$ és $X_O(\lambda, C)$ pontokat, ahol $0 < \lambda < 1$. Világos, hogy az $X_O(\lambda, A)BX_O(\lambda, C)D$ négyszög is paralelogramma minden λ esetén.

Mínhogy $d(X_O(\lambda, A), O)$ a λ szigorúan monoton nem negatív függvénye a pozitív valós számokon, létezik a $c = \lim_{\lambda \searrow 0} d(X_O(\lambda, A), O) \geq 0$ szám. A c nem

lehet pozitív, mert akkor a $c/2$ értékhez nem létezne olyan P pont a nyílt $\overline{OA}$ szakaszon, melyre $d(O, P) = c$, holott ilyennek lennie kell a $c/2 \in (0, d(O, A))$ és a Darboux-tulajdonság miatt. Tehát $\lim_{\lambda \searrow 0} d(X_O(\lambda, A), O) = 0$. Eszerint a

$$\begin{aligned} d^2(B, X_O(\lambda, A)) + d^2(B, X_O(\lambda, C)) + d^2(D, X_O(\lambda, A)) + d^2(D, X_O(\lambda, C)) \\ = d^2(B, D) + d^2(X_O(\lambda, A), X_O(\lambda, C)) \end{aligned}$$

paralelogramma-azonosság a (6.0.1) alapján a $\lambda \rightarrow 0$ határátmenettel a

$$2d^2(B, O) + 2d^2(D, O) = d^2(B, D) + d^2(O, O) = d^2(B, D)$$

egyenletre vezet. Viszont a metrika additivitása miatt $d(B, D) = d(B, O) + d(O, D)$, így $d(B, O) = d(O, D)$ következik, ami bizonyítja hogy a paralelogrammák átlói metrikusan is felezik egymást, vagyis a metrika Minkowski-féle

Mivel a metrika Minkowski-féle, levezethető belőle egy $|\cdot|$ norma, mely minden $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorra teljesíti a $2(|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2) = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2$ *paralelogramma-azonosságot*. Defináljuk ezzel a $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést úgy, hogy

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \frac{1}{4}(|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2).$$

Most igazoljuk, hogy ez **Euklidészi szorzás**.

A szimmetria és a pozitív definitiség a definiáló formulából triviális. A linearitást a szimmetria miatt elegendő az első változóra megmutatni. A **Függelék F.10** szakasza értelmében ehhez elég belátni, hogy a függvény additív és folytonos.

A paralelogramma-azonosság miatt

$$\begin{aligned} 4\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= |\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}|^2 - |\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{w}|^2 \\ &= (|\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}|^2 + |\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{w}|^2) - (|\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{w}|^2 + |\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{w}|^2) \\ &= 2|\mathbf{u} + \mathbf{w}|^2 + 2|\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}|^2 - 2|\mathbf{v} - \mathbf{w}|^2 \\ &= (|\mathbf{u} + \mathbf{w}|^2 - |\mathbf{u} - \mathbf{w}|^2) + (|\mathbf{u} + \mathbf{w}|^2 + |\mathbf{u} - \mathbf{w}|^2) + 2|\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}|^2 + \\ &\quad + (|\mathbf{v} + \mathbf{w}|^2 - |\mathbf{v} - \mathbf{w}|^2) - (|\mathbf{v} + \mathbf{w}|^2 + |\mathbf{v} - \mathbf{w}|^2) \\ &= (|\mathbf{u} + \mathbf{w}|^2 - |\mathbf{u} - \mathbf{w}|^2) + 2|\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{w}|^2 + 2|\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}|^2 + \\ &\quad + (|\mathbf{v} + \mathbf{w}|^2 - |\mathbf{v} - \mathbf{w}|^2) - 2|\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{w}|^2 \\ &= (|\mathbf{u} + \mathbf{w}|^2 - |\mathbf{u} - \mathbf{w}|^2) + (|\mathbf{v} + \mathbf{w}|^2 - |\mathbf{v} - \mathbf{w}|^2) \\ &= 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + 4\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle, \end{aligned}$$

tehát $\langle \cdot, \cdot \rangle$ additív. Tetszőleges $\mathbf{w}$ vektor esetén $||\lambda\mathbf{u} + \mathbf{w}| - |\mu\mathbf{u} + \mathbf{w}|| \leq |\lambda\mathbf{u} - \mu\mathbf{u}| = |\lambda - \mu||\mathbf{u}|$, tehát a $\lambda \mapsto |\lambda\mathbf{u} + \mathbf{w}|$ függvény folytonos, és így a $\lambda \mapsto \langle \lambda\mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \frac{1}{4}(|\lambda\mathbf{u} + \mathbf{w}|^2 - |\lambda\mathbf{u} - \mathbf{w}|^2)$ függvény is folytonos.

Tehát $\langle \cdot, \cdot \rangle$ egy euklidészi szorzás, a $|\cdot|$ pedig egy euklidészi norma.

Válasszunk egy ortonormált $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ bázist a $T_O\mathcal{A}$ helyvektortérben (ilyen van a **Gram–Schmidt-eljárás** szerint). Az O pontot és a $\mathcal{B}$ bázist választva, az egységgömb határának minden $X = \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n)$ pontjára

$$1 = d^2(O, X) = |X_O|^2 = \left| \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{u}_i \right|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

adódik, ami éppen a (3) második állítása. Ezzel a (3) állítást teljesen beláttuk.

(3) $\Rightarrow$ (1) Mivel d Minkowski-metrika, van hozzá tartozó $|\cdot|$ norma. Valamely $\varphi = \chi_{\mathcal{B}}\xi_O$ koordinátázásban, ahol $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ a $T_O\mathcal{A}$ egy alkalmas bázisa, az indukált ellipszoid, vagyis egy $Z = \varphi^{-1}(z_1, \dots, z_n)$ pont pontosan akkor van az indukált ellipszoid határán, ha

$$1 = d^2(O, Z) = |Z_O|^2 = \sum_{i=1}^n z_i^2.$$

Ekkor az $X = \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n)$ és $Y = \varphi^{-1}(y_1, \dots, y_n)$ pontokra

$$\begin{aligned} d^2(X, Y) &= d^2(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n), \varphi^{-1}(y_1, \dots, y_n)) = \left| \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{u}_i - \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{u}_i \right|^2 \\ &= \left| \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) \mathbf{u}_i \right|^2 = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right) \left| \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i) \mathbf{u}_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}} \right|^2. \end{aligned}$$

Mivel az utolsó normában szereplő vektor koordinátáinak négyzetösszege éppen 1, a feltétel szerint annak végpontja az indukált ellipszoid határán van, így annak normája 1 és ez bizonyítja a (1) állítást.

Ezzel a bizonyítás teljes. ■

A fenti tétel bármely feltételének megfelelő metrikákat *euklidészinek* nevezzük. Az ilyen metrikával ellátott affin geometriákat euklidészi geometriának nevezzük.

Fontos látni, hogy tételünk értelmében az euklidészi geometria minden affin altere is euklidészi és emiatt minden ellipszoid bármely affin altérrel vett metszete is ellipszoid. Sőt, az is a fenti tétel következménye, hogy ha egy Minkowski-féle metrika egységgömbjének az origóra illeszkedő minden affin síkkal vett metszete ellipszis, akkor az a Minkowski-metrika euklidészi és emiatt az egységgömbje ellipszoid.

A **Gram–Schmidt eljárásnak** köszönhetően világos, hogy két euklidészi geometria pontosan akkor izomorf, ha dimenzióik megegyeznek.

Az euklidészi geometria izometriái nyilván injektívek, a háromszög-egyenlőtlenség miatt egyenességtartók, a norma homogenitása miatt az egyeneseken szűrjektívek, így a teljes geometrián is szűrjektívek, vagyis az euklidészi geometria izometriái affinitások.

Mivel a helyvektorterek és a szabad vektorok tere közti kanonikus izomorfiaák tartják a normát, tartják a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ euklidészi szorzást is, így nem szükséges megkülönböztetni a normákat és euklidészi szorzásokat aszerint, hogy melyik vektortéren használjuk őket.

Tétel. *Az euklidészi tér valamely φ affinitása akkor és csak akkor izometria, ha $\hat{\varphi}$ lineáris összetevője invariánsan hagyja az euklidészi szorzatot, vagyis minden $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektorra $\langle \hat{\varphi}(\mathbf{u}), \hat{\varphi}(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ teljesül.*

Bizonyítás. Ha φ izometria, akkor minden P, Q pontra igaz a

$$\begin{aligned} |\hat{\varphi}(\overrightarrow{PQ})| &= |\hat{\varphi}(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP})| = |\hat{\varphi}(\overrightarrow{OQ}) - \hat{\varphi}(\overrightarrow{OP})| \\ &= |\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(Q)} - \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)}| = |\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}| = |\overrightarrow{PQ}| \end{aligned}$$

azonosság, amiért $\hat{\varphi}$ tartja a normát. Ebből a minden $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vektorra teljesülő

$$\begin{aligned} 4\langle \hat{\varphi}(\mathbf{u}), \hat{\varphi}(\mathbf{v}) \rangle &= \langle \hat{\varphi}(\mathbf{u}) + \hat{\varphi}(\mathbf{v}), \hat{\varphi}(\mathbf{u}) + \hat{\varphi}(\mathbf{v}) \rangle - \langle \hat{\varphi}(\mathbf{u}) - \hat{\varphi}(\mathbf{v}), \hat{\varphi}(\mathbf{u}) - \hat{\varphi}(\mathbf{v}) \rangle \\ &= |\hat{\varphi}(\mathbf{u}) + \hat{\varphi}(\mathbf{v})|^2 - |\hat{\varphi}(\mathbf{u}) - \hat{\varphi}(\mathbf{v})|^2 = |\hat{\varphi}(\mathbf{u} + \mathbf{v})|^2 - |\hat{\varphi}(\mathbf{u} - \mathbf{v})|^2 \\ &= |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle \\ &= 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle, \end{aligned}$$

azonosság értelmében következik, hogy $\hat{\varphi}$ tartja az euklidészi szorzatot.

Fordítva, ha $\hat{\varphi}$ tartja a belső szorzatot, akkor tartja a normát is, és így minden P, Q pontra $|\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}| = |\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(Q)} - \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)}| = |\hat{\varphi}(\overrightarrow{OQ}) - \hat{\varphi}(\overrightarrow{OP})| = |\hat{\varphi}(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP})| = |\hat{\varphi}(\overrightarrow{PQ})| = |\overrightarrow{PQ}|$ teljesül, ami igazolja, hogy φ izometria. ■

Eredményünk szerint minden izometria előáll egy lineáris normatartó leképezésnek — ezeket *ortogonális* leképezéseknek nevezzük — és egy párhuzamos eltolásnak a szorzataként.

Mivel az euklidészi metrika Minkowski-féle, érvényes a következő.

Tétel. *Egy affin sík pontosan akkor látható el euklidészi metrikával, ha Desargues-típusú.*

Az affin térben az $\langle X_O, \mathbf{n} \rangle = c$ egyenletű ponthalmaz egy $\mathcal{H}$ hipersík, és ezzel ugyanúgy definiáljuk az affin tér $\tau_{\mathcal{H}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ tükrözését, mint korábban:

$$(\tau_{\mathcal{H}}(P))_O := P_O + 2(c - \langle P_O, \mathbf{n} \rangle)\mathbf{n}.$$

Ez izometria, felcseréli a hipersík féltéreit, és fixen hagyja a hipersík pontjait.

Ennek megfelelően a *szakasz felező merőlegese* egy hipersík, melynek egyenlete $\langle X_O, \mathbf{n} \rangle = c$, és amely átmegy a szakasz felezőpontján. Az erre vonatkozó tükrözés az egyetlen olyan tükrözés, mely felcseréli a szakasz végpontjait.

6.4. Tükrözéses metrikák

Egy affin geometrián egy affin metrikát *tükrözésesnek* nevezünk, ha minden hipersíkhoz létezik olyan izometria, amely a hipersík minden egyes pontját helyben hagyja, a hipersíkhoz tartozó féltérket pedig felcseréli. Ezen izometriákat a megfelelő hipersíkokra vonatkozó *tükrözéseknek* nevezzük.

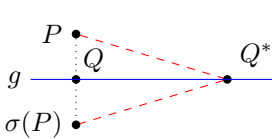
Világos, hogy az euklidészi metrika tükrözéses. Az is igaz, hogy minden tükrözéses metrika euklidészi, de mi ezt most csak a síkon és 3-dimenzióban bizonyítjuk.

A síkon

A síkban a hipersík az egyenes, így az egyenesekre vonatkozó tükrözéseket kell vizsgálnunk. Ezt annyiban általánosabba körülmények között tesszük, hogy az affin síkról nem tesszük fel a Desargues-tulajdonságot.

Tétel. *Tükrözéses metrikában minden egyeneshez pontosan egy tükrözés létezik, és az involutív.*

Bizonyítás. Legyen σ a g egyenesre vonatkozó tükrözések egyike, és legyen $P \notin g$.



A P és a $\sigma(P)$ pontok különböző félsíkba esnek, ezért $\overline{P\sigma(P)}$ és g metszik egymást valamely Q pontban. Legyen $Q^* \in g$ ettől különböző. Mivel a Q és Q^* pontok a σ leképezésnél fixen maradnak, a szigorú háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$2d(P, Q) = d(P, \sigma(P)) < d(P, Q^*) + d(Q^*, \sigma(P)) = 2d(P, Q^*),$$

vagyis a Q pont a g egyenesnek a P ponthoz legközelebbi pontja.

A g egyenesre vonatkozó tetszőleges τ tükrözés esetén tehát $\tau(P)$ az az egyértelműen meghatározott pont, mely illeszkedik a PQ egyenesre, és a Q ponttól éppen $d(P, Q)$ távolságra van a P pontot nem tartalmazó félsíkban. Ez bizonyítja a tükrözés egyértelműségét.

Jelölje ezt a g egyenesre vonatkozó egyértelműen meghatározott tükrözést τ_g . Az ennek háromszori megismétlésével nyert τ_g^3 transzformáció is tengelyes tükrözés — hiszen az egyenes pontjait fixen hagyja, a nyílt félsíkokat viszont felcseréli —, ezért $\tau_g^3 = \tau_g$ és így $\tau_g^2 = \text{id}$ adódik, vagyis τ_g valóban involúció. ■

Jegyezzük meg, hogy mivel a tükrözés involúció, bijektív is, és $\tau_g(P\tau_g(P)) = \tau_g(P)P$ miatt a $\tau_g(P)P$ egyenes invariáns a τ_g tükrözésre.

Azt mondjuk, hogy a h egyenes *merőleges* a g egyenesre (jelben $h \perp g$), ha $h \neq g$ és $\tau_g h = h$ teljesül. Mivel a nem metsző egyenesek teljesen egymás egyik félsíkjába

esnek, azok tükröképei nem egyezhetnek meg önmagukkal, ezért az egyenes mindig metszi a rá merőleges egyeneseket.

Tétel. *Tetszőleges h és g egyenesekre $\tau_g\tau_h\tau_g = \tau_{\tau_g(h)}$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $\varphi = \tau_g\tau_h\tau_g$. Ekkor

$$\begin{aligned} P = \varphi(P) &\Leftrightarrow \tau_g(\tau_h(\tau_g(P))) = P \Leftrightarrow \tau_h(\tau_g(P)) = \tau_g(P) \\ &\Leftrightarrow \tau_g(P) \in h \Leftrightarrow P \in \tau_g(h), \end{aligned}$$

vagys φ fixpontjai pontosan a $\tau_g(h)$ egyenes pontjai.

Válasszunk egy tetszőleges P pontot, és legyen F a $\overline{P\varphi(P)}$ szakaszt felező pont. A τ_g izometria, ezért a szakaszt felező pontot szakaszt felező pontba viszi, így a $\tau_g(F)$ pont a $\overline{\tau_g(P)\tau_h(\tau_g(P))}$ szakasz felező pontja. E szakasz két végpontja egymás tükröképe a h egyenesre, ezért az iméntiek szerint a szakasz $\tau_g(F)$ felezőpontja a h egyenesre esik. Akkor viszont F a $\tau_g(h)$ egyenesre esik, ami azt mutatja, hogy φ felcseréli a $\tau_g(h)$ egyenes félsíkjaait, tehát nem lehet más, mint $\tau_{\tau_g(h)}$. ■

Tétel. $\tau_h\tau_g = \tau_g\tau_h \iff h \perp g$, vagy $h = g$.

Bizonyítás. Ha $\tau_h\tau_g = \tau_g\tau_h$, akkor $\tau_{\tau_g(h)} = \tau_g\tau_h\tau_g = \tau_h$, amiért $\tau_g(h) = h$ következik, tehát az egyenesek megegyeznek vagy merőlegesek egymásra.

Ha h és g merőleges vagy egybeeső egyenesek, akkor $\tau_h\tau_g = \tau_g\tau_{\tau_g(h)} = \tau_g\tau_h$ bizonyítja a két tükrözés szorzatának felcserélhetőségét. ■

Eszerint az egyenesek merőlegessége az egyenesek között szimmetrikus reláció.

Tétel. *A tükrözés tartja a merőlegességet, vagyis merőleges egyenesek tükröképei is merőlegesek egymásra.*

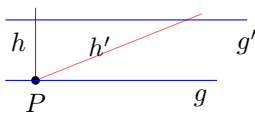
Bizonyítás. Legyenek adottak az e, g, h egyenesek úgy, hogy $g \perp h$. Ekkor

$$\tau_{\tau_e(g)}\tau_{\tau_e(h)} = \tau_e\tau_g\tau_e\tau_e\tau_h\tau_e = \tau_e\tau_g\tau_h\tau_e = \tau_e\tau_h\tau_g\tau_e = \tau_e\tau_h\tau_e\tau_e\tau_g\tau_e = \tau_{\tau_e(h)}\tau_{\tau_e(g)},$$

amely felcserélhetőség igazolja, hogy $\tau_e(g) \perp \tau_e(h)$, ahogy a tétel állítja. ■

Tétel. *Tetszőleges g egyenes és P pont pontosan egy olyan h egyenest határoz meg, amely merőleges a g egyenesre, és átmegy a P ponton.*

Bizonyítás. Ha $P \notin g$, $h \perp g$, és $P \in h$, akkor $\tau_g(P) \in \tau_g(h) = h$ miatt a h egyenesnek illeszkednie kell a különböző P és $\tau_g(P)$ pontokra, amiért h egyértelmű.



Legyen most $P \in g$, g' pedig egy, a g egyenessel párhuzamos, de attól különböző egyenes. Legyen a P ponton áthaladó h egyenes merőleges a g egyenesre. Ekkor $\tau_h(g') = g'$, és $P \in \tau_h(g)$ is teljesül.

Ha $\tau_h(g) \neq g$, akkor a párhuzamossági axióma miatt létezik egy $Q \in \tau_h(g) \cap g'$ pont. Ebből $\tau_h(Q) \in g \cap g'$ következik, ami lehetetlen, mert $g \parallel g'$, így $\tau_h(g) = g$, vagyis a h egyenes merőleges a g egyenesre is.

Ha a P pontra illeszkedő h' egyenes is merőleges a g egyenesre, akkor a fenti gondolatmenet megismétlésével a h' egyenes a g' egyenesre is merőleges, ezért a külső pontra illeszkedő merőleges egyenes egyértelmősége miatt $h' = h$. ■

A tétel közvetlen következménye a következő.

Tétel. *Közös egyenesre merőleges egyenesek párhuzamosak.*

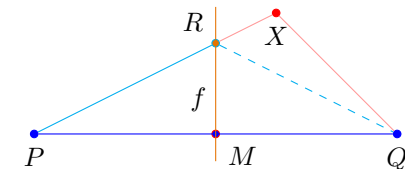
A felezőpontban a szakasz egyenesére állított egyértelmű merőleges egyenest *szakaszfelező merőlegesnek* nevezzük.

Tétel. *A $\overline{PQ}$ szakaszfelező merőlegese azon pontok halmaza, amelyek a P és Q pontoktól azonos távolságra helyezkednek el.*

Bizonyítás. Legyen f a $\overline{PQ}$ szakaszfelező merőlegese. A PQ egyenes a merőlegesség miatt invariáns a τ_f tükrözésre, ugyanakkor f átmegy a $\overline{PQ}$ szakasz M felezőpontján, amiért $d(\tau_f(P), M) = d(P, M) = d(Q, M)$ miatt $\tau_f(P) = Q$.

Eszerint minden $R \in f$ pontra

$$d(P, R) = d(\tau_f(P), R) = d(Q, R).$$



Ha az $X \notin f$, akkor az f valamelyik, mondjuk, a Q pontot tartalmazó nyílt félsíkjaába esik. Ekkor az $R = \overline{XP} \cap f$ pont használatával a háromszög-egyenlőtlenségből $d(P, X) = d(P, R) + d(R, X) = d(Q, R) + d(R, X) > d(Q, X)$ adódik, hiszen $R \notin \overline{XQ}$, mert az X és a Q pontok f -partosak.

Ha az $X \notin f$ az f másik félsíkjaába esik, akkor ugyanígy igazolható, hogy $d(P, X) < d(Q, X)$, amivel az állítás bizonyítása teljessé válik. ■

Tétel. *Legyen a h és g merőleges egyenesekre vonatkozó tükrözések szorzata $\varphi = \tau_h \tau_g$. Ekkor φ involutív, és minden e egyenesre $e \parallel \varphi(e)$.*

Bizonyítás. Nyilván $\varphi^2 = \tau_h \tau_g \tau_h \tau_g = \tau_g \tau_h \tau_h \tau_g = id$, vagyis φ involúció. Mivel $h \perp g$, a τ_g és τ_h tükrözések felcserélik a saját félsíkjaikat, de egymás félsíkjait invariánsan hagyják, a φ egyetlen fixpontja a két egyenes $h \cap g = O$ metszéspontja.

Ha $e = \varphi(e)$, akkor $e \parallel \varphi(e)$, ezért innentől az $e \neq \varphi(e)$ esetet tekintjük.

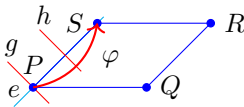
Tegyük fel, hogy e és $\varphi(e)$ metszők, és közös pontjuk $P = e \cap \varphi(e)$. Ekkor $\varphi(P) = \varphi(e) \cap e$ is, vagyis $P = \varphi(P)$, tehát $O = P \in e$.

Legyen f az O ponton nem átmenő, az e egyenessel párhuzamos egyenes. Ekkor $f \parallel \varphi(f)$, mert az egyetlen O fixpont nincs az f egyenesen. Ugyanakkor φ involúció, tehát kollineáció is, ezért $f \parallel e$ miatt $\varphi(f) \parallel \varphi(e)$ is érvényes, amiből a párhuzamosság tranzitivitása miatt $e \parallel \varphi(e)$. Ebből $O = \varphi(e) \cap e$ miatt $e = \varphi(e)$ következik, ami vagyis e és $\varphi(e)$ nem metszők. Ez igazolja az állítást. ■

Az ilyen transzformációkat *metrikus középpontos tükrözésnek* nevezzük. Ezek invariánsan hagyják a két egyenes metszetén átmenő egyeneseket.

Tétel. *A tükrözéses metrika Minkowski-típusú.*

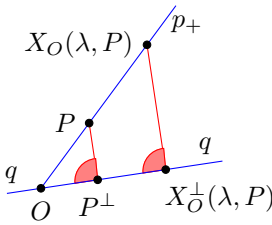
Bizonyítás. Azt kell igazolnunk, hogy bármely $PQRS$ paralelogramma szemközti oldalainak hosszai megegyeznek. Legyen $\varphi = \tau_h \tau_g$ úgy, hogy $g \parallel h \perp PS$, $P \in g$ és h a $\overline{PS}$ felező merőlegese.



Mint hogy $\varphi(P) = S$, és φ az egyeneseket párhuzamos egyenesekbe képezi, $\varphi(PQ) = SR$, hiszen $\varphi(PQ)$ áthalad az S ponton, és párhuzamos a PQ egyenessel. Ugyanakkor a PS egyenes a φ transzformációnál invariáns, hiszen mindkét tükrözés tengelyére merőleges, és $QR \parallel PS$ miatt a QR egyenes is invariáns.

Eszerint $\varphi(Q) = \varphi(SQ \cap QR) = \varphi(SQ) \cap \varphi(RQ) = SR \cap RQ = R$. Ebből $d(S, R) = d(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(P, Q)$ következik. Ez bizonyítja a tételt. ■

Eszerint innentől a párhuzamos szelők tételének metrikus változata is teljesül.



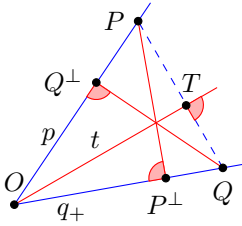
Rögzítsük az O pontból induló $p_+ \ni P$ félegyenest és az O ponton áthaladó q egyenest. A q és az $X_O(\lambda, P)$ pontból rá bocsájtott merőleges metszéspontja legyen $X_O^\perp(\lambda, P)$. Mint hogy ugyanazon egyenesre merőleges egyenesek párhuzamosak, a párhuzamos szelők tétele szerint

$$\frac{d(O, X_O^\perp(\lambda, P))}{d(O, X_O(\lambda, P))} = \frac{d(O, X_O^\perp(1, P))}{d(O, X_O(1, P))} = \frac{d(O, P^\perp)}{d(O, P)},$$

ahol $P^\perp$ a P merőleges vetülete a q egyenesre. Ez a λ értékétől független állandó. Rögzítsük a q egyik O pontból induló q_+ félegyenest. Ha $P^\perp \in q_+$, akkor ezt az állandót, ha $P^\perp \in q_-$, akkor ennek ellentettjét nevezzük innentől a p_+ félegyenes q_+ félegyenesre vonatkozó *koszinuszának*, melyet a $\cos(p_+, q_+)$ jellel adunk meg.

Tétel. *Az O pontból induló bármely p_+ és q_+ félegyenesre $\cos(p_+, q_+) = \cos(q_+, p_+)$.*

Bizonyítás. Legyen $P \in p_+$ és $Q \in q_+$ olyan pont, hogy $d(O, P) = d(O, Q)$.



Ekkor az O pont a $\overline{PQ}$ szakaszfelező e merőlegesére esik. Legyen T a $\overline{PQ}$ felezőpontja. Nyilván $T \in e$. Az e egyenesre vonatkozó τ_e tükrözés felcseréli a p_+ és q_+ félegyeneseket, és a rájuk merőleges $PP^\perp$ és $QQ^\perp$ szakaszokat, hiszen $\tau_e(P) = Q$, és a tükrözés tartja a merőlegességet. Eszerint $\tau_e(P^\perp) = Q^\perp$, és így $d(O, P^\perp) = d(O, Q^\perp)$, ami igazolja a tétel állítását. ■

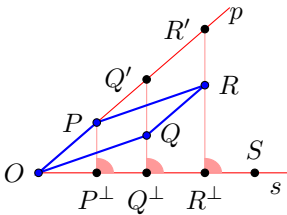
Tétel. *A tükrözéses metrika euklidészi.*

Bizonyítás. Rögzítsünk egy O pontot. Mivel a tükrözéses metrika Minkowski-féle, elég igazolni, hogy a hozzá tartozó $|P_O| = d(O, P)$ norma euklidészi. Legyen

$$\langle P_O, Q_O \rangle := d(O, P)d(O, Q) \cos(p_+, q_+)$$

minden $P \in p_+$ és $Q \in q_+$ pontra, ahol p_+, q_+ az O pontból induló félegyenesek. Ekkor $|P_O|^2 = \langle P_O, P_O \rangle$, ezért elég belátni, hogy $\langle \cdot, \cdot \rangle$ euklidészi szorzás. Mivel ez a definíciója alapján szimmetrikus és homogén, elég az additivitását megmutatni.

Legyen $P_O + Q_O = R_O$, S pedig egy tetszőlegesen rögzített pont, amely nincs rajta az $OPRQ$ paralelogramma egyik oldalegyenesén sem.



Legyen $p_+ \ni P$, $q_+ \ni Q$, $r_+ \ni R$ és $s_+ \ni S$ is az O pontból induló félegyenes. Legyen $P^\perp, Q^\perp$ és $R^\perp$ rendre megfelelő pont merőleges vetülete az s egyenesre és vegyük fel a $Q' = OP \cap QQ^\perp$, és $R' = OP \cap RR^\perp$ pontokat is. Ekkor $(O, P) \stackrel{L}{\sim} (Q, R)$ és $(Q, R) \stackrel{L}{\sim} (Q', R')$, így $(O, P) \stackrel{L}{\sim} (Q', R')$, amiért a párhuzamos szelők tétele

szerint $(O, P^\perp) \stackrel{L}{\sim} (Q^\perp, R^\perp)$. Tehát $d(O, P^\perp) = d(Q^\perp, R^\perp)$. Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} \langle P_O + Q_O, S_O \rangle &= \langle R_O, S_O \rangle = d(O, R)d(O, S) \cos(r_+, s_+) = d(O, R^\perp)d(O, S) \\ &= (d(O, Q^\perp) + d(Q^\perp, R^\perp))d(O, S) = (d(O, Q^\perp) + d(O, P^\perp))d(O, S) \\ &= d(O, Q)d(O, S) \cos(q_+, s_+) + d(O, P)d(O, S) \cos(p_+, s_+) \\ &= \langle Q_O, S_O \rangle + \langle P_O, S_O \rangle, \end{aligned}$$

ami bizonyítja az állítást. ■

Mint hogy tükrözéses síkon minden egyeneshez pontosan egy tükrözés van, és az euklidészi síkon létezik egy természetes tengelyes tükrözés, a tükrözés és a tengelyes tükrözés ugyanaz, ezért a τ_g jelölés nem okozhat félreértést.

Tétel. *Az affin síkon egy metrika akkor és csak akkor tükrözéses, ha euklidészi.*

A 3-dimenziós térben

A most következő állítások bizonyításai a síkbeli esetnél leírtakkal mutatnak analógiát, ezért az olvasóra maradnak, kivéve ha valami fontos különbség mutatkozik.

Az affin tér egy metrikáját *tükrözésesnek* mondjuk, ha minden síkhoz létezik olyan izometria, amely a sík minden egyes pontját helyben hagyja, és a síkhoz tartozó két féltérét felcseréli egymással. Ezeket a síkra vonatkozó *tükrözésnek* nevezzük.

Tétel. *Tükrözéses metrikával ellátott affin tér minden síkjához pontosan egy, az adott síkra vonatkozó tükrözés létezik, és az involutív.*

Tétel. *Tetszőleges $\mathcal{S}$ és $\mathcal{Q}$ síkokra $\tau_{\mathcal{S}}\tau_{\mathcal{Q}}\tau_{\mathcal{S}} = \tau_{\tau_{\mathcal{S}}(\mathcal{Q})}$ teljesül.*

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{S}$ sík illetve g egyenes *merőleges* a $\mathcal{Q}$ síkra (jelben $\mathcal{S} \perp \mathcal{Q}$ illetve $g \perp \mathcal{Q}$), ha $\mathcal{S} \neq \mathcal{Q}$ és $\tau_{\mathcal{S}}\mathcal{Q} = \mathcal{Q}$, illetve $g \not\subset \mathcal{Q}$ és $\tau_{\mathcal{S}}(g) = g$. $\blacktriangle$

Mivel a síkot nem metsző síkok és egyenesek teljesen a sík egyik féltérébe esnek, azok tükröképei nem egyezhetnek meg önmagukkal, ezért a sík mindig metszi a rá merőleges síkot és egyenest. Ezért $\mathcal{S} \perp \mathcal{Q}$ esetén a $g = \mathcal{S} \cap \mathcal{Q}$ egyenes két félsíkja a $\mathcal{Q}$ síkban éppen az $\mathcal{S}$ féltéréinek metszete a $\mathcal{Q}$ síkkal, így $\tau_{\mathcal{S}}$ a $\mathcal{Q}$ síkon felcseréli annak g egyenese által meghatározott két félsíkját, miközben a g egyenes minden pontját fixen hagyja. Tehát $\tau_{\mathcal{S}}|_{\mathcal{Q}}$ pontosan a $\tau_g: \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$ tükrözés.

Két közös síkra illeszkedő egyenest *merőlegesnek* mondunk, ha ott síkbeli értelemben merőlegesek. Világos, hogy ez a merőlegesség szimmetrikus reláció.

Tétel. *A $\tau_{\mathcal{S}}$ és $\tau_{\mathcal{Q}}$ különböző tükrözések akkor és csak akkor cserélhetők fel, vagyis $\tau_{\mathcal{S}}\tau_{\mathcal{Q}} = \tau_{\mathcal{Q}}\tau_{\mathcal{S}}$, ha $\mathcal{S} \perp \mathcal{Q}$.*

Eszerint a síkok merőlegessége is szimmetrikus reláció, és $\mathcal{S} \perp \mathcal{Q}$ esetén $(\tau_{\mathcal{S}}\tau_{\mathcal{Q}})^2 = id$, vagyis $\tau_{\mathcal{S}}\tau_{\mathcal{Q}}$ egy involutív izometria.

Tétel. *A síkra tükrözés tartja a merőlegességet, vagyis merőleges egyenesek tükröképei is merőlegesek egymásra.*

Tétel. *Tetszőleges $\mathcal{S}$ sík és P pont pontosan egy olyan h egyenest határoz meg, amely merőleges az $\mathcal{S}$ síkra, és átmegy a P ponton.*

Eszerint közös síkra merőleges egyenesek, és közös egyenesre merőleges síkok párhuzamosak. A felezőpontban a szakasz egyenesére állított egyértelmű $\mathcal{F}$ merőleges síkot *szakaszt felező merőlegesnek* nevezzük.

Tétel. *A $\overline{PQ}$ szakaszfelező merőlegese azon pontok halmaza, amelyek a P és Q pontoktól azonos távolságra helyezkednek el.*

Tétel. *Tetszőleges $\mathcal{S}$ sík és rá nem merőleges g egyenes pontosan egy olyan $\mathcal{Q}$ síkot határoz meg, amely merőleges az $\mathcal{S}$ síkra, és illeszkedik a g egyenesre.*

Bizonyítás. A g egyenes minden pontján át létezik pontosan egy olyan h egyenes, mely merőleges az $\mathcal{S}$ síkra. Ezek az egyenesek párhuzamosak, hiszen ugyanarra a síkra merőlegesek, ugyanakkor ugyanazon egyenesen mennek át. Legyen $\mathcal{Q}$ az a sík, mely illeszkedik a g egyenesre és legalább egy ilyen h egyenesre. Ekkor az összes többi h egyenes is illeszkedik erre a $\mathcal{Q}$ síkra, hiszen párhuzamos a $\mathcal{Q}$ sík egy egyenesével és átmegy a $\mathcal{Q}$ sík egy pontján.

Az így meghatározott $\mathcal{Q}$ sík merőleges az $\mathcal{S}$ síkra, mert minden ilyen h egyenese merőleges az $\mathcal{S}$ síkra, vagyis minden ilyen h egyenes invariáns a $\tau_{\mathcal{S}}$ tükrözésre, és így $\mathcal{Q}$ is invariáns a $\tau_{\mathcal{S}}$ tükrözésre. ■

Ha a g egyenes merőleges a $\mathcal{S}$ síkra, akkor bármely pontján átmenő bármely, a g egyenessel nem párhuzamos egyenesre pontosan egy, az $\mathcal{S}$ síkra merőleges sík illeszkedik, és a fentiek szerint ez tartalmazza a g egyenest. Mivel azonban két ilyen, de különböző síknak csak egy közös egyenese lehet, adódik, hogy két, ugyanazon $\mathcal{S}$ síkra merőleges sík metszete olyan egyenes, mely merőleges az $\mathcal{S}$ síkra.

Tétel. *Tükrözéssel ellátott affin tér síkjain szintén tükrözéses a metrika.*

Bizonyítás. Vegyük egy $\mathcal{S}$ sík valamely egyenesét. Ezen keresztül létezik pontosan egy olyan $\mathcal{Q}$ sík, mely merőleges az $\mathcal{S}$ síkra. Ekkor az $\mathcal{S}$ síkon a $\mathcal{Q}$ síkra vonatkozó tükrözés tengelyes tükrözést határoz meg, vagyis a síkon a metrika tükrözéssel. ■

Mivel a paralelogrammák mindig síkban vannak, azonnal kapjuk az alábbi.

Tétel. *Tükrözéssel ellátott affin tér euklidészi.*

6.5. Ptolemaioszi metrika

Az inverziót nem csak euklidészi távolság mellett definiálhatjuk. Bármely d Minkowski-metrika esetén az $\iota: P \mapsto \iota(P)$ leképezés, melyre $(\iota(P))_O = P_O/|P_O|^2$ jól definiált az $\mathbb{R}_O^2 := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ „lyukasztott sík” pontjain. Ezzel definiáljuk a $d_\iota: \mathbb{R}_O^2 \rightarrow \mathbb{R}_O^2$ függvényt, melyre

$$d_\iota: (P, R) \mapsto d(\iota(P), \iota(R)) = \frac{d(P, R)}{d(O, P)d(O, R)}.$$

Ez a d_e függvény nyilván pozitív definit és szimmetrikus, így akkor és csak akkor metrika,² ha teljesíti a háromszög-egyenlőtlenséget, vagyis

$$\begin{aligned} \frac{d(P, R)}{d(O, P)d(O, R)} &= d_e(P, R) \\ &\leq d_e(P, Q) + d_e(Q, R) = \frac{d(P, Q)}{d(O, P)d(O, Q)} + \frac{d(Q, R)}{d(O, Q)d(O, R)}. \end{aligned}$$

Ez ekvivalens a

$$d(P, R)d(O, Q) \leq d(P, Q)d(O, R) + d(Q, R)d(O, P)$$

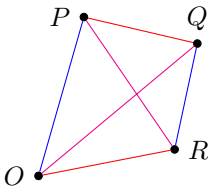
Ptolemaiosz-egyenlőtlenséggel.

6.5.1. Tétel. *Egy Minkowski-metrika akkor és csak akkor euklidészi, ha minden komplanáris négyszög teljesíti a Ptolemaiosz-egyenlőtlenséget.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy a metrika euklidészi.

Ha egy $OPQR$ négyszög P, Q, R csúcsai közül bármelyik egybeesik az O csúccsal, akkor az egyenlőtlenség két oldala egyenlő, ezért a továbbiakban elég azzal az esettel foglalkozni, amikor az O csúcs különbözik a többitől.

Legyen $\mathbf{p} = P_O$, $\mathbf{q} = Q_O$ és $\mathbf{r} = R_O$. Az állított egyenlőtlenségünk ekkor a $|\mathbf{p} - \mathbf{r}||\mathbf{q}| \leq |\mathbf{p} - \mathbf{q}||\mathbf{r}| + |\mathbf{q} - \mathbf{r}||\mathbf{p}|$ formát veszi fel. A $|\mathbf{p}||\mathbf{q}||\mathbf{r}|$ szorzattal leosztva az



$$\left| \frac{1}{|\mathbf{r}|} \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} - \frac{1}{|\mathbf{p}|} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right| \leq \left| \frac{1}{|\mathbf{q}|} \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} - \frac{1}{|\mathbf{p}|} \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} \right| + \left| \frac{1}{|\mathbf{r}|} \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} - \frac{1}{|\mathbf{q}|} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right|$$

alakhoz jutunk.

Másfelől bármely különböző $\mathbf{u} = U_O$, $\mathbf{v} = V_O$ egységnyi normájú helyvektorra, ha $\mathbf{w} = (\mathbf{u} + \mathbf{v})/|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$, és $\mathbf{w}^\perp = (\mathbf{u} - \mathbf{v})/|\mathbf{u} - \mathbf{v}|$, akkor

$$\begin{aligned} |\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}|^2 &= |\lambda(\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{w} + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}^\perp \rangle \mathbf{w}^\perp) + \mu(\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{w} + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}^\perp \rangle \mathbf{w}^\perp)|^2 \\ &= |(\lambda + \mu)\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{w} + (\lambda - \mu)\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}^\perp \rangle \mathbf{w}^\perp|^2 \\ &= (\lambda + \mu)^2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle^2 + (\lambda - \mu)^2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}^\perp \rangle^2 \\ &= (\lambda + \mu)^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle^2 + (\lambda - \mu)^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}^\perp \rangle^2 = |\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{u}|^2, \end{aligned}$$

amiért fentebbi egyenlőtlenségünk ekvivalens a

$$\left| \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|^2} - \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2} \right| \leq \left| \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|^2} - \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|^2} \right| + \left| \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|^2} - \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2} \right|$$

²Jegyezzük meg, hogy d_e semmiképpen sem affin metrika, mert nem additív.

egyenlőtlenséggel. Ez éppen a normára vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség, ami igazolja a Ptolemaiosz-egyenlőtlenséget.

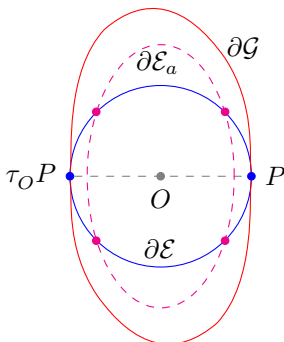
Ezzel az állítás „akkor” részét beláttuk.

Mielőtt rátérnénk a másik irány bizonyítására, vizsgáljuk meg, hogy mikor van egyenlőség a Ptolemaiosz-egyenlőtlenségben. Ez pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{q}|\mathbf{q}|^{-2}$ a $\mathbf{p}|\mathbf{p}|^{-2}$ és $\mathbf{r}|\mathbf{r}|^{-2}$ vektorok konvex lineáris kombinációja, aminek szükséges feltétele, hogy O, P, Q és R komplanárisak legyenek. Az euklidészi síkon viszont bizonyítottuk, hogy a szakasz inverzív képe az O ponton átmenő valamely kör egy íve, így a Ptolemaiosz-egyenlőtlenségben pontosan akkor van egyenlőség, ha az O, P, Q, R pontok egy körvonalra illeszkednek.

Most tegyük fel, hogy a metrika teljesíti a Ptolemaiosz-egyenlőtlenséget.

A 6.3.1. Tétel bizonyítása utáni megjegyzések értelmében ezt a tételt elegendő az affin síkon belátni, ezért innentől az affin síkon, mégpedig a valós affin síkon dolgozunk. Megmutatjuk, hogy a Ptolemaiosz-egyenlőtlenségből következik a 6.3.1. Tétel (3) pontja.

Legyen a d Minkowski-metrika egységgömbje $\mathcal{G}$, és rögzítsük a szokásos területmérést, amely az egységoldalú négyzetre 1. Az egységgömbön belüli origóra szimmetrikus ellipszisek területeinek nyilván létezik felső határa, és mivel a terület folytonosan függ a kis és nagy tengelytől,³ van olyan $\mathcal{E}$ ellipszis, amelynek területe éppen a felső határ. Ez az egységgömbbe írható maximális területű ellipszis. Világos, hogy $\mathcal{E}$ érinti az egységgömb $\partial\mathcal{G}$ határát valamely P pontban, és az origóra vonatkozó szimmetria miatt ekkor a $\tau_O P$ pont is ilyen érintési pont.



Tegyük fel, hogy az egységgömbbe írható maximális területű ellipszisnek csak két érintési pontja van az egységgömb határával. Mivel az affinitások tartják a területek arányát, egy megfelelő φ affinitás alkalmazása után a $\varphi(\mathcal{E})$ egységkör lesz $\varphi(\mathcal{G})$ maximális területű beírt ellipszise, és $\varphi(P) = (1, 0)$, és $\varphi(\tau_O P) = (-1, 0)$. Vegyük az $a \in (1/\sqrt{2}, 1)$ számokra az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2/(2a^2 - 1)} = 1$$

egyenletű $\mathcal{E}_a$ ellipsziseket. Ezek mind átmennek a $(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2})$ és $(\pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/\sqrt{2})$ pontokon, az x -tengelyt a $\varphi(\mathcal{E})$ körön belül, az y -tengelyt a $\varphi(\mathcal{E})$ körön kívül metszik, ezért ha a elég közel van egyhez, akkor az $\mathcal{E}_a$ változásának folytonossága miatt az $\mathcal{E}_a$ ellipszisek mind a $\mathcal{G}$ egységgömbön

³Lásd F.9.1.

belül vannak. Ugyanakkor $\mathcal{E}_a$ területe

$$t(\mathcal{E}_a) = \frac{\pi a^2}{\sqrt{2a^2 - 1}} = \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{2a^2 - 1} + \frac{1}{\sqrt{2a^2 - 1}} \right) \geq \pi = t(\mathcal{E}_1) = t(\varphi\mathcal{E}),$$

ami ellentmond annak, hogy $\varphi(\mathcal{E})$ maximális területű beírt ellipszis.

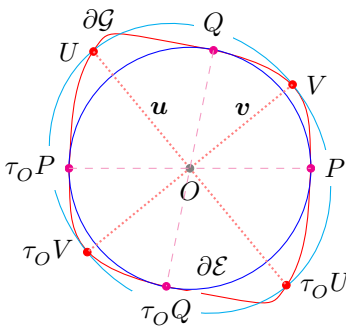
Ez az ellentmondás azt mutatja, hogy a $\mathcal{G}$ egységgömbbe beírt maximális területű $\mathcal{E}$ ellipszis legalább két átmérője a $\mathcal{G}$ egységgömbnek is átmérője.

Vegyük észre, hogy a $\varphi(\mathcal{G})$ indukált metrikára $d^\varphi(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(P, Q)$, hiszen az affinitások tartják az osztóviszonyt. Ennek következtében a d^φ metrika pontosan akkor teljesíti a Ptolemaiosz-egyenlőtlenséget, ha d is teljesíti, így a továbbiakban elegendő a φ által transzformált helyzetben bizonyítani, hogy a $\varphi\mathcal{G}$ egységgömbbel definiált metrika euklidészi.

A továbbiakban ezért eleve abból indulunk ki, hogy a $\mathcal{G}$ egységgömbbe írt maximális területű $\mathcal{E}$ ellipszis az egységkör lap, melynek legalább két átmérője a $\mathcal{G}$ egységgömbnek is átmérője. Jelölje $\|\cdot\|$ a $\mathcal{G}$ egységgömbű d Minkowski-metrikához tartozó normát.

Legyen $\overline{P\tau_O P}$ és $\overline{Q\tau_O Q}$ a $\mathcal{G}$ és $\mathcal{E}$ különböző közös átmérői, továbbá legyen $\mathbf{p} = P_O$ és $\mathbf{q} = Q_O$. Ezekre a Ptolemaiosz-egyenlőtlenség azt adja, hogy

$$4 = 4\|\mathbf{p}\|\|\mathbf{q}\| \leq \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|^2 + \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2.$$



Tekintsük az

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad \text{és} \quad \mathbf{v} = \frac{1}{\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|}(\mathbf{p} + \mathbf{q})$$

vektorokat. Ezek egy bázist alkotnak, a $\|\cdot\|$ normában egységnyiek, az euklidészi $|\cdot|$ normára nézve legalább egy hosszúak, és euklidészi értelemben ortogonálisak is. Az $\mathbf{u} = \frac{\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|}{2}$ és $\mathbf{v} = \frac{\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|}{2}$ számokra $\mathbf{p} = \mathbf{u}\mathbf{u} + \mathbf{v}\mathbf{v}$ és $\mathbf{q} = \mathbf{u}\mathbf{u} - \mathbf{v}\mathbf{v}$ teljesül, így a fenti egyenlőtlenségből

$$1 \leq \|\mathbf{v}\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}\mathbf{u}\|^2 = v^2 + u^2 = v^2 \frac{v^2}{|v|^2} + u^2 \frac{u^2}{|u|^2} \leq v^2 v^2 + u^2 u^2 = |v\mathbf{v} \pm \mathbf{u}\mathbf{u}|^2 = 1$$

következik. Ez csak úgy lehet, ha $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = 1$, vagyis ezen helyvektorok U és V végpontjai az $\mathcal{E}$ egységkörvonalon van.

Összefoglalva, az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{G}$ két közös átmérőjének négy végpontja által alkotott téglalap oldalai párhuzamos átmérők is közősek.

Eszerint bármely két közös átmérő egyenesének szögét felező mindkét egyenes is közös átmérőben metszi az $\mathcal{E}$ körlapot és a $\mathcal{G}$ egységgömböt. Ez azt jelenti, hogy az

$\partial\mathcal{E}$ körvonal bármely pontjának bármely közelében van az egységgömb $\partial\mathcal{G}$ határának az $\partial\mathcal{E}$ körvonallal közös pontja.

Mivel a körvonal folytonos, $\mathcal{G}$ pedig konvex, adódik, hogy az egységgömb maga a körlap, amiből a 6.3.1. Tétel (3) állítása adja, hogy a metrika euklidészi. ■

6.6. Ellipszis karakterizációk

A Minkowski-metrikák egységkörlapjának vizsgálata, különösen ha az euklidészi metrikában teljesülő tulajdonságok megfelelőit keressük, gyakran vezet az ellipszis különféle ekvivalens leírásaihoz. Ugyanakkor a fordított irányban, az ellipszisek jellemzői is kezelhetők az euklidészi metrika tulajdonságaiként, így ebben a körben is gyakran kerül át a vizsgálat területe a Minkowski-metrikák területére.

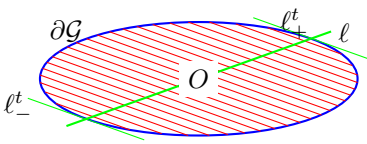
Ebben a szakaszban mindkét irány előfordulására mutatunk példát, miközben a Minkowski-geometriák vagy az ellipszisek geometriai tulajdonságait tárgyaljuk.

Mivel a problémák többsége a 6.3.1. Tétel utáni megjegyzések értelmében valójában a síkon jelenik meg, ebben a szakaszban csak a valós affin síkon dolgozunk. Ennek megfelelően a gömbszerű kifejezést a *körszerű* váltja fel.

A körszerű halmazok határát *körszerű görbének* hívjuk. Ennek érintőjét, bel-sejét és külsejét a körszerű halmaz definíciójánál megfogalmazottak szerint értjük.

Tétel. Legyen $\partial\mathcal{G}$ körszerű görbe, O pedig ennek szimmetria-középpontja. A $\partial\mathcal{G}$ pontosan akkor ellipszis, ha $\mathcal{G}$ bármely két párhuzamos egyenessel vett metszeteinek felező pontjai és O kollineárisak.

Bizonyítás. Tegyük először fel, hogy a $\mathcal{G}$ bármely két párhuzamos egyenessel vett metszeteinek felező pontjai és O kollineárisak. Ez azt jelenti, hogy bármely, az O ponton áthaladó ℓ egyenes felezi $\mathcal{G}$ minden olyan egyenessel vett metszetét, mely párhuzamos az $\ell \cap \mathcal{G}$ pontokban vett $\ell_{\pm}^t$ érintőkkel.



Definiáljuk a τ_{ℓ} fixpontos affin tükrözést úgy, hogy abban a φ koordinátázásban, amelynek origója az O pont, az x -tengelye az ℓ , az y -tengelye pedig párhuzamos az $\ell_{\pm}^t$ érintők bármelyikével, $\tau_{\ell}(x, y) = (x, -y)$. Ekkor minden $P \in \partial\mathcal{G}$ pont-

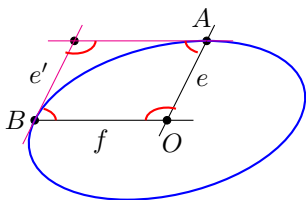
ra $\tau_{\ell}(P) \in \partial\mathcal{G}$, vagyis minden egységnyi $\mathbf{u} \in T_O\mathcal{G}$ helyvektorra $|\hat{\tau}_{\ell}(\mathbf{u})| = 1$, ahol $\hat{\tau}_{\ell}$ a τ_{ℓ} lineáris összetevője. Legyen $\mathbf{u}_{PQ}$ az a vektor, melyre $|\overrightarrow{PQ}| \mathbf{u}_{PQ} = \overrightarrow{PQ}$. Ekkor

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= |\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PQ}| |\mathbf{u}_{PQ}| = |\overrightarrow{PQ}| |\hat{\tau}_{\ell}(\mathbf{u}_{PQ})| = |\hat{\tau}_{\ell}(|\overrightarrow{PQ}| \mathbf{u}_{PQ})| = |\hat{\tau}_{\ell}(\overrightarrow{PQ})| \\ &= |\overrightarrow{\tau_{\ell}(P) \tau_{\ell}(Q)}| = d(\tau_{\ell}(P), \tau_{\ell}(Q)), \end{aligned}$$

vagyis τ_{ℓ} egy izometria.

Tehát a $\mathcal{G}$ körszerű ponthalmaz által adott metrika tükrözéses. Korábban láttuk, hogy ebből következik, hogy ez a metrika euklidészi, aminek következtében az egységömbje ellipszis.

Az euklidészi geometria szokásos koordinátázásában a tükrözés a merőleges egyenesekhez kötődik. Más koordinátázásban ennek a konjugáltság felel meg.



Minthogy az affinitás nem változtatja meg az érintést, és tartja az osztóviszonyt, valamint a szokásos koordinátázásban a metrika egységkörének sugara és érintője merőleges egymásra, logikus az ortogonalitást az ellipszis esetén az ellipszis sugara és érintője viszonyában meghatározni. Tehát azt mondjuk, hogy az e egyenes *konjugált irányú* az f egyenesre, ha az

ellipszis vele párhuzamos e' érintőjének B érintési pontja és az O origó OB egyenese párhuzamos az f egyenessel. A fogalmazásból világos, hogy ez a reláció nem feltétlenül szimmetrikus, de ellipszis esetén mégis az, mert az affinitás tartja a párhuzamosságot, a kör esetén pedig két merőleges érintő metszéspontja, érintési pontjaik és az origó egy négyzetet alkot.

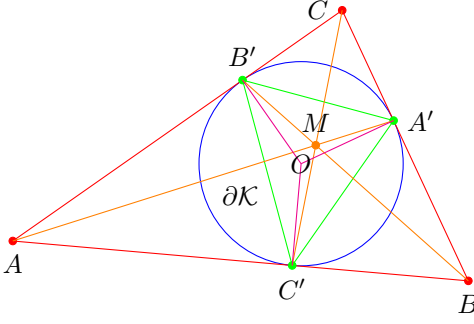
Eszerint az ortogonalitás tulajdonságai a konjugáltságra is érvényesek, vagyis a konjugált irány konjugált iránya egybeesik az eredeti iránnyal, vagyis ha egy középponton átmenő egyenes iránya konjugált egy másik, a középponton átmenő egyenes irányára, akkor előbbi párhuzamos lesz az utóbbinak az ellipszissel vett metszéspontjain átmenő érintőkkel. Az ábrán látható egyenesek tehát minden metszéspontban konjugáltak egymásra, és paralelogrammát alkotnak.

Felvetődik a kérdés, hogy milyen egységkörrel rendelkező Minkowski-metrikák esetén szimmetrikus a fentebbiek szerint definiált konjugáltsági reláció. Kiderül, hogy nem csak az ellipszisek ilyenek, hanem az úgynevezett *Radon-görbék* is.

Ha egy sokszög minden csúcsa a körszerű görbén van, akkor *beírt*, ha minden éle érinti a körszerű görbét, akkor *körülírt* sokszögről beszélünk.

Tétel. (Segre) Legyen $\partial\mathcal{G}$ körszerű görbe, O pedig ennek szimmetria-középpontja. Ha a $\partial\mathcal{G}$ bármely körülírt háromszöge perspektív az érintési pontjaiban vett beírt háromszöggel, akkor $\partial\mathcal{G}$ egy ellipszis.

Bizonyítás. Legyen ABC a $\partial\mathcal{G}$ körülírt valamely háromszög, és jelölje a csúcsokkal szemben lévő oldalegyenesek érintési pontjait rendre A', B' és C' .



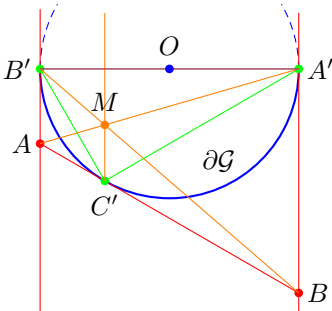
Ha $\partial\mathcal{G}$ egy ellipszis, akkor legyen φ egy olyan affinitás, melyre $\varphi(\partial\mathcal{G}) = \partial\mathcal{K}$ egy kör. A φ által elmozgatott pontokat jelöljük ugyanúgy, mint eredetileg, és az új ABC háromszögben a megfelelő csúcsoknál legyenek a belső szögek rendre $2\alpha, 2\beta$ és 2γ . A $\partial\mathcal{K}$ kör középpontja a szögfelezők metszéspontja, melynek az egyes oldalakra vett merőleges vetületei rendre A', B' és C' .

Eszerint

$$\frac{d(A, C')}{d(C', B)} = \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta}, \quad \frac{d(B, A')}{d(A', C)} = \frac{\cos \beta \sin \gamma}{\sin \beta \cos \gamma}, \quad \frac{d(C, B')}{d(B', A)} = \frac{\cos \gamma \sin \alpha}{\sin \gamma \cos \alpha}.$$

Ezek szorzata 1, ezért Ceva tétele szerint az AA', BB' és CC' egyenesek közös pontban metszik egymást, vagyis ABC és $A'B'C'$ perspektívek.

A fordított irány bizonyításához legyen $\partial\mathcal{G}$ egy körszerű görbe, melyre minden körülírt ABC háromszög és az érintési pontjaival mint csúcsokkal beírt $A'B'C'$ háromszög perspektív. Vegyük észre, hogy ez a konfiguráció „fordítva” is szemlélhető: a $\partial\mathcal{G}$ görbének a beírt $A'B'C'$ háromszög csúcsaiban vett, rendre a, b és c jelölésű érintőinek metszéspontjaiból kialakuló ABC háromszöge perspektív az $A'B'C'$ háromszöggel. Eszerint, hogy ha az $\overline{A'B'}$ szakasz a $\mathcal{G}$ egy átmérője, akkor a C' az egymással párhuzamos a és b egyenesek közös ideális pontja.



Rögzítve az $\overline{A'B'}$ szakaszt és az a és b érintőket, több olyan φ koordinátázás is van, melyben $\varphi(A') = (1, 0)$, $\varphi(B') = (-1, 0)$, $\varphi(a)$ az $x = 1$, $\varphi(b)$ az $x = -1$ egyenes, és $\varphi(O) = (0, 0)$. Legyen $(-1, y_A) = \varphi(A)$, és $(1, y_B) = \varphi(B)$ valamely alkalmas y_A és y_B koordinátákra.

Ekkor a BB' egyenes egyenlete $y_B x - 2y = -y_B$, az AA' egyenes egyenlete $-y_A x - 2y = -y_A$, amiért

$$\varphi(M) = \left(\frac{y_A - y_B}{y_A + y_B}, \frac{y_A y_B}{y_A + y_B} \right).$$

Ennek első koordinátája megegyezik a $\varphi(C')$ első koordinátájával és az AB egyenes egyenlete pedig $(y_B - y_A)x - 2y = -y_A - y_B$, tehát

$$\varphi(C') = \left(\frac{y_A - y_B}{y_A + y_B}, \frac{2y_A y_B}{y_A + y_B} \right).$$

Az y_A és y_B értékek felcserélése a $\varphi(C')$ második koordinátáját helyben hagyja, az első pedig az ellentettjére változtatja. Ez azt mutatja, hogy ha τ_ℓ az az origót fixen tartó affin tükrözés, melynek mátrixa a φ koordinátázásban $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, akkor a $\tau_\ell(A)$ és $\tau_\ell(B)$ pontok $\tau_\ell(c)$ egyenese éppen a $\tau_\ell(C')$ pontban érinti a $\partial\mathcal{G}$ görbét.

Tehát a $\partial\mathcal{G}$ görbe szimmetrikus az origón átmenő minden egyenesre. Az előző bizonyításban láttuk, hogy ez azt jelenti, hogy τ_ℓ egy izometria a $\mathcal{G}$ egységkörű Minkowski-metrikus affin síkon, amiből az ottani eljárás szerint következik, hogy ez a Minkowski-metrika euklidészi, vagyis $\varphi(\mathcal{G})$ ellipszis. ■

A Minkowski-féle és euklidészi affin metrikákról további olvasnivaló a [42] és [2] könyvekben található. Az affin metrikákkal szoros kapcsolatban lévő projektív metrikákról a [24] könyvben lehet olvasni.



Függelék

Ez a fejezet több célt is szolgál.

Egyrészt ide kerültek olyan, a könyvben nem definiált fogalmak és velük kapcsolatos alapismeretek, melyek nem közvetlenül kapcsolódnak a tárgyhoz, de mégis szükségesek, és az olvasást és megértést gyorsítja, ha az olvasónak nem kell ezek miatt minduntalan megfelelő könyvet keresnie. Az ilyen ismeretek közlése közben a szöveg legfeljebb példákkal szolgálja a fogalom gyorsabb felfogását, vagy még inkább az arra való emlékeztetést.

Másrészt a geometria tárgyalásához erősen kötődő olyan tudnivalók is itt kaptak helyet, amelyek szinte elkerülhetetlenek, de mégsem tartoznak szorosan a geometriai anyaghoz, vagy éppen odatartoznak ugyan, de a könyv jelen kereteit szétfeszítenék. Ezen anyagrészekben nemcsak a fogalmak vannak pontosan definiálva, de részletes bizonyítások is találhatóak.

F.1. Egy nem Desargues-tulajdonságú affin sík

Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény adott, és legyen minden $a, b, c \in \mathbb{R}$ számra

$$e_{a,b} := \{(x, y) : y = f(x + a) + b\}, \quad \text{és} \quad e_c := \{(x, y) : x = c\}.$$

Világos, hogy $e_c = e_{a,b}$ nem lehetséges. A $\mathcal{G}_f = \{e_c : c \in \mathbb{R}\} \cup \{e_{a,b} : a, b \in \mathbb{R}\}$ halmaz elemeit egyeneseknek nevezzük. Ezen egyeneseken most is a lexikografikus rendezést és megfordítottját adjuk meg.

A részletes vizsgálatok előtt vegyük észre, hogy a

$$\gamma: (\mathbb{R}^2, \mathcal{G}_f) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{G}_{\hat{f}}) \quad (x, y) \mapsto (\hat{x}, \hat{y}) = (x + a_0, b_0 y + c_0) \quad b_0 \neq 0$$

leképezés, ahol $\hat{f}(x) = b_0 f(x + a_0) + c_0$ tartja az egyeneseket, mert $\gamma(e_{a,b}) = \hat{e}_{a-a_0, b_0 b + c_0}$, és $\gamma(e_c) = \hat{e}_{a+a_0}$, ahol $\hat{e}$ jelöli $\mathcal{G}_{\hat{f}}$ elemeit.

Tétel. *Az $(\mathbb{R}^2, \mathcal{G}_f)$ rendszer akkor és csak akkor (nem feltétlen Desargues-típusú) affin sík, ha minden $0 \neq a \in \mathbb{R}$ esetén az $f(x) = f(x + a) + b$ egyenletnek pontosan egy megoldása van, és f folytonos.*

Bizonyítás. Először teszünk néhány alapvető megfigyelést.

Ha $e_{a,b} = e_{a',b'}$, akkor $f(x+a)+b = f(x+a')+b'$ azonosság, így az $x = y - a'$ helyettesítéssel $f(y+a_0) = f(y)+b_0$ is azonosság, ahol $a_0 = a - a'$, és $b_0 = b' - b$, tehát az $(a,b) \mapsto e_{a,b}$ hozzárendelés akkor és csak akkor injektív, ha a $g_{a_0}(y) := f(a_0+y) - f(y)$ függvényre a $g_{a_0}(y) = b_0$ egyenlet kizárólag $a_0 = 0 = b_0$ esetén azonosság.

Az $e_{a,b} \cap e_{a',b'}$ metszet akkor és csak akkor nem üres, ha $b = b'$, hiszen valamely $(x, f(x+a)+b) = (x', f(x'+a)+b')$ pontosan akkor, ha $x = x'$, és $f(x+a)+b = f(x'+a)+b'$, ami pontosan $b = b'$ esetén teljesül.

Szükségesség. Induljunk ki abból, hogy $(\mathbb{R}^2, \mathcal{G}_f)$ affin sík.

Ekkor bármely (x_0, y_0) pont és a $(0, 0)$ pont pontosan egy egyenesre illeszkedik. Ha $x_0 \neq 0$, akkor ez csak valamely $e_{a,b}$ egyenes lehet, így $0 = f(a)+b$ és $y_0 = f(x_0+a)+b$ is teljesül valamely $a, b \in \mathbb{R}$ számokra, tehát minden x_0, y_0 számra az $f(x_0+a) = f(a)+y_0$ egyenletnek pontosan egy megoldása létezik az a számra, vagyis az $f(x_0+a) - f(a)$ minden valós számértéket pontosan egyszer vesz fel, amint az a szám befutja a valós számokat.

Fentebbi megfigyeléseink alapján ezért $(a,b) \mapsto e_{a,b}$ injektív.

Ha $a' \neq a$, akkor az $e_{a,b}$ és $e_{a',b'}$ különböző egyenesek az $(x, f(x+a)+b) = (x, f(x+a')+b')$ pontban metszik egymást, ahol $x+a = z$ egy olyan szám, melyre $(b-b') = f((a'-a)+z) - f(z)$ (ennek létét már igazoltuk). Affin síkon ilyen metszéspont csak egy lehet, vagy a két egyenes egybeesik, ezért az $(a,b) \mapsto e_{a,b}$ hozzárendelés injektivitása alapján ez igazolja, hogy az $f(x) = f(x+a)+b$ egyenletnek $a \neq 0$ esetén legfeljebb egy megoldása van.

Most igazoljuk, hogy f folytonos.

Legyen $x_n \nearrow x_\infty$ egy tetszőleges szigorúan monoton növekvő sorozat, és tekintsük az $(x_n, f(x_n+a)+b)$ pontokat az $e_{a,b}$ egyenesen. A Dedekind-axióma szerint az $(x_n, f(x_n+a)+b)$ pontok halmazának van alsó és felső határa az $e_{a,b}$ egyenes rendezésében. Ez a rendezés az első koordináták rendezettségével szigorúan monoton kapcsolatban van, ezért a felső határ $(x_\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}+a)+b)$ valamely $\{n_k\}_{k=0}^\infty$ sorozatra. A felső határ az $e_{a,b}$ egyenesen van, tehát $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}+a)+b = f(x_\infty+a)+b$.

Eszerint minden $x_n \nearrow x_\infty$ szigorúan monoton növekvő sorozatnak van olyan $\{x_{n_k}\}_{k=0}^\infty$ szigorúan monoton növekvő részsorozata, amelyre $\{f(x_{n_k}+a)\}_{k=0}^\infty$ konvergens, és $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}+a) = f(x_\infty+a)$. Ha lenne olyan $x_m \nearrow x_\infty$ szigorúan monoton növekvő sorozat, melyre az $\{f(x_m+a)\}_{m=0}^\infty$ halmaznak több torlódási pontja is lenne, akkor annak lenne olyan $\{x_{m_n}\}_{n=0}^\infty$ részsorozata, melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{m_n}+a) \neq f(x_\infty+a)$, és így ennek a szigorúan monoton $\{x_{m_n}\}_{n=0}^\infty$ részsorozatnak nem lehetne olyan szigorúan monoton részsorozata, melyhez tartozó

függvényértékek konvergens sorozatot alkotnak $f(x_\infty + a)$ határértékkel. Ebből az ellentmondásból következik, hogy minden $x_n \nearrow x_\infty$ szigorúan monoton növekvő sorozatra az $\{f(x_n + a)\}_{n=0}^\infty$ sorozatnak legfeljebb egy torlódási pontja van, ami viszont a fentebbiek szerint létezik, és éppen $f(x_\infty + a)$. Ez igazolja f folytonosságát.

Elégesség. Most abból indulunk ki, hogy minden $0 \neq a, b \in \mathbb{R}$ esetén az $f(x + a) + b = f(x)$ egyenletnek pontosan egy megoldása van, és f folytonos.

Mivel f folytonos, a $g_a(x) = f(x + a) - f(x)$ is folytonos függvény, és $a \neq 0$ esetén minden értékét pontosan egyszer veszi fel, ezért szigorúan monoton is.

Minden $e_{a,b}$ egyenes két részre osztja a sík rajta kívül eső pontjait. Ezek az $\check{e}_{a,b} = \{(x, y) : y > f(x + a) + b\}$ és $\hat{e}_{a,b} = \{(x, y) : y < f(x + a) + b\}$ tartományok.

Mivel $g_a(x) = b$ csak $a = b = 0$ esetén azonosság, az $e_{a,b}$ és az $e_{a',b'}$ egyenesek $a \neq a'$ esetén pontosan egy pontban metszik egymást. Legyen ez a pont (x_0, y_0) . Ekkor $y_0 = f(x_0 + a) + b = f(x_0 + a') + b'$ miatt $f(x_0 + a') - f(x_0 + a) = b - b'$, ami az $x_0 = z_0 - a$ helyettesítéssel a $g_{a'-a}(z_0) = b - b'$ eredményt adja. Mivel g szigorúan monoton, ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} \text{ha } g \text{ növekvő} \quad & \begin{cases} f(x + a) + b < f(x + a') + b', & \text{ha } x < x_0, \\ f(x + a) + b > f(x + a') + b', & \text{ha } x_0 < x, \end{cases} \\ \text{ha } g \text{ fogyó} \quad & \begin{cases} f(x + a) + b > f(x + a') + b', & \text{ha } x < x_0, \\ f(x + a) + b < f(x + a') + b', & \text{ha } x_0 < x, \end{cases} \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy az $(x_0, y_0) = e_{a,b} \cap e_{a',b'}$ pont az $\check{e}_{a,b} \cap e_{a',b'}$ és $\hat{e}_{a,b} \cap e_{a',b'}$ félegyenesekre vágja az $e_{a',b'}$ egyenest.

Most ellenőrizni kell az affin-geometriai axiómákat az $(\mathcal{S}, \mathcal{G}_f)$ rendszerre.

Illeszkedési axiómák. Az (I_0) és (I_1) axiómák abból következnek, hogy az $(x_0, f(x_0 + a) + b)$, $(x_1, f(x_1 + a) + b)$, $(x_2, f(x_2 + a) + b')$ pontok nem illeszkedhetnek az első kettő közös $e_{a,b}$ egyenesére, ha $b' \neq b$.

Az (I_2) axióma ellenőrzéséhez tekintsük az (x_0, y_0) és (x_1, y_1) pontokat. Ha $x_0 = x_1$, akkor ezek az e_{x_0} egyenesre illeszkednek. Ha $x_0 \neq x_1$, akkor arra az $e_{a,b}$ egyenesre illeszkednek, melyre $y_0 = f(x_0 + a) + b$ és $y_1 = f(x_1 + a) + b$ teljesül. Ilyen $a, b \in \mathbb{R}$ számpár pontosan egy létezik, mert feltételünk szerint az $y_1 - y_0 = f(x_1 + a) - f(x_0 + a) = g_{x_1 - x_0}(a + x_0)$ egyenletnek az a változóra $x_0 \neq 0$ esetén egyértelmű megoldása létezik, akkor pedig $b = y_0 - f(x_0 + a)$.

Az (I_3) párhuzamossági axióma vizsgálatához vegyünk egy tetszőleges (x_0, y_0) pontot. Egy $e_{a,b}$ egyenessel párhuzamos egyenest keresve emlékezzünk, hogy $e_{a,b} \cap e_c$ sosem, $e_{a,b} \cap e_{a',b'}$ pedig pontosan akkor üres, ha $a = a'$. Így az (x_0, y_0) ponton átmenő $e_{a,b}$ egyenessel párhuzamos egyenes pontosan az $e_{a',b'}$ egyenes, melyre $a' = a$, és $b' = y_0 - f(x_0 + a)$. Egy e_c egyenessel párhuzamos egyenest keresve emlékezzünk, hogy $e_c \cap e_{a',b'}$ sosem, $e_c \cap e_{c'}$ pedig pontosan akkor üres, ha $c \neq c'$, így az (x_0, y_0)

ponton átmenő e_c egyenessel párhuzamos egyenes pontosan az $e_{c'}$ egyenes, melyre $c' = x_0$.

Rendezési axiómák. Az (R_1) triviálisan teljesül, hiszen a megadott lexikografikus rendezés és a megfordítottja is nyilván teljes.

Az (x_0, y_0) és (x_1, y_1) pontok nyílt szakasza

$$\overline{(x_0, y_0)(x_1, y_1)} = \begin{cases} \{(x_0, y) : y_0 < y < y_1\}, & \text{ha } x_0 = x_1 \text{ és } y_0 < y_1, \\ \{(x_0, y) : y_1 < y < y_0\}, & \text{ha } x_0 = x_1 \text{ és } y_1 < y_0, \\ \{(x, f(x+a)+b) : x_0 < x < x_1\}, & \text{ha } x_0 < x_1, \\ \{(x, f(x+a)+b) : x_1 < x < x_0\}, & \text{ha } x_1 < x_0, \end{cases}$$

ahol a az $y_1 - y_0 = g_{x_1-x_0}(a+x_0)$ egyetlen megoldása, és $b = y_0 - f(x_0+a)$.

Megmutatjuk, hogy az $\check{e}_{a,b}$ és $\hat{e}_{a,b}$ tartományok éppen a félsíkok. Tekintsük ehhez az $e_{a,b}$ egyenest és a rajta kívüli (x_{-1}, y_{-1}) és (x_1, y_1) pontokat.

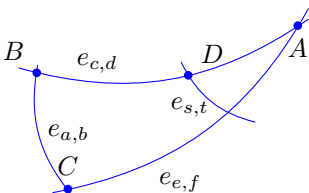
Ha $x_{-1} = x_1$, akkor ezen pontok közös egyenese e_{x_1} , mely az $(x_1, f(x_1+a)+b)$ pontban metszi az $e_{a,b}$ egyenest, így a két pont szakasza akkor és csak akkor metszi az $e_{a,b}$ egyenest, ha $y_{-1} < f(x_1+a)+b < y_1$, vagy $y_1 < f(x_1+a)+b < y_{-1}$, ami azzal ekvivalens, hogy az egyik pont az $\check{e}_{a,b}$, a másik pont az $\hat{e}_{a,b}$ tartományba esik.

Ha $x_{-1} \neq x_1$, akkor a közös egyenesük olyan $e_{\bar{a},\bar{b}}$ egyenes, ahol $\bar{a}$ az $y_1 - y_{-1} = g_{x_1-x_{-1}}(\bar{a}+x_{-1})$ egyetlen megoldása, és $\bar{b} = y_{-1} - f(x_{-1}+\bar{a})$.

Ha az $e_{\bar{a},\bar{b}}$ egyenes nem metszi az $e_{a,b}$ egyenest, akkor $a = \bar{a}$, és az $e_{\bar{a},\bar{b}}$ egyenes egésze az $\check{e}_{a,b}$ tartományba esik, ha $\bar{b} > b$, illetve az $\hat{e}_{a,b}$ tartományba esik, ha $\bar{b} < b$.

Ha az $e_{\bar{a},\bar{b}}$ egyenes metszi az $e_{a,b}$ egyenest valamely (x_0, y_0) pontban, akkor a két pont szakasza pontosan akkor metszi az $e_{a,b}$ egyenest, ha a végpontjai az $e_{\bar{a},\bar{b}}$ egyenes (x_0, y_0) szerinti különböző félegyenesekbe esnek. Fentebb láttuk, hogy ez a két félegyenes $\check{e}_{a,b} \cap e_{\bar{a},\bar{b}}$ és $\hat{e}_{a,b} \cap e_{\bar{a},\bar{b}}$, ami bizonyítja, hogy a két pont szakasza pontosan akkor metszi az egyenest, ha különböző tartományokba esnek. Ezzel igazoltuk, hogy az $\check{e}_{a,b}$ és $\hat{e}_{a,b}$ tartományok az affin sík $e_{a,b}$ egyeneshez tartozó félsíkjai.

Az (R_2) Pasch-axióma ellenőrzéséhez vegyük az $\check{e}_{a,b} \cap \hat{e}_{c,d} \cap \check{e}_{e,f}$ háromszöget, melynek csúcsai $A = e_{e,f} \cap e_{c,d}$, $B = e_{c,d} \cap e_{a,b}$, $C = e_{a,b} \cap e_{e,f}$.



Legyen $D \in \overline{AB}$, és $D \in e_{s,t}$. A félegyenesek és félsíkok kapcsolatára építve az alábbi következtetéseket tehetjük. Először, amikor $B \in \hat{e}_{s,t}$ és $A \in \check{e}_{s,t}$. Ha $C \in \check{e}_{s,t}$, akkor $\overline{BC} \cap e_{s,t} \neq \emptyset$, ha $C \in \hat{e}_{s,t}$, akkor $\overline{CA} \cap e_{s,t} \neq \emptyset$. A második, $B \in \check{e}_{s,t}$ és $A \in \hat{e}_{s,t}$ esetben ugyanígy látható, hogy $e_{s,t}$ az $\overline{AC}$ és $\overline{BC}$ szakaszok pontosan egyikét metszi, ami igazolja a Pasch-axióma teljesülését.

Folytonossági axiómák. Mivel az f függvény folytonos, és az egyeneseken a lexikografikus rendezés adott, mindkét axióma teljesülése nyilvánvaló. ■

Eredményünket használva annyi különféle affin síkot (affin sík-modellt) találhatunk, amennyi a feltételeknek megfelelő függvényt tudunk mutatni.

Tétel. Egy $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényre az $f(x+a) - f(x) = b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) egyenletnek akkor és csak akkor van minden $a \neq 0$ esetén pontosan egy megoldása, ha f szigorúan konvex, és $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)/x = \pm\infty$, vagy f szigorúan konkáv, és $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)/x = \mp\infty$.

Bizonyítás. Legyen most is $g_a(x) = f(x+a) - f(x)$.

Először a tétel „csak akkor” részét igazoljuk, amihez az $f(x+a) - f(x) = b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) egyenlet egyértelmű megoldhatóságából indulunk ki.

Az előbbi bizonyításban láttuk, hogy f folytonosságából és az egyenlet egyértelmű megoldhatóságából következik, hogy g_a szigorúan monoton, és minden valós szám $g_a(x)$ értékkészletében van. Ebből következik, hogy $a \neq 0$ esetén

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g_a(x) = \begin{cases} \pm\infty, & \text{ha } g_a \text{ monoton növekvő,} \\ \mp\infty, & \text{ha } g_a \text{ monoton fogyó.} \end{cases}$$

Vegyük azt az esetet, amikor $g_a(x)$ növekvő, és tekintsük a $h_x(a) = g_a(x) - g_a(x-a)$ függvényt. Ez nyilván folytonos, monoton növekvő, a $g_a(x) = b$ egyenlet egyértelmű megoldhatósága következtében pontosan $a = 0$ esetén nulla, és mivel g_a monoton növése miatt $g_a(x) \leq g_a(x-a)$,

$$h_x(a) \begin{cases} > 0, & \text{ha } 0 < a, \\ = 0, & \text{ha } a = 0, \\ < 0, & \text{ha } a < 0. \end{cases}$$

Ezen egyenlőtlenségek kis átrendezésével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(x) &< \frac{f(x-a) + f(x+a)}{2}, & \text{ha } 0 < a, \\ f(x) &> \frac{f(x-a) + f(x+a)}{2}, & \text{ha } a < 0. \end{aligned}$$

Minthogy f folytonos, ebből következik, hogy szigorúan konvex vagy konkáv, aszerint, hogy a pozitív vagy negatív.

Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra

$$f(x + (n+1)a) - f(x) = g_a(x+na) + g_a(x+(n-1)a) + \cdots + g_a(x+a) + g_a(x),$$

és a g_a monotonitása miatt

$$\begin{aligned} g_a(x) &< \frac{f(x+(n+1)a) - f(x)}{n+1} < g_a(x+na), & \text{ha } a > 0, \\ g_a(x+na) &< \frac{f(x+(n+1)a) - f(x)}{n+1} < g_a(x), & \text{ha } a < 0 \end{aligned}$$

adódik. Ebből minden $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{f(y)}{y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + (n+1) \cdot 1)}{n+1} \geq g_1(x),$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{f(y)}{y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + (n+1) \cdot (-1))}{n+1} \leq g_{-1}(x)$$

következik, amiért $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} f(y)/y = \pm\infty$ adódik.

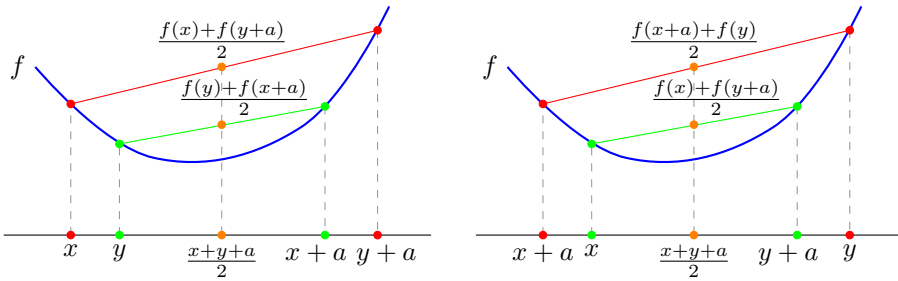
Abban az esetben, amikor $g_a(x)$ fogyó, ugyanez az eljárás a $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} f(y)/y = \mp\infty$ eredményre vezet, amivel a tétel „csak akkor” részét igazoltuk.

Az „akkor” állítás bizonyításához induljunk ki abból, hogy f konvex, és $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} f(y)/y = \pm\infty$.

Vegyük észre, hogy az $x, y, x+a, y+a$ számok által alkotott zárt és nyílt intervallumokra

$a > 0$	$a < 0$
$[y+a, x] \subsetneq (y, x+a)$ ha $y < x-a$,	$[y, x+a] \subsetneq (y+a, x)$ ha $y < x+a$,
$[x, y+a] \subsetneq (y, x+a)$ ha $x-a < y < x$,	$[x+a, y] \subsetneq (y+a, x)$ ha $x+a < y < x$,
$[y, x+a] \subsetneq (x, y+a)$ ha $x < y < x+a$,	$[y+a, x] \subsetneq (x+a, y)$ ha $x < y < x-a$,
$[x+a, y] \subsetneq (x, y+a)$ ha $x+a < y$,	$[x, y+a] \subsetneq (x+a, y)$ ha $x-a < y$,

amiből az f szigorú konvexitása miatt



az ábrán látható példák szerint következik, hogy

$$\begin{cases} \frac{f(x+a)+f(y)}{2} < \frac{f(x)+f(y+a)}{2}, & \text{ha } 0 < a \text{ és } x < y, \text{ vagy } a < 0 \text{ és } y < x, \\ f(x) + f(y+a) < f(x+a) + f(y), & \text{ha } 0 < a \text{ és } y < x, \text{ vagy } a < 0 \text{ és } x < y, \end{cases}$$

vagyis $g_a(x)$ szigorúan monoton növekszik, ha $a > 0$, és szigorúan monoton fogy, ha $a < 0$, így $g_a(x) = g_a(y)$ kizárólag $a = 0$ esetben állhat elő.

Most belátjuk, hogy a $g_a(x) = b$ egyenletnek mindig van megoldása.

Mivel g_a monoton, és minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra

$$f(x + (n+1)a) - f(x) = g_a(x + na) + g_a(x + (n-1)a) + \cdots + g_a(x+a) + g_a(x),$$

azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} g_a(x) &< \frac{f(x + (n+1)a) - f(x)}{n+1} < g_a(x+na), & \text{ha } a > 0, \\ g_a(x+na) &< \frac{f(x + (n+1)a) - f(x)}{n+1} < g_a(x), & \text{ha } a < 0. \end{aligned}$$

Ha $a > 0$, akkor

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +\infty} g_a(y) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} g_a(x+na) \\ &\geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x + (n+1)a) - f(x)}{n+1} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{f(z)}{z} = +\infty, \\ \lim_{y \rightarrow -\infty} g_a(y) &\leq \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{f(y + [-y/a]a) - f(y)}{[-y/a]} \\ &= \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{-f(y)}{[-y/a]} = a \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{f(y)}{y} = -\infty. \end{aligned}$$

Ezen egyenlőtlenségekből és g_a folytonosságából következik, hogy g_a minden valós értéket felvesz. Hasonló becslést az $a < 0$ esetben végezve, a tétel utolsó állítása is bizonyításra kerül. ■

Eszerint minden $f(x) = x^{2k}$ ($k \in \mathbb{N}$) függvényre $(\mathbb{R}^2, \mathcal{G}_f)$ egy affin sík.

Tétel. Az $(\mathbb{R}^2, \mathcal{G}_f)$ affin sík pontosan akkor Desargues-féle, ha f másodfokú polinom.

Bizonyítás. Először az „akkor” állítást igazoljuk. Tekintsük a valós affin sík egyenesinek $\mathcal{G} = \{g_{a,b,c} \subset \mathbb{R}^2 : g_{a,b,c} = \{(x,y) : ax + by = c\}, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ halmazát, és a nyilván bijektív

$$\gamma : (\mathbb{R}^2, \mathcal{G}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{G}_{x^2}) \quad (x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y}) = (x, y + x^2)$$

leképezést.

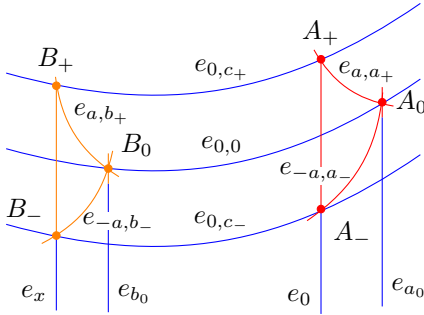
Vegyük észre, hogy $\gamma(g_{a,0,c}) = e_{c/a}$, és ha $b \neq 0$, és $(\bar{x}, \bar{y}) \in \gamma(g_{a,b,c})$, akkor $(\bar{x}, \bar{y}) = (x, y + x^2)$ valamely $(x, y) \in g_{a,b,c}$ pontra, amiért az $x = \bar{x}$ és $y = \bar{y} - \bar{x}^2$ koordinátákra $a\bar{x} + b(\bar{y} - \bar{x}^2) = c$ teljesül, így $\bar{y} = (\bar{x} + \frac{-a}{b})^2 + (\frac{c}{b} + \frac{a^2}{4b^2})$ következik, amiért $\gamma(g_{a,b,c}) = e_{\frac{-a}{b}, \frac{c}{b} + \frac{a^2}{4b^2}}$.

Eszerint a γ kollineáció, így megőrzi az egyenesek közti illeszkedési viszonyokat, ezért a Desargues-tulajdonság teljesülését is.

Tekintettel arra, hogy az $(\mathbb{R}^2, \mathcal{G}_f)$ affin sík izomorf az $(\mathbb{R}^2, \mathcal{G}_f)$ affin síkkal, ahol $\hat{f}(x) = b_0 f(x + a_0) + c_0$, $a_0, b_0, c_0 \in \mathbb{R}$, és $b_0 \neq 0$, ez bizonyítja a tétel „akkor” állítását.

A fordított irányú állításhoz abból indulunk ki, hogy $(\mathbb{R}^2, \mathcal{G}_f)$ Desargues-típusú, és keressük az ebben használt folytonos f függvényt. Mivel $(\mathbb{R}^2, \mathcal{G}_f)$ affin, előző tételünk alapján f szigorúan konvex, és $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)/x = \pm\infty$, vagy f szigorúan konkáv, és $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)/x = \mp\infty$. Mivel az $(\mathbb{R}^2, \mathcal{G}_f)$ affin sík izomorf az $(\mathbb{R}^2, \mathcal{G}_{-f})$ affin síkkal, feltehető, hogy f konvex.

Tekintsünk az $e_{0,0}$ egyenesen egy tetszőleges A_0 pontot. Legyen $a \neq 0$ és e_{a,a_+} és e_{-a,a_-} két egyenes ezen az A_0 ponton keresztül. Ezek metszete az e_0 egyenessel legyen rendre A_+ és A_- . Vegyük rendre ezeken a pontokon át az $e_{0,0}$ egyenessel párhuzamos e_{0,c_+} és e_{0,c_-} egyeneseket.



Ahogy az ábrán is látható, vegyünk egy újabb tetszőleges B_0 pontot az $e_{0,0}$ egyenesen, és az ezen keresztüli e_{a,b_+} és e_{-a,b_-} egyeneseket, melyek metszete az e_{0,c_+} és e_{0,c_-} egyenesekkel rendre B_+ és B_- .

Nyilván $e_{0,c_+} \parallel e_{0,0} \parallel e_{0,c_-}$, és $e_{a_0} \parallel e_0 \parallel e_{b_0}$, ahol $A_0 \in e_{a_0}$ és $B_0 \in e_{b_0}$. Mivel $(\mathbb{R}^2, \mathcal{G}_f)$ Desargues-típusú, a B_-B_+ egyenes párhuzamos kell legyen az e_0 egyenessel, vagyis valamely $x \in \mathbb{R}$ számra

$B_-, B_+ \in e_x$. Tekintve a pontokat, az alábbi egyenletekhez jutunk:

$$\begin{aligned} A_0 : \quad & f(a_0) = f(a_0 + a) + a_+ = f(a_0 - a) + a_- , \\ A_+ : \quad & f(0) + c_+ = f(a) + a_+ , \\ A_- : \quad & f(0) + c_- = f(-a) + a_- , \\ B_0 : \quad & f(b_0) = f(b_0 + a) + b_+ = f(b_0 - a) + b_- , \\ B_+ : \quad & f(x) + c_+ = f(x + a) + b_+ , \\ B_- : \quad & f(x) + c_- = f(x - a) + b_- . \end{aligned}$$

Így előbb $B_\bullet$, majd az $A_\bullet$ pontokra vonatkozó egyenleteket használva:

$$\begin{aligned} c_+ + c_- &= f(x + a) + b_+ - f(x) + f(x - a) + b_- - f(x) \\ &= f(x + a) + f(x - a) - 2f(x) - (f(b_0 + a) + f(b_0 - a) - 2f(b_0)), \\ c_+ + c_- &= f(a) + a_- f(0) + f(-a) + a_- - f(0) \\ &= f(a) + f(-a) - 2f(0) - (f(a_0 + a) + f(a_0 - a) - 2f(a_0)). \end{aligned}$$

Legyen $h_a(x) := f(x + a) + f(x - a) - 2f(x) = g_a(x) + g_{-a}(x)$. Ekkor $h_a > 0$, mert f konvex, h_a folytonos, mert f folytonos, és $h_a(x) + h_a(a_0) = h_a(0) + h_a(b_0)$ az egyenleteink szerint. Legyen $0 \leq h_{\inf} = \inf\{h_a(x) : x \in \mathbb{R}\}$, ha létezik, akkor legyen $h_{\sup} = \sup\{h_a(x) : x \in \mathbb{R}\}$, ellenkező esetben pedig $h_{\sup} = \infty$.

Azt állítjuk, hogy $h_a(x) \equiv h_a(0)$, és ezt indirekt úton bizonyítjuk, ezért felteesszük, hogy $h_{\inf} \leq h_{\sup}$.

Ha $h_a(0) = h_{\sup}$, legyen $\varepsilon > 0$ olyan, hogy $h_{\inf} + 3\varepsilon < h_{\sup}$. Legyen a_0 olyan, hogy $h_a(a_0) < h_{\inf} + \varepsilon$, b_0 pedig olyan, hogy $h_{\sup} - \varepsilon < h_a(b_0)$. Ekkor

$$h_a(x) + h_a(a_0) < h_{\sup} + h_{\inf} + \varepsilon < 2h_{\sup} - \varepsilon < h_a(0) + h_a(b_0),$$

ami ellentmondás, amiért $h_a(0) \leq h_{\sup}$, akár létezik $h_{\sup}$, akár $h_{\sup} = \infty$.

Mivel $h_a(0) \leq h_{\sup}$, van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $h_a(0) + 3\varepsilon < h_{\sup}$. Legyen a_0 olyan, hogy $h_a(0) + 2\varepsilon < h_a(a_0)$, b_0 pedig olyan, hogy $h_a(b_0) < h_{\inf} + \varepsilon$. Ekkor

$$h_{\inf} + h_a(0) + 2\varepsilon < h_a(x) + h_a(a_0) = h_a(0) + h_a(b_0) < h_a(0) + h_{\inf} + \varepsilon,$$

ami ismét csak ellentmondás.

Eszerint $h_{\inf} \leq h_{\sup}$ nem lehetséges, vagyis $h_{\inf} = h_{\sup}$, tehát $h_a(x) \equiv h_a(0)$, vagyis a $k(a) = h_a(0) > 0$ függvényre

$$f(x+a) + f(x-a) = 2f(x) + k(a) \quad x, a \in \mathbb{R},$$

tehát $g_a(x) = g_a(x-a) + k(a)$, ahol most is $g_a(x) = f(x+a) - f(x)$.

Legyen $\hat{g}_a(x) = g_a(x) - g_a(0)$, ekkor $\hat{g}_a(x) = \hat{g}_a(x-a) + k(a)$, $\hat{g}_a(0) = 0$, és így $\hat{g}_a(a) = \hat{g}_a(0) + k(a) = k(a)$, tehát $\hat{g}_a(x) = \hat{g}_a(x-a) + \hat{g}_a(a)$, amiből $\hat{g}_a(x + (m+1)a) = \hat{g}_a(x + ma) + \hat{g}_a(a) = \dots = \hat{g}_a(x) + (m+1)\hat{g}_a(a)$. Az $x = 0$ esetben ebből $\hat{g}_a(na) = n\hat{g}_a(a)$ következik.

Írjuk ezt fel az első n természetes számra:

$$\begin{aligned} f((n+1)a) - f(na) - (f(a) - f(0)) &= n(f(2a) - f(a) - (f(a) - f(0))) \\ f(na) - f((n-1)a) - (f(a) - f(0)) &= (n-1)(f(2a) - f(a) - (f(a) - f(0))) \\ &\vdots \\ f(2a) - f(a) - (f(a) - f(0)) &= 1(f(2a) - f(a) - (f(a) - f(0))). \end{aligned}$$

Ezek összege

$$f((n+1)a) - f(a) - n(f(a) - f(0)) = \frac{n(n+1)}{2}(f(2a) - 2f(a) + f(0)),$$

vagyis

$$f((n+1)a) = (n+1)^2 \frac{f(2a) - 2f(a) + f(0)}{2} + (n+1) \frac{4f(a) - f(2a) - 3f(0)}{2} + f(0).$$

Legyen $b = \frac{p}{q}a$ és $m = \ell q$, ahol $p, q, \ell, m \in \mathbb{Z}$ egész számok. Ekkor

$$\begin{aligned} \ell^2 q^2 \frac{f(2b) - 2f(b) + f(0)}{2} + \ell q \cdot \frac{4f(b) - f(2b) - 3f(0)}{2} + f(0) \\ = f(\ell qb) = f(\ell pa) \\ = \ell^2 p^2 \frac{f(2a) - 2f(a) + f(0)}{2} + \ell p \cdot \frac{4f(a) - f(2a) - 3f(0)}{2} + f(0). \end{aligned}$$

Az ℓ változóban kapott két polinom minden ℓ egészre való megegyezése miatt a polinomok együtthatói is megegyeznek, tehát

$$\begin{aligned} \frac{f(2b) - 2f(b) + f(0)}{2} &= \left(\frac{p}{q}\right)^2 \frac{f(2a) - 2f(a) + f(0)}{2}, \\ \frac{4f(b) - f(2b) - 3f(0)}{2} &= \left(\frac{p}{q}\right) \frac{4f(a) - f(2a) - 3f(0)}{2}. \end{aligned}$$

Ezeket összeadva

$$\begin{aligned} f\left(\frac{p}{q}a\right) = f(b) &= \frac{f(2b) - 2f(b) + f(0)}{2} + \frac{4f(b) - f(2b) - 3f(0)}{2} + f(0) \\ &= \left(\frac{p}{q}\right)^2 \frac{f(2a) - 2f(a) + f(0)}{2} + \left(\frac{p}{q}\right) \frac{4f(a) - f(2a) - 3f(0)}{2} + f(0). \end{aligned}$$

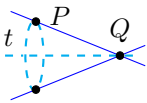
Mivel f folytonos, ez nem csak a p/q racionális számokra, hanem minden $x \in \mathbb{R}$ valós számra is érvényes. Az $a = 1$ választással az

$$f(x) = x^2 \frac{f(2) - 2f(1) + f(0)}{2} + x \cdot \frac{4f(1) - f(2) - 3f(0)}{2} + f(0)$$

másodrendű polinom adódik, ahol $f(2) - 2f(1) + f(0) > 0$, mert f konvex. Ez bizonyítja a tétel „csak akkor” állítását, amivel a tétel igazolását befejeztük. ■

Eredményünk szerint tehát $k > 1$ esetén az $(\mathbb{R}^2, \mathcal{G}_{x^{2k}})$ affin sík *nem* Desargues-féle, tehát nem is lehet izomorf az $\mathbb{R}^2$ valós affin síkkal, és nem lehet egy affin tér síkjával sem izomorf.

F.2. Kúpszeletek és a kúpok szeletei

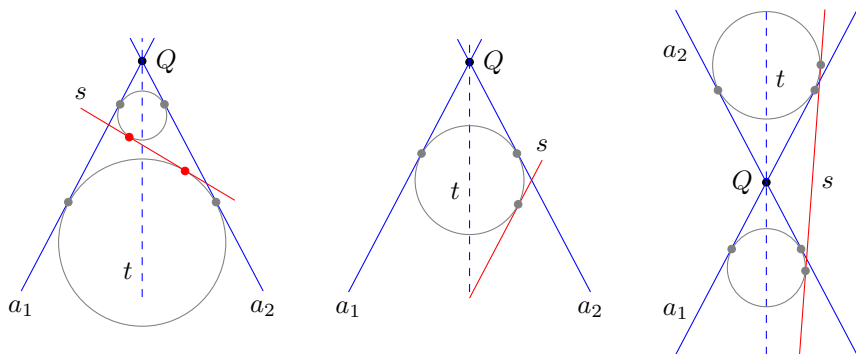


Vegyünk fel egy O középpontú $\mathcal{K}$ kört a térben, legyen t az O ponton átmenő, a $\mathcal{K}$ síkjára merőleges egyenes, és ezen legyen adott egy $Q \neq O$ pont is. A QP ($P \in \mathcal{K}$) egyenesek pontjai által alkotott ponthalmazt *egyenés körkúp*nak vagy egyszerűen *kúp*nak nevezzük. A Q pontot *csúcspont*nak, a QP ($P \in \mathcal{K}$) egyeneseket *alkotóknak*, a $\mathcal{K}$ kör síkját *alapsíknak*, a t egyenest pedig *tengelynek* nevezzük.

Az alkotók a tengellyel is és az alappal is állandó szöget zárnak be, ezért az egyenes kúp a tengelyére forgásszimmetrikus. A kúp csúcsán átmenő azon egyeneseket, melyek az alapsíkot a kör belső pontjában metszik, a kúp *belső egyenesének* ezek pontjait pedig *belső pontoknak* nevezzük. Egy ponthalmazra azt mondjuk, hogy *belülről érinti a kúpot*, ha minden pontja a kúp belső vagy határpontja. Ha minden pontja a kúp külső vagy határpontja, akkor *kívülről érintő* ponthalmazról beszélünk.

Tétel. *A kúp csúcspontján nem áthaladó síkkal elmetezett egyenes kúp belsejében aszerint létezik egy vagy kettő olyan gömb, amely a kúpot körben és a síkot egy pontban érinti, hogy a sík egy vagy nem egy alkotóval párhuzamos.*

Bizonyítás. Messe az egyenes kúpot az $\mathcal{S}$ sík. Tekintsünk az erre merőleges, a kúp t tengelyére illeszkedő $\mathcal{T}$ síkot. Legyen ennek metszete a kúppal az a_1 és a_2 alkotó, az $\mathcal{S}$ síkkal pedig az s egyenes.



Szögfelezőkkel könnyű megtalálni azon körök középpontját, amelyek az s egyenest és az a_1, a_2 alkotókat belülről érintik. Ha az s mindkét alkotót metszi, akkor pontosan két ilyen kör van, ha pedig az s az egyik alkotóval párhuzamos, akkor csak egy ilyen érintő kör létezik.

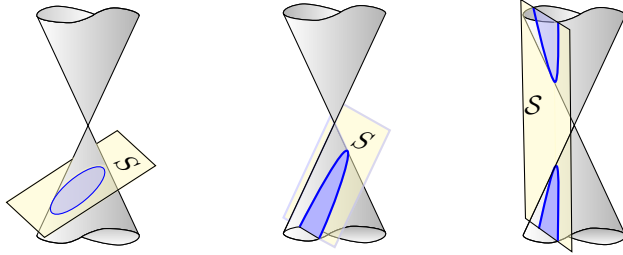
Ezen köröket a t tengely körül megforgatva megkapjuk a tételben állított gömböket. Ezek a gömbök egy-egy pontban érintik az $\mathcal{S}$ síkot, mégpedig a gömb és az s egyenes érintési pontjában, mert középpontja az t tengelyen van, amelynek merőleges vetülete az $\mathcal{S}$ síkra az s egyenes, így a gömb és az s egyenes érintési pontja éppen a gömb középpontjának merőleges vetülete az $\mathcal{S}$ síkra.

Mivel a gömböt eredményező kör két alkotót érint, a gömb pontosan e két érintési pont tengely körüli forgatásával keletkező körben érinti a kúpot. ■

A most megtalált gömböket *Dandelin-gömböknek* nevezik.

Tétel. *A kúpszeletek pontosan a kúpoknak a csúcson nem átmenő, a tengelyre nem merőleges síkokkal való metszeteiként előálló síkgörbék. A metszet*

ellipszis, ha a metsző sík a kúp egyetlen alkotójával sem párhuzamos,
 parabola, ha a metsző sík a kúp egyetlen alkotójával párhuzamos, és
 hiperbola, ha a metsző sík két alkotóval párhuzamos.

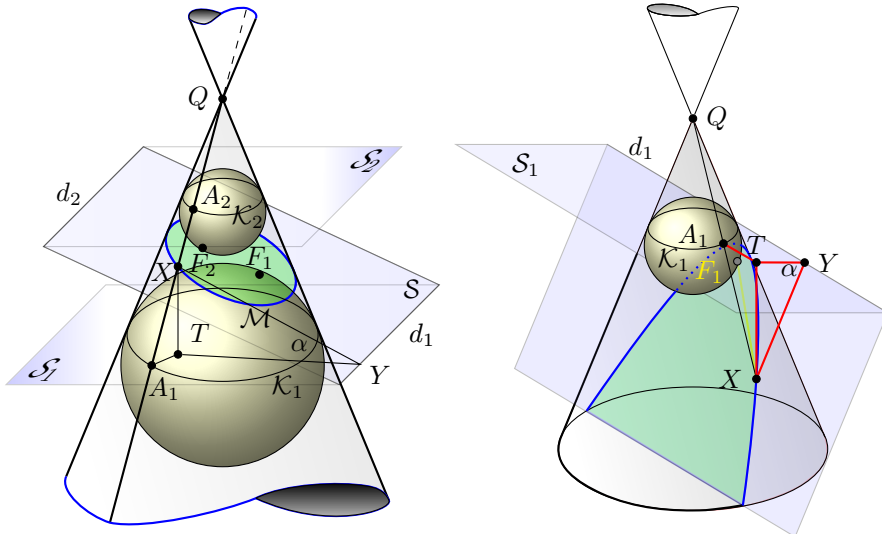


Bizonyítás. Tekintsünk egy kúpot és a csúcsára nem illeszkedő $\mathcal{S}$ síkot.

A csúcspontra illeszkedő, $\mathcal{S}$ síkkal párhuzamos sík a kútból vagy csak a csúcspontot, vagy egyetlen alkotót, vagy pedig két egymást metsző alkotót metsz ki, ezért az $\mathcal{S}$ sík egyetlen alkotóval sem párhuzamos, és csak az egyik félkúpot metszi, vagy egyetlen alkotóval párhuzamos, és ugyancsak az egyik félkúpot metszi, vagy két alkotóval párhuzamos, és mindkét félkúpra belemetsz.

Ha az $\mathcal{S}$ sík merőleges a kúp tengelyére, akkor a kimetszett görbe nyilván kör, ezért a továbbiakban csak a tengelyre nem merőleges $\mathcal{S}$ sík esetével foglalkozunk.

A Dandelin-gömböket jelölje $\mathcal{G}_i$, ahol $i = 1, 2$ (ha csak egyetlen ilyen gömb van, akkor persze csak $i = 1$). A $\mathcal{G}_i$ gömb érintse a kúpot a $\mathcal{K}_i$ körben, az $\mathcal{S}$ síkot az F_i pontban. A $\mathcal{K}_i$ kör síkja legyen $\mathcal{S}_i$. A kúp tengely körüli forgásszimmetriája miatt az $\mathcal{S}_i$ sík merőleges az m tengelyre. Ezért az $\mathcal{S}_i$ sík metszi az $\mathcal{S}$ síkot, ha az nem merőleges az m tengelyre. Legyen $d_i = \mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}$ a közös egyenes.



Legyen $\mathcal{M}$ az $\mathcal{S}$ sík és a kúp metszete, X ennek tetszőleges pontja. Az X pontnak a $\mathcal{S}_i$ síkra vett merőleges vetületét jelölje $T = T_i$, a d_i egyenesre vett merőleges vetületét jelölje $Y = X_i^\perp$, végül legyen $A_i := QX \cap \mathcal{K}_i$.

Mivel az $XY = XX_i^\perp$ egyenes merőleges a $d_i = \mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}$ egyenesre, és a $TY = T_i X_i^\perp$ egyenes az $XY = XX_i^\perp$ egyenes merőleges vetülete az $\mathcal{S}_i$ síkra, az $XYT = XX_i^\perp T_i$ sík merőleges az $\mathcal{S}$ és az $\mathcal{S}_i$ síkra is.

Az $\overline{XF_i}$ és az $\overline{XA_i}$ szakaszok ugyanazon Dandelin-gömbhöz húzott érintő szakaszok, ezért

$$\frac{d(X, F_i)}{d(X, d_i)} = \frac{d(X, F_i)}{d(X, X_i^\perp)} = \frac{d(X, A_i)}{d(X, X_i^\perp)} = \frac{d(X, A_i)/d(X, T_i)}{d(X, X_i^\perp)/d(X, T_i)} = \frac{1/\sin \beta}{1/\sin \alpha_i} = \frac{\sin \alpha_i}{\sin \beta},$$

ahol α_i az $\mathcal{S}$ és az $\mathcal{S}_i$ sík szöge, és β a QA_i alkotónak az $\mathcal{S}$ alap-síkkal bezárt szöge. Mivel az α_i és a β szög is konstans, a most kikalkulált érték a kúp síkmetszetének minden X pontjára ugyanaz az $\varepsilon = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ szám.

A kúp és az $\mathcal{S}$ sík $\mathcal{M}$ metszetének pontjaira tehát $d(X, F_i) = \varepsilon d(X, d_i)$ teljesül, ezért az $\mathcal{M}$ síkmetszet az $d(X, F_i) = \varepsilon d(X, d_i)$ által az $\mathcal{S}$ síkban definiált $\mathcal{N}$ kúpszelet része, vagyis $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$.

A $d(X, F_i) = \varepsilon d(X, d_i)$ formula szerint az $\mathcal{N}$ kúpszelet fókusza F_i , direktrixe d_i , numerikus excentricitása pedig ε .

Most megmutatjuk, hogy $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$. Ebből már következik $\mathcal{M} = \mathcal{N}$.

Vegyük a kúpszelet egy X_1 pontját, és legyen ℓ ennek és az F_i fókusznak közös egyenese. Az $\mathcal{N}$ kúpszeletnek (a polárkoordinátás egyenletből jól láthatóan) legfeljebb még egy X_2 pontja esik az ℓ egyenesre. Az ℓ egyenes és a Q csúcspont közös $\mathcal{S}_\ell$ síkja a kúpból két különböző alkotót metszi ki, mert F_i a kúp belső pontja. Jelölje ezeket a_1 és a_2 .

Fentebb már láttuk, hogy az alkotók és az $\mathcal{S}$ sík metszeteiként előálló pontok rajta vannak az $\mathcal{N}$ kúpszeleten, így a létező $\hat{X}_i = \ell \cap a_i$ ($i = 1, 2$) pontok is rajta vannak az $\mathcal{N}$ kúpszeleten. Eszerint $\{\hat{X}_i\}_{i=1,2} \subseteq \{X_i\}_{i=1,2}$.

Az $\varepsilon < 1$ esetben a kúpszelet egy ellipszis, és $\sin \alpha < \sin \beta$ miatt az $\mathcal{S}$ sík minden alkotót metsz. Előbbiből következik, hogy pontosan két X_i pont létezik, utóbbi meg azt jelenti, hogy pontosan kettő darab $\hat{X}_i$ pont létezik, tehát $\{\hat{X}_i\}_{i=1,2} = \{X_i\}_{i=1,2}$.

Az $\varepsilon = 1$ esetben a kúpszelet egy parabola, és $\sin \alpha = \sin \beta$ miatt az $\mathcal{S}$ sík egy $\hat{a}$ alkotóval párhuzamos, a többit pedig metszi. Előbbiből következik, hogy egyetlen $\check{\ell}$ egyenest kivéve pontosan két X_i pont létezik, utóbbi szerint pedig egyetlen $\hat{\ell}$ egyenest kivéve pontosan kettő darab $\hat{X}_i$ pont létezik. Mivel az $\check{\ell}$ egyenesen pontosan egy pontja van a kúpszeletnek, azon nem lehet több pontja az $\mathcal{M}$ síkmetszetnek sem, amiből $\check{\ell} = \hat{\ell}$ következik, tehát az $\hat{\ell}$ egyenesen $\hat{X}_1 = X_1$, a többi ℓ egyenesen pedig $\{\hat{X}_i\}_{i=1,2} = \{X_i\}_{i=1,2}$.

Legyen $\mathcal{M}$ az $\mathcal{S}$ sík és a kúp metszete, X ennek tetszőleges pontja. Az $\varepsilon > 1$ esetben a kúpszelet hiperbola, és $\sin \alpha > \sin \beta$ miatt az $\mathcal{S}$ pontosan két $\hat{a}_1$ és $\hat{a}_2$ alkotóval párhuzamos. Előbbiből következik, hogy két $-\check{\ell}_1$ és $\check{\ell}_2$ egyenest kivéve pontosan két X_i pont létezik, utóbbi szerint pedig két $-\hat{\ell}_1$ és $\hat{\ell}_2$ egyenest kivéve pontosan kettő darab $\hat{X}_i$ pont létezik. A kivételes egyeneseken a kúpszeleten és a síkmetszetben is pontosan egy darab X_i , illetve $\hat{X}_i$ pont létezik. Mivel az $\check{\ell}_i$ egyenesen pontosan egy pontja van a kúpszeletnek, azon nem lehet több pontja az $\mathcal{M}$ síkmetszetnek sem, ezért $\check{\ell}_i = \hat{\ell}_i$ vagy $\check{\ell}_i = \hat{\ell}_{3-i}$ következik, tehát az $\hat{\ell}_i$ egyeneseken $\hat{X}_1 = X_1$, a többin pedig $\{\hat{X}_i\}_{i=1,2} = \{X_i\}_{i=1,2}$.

Mint hogy $\{\hat{X}_i\} = \{X_i\}$ minden esetben teljesül, a kúpszelet minden pontja a síkmetszetre esik, ahogy állítottuk.

Eddig megmutattuk, hogy minden kúp minden síkmetszete egy kúpszelet, most megmutatjuk, hogy minden kúpszelet valamely kúp valamely síkmetszete. A kúpszeletek hasonlóságára vonatkozó tételünk értelmében elég megmutatnunk, hogy tetszőleges ε numerikus excentricitású és t fókusz-direktrix távolságú kúpszelet előáll ezen a módon.

Vegyünk egy olyan kúpot és síkot, hogy a síknak a kúp alapjával bezárt α és a kúp alkotóinak az alappal bezárt β szögére $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \varepsilon$ teljesüljön.* Ekkor a metszetgörbe egy ε numerikus excentricitású kúpszelet lesz, valamilyen t_0 távolsággal a fókusz és a direktrix között. Vegyük a kúp csúcsában a Q_{t/t_0} centrális dilatációt, és transzformáljuk vele a teljes rendszert. A transzformált kúp megegyezik az eredetivel, az excentricitás nem változik, a t_0 távolságból viszont t távolság lesz. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. ■

A fenti tételből látható, hogy az ellipszisekhez és a hiperbolákhoz két fókusz és két direktrix tartozik, és ezek az F_1, d_1 illetve F_2, d_2 fókusz-direktrix párok egyenrangúak, nincs olyan kanonikus tulajdonság, ami az egyik párt kitüntetné.

Most ismét, ezúttal a Dandelin-gömbök segítségével igazoljuk az ellipszis és hiperbola fókuszokra, kis- és nagytengelekre már bizonyított következő tételét. Ezúttal a kör is „belefér” az állításba.

Tétel. *Az ellipszis (esetleg kör) azon pontok halmaza, amelyek fókuszoktól mért távolságainak összege a nagytengelely hossza.*

A hiperbola azon pontok halmaza, amelyek fókuszoktól mért távolságai különbségének abszolút értéke a nagytengelely hossza.

Bizonyítás. Használjuk az előző tétel jelöléseit, és tekintsük a következő ábrát.

Vegyünk a kúpszelet egy X pontját. Az X pontot az F_i fókusszal összekötő $\overline{XF_i}$ szakasz a $\mathcal{G}_i$ Dandelin-gömb érintője. Az X pontot a Q csúcsponttal összekötő alkotó

* Annak igazolása, hogy ez lehetséges, az olvasóra marad.

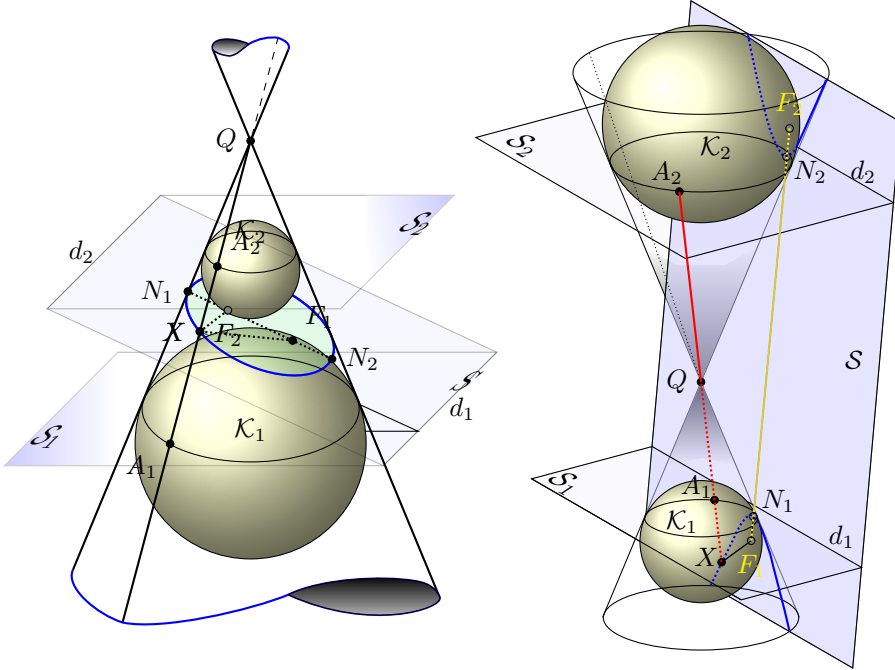
is érinti a Dandelin-gömböt az $A_i \in \mathcal{K}_i$ pontban. A két érintő hossza megegyezik, tehát $d(X, F_i) = d(X, A_i)$

Az ellipszis esetében a két Dandelin-gömb ugyanabban a félkúpban van, ezért

$$d(F_1, X) + d(X, F_2) = d(A_1, X) + d(X, A_2) = d(A_1, A_2).$$

Hiperbola esetén a két Dandelin-gömb a kúp különböző felében van, ezért

$$|d(F_1, X) - d(X, F_2)| = |d(A_1, X) - d(X, A_2)| = d(A_1, A_2).$$



Minthogy a kúp a tengelye körüli forgatások invariáns halmaza, és ilyen forgatás bármely alkotót bármely alkotóba eljuttathat, a $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$ körök közé minden alkotóból egyforma hosszúságú szakasz esik, amiért a fentiek igazolják a tételben megfogalmazott összeg illetve különbség állandóságát.

Az állandó kiszámításához tekintsük a nagytengely N_1 és N_2 végpontját. Ellipszis esetén az $N_1 \prec F_1 \prec F_2 \prec N_2$ rendezés (vagy az inverze) érvényesül, ezért

$$\begin{aligned} 2d(N_1, N_2) &= 2(d(N_1, F_1) + d(F_1, F_2) + d(F_2, N_2)) \\ &= d(N_1, F_1) + (d(N_1, F_1) + d(F_1, F_2)) + (d(F_1, F_2) + d(F_2, N_2)) + d(F_2, N_2) \\ &= (d(F_1, N_1) + d(N_1, F_2)) + (d(F_1, N_2) + d(N_2, F_2)) = 2(d(F_1, X) + d(X, F_2)). \end{aligned}$$

Hiperbola esetén $F_1 \prec N_1 \prec N_2 \prec F_2$ vagy az inverze a rendezés, ezért

$$\begin{aligned}
 2d(N_1, N_2) &= 2(d(F_1, F_2) - d(N_1, F_1) - d(F_2, N_2)) \\
 &= -d(N_1, F_1) + (d(F_1, F_2) - d(N_1, F_1)) + (d(F_1, F_2) - d(F_2, N_2)) - d(F_2, N_2) \\
 &= (d(N_1, F_2) - d(F_1, N_1)) + (d(F_1, N_2) - d(N_2, F_2)) = 2|d(F_1, X) - d(X, F_2)|.
 \end{aligned}$$

Tehát, a tételben szereplő azonosságok teljesülnek az $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ kúpszeletekre.

Csak az $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ kúpszelet pontjaira érvényesek a megfelelő, összegre, illetve különbségre vonatkozó azonosságok, mert az $\mathcal{S}$ síkban a fókuszokra illeszkedő ℓ egyenesekről előbbi tételünk bizonyítása közben igazolt tulajdonság alapján, a fókuszból induló minden félegyenesen pontosan egy pont tesz eleget a kívánt azonosságnak. ■

F.3. Vektortér, norma, euklidészi és belső szorzás

Definíció. A $\{\mathcal{V}; +, \{\lambda \cdot\}_{\lambda \in \mathbb{R}}\}$ algebrai struktúrát valós *vektortérnek* nevezzük, ha $\{\mathcal{V}; +\}$ additív Abel-csoport, és minden $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$, valamint $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ esetén

$$(\lambda\mu)\mathbf{u} = \lambda(\mu\mathbf{u}), \quad (\lambda + \mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u}, \quad \lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}. \quad \blacktriangle$$

Jelölje $\mathbf{0}$ a $\{\mathcal{V}; +\}$ Abel-csoport egységelemét. A definícióból azonnal következik, hogy $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$, és $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ minden $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektor esetében. Egy $\mathbf{v}$ vektor additív inverzét $-\mathbf{v}$ jelöli, így $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

A vektortér egy $\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{u}_i$ elemét az $\mathbf{u}_i$ vektorok *lineáris kombinációjának* nevezzük. A lineáris kombinációt triviálisnak mondjuk, ha minden λ_i együtthatója nulla. Az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$ vektorokat *lineárisan függetlennek* nevezzük, ha a $\mathbf{0}$ vektor ezekből a vektorokból csak triviális lineáris kombinációval állítható elő.

Az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ vektorrendszert *bázisnak* mondjuk, ha lineárisan függetlenek, és belőlük minden vektor lineáris kombinációként előállítható. A báziselemek száma egyértelműen meghatározott. Ezt a számot a vektortér *dimenziójának* nevezzük. Két vektortér közti bijektív leképezést *izomorfíának* mondunk, ha felcserélhető a lineáris kombinációval. Két vektortér pontosan akkor izomorf, ha azonos a dimenziójuk. Egy izomorfia *kanonikus*, ha nem függ a vektorterekben választott bázisoktól.

Definíció. Vektorok egy $\mathcal{H}$ halmazát *szimmetrikusnak* mondjuk, ha minden eleme ellentettjét is tartalmazza. *Korlátosnak* mondjuk a $\mathcal{H}$ halmazt, ha van olyan $\mathbf{u}_i$ ($i = 1, \dots, n$) bázis, melyre

$$\mathcal{H} \subseteq \left\{ \nu \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_i \mathbf{u}_i : 0 \leq \nu \leq 1, 0 \leq \lambda_i, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \varepsilon_i = \pm 1 \right\}.$$

(A jobb oldalon a *keresztpolitóp* vektoriális megfelelője áll.)

A $\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{v}_i$ lineáris kombinációt *konvex lineáris kombinációjának* nevezzük, ha minden i esetén $\lambda_i \geq 0$, és $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$. *Pozitív konvex lineáris kombinációról* beszélünk, ha minden i esetén $\lambda_i > 0$.

A vektorok egy halmazát *konvexnek* mondjuk, ha bármely két elemének konvex lineáris kombinációja a halmazba esik. Egy ilyen halmaz *határának* hívjuk azon $\mathbf{v}$ vektorok halmazát, melyekhez létezik olyan $\mathbf{u}$ vektor, hogy minden $\lambda > 0$ esetén $\mathbf{v} + \lambda \mathbf{u}$ a halmazon kívül esik. A konvex halmaz határhoz nem tartozó elemeit *belsőnek* mondjuk. *Szigorúan konvexnek* nevezzük a konvex halmazt, ha határa bármely két különböző elemének pozitív konvex lineáris kombinációja belső elem. ▲

Egy korlátos halmaz bármely eleméhez van olyan valós szám, hogy annál nagyobb számmal vett többszöröse a halmazon kívül esik, mert a vektor megszorozása a bázisbontásában lévő legkisebb abszolútértékű, nem nulla együttható reciprokával, a korlátos halmazon kívülre vezet.

Mivel a valós számok $\mathbb{R}$ halmaza az összeadás és a szorzás műveletével az $\{\mathbb{R}; +, \{\lambda \cdot\}_{\lambda \in \mathbb{R}}\}$ egydimenziós valós vektorteret alkotja, a következő definíció az abszolút érték fogalmát — melyet az (1) pontban fel is használ — általánosítja általánosabb valós vektorterekre.

Definíció. Egy $\mathcal{V}$ vektortéren egy $|\cdot|: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ függvényt *normának* nevezzük, ha

- (0) minden $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ esetén $0 \leq |\mathbf{v}|$, és $0 = |\mathbf{v}|$ esetén $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (*pozitív definitség*),
- (1) minden $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ esetén $|\lambda \mathbf{v}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{v}|$ (*homogenitás*), és
- (2) minden $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektorra $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$, és egyenlőség teljesüléséből $\lambda \mathbf{u} = \mathbf{v}$ vagy $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$ következik valamely $\lambda \geq 0$ valós számra (szigorú szubadditivitás, szigorú háromszög-egyenlőtlenség). ▲

A normával ellátott vektortereket *normáltaknak* hívjuk. Egy vektort *normáltaknak* mondunk, ha normája 1. Egy bázist *normáltaknak* nevezzük, ha minden eleme normált.

A normára nézve az összeadás és a szorzás is folytonos művelet, hiszen

$$\begin{aligned} ||\mathbf{u} + \mathbf{x}| - |\mathbf{u}|| &\leq |(\mathbf{u} + \mathbf{x}) - (\mathbf{u})| \leq |\mathbf{x}|, \\ ||\lambda \mathbf{u}| - |(\lambda + \mu)(\mathbf{u} + \mathbf{x})|| &\leq |\lambda \mathbf{u} - (\lambda + \mu)(\mathbf{u} + \mathbf{x})| \leq |-\mu \mathbf{u} - (\lambda + \mu)\mathbf{x}| \\ &\leq |\mu||\mathbf{u}| + |\lambda + \mu||\mathbf{x}|. \end{aligned}$$

Definíció. *Euklidészi szorzásnak* nevezzük egy $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést, ha

- (1) szimmetrikus, vagyis $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$;
- (2) mindkét változójában lineáris, vagyis $\langle \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \mu \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$;
- (3) pozitív definit, vagyis $0 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ és egyenlőség pontosan $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ esetén. ▲

Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség. *Euklidészi szorzás esetén*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle.$$

Bizonyítás. A pozitív definitésség miatt minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\langle \mathbf{u} - \lambda \mathbf{v}, \mathbf{u} - \lambda \mathbf{v} \rangle \geq 0$, amit kifejtve $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2\lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \lambda^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ adódik. Ez pontosan akkor áll fenn minden λ valós számra, ha diszkriminánsára $4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 - 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \leq 0$ teljesül, ami az állítást igazolja. ■

Tétel. Az $\langle \cdot, \cdot \rangle$ euklidészi szorzásból definiált $\mathbf{u} \mapsto |\mathbf{u}| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$ leképezés norma.

Bizonyítás. Három feltételt kell igazolni, melyből a pozitív definitésség és a homogenitás a definícióból közvetlenül következik.

A szubaditivitás a most igazolt **Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség** következménye:

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} + \mathbf{v}| &= \sqrt{\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle} \\ &\leq \sqrt{|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|. \end{aligned}$$

Ha a fenti képletben egyenlőség áll fenn úgy, hogy $|\mathbf{v}| > 0$, akkor $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ következik, amiért a **Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség** igazolásakor használt másodfokú egyenlőtlenségben a $\lambda = |\mathbf{u}|/|\mathbf{v}|$ értéknél egyenlőség van, vagyis $\langle \mathbf{u} - \frac{|\mathbf{u}|}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}, \mathbf{u} - \frac{|\mathbf{u}|}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} \rangle = 0$, amiből a pozitív definitésség miatt $\mathbf{u} = \mathbf{v} \frac{|\mathbf{u}|}{|\mathbf{v}|}$. ■

Ezen eredmény alapján egy $|\cdot|$ normát *euklidészi normának* nevezünk, ha van olyan $\langle \cdot, \cdot \rangle$ euklidészi szorzás, melyre $|\mathbf{u}|^2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$. Az ilyen normával ellátott vektortereket *euklidészi (vektor)térnek* nevezik.

Euklidészi térben az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorokat *ortogonálisnak* mondjuk, ha $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Egy bázist *ortogonálisnak* hívunk, ha elemei páronként ortogonálisak. *Ortonormálnak* nevezzük az ortogonális bázist, ha elemeinek normája 1.

Pitagorasz és Thalész tétele most is érvényes az **Euklidészi sík** fejezetben megadott formában és a bizonyítást is el lehet végezni az ott megadott módon.

Tétel. Páronként ortogonális, nem nulla vektorok függetlenek.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $\mathbf{v}_i$ vektorok ($i = 1, \dots, m$) ortogonálisak, és valamely $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, m$) együtthatókkal $\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{v}_i = 0$. Ekkor

$$0 = \left\langle \mathbf{v}_j, \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{v}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \rangle = \lambda_j |\mathbf{v}_j|^2,$$

vagyis minden j esetén $\lambda_j = 0$. ■

Az alábbi tétel igazolja, hogy létezik ortonormált bázis.

Gram–Schmidt-eljárás. Legyenek egy euklidészi térben $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ ($0 < k \leq n$) lineárisan független vektorok. Ekkor létezik $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ vektorok olyan ortonormált rendszere, melyre minden $\ell \leq k$ esetén az $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_\ell$ vektorok lineáris kombinációinak mindegyike előáll az $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_\ell$ vektorok egyértelmű lineáris kombinációjaként.

Bizonyítás. A $k = 1$ esetben az $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1/|\mathbf{u}_1|$ választás igazolja az állítást. Teljes indukciós lépésként tegyük fel, hogy az állítás a k számra teljesül.

Vegyük az $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ vektorhoz az indukciós feltétel alapján létező $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ ortonormált vektorokat, és legyen $\mathbf{e}'_{k+1} = \mathbf{u}_{k+1} - \sum_{j=1}^k \langle \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{e}_j \rangle \mathbf{e}_j$. Ekkor minden $0 < i < k+1$ természetes számra

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}'_{k+1}, \mathbf{e}_i \rangle &= \left\langle \mathbf{u}_{k+1} - \sum_{j=1}^k \langle \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{e}_j \rangle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \right\rangle = \langle \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{e}_i \rangle - \left\langle \sum_{j=1}^k \langle \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{e}_j \rangle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \right\rangle \\ &= \langle \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{e}_i \rangle - \sum_{j=1}^k \langle \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{e}_j \rangle \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \rangle = \langle \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{e}_i \rangle - \langle \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{e}_i \rangle = 0, \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}'_{k+1}, \mathbf{e}'_{k+1} \rangle &= \langle \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{e}'_{k+1} \rangle - \left\langle \sum_{j=1}^k \langle \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{e}_j \rangle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}'_{k+1} \right\rangle \\ &= \langle \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{e}'_{k+1} \rangle - \sum_{j=1}^k \langle \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{e}_j \rangle \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}'_{k+1} \rangle = \langle \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{e}'_{k+1} \rangle. \end{aligned}$$

Utóbbi $\langle \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{e}'_{k+1} \rangle$ kifejezés nem lehet nulla, mert akkor az $\mathbf{e}'_{k+1}$ vektor a nullvektor lenne, amiből a definíciója alapján $\mathbf{u}_{k+1} = \sum_{j=1}^k \langle \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{e}_j \rangle \mathbf{e}_j$ következne, holott $\mathbf{u}_{k+1}$ a feltétel szerint független az $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ vektoroktól, és így az indukciós feltétel miatt az $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ vektoroktól is.

Legyen $\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{e}'_{k+1}/|\mathbf{e}'_{k+1}|$. Az indukciós feltétel szerint az $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \mathbf{u}_i$ vektorhoz vannak olyan $\mu_i \in \mathbb{R}$ számok, hogy $\mathbf{x} = \lambda_{k+1} \mathbf{u}_{k+1} + \sum_{i=1}^k \mu_i \mathbf{e}_i$, és így

$$\mathbf{x} = \lambda_{k+1} \left(|\mathbf{e}'_{k+1}| \mathbf{e}_{k+1} + \sum_{j=1}^k \langle \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{e}_j \rangle \mathbf{e}_j \right) + \sum_{i=1}^k \mu_i \mathbf{e}_i,$$

ami az indukciós lépés utolsó bizonyítandója volt. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

Tétel. Egy ortonormált $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ bázis, $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{e}_i$ és $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \mu_i \mathbf{e}_i$ esetén

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i, \quad \text{és} \quad |\mathbf{u}|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

A bizonyításhoz elég észrevenni, hogy $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j, \\ 0, & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$

Definíció. Legyen adott egy $\mathcal{V}$ vektortér, és abban egy $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1}^n$ bázis. A $\{\cdot, \cdot\}: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést, ahol $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i$ minden $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{b}_i$ és $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \mu_i \mathbf{b}_i$ vektorra, a $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1}^n$ bázishoz tartozó *belső szorzásnak* nevezzük. ▲

A **Gram–Schmidt eljárás** szerint minden euklidészi szorzáshoz van olyan bázis, melyben megegyezik a bázis által meghatározott belső szorzással.

Tétel. *Minden belső szorzás egy euklidészi szorzást definiál.*

A bizonyításhoz elég arra gondolni, hogy a belső szorzás is bilineáris, szimmetrikus, és pozitív definit.

F.4. Metrikus tér, folytonosság, teljesség és kontrakciók

A metrika és a metrikus tér fogalmát már definiáltuk az Euklidészi sík fejezet elején (lásd még az Affin metrikák fejezetet is). Ilyen metrikus tereket alkotnak az $\mathbb{R}^n$ koordinátaterek a szokásos, ezért külön szinte sosem jelzett, euklidészi metrikával.

Egy metrikus tér egy $\mathcal{H}$ részhalmazát *korlátosnak* mondjuk, ha van egy olyan $h > 0$ valós szám és a metrikus térben egy olyan O pont, melyre minden $H \in \mathcal{H}$ esetén $d(O, H) < h$.

Egy $\{P_i\}_{i=0}^\infty \subseteq \mathcal{M}$ pontsorozatot *konvergensnek* nevezünk, ha létezik olyan $P_\infty \in \mathcal{M}$ pont, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ természetes szám, melyre $N < n$ esetén $d(P_n, P_\infty) \leq \varepsilon$. Ekkor a P_∞ pontot a $\{P_i\}_{i=0}^\infty$ sorozat *határértékének* hívjuk.

A $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{M}$ ponthalmaz *torlódási pontjának* nevezzük a H pontot, ha van a ponthalmazban olyan konvergens $\{P_i\}_{i=0}^\infty \subseteq \mathcal{H}$ sorozat, melynek H a határértéke. A $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{M}$ ponthalmazt *zártnak* mondjuk, ha torlódási pontjait is tartalmazza.

Az $(\mathcal{M}, d)$ és $(\mathcal{M}', d')$ metrikus terek közti $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ függvényt a $P \in \mathcal{M}$ pontban folytonosnak nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$ valós szám esetén van olyan $\delta > 0$ valós szám, hogy $d'(f(P), f(Q)) < \varepsilon$ teljesül minden olyan $Q \in \mathcal{M}$ pontra, melyre $d(P, Q) < \delta$. Az f függvényt *folytonosnak* mondjuk, ha minden $P \in \mathcal{M}$ pontban folytonos. *Egyenletesen folytonosnak* mondjuk az f folytonos függvényt, ha az iménti δ nem függ a P pont választásától, vagyis minden $\varepsilon > 0$ valós szám esetén van olyan $\delta > 0$ valós szám, hogy $d'(f(P), f(Q)) < \varepsilon$ minden olyan $P, Q \in \mathcal{M}$ pontpárra, melyre $d(P, Q) < \delta$.

A folytonosság definíciója és a háromszög-egyenlőtlenség alapján bármely rögzített $O \in \mathcal{M}$ pontra a $P \mapsto d(O, P)$ függvény egyenletesen folytonos.

Ha $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ metrikus terek közti folytonos függvény, és $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{M}'$ zárt halmaz, akkor a $\mathcal{H} = \{P \in \mathcal{M} : f(P) \in \mathcal{H}'\}$ is zárt, hiszen, ha egy $\{P_i\}_{i=0}^\infty \subset \mathcal{H}$ konvergens sorozat határértéke P_∞ , akkor a folytonosság miatt az $\{f(P_i)\}_{i=0}^\infty \subset \mathcal{H}'$ sorozat határértéke $f(P_\infty)$, melyre $\mathcal{H}'$ zártága miatt $f(P_\infty) \in \mathcal{H}'$ teljesül, amiért $P_\infty \in \mathcal{H}$ a $\mathcal{H}$ definíciója értelmében, ami éppen azt jelenti, hogy $\mathcal{H}$ zárt.

Egy $\{P_i\}_{i=0}^\infty \subseteq \mathcal{M}$ pontsorozatot *Cauchy-féle sorozatnak* mondunk, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy $N < k \leq n$ esetén $d(P_n, P_k) \leq \varepsilon$. Az olyan metrikus tereket, amelyekben minden Cauchy-sorozat

konvergens, *teljesnek* hívjuk. A valós számok zárt intervallumai az abszolútérték-metrikával, — valójában a valós számok bármely axióma-rendszerében megtalálható Dedekind-típusú axióma következtében — teljes metrikus teret alkotnak, a nyílt intervallumai viszont nem. A Minkowski-metriáknál mutatott „gömbi metrika” mutatja, hogy vannak nem teljes metrikák a síkon is.

Tétel. *Az euklidészi geometria teljes.*

Bizonyítás. Legyen a $\{P^i\}_0^\infty$ pontsorozat Cauchy-féle.

Válasszunk valamely O pont által kijelölt helyvektortérben a d euklidészi metrikához tartozó $|\cdot|$ euklidészi norma szerint egy ortonormált $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ bázist.

A $P_O^k = \sum_{i=1}^m x_i^k \mathbf{u}_i$ helyvektorok x_i^k koordinátáira

$$\sum_{i=1}^m (x_i^n - x_i^k)^2 = |P_O^n - P_O^k|^2 = d^2(P^n, P^k) \leq \varepsilon$$

adódik, ami azt jelenti, hogy az x_i^k koordinátasorozat minden $i \in \{1, \dots, m\}$ számra teljesíti a Cauchy-féle konvergencia-kritériumot, ezért a valós számok (különbség abszolútértéke mint távolság szerint vett) teljessége miatt léteznek az $x_i^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k$ határértékek.

Legyen P^∞ az a pont, melyre $P_O^\infty = \sum_{i=1}^m x_i^\infty \mathbf{u}_i$. Ekkor $d^2(P^\infty, P^n) = \sum_{i=1}^m (x_i^\infty - x_i^n)^2$ nullához tart, ha $n \rightarrow \infty$. Ezzel az állítást igazoltuk. ■

Tétel. (Weierstrass) *Legyen a $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) halmaz minden eleme minden koordinátájának abszolútértéke kisebb a $c > 0$ valós számnál. Ha $\mathcal{H}$ végtelen sok különböző elemet tartalmaz, akkor van benne különböző elemekből álló konvergens sorozat.*

Bizonyítás. Az $n = 1$ esetben $\mathcal{H}$ elemei az $\mathcal{I} = [-c, c]$ intervallumban vannak. Mivel $\mathcal{H}$ végtelen sok elemet tartalmaz, különböző elemeinek létezik egy $\{h_i\}_{i=0}^\infty \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{I}$ sorozata.

Most az „oroszlánfogási” módszert alkalmazzuk.

Világos, hogy a $\{h_i\}_{i=0}^\infty$ sorozatból a 0 legalább egyik oldalára, mondjuk, a $[0, c]$ intervallumba, végtelen sok eleme esik, különben nem lehetne a sorozatnak végtelen sok eleme. Legyen ezen végtelen sok különböző elem sorozata $\{h_j^0\}_{j=0}^\infty = \{h_{i_j}\}_{j=0}^\infty$, és $\mathcal{I}_0 = [0, c]$.

Vegyük az $\mathcal{I}_0$ intervallum felezőpontját. Természetesen a $\{h_j^0\}_{j=0}^\infty$ sorozatnak a felezőpont legalább egyik oldalára, mondjuk az $[c/2, c]$ intervallumba, végtelen sok eleme esik, különben nem lehetne a sorozatnak végtelen sok eleme. Legyen ezen végtelen sok elem sorozata $\{h_k^1\}_{k=0}^\infty = \{h_{j_k}^0\}_{k=0}^\infty$, és $\mathcal{I}_1 = [c/2, c]$.

Immár kétszer alkalmazott okfejtésünket alkalmazva az $\mathcal{I}_1$ intervallumra és a $\{h_k^1\}_{k=0}^\infty$ sorozatra, az $\mathcal{I}_2$ intervallum és $\{h_\ell^2\}_{\ell=0}^\infty$ sorozat, majd e lépéseink további ismétlésével az $\mathcal{I}_m$ intervallumok és $\{h_p^m\}_{p=0}^\infty$ sorozatok adódnak. Legyen $h_1^\infty = h_0^0$, aztán h_m^∞ a $\{h_p^m\}_{p=0}^\infty$ sorozat egyik olyan tagja, amely nincs a $\{h_q^\infty\}_{q=0}^{m-1}$ halmazban.

A $\{h_q^\infty\}_{q=0}^\infty$ sorozat a $\{h_i\}_{i=0}^\infty$ sorozat végtelen sok különböző elemét tartalmazza (sőt a konstrukcióból következik, hogy h_q^∞ indexe a $\{h_i\}_{i=0}^\infty$ sorozatban legalább q) és Cauchy-sorozat, hiszen minden $q > Q$ indexű eleme benne van az $\mathcal{I}_Q$ intervallumban, melynek hossza $c/2^Q$.

Mivel a zárt intervallum teljes metrikus tér, a $\{h_q^\infty\}_{q=0}^\infty$ Cauchy-sorozat konvergens, ami bizonyítja a tételt az $n = 1$ esetben.

Az $n > 1$ esetet teljes indukcióval bizonyítjuk, amihez tegyük fel, hogy a tétel állítása érvényes n esetén.

Legyen a végtelen sok különböző elemet tartalmazó $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ halmaz minden eleme minden koordinátájának abszolútértéke kisebb a $c > 0$ valós számnál. Az indukciós feltétel miatt van egy olyan végtelen sok különböző elemet tartalmazó $\{H_i\}_{i=0}^\infty \subseteq \mathcal{H}$ sorozat, melynek első $n - 1$ koordinátája konvergens. Akkor ennek a sorozatnak bármely részsorozata is konvergens, márpedig az $n = 1$ esetben bizonyítottak miatt a $\{H_i\}_{i=0}^\infty$ sorozatnak van egy olyan különböző elemekből álló $\{H_{i_j}\}_{j=0}^\infty$ részsorozata, melynek utolsó, $(n + 1)$ -edik koordinátája konvergens. Ez azt jelenti, hogy a $\{H_{i_j}\}_{j=0}^\infty$ részsorozat különböző elemekből áll, és minden koordinátájában konvergens. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

Tétel. *Zárt intervallumon folytonos valós függvénynek van legnagyobb és legkisebb értéke.*

Bizonyítás. Mivel f értékkészletének alsó és felső határa (ha létezik) megegyezik a $-f$ függvény felső és alsó határának -1 -szeresével, elegendő a bizonyítást csak a felső határra elvégezni.

Tekintsünk egy $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényt.

Ha minden $i \in \mathbb{N}$ számhoz az f rendelkezne olyan $x_i \in [a, b]$ argumentummal, hogy $f(x_i) > i$, akkor Weierstrass tétele szerint az $\{x_i\}_{i=0}^\infty$ sorozatnak van torlódási pontja, ahol f folytonossága miatt f értéke az $\{f(x_i)\}_{i=0}^\infty$ határértéke lenne. Ez ellentmondás, hiszen így f értéke a torlódási pontban minden valós számnál nagyobb lenne, ezért van olyan $i \in \mathbb{N}$, hogy f minden értéke kisebb az i számnál.

Az $f([a, b]) \in \mathbb{R}$ számhalmaz tehát felülről korlátos, így a valós számok Dedekind-axiómája miatt létezik felső határa.

Legyen f felső határa $y \in \mathbb{R}$. Ekkor a $\mathcal{H}_\varepsilon = \{x \in [a, b] : y - f(x) > \varepsilon\}$ halmaz minden $\varepsilon > 0$ esetén nem üres. Ha valamely $\varepsilon > 0$ esetén csak véges sok eleme van a $\mathcal{H}_\varepsilon$ halmaznak, akkor azok közül valamelyikre f értéke y , ami az állítást igazolja.

Ha minden $\varepsilon > 0$ esetén $\mathcal{H}_\varepsilon$ végtelen sok elemet tartalmaz, akkor vegyünk egy tetszőleges $\varepsilon_i \searrow 0$ sorozatot, és minden $\mathcal{H}_{\varepsilon_i}$ halmazból válasszunk ki egy az előzőektől különböző x_i elemet. Az így kapott $\{x_i\}_{i=0}^\infty \subseteq [a, b]$ sorozatnak Weierstrass tétele szerint van torlódási pontja, melyben az f értéke az $\{f(x_i)\}_{i=0}^\infty$ határértéke, vagyis y . Ezzel a tételt beláttuk. ■

Mivel az euklidészi geometriák izomorfak egymással, az alábbi tételt elegendő a szokásos euklidészi metrikával ellátott $\mathbb{R}^n$ térben igazolni.

Tétel. *Az euklidészi geometria bármely zárt korlátos részhalmazán folytonos valós függvénynek van legnagyobb és legkisebb értéke.*

A bizonyítás teljesen analóg a fentebb zárt intervallumon bemutatotthoz, ugyanúgy Weierstrass tételére támaszkodik, és az olvasóra marad.

Tétel. *A Minkowski-normák folytonosak egymásra nézve.*

Bizonyítás. Tekintsünk most egy Minkowski-féle d metrikával ellátott $\mathfrak{A}$ affin geometriát, ennek egy O pontja által kijelölt $T_O\mathfrak{A}$ helyvektortérben válasszunk egy $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ bázist. Vegyük az ezen bázishoz tartozó $\langle \cdot, \cdot \rangle$ belső szorzat által meghatározott $|\cdot|_d$ normához tartozó d' távolságot az $\mathfrak{A}$ affin geometrián. Ez nyilván euklidészi, az $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ bázis pedig ortonormált ezen $\langle \cdot, \cdot \rangle$ euklidészi szorzatra nézve. Azt kell igazolnunk, hogy

- (1) $|\cdot|_d$ folytonos az euklidészi $(\mathfrak{A}, d')$ téren,
- (2) $|\cdot|_{d'}$ folytonos a Minkowski-metrikus $(\mathfrak{A}, d)$ affin geometrián.

(1) Bármely $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{u}_i$ helyvektorra a szubadditivitás és a Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség szerint

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}|_d &= \left| \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{u}_i \right|_d \\ &\leq \sum_{i=1}^m |x_i| |\mathbf{u}_i|_d = \left\langle \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{u}_i, \sum_{i=1}^m \text{sign } x_i |\mathbf{u}_i|_d \mathbf{u}_i \right\rangle \leq c |\mathbf{x}|_{d'}, \end{aligned}$$

ahol $c = \max\{|\sum_{i=1}^m \varepsilon_i |\mathbf{u}_i|_d \mathbf{u}_i|_{d'} : \varepsilon_i = \pm 1\}$ egy pozitív konstans. Azonnal következik, hogy $||\mathbf{x}|_d - |\mathbf{y}|_d| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|_d \leq c |\mathbf{x} - \mathbf{y}|_{d'}$, vagyis a $|\cdot|_d$ norma folytonos a $|\cdot|_{d'}$ normára nézve.

(2) Tekintsük az $f: \mathbf{v} \mapsto |\mathbf{v}|_d/|\mathbf{v}|_{d'}$ függvényt az euklidészi térben a $|\cdot|_{d'}$ metrika folytonossága miatt korlátos és zárt $\mathcal{H} = \{\mathbf{v} \in T_O\mathfrak{A} : |\mathbf{v}|_{d'} = 1\}$ halmazon.

Az euklidészi téren folytonos függvények a korlátos és zárt halmazokon felveszik szélsőértékeiket, ezért valamely $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ vektorra $f(\mathbf{u}) = \min\{f(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in \mathcal{H}\}$. Nyilván

$0 < f(\mathbf{u})$, hiszen $\mathbf{0} \notin \mathcal{H}$, és minden $\mathbf{v}$ vektorra

$$f(\mathbf{u})|\mathbf{v}|_{d'} \leq \frac{|\mathbf{v}/|\mathbf{v}|_{d'}|_d}{|\mathbf{v}/|\mathbf{v}|_{d'}|_{d'}}|\mathbf{v}|_{d'} = |\mathbf{v}|_d,$$

amiért $||\mathbf{x}|_{d'} - |\mathbf{y}|_{d'}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|_{d'} \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|_d \frac{1}{f(\mathbf{u})}$, vagyis a $|\cdot|_{d'}$ norma folytonos a $|\cdot|_d$ normára nézve. Ezzel az állítást beláttuk. ■

Mivel egy Cauchy-sorozat folytonos képe is Cauchy-sorozat, tételünk alapján egy affin tér két Minkowski-metrikájának Cauchy-sorozatai egybeesnek. Mivel az euklidészi metrika Cauchy-sorozatainak van határértéke, adódik az alábbi.

Tétel. *A Minkowski-metrikus affin geometriák teljesek.*

A következő tétel egyenesen következik ugyanezen tétel euklidészi verziójából.

Tétel. *Bármely Minkowski-metrikus affin geometria bármely zárt korlátos részhalmazán folytonos valós függvénynek van legnagyobb és legkisebb értéke.*

Tekintsünk ugyanis egy Minkowski-metrikus affin geometriában egy korlátos $\mathcal{H}$ tartományon egy folytonos valós f függvényt. A $\mathcal{H}$ halmaz ugyanazon affin tér euklidészi távolsága szerint is korlátos, és a Minkowski-metrikák egymásra való folytonosság miatt az f függvény az euklidészi metrikára nézve is folytonos.

Egy metrikus tér $\chi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ transzformációját *kontrakciónak* nevezzük, ha van olyan $0 < \lambda < 1$ szám, hogy minden $\{P, Q\} \subseteq \mathcal{M}$ pontpárra $d(\chi(P), \chi(Q)) \leq \lambda d(P, Q)$.

Tétel. *Teljes metrikus tér minden kontrakciójának létezik pontosan egy fixpontja.*

Bizonyítás. *Unicitás.* Amennyiben $P, Q \in \mathcal{M}$ a χ kontrakció fixpontjai, akkor $d(P, Q) = d(\chi(P), \chi(Q)) \leq \lambda d(P, Q)$ miatt $d(P, Q) = 0$, vagyis $P = Q$.

Egzisztencia. Legyen P_0 egy tetszőleges pont, és minden $i \in \mathbb{N}$ esetén legyen $P_{i+1} = \chi(P_i)$. Ekkor

$$d(P_{i+1}, P_i) = d(\chi(P_i), \chi(P_{i-1})) \leq \lambda d(P_i, P_{i-1}) \leq \dots \leq \lambda^i d(P_1, P_0),$$

így minden $n \geq k$ természetes számra

$$\begin{aligned} d(P_{n+1}, P_k) &\leq d(P_{n+1}, P_n) + \dots + d(P_{k+1}, P_k) \leq (\lambda^n + \dots + \lambda^k) d(P_1, P_0) \\ &= \frac{1 - \lambda^{n-k+1}}{1 - \lambda} \cdot \lambda^k d(P_1, P_0) \leq \frac{\lambda^k}{1 - \lambda} d(P_1, P_0) \end{aligned}$$

teljesül. Eszerint P_i Cauchy-sorozat, így a metrikus tér teljessége miatt létezik határértéke. Legyen ez P_∞ . Ekkor

$$d(P_\infty, \chi(P_\infty)) \leq d(P_\infty, P_n) + d(P_n, \chi(P_\infty)) \leq d(P_\infty, P_n) + \lambda d(P_{n-1}, P_\infty)$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Mivel $n \rightarrow \infty$ esetén $d(P_\infty, P_n)$ tart a nullához, ebből $d(P_\infty, \chi(P_\infty)) = 0$, vagyis $P_\infty = \chi(P_\infty)$ következik, tehát a P_∞ pont a χ kontrakció fixpontja, ami az állítást igazolja. ■

F.5. Normák és indukálók

Tekintsünk egy $\mathcal{V}$ vektorteret. Minthogy a normák mind **folytonosak** az euklidészi normára nézve, minden normának van legnagyobb és legkisebb (mivel nulla nem lehet, ezért) pozitív értéke is az euklidészi normával definiált $\mathcal{H} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} : |\mathbf{v}| = 1\}$ halmazon, ami azt jelenti, hogy bármely $\|\cdot\|$ normára vannak olyan $c_1, c_2 > 0$ konstansok, hogy $c_1|\cdot| \leq \|\cdot\| \leq c_2|\cdot|$. Emiatt megfelelő konstansokkal bármely két normára adható ilyen becslés. Ezt a jelenséget a normák *kommenzurabilitásának* nevezik.

Tétel. (korlátosság) *Vektorok egy halmaza akkor és csak akkor korlátos, ha normában korlátos.*

Bizonyítás. Korlátos halmaz részhalmaza is korlátos, ezért elég megmutatni, hogy a keresztpolitópok korlátosak és minden korlátos halmazhoz van azt részhalmazként tartalmazó keresztpolitóp.

Legyen a $\mathcal{H}$ halmaz korlátos a $\|\cdot\|$ normában. Minthogy $\|\cdot\|$ kommenzurálabilis az euklidészi normával, a $\mathcal{H}$ halmaz a $|\cdot|$ euklidészi normában is korlátos. Eszerint létezik olyan $h > 0$ szám, hogy minden $\mathbf{h} \in \mathcal{H}$ vektorra $|\mathbf{h}| < h$. Legyen $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^n$ egy ortonormált bázis. Ekkor a $\mathcal{H}$ halmazban lévő minden vektor $\mathbf{h} = \sum_{i=1}^n \chi_i \mathbf{u}_i$ bázisbontásában a χ_i együtthatók mindegyike a $[-h, h]$ intervallumba esik, vagyis

$$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{K} = \left\{ \nu \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_i \mathbf{u}_i : 0 \leq \nu \leq 1, 0 \leq \lambda_i, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \varepsilon_i = \pm 1 \right\},$$

ahol a $\mathcal{K}$ pontthalmaz éppen egy keresztpolitóp. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

Eredményünk értelmében egy Minkowski-metrikus affin geometria bármely pontthalmaza akkor és csak akkor korlátos, ha valamely keresztpolitóp tartalmazza.

Definíció. A $\mathcal{V}$ normált vektortéren az $\mathcal{I}_\parallel = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} : |\mathbf{v}| \leq 1\}$ vektorhalmazt a $|\cdot|$ norma *indikátorának* nevezzük. ▲

A vektorhalmazok határának definíciója szerint $\partial \mathcal{I}_\parallel = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} : |\mathbf{v}| = 1\}$ az indikátor határa, hiszen ha $|\mathbf{v}| = 1$, akkor minden $\lambda > 0$ esetén $|\mathbf{v} + \lambda \mathbf{v}| > 1$. Az indikátor többi elemének $\overset{\circ}{\mathcal{I}}_\parallel = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} : |\mathbf{v}| < 1\}$ halmaza a belseje. A normát meghatározza az indikátora, hiszen $|\mathbf{v}| = \inf\{\nu \in \mathbb{R}_{>0} : \frac{1}{\nu} \mathbf{v} \in \mathcal{I}_\parallel\}$.

Tétel. Az $\mathcal{I}_{||}$ indikátor

- (0) elemeiből kiválasztható egy bázis,
- (1) korlátos,
- (2) szimmetrikus, és
- (3) szigorúan konvex.

Bizonyítás. A (0) állítás triviális, hiszen egy tetszőleges bázis minden elemét megszorozva normája reciprokával olyan bázist kapunk, amelynek minden eleme a norma indikátorába esik.

Az (1) állítás az előbbi tételünk „akkor” része, a (2) állítás a $|\mathbf{v}| = |-\mathbf{v}|$ azonosságból nyilvánvaló.

Az indikátor tetszőleges $\mathbf{v}_i$ vektoraira ($i = 1, \dots, m$) és $0 \leq \lambda_i, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ számokra a háromszög-egyenlőtlenség miatt $|\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{v}_i| \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i |\mathbf{v}_i| \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, vagyis az indikátor konvex, ami a (3) állítás része.

Ha iménti egyenlőtlenségünkben egyenlőség áll fenn, akkor egyrészt minden $i = 1, \dots, m$ indexre $|\mathbf{v}_i| = 1$, másrészt a norma szigorú szubadditivitása miatt $\mathbf{v}_i = \mu_i \mathbf{u}$ valamely $\mathbf{u}$ egységnyi normájú vektorra és $0 \neq \mu_i \in \mathbb{R}$ számokra. Ezek alapján minden i indexre $\mathbf{v}_i = \mathbf{u}$, tehát ha a pozitív konvex lineáris kombinációk a határra esnek, akkor a vektorok megegyeznek, ami a (3) állítás szigorúsági része. Ezzel a tételt beláttuk. ■

Definíció. Egy $\mathcal{V}$ vektortér egy $\mathcal{I}$ részhalmazát *indikátrixnak* nevezzük, ha

- (0) elemeiből kiválasztható egy bázis,
- (1) korlátos,
- (2) szimmetrikus, és
- (3) szigorúan konvex. ▲

Tétel. Ha $\mathcal{I}$ egy indikátrix a $\mathcal{V}$ vektortérben, akkor az a $|\cdot|: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyet $\mathbf{w} \mapsto \inf\{\nu \in \mathbb{R}_{>0} : \frac{1}{\nu} \mathbf{w} \in \mathcal{I}\}$ definiál, norma.

Bizonyítás. A (0) feltétel miatt létezik egy $\{\mathbf{u}_i\}_1^n$ bázis az indikátrixban. Az (1) feltétel miatt pedig létezik egy $\{\mathbf{v}_i\}_1^n$ bázis, hogy

$$\mathcal{I} \subseteq \mathcal{L} := \left\{ \nu \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_i \mathbf{v}_i : 0 \leq \nu \leq 1, 0 \leq \lambda_i, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \varepsilon_i = \pm 1 \right\}.$$

Az indikátrix konvexitása és szimmetriája miatt a

$$\mathcal{K} = \left\{ \nu \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_i \mathbf{u}_i : 0 \leq \nu \leq 1, 0 \leq \lambda_i, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \varepsilon_i = \pm 1 \right\}.$$

halmaz az indikátrix része.

Minden $\mathbf{w}$ vektor előáll a bázis valamilyen $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{u}_i$ lineáris kombinációjaként, ezért a $\lambda = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$, $\lambda'_i = |\lambda_i|/\lambda$ és $\varepsilon_i = \text{sign } \lambda_i$ jelöléssel élve $\mathbf{w} = \lambda \sum_{i=1}^n \lambda'_i \varepsilon_i \mathbf{u}_i$, amiért $\lambda \mathbf{w} \in \mathcal{K} \subseteq \mathcal{I}$. Eszerint létezik a

$$|\mathbf{w}| := \inf \left\{ 0 < \nu : \frac{1}{\nu} \mathbf{w} \in \mathcal{I} \right\}$$

nem negatív szám, hiszen a fentiek szerint ν nem nagyobb, mint $1/\lambda$.

Ha $|\mathbf{w}| = 0$, akkor minden $0 < \mu$ esetén $\frac{1}{\mu} \mathbf{w} \in \mathcal{I} \subseteq \mathcal{L}$, vagyis léteznek olyan $0 \leq \nu \leq 1$, $0 \leq \lambda_i$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ és $\varepsilon_i = \pm 1$ számok, hogy $\frac{1}{\mu} \mathbf{w} = \nu \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_i \mathbf{v}_i$. Tekintve, hogy $\mathbf{w}$ bázisbontása a $\{\mathbf{v}_i\}_1^n$ bázisban egyértelmű, ez azt jelenti, hogy a $\mu \nu \lambda_i$ szorzat minden i indexre független a μ számtól. Ha $\nu = 0$, akkor $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, ha pedig $\nu \neq 0$, akkor eszerint minden i indexre $\lambda_i = 0$, amiért $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

Az $\mathcal{I}$ szimmetriája miatt

$$|\mathbf{w}| = \inf \left\{ \nu \in \mathbb{R}_{>0} : \frac{1}{\nu} \mathbf{w} \in \mathcal{I} \right\} = \inf \left\{ \nu \in \mathbb{R}_{>0} : \frac{1}{\nu} (-\mathbf{w}) \in \mathcal{I} \right\} = |-\mathbf{w}|$$

teljesül. A formula invarianciáját használva pedig

$$\begin{aligned} |\lambda \mathbf{w}| &= \inf \left\{ \nu \in \mathbb{R}_{>0} : \frac{1}{\nu} (\lambda \mathbf{w}) \in \mathcal{I} \right\} = |\lambda| \inf \left\{ \frac{\nu}{|\lambda|} \in \mathbb{R}_{>0} : \frac{1}{\nu/|\lambda|} (\text{sign}(\lambda) \mathbf{w}) \in \mathcal{I} \right\} \\ &= |\lambda| |\mathbf{w}|. \end{aligned}$$

A szubadditivitás bizonyításához tekintsünk két tetszőleges nem nulla $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektort, legyen $\lambda = |\mathbf{u}|$ és $\mu = |\mathbf{v}|$, valamint $\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{|\mathbf{u}|} \mathbf{u}$ és $\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{|\mathbf{v}|} \mathbf{v}$. Ekkor $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{I}$ a határra esik, a szigorú konvexitás feltétele miatt pedig $\mathbf{w} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \hat{\mathbf{u}} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \hat{\mathbf{v}}$ az $\mathcal{I}$ belsejébe esik, hacsak nem $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{v}}$. Utóbbi esetben nyilván $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$, ezért mostantól feltesszük, hogy $\hat{\mathbf{u}} \neq \hat{\mathbf{v}}$. Mivel $\mathbf{w}$ az induktrix belsejébe esik, létezik egy $\kappa > 1$ szám, melyre $\kappa \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \hat{\mathbf{u}} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \hat{\mathbf{v}} \right) \in \mathcal{I}$. Ebből viszont

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = \frac{\lambda + \mu}{\kappa} \left| \kappa \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \hat{\mathbf{u}} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \hat{\mathbf{v}} \right) \right| < \frac{\lambda + \mu}{\kappa} < \lambda + \mu = |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|,$$

ami bizonyítja a szigorú szubadditivitást. Ezzel a tétel egészét beláttuk. $\blacksquare$

Eszerint a normák kanonikus bijektív kapcsolatban állnak az induktrixokkal.

F.6. Alternáló formák: determináns

A terület- és térfogatformák megalkotásakor láthattuk azok alternálását és közvetlen kapcsolatát a terület és térfogatszámolással. Ha magasabb dimenziós affin téren is vizsgálni vagy használni akarunk térfogatmérést, akkor az alternáló formákra van szükség. Ezek közül persze legfontosabb a determináns.

A térfogatmérés legfontosabb eleme a külső formák alkalmazása: egy k -forma a k -dimenziós paralelepipedon térfogatát méri.

Itt egy rendkívül tömör áttekintés következik.

Rögzítünk egy n -dimenziós $\mathcal{V}$ vektorteret.

Egy lineáris $\ell: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést *lineáris funkcionálnak* nevezünk. A lineáris funkcionálok vektorteret alkotnak, ezt hívjuk *duális térnek*, és ezt $\mathcal{V}^*$ jelöli.

A $\mathcal{V}$ alaptér elemeit alsóindexelve, a $\mathcal{V}^*$ duális tér elemeit felsőindexelve használjuk. A $\mathcal{V}$ bázisa $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$, ennek *duális bázisa* $\{\mathbf{v}^i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{V}^*$, melyre $\mathbf{v}^i(\mathbf{v}_j) = \delta_{i,j}$ a *Kronecker-delta*, melynek értéke csak akkor 1 a 0 helyett, ha indexei egyenlőek.

Definíció. A $T: \mathcal{V}^r \times \mathcal{V}^{*s} \rightarrow \mathbb{R}$ multilineáris funkcionált (r, s) -típusú *valós értékű tenzornak* nevezzük. ▲

Egy tenzor megadása egy adott bázisban lehetséges és szokásos a bázisbontás $T_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} = T(\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_r}; \mathbf{v}^{j_1}, \dots, \mathbf{v}^{j_s})$ együtthatóival is.

Definíció. Az (r, s) -típusú T és (ρ, σ) -típusú Q tenzorok *tenzorszorzatán* az $(r + \rho, s + \sigma)$ -típusú $T \otimes Q$ tenzort értjük, melyre

$$\begin{aligned} T \otimes Q(\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_r}, \mathbf{v}_{i_{r+1}}, \dots, \mathbf{v}_{i_{r+\rho}}; \mathbf{v}^{j_1}, \dots, \mathbf{v}^{j_s}, \mathbf{v}^{j_{s+1}}, \dots, \mathbf{v}^{j_{s+\sigma}}) \\ = T(\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_r}; \mathbf{v}^{j_1}, \dots, \mathbf{v}^{j_s}) \cdot Q(\mathbf{v}_{i_{r+1}}, \dots, \mathbf{v}_{i_{r+\rho}}; \mathbf{v}^{j_{s+1}}, \dots, \mathbf{v}^{j_{s+\sigma}}). \end{aligned} \quad \blacktriangle$$

A tenzorszorzás nyilván asszociatív művelet.

Tétel. Az (r, s) -típusú tenzorok n^{r+s} -dimenziós vektorteret alkotnak, melynek bázisa $\mathbf{v}^{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}^{i_r} \otimes \mathbf{v}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_{j_s}$.

Bizonyítás. A megadott elemek függetlenek, mert

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}^{i_r} \otimes \mathbf{v}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_{j_s}(\mathbf{v}_{k_1}, \dots, \mathbf{v}_{k_r}; \mathbf{v}^{l_1}, \dots, \mathbf{v}^{l_s}) \\ = \delta_{i_1, k_1} \dots \delta_{i_r, k_r} \delta_{j_1, l_1} \dots \delta_{j_s, l_s}, \end{aligned}$$

ezért elég megmutatnunk, hogy ezek az elemek generáló elemek.

Legyen $\mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_j^i \mathbf{v}_i$, és $\mathbf{y}^j = \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i^j \mathbf{v}^i$. Ekkor

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r; \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^s) \\ = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s}} \mathbf{x}_1^{i_1} \dots \mathbf{x}_r^{i_r} \mathbf{y}_{j_1}^1 \dots \mathbf{y}_{j_s}^s T(\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_r}; \mathbf{v}^{j_1}, \dots, \mathbf{v}^{j_s}) \\ = \sum \mathbf{x}_1^{i_1} \dots \mathbf{x}_r^{i_r} \mathbf{y}_{j_1}^1 \dots \mathbf{y}_{j_s}^s T_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} \\ = \sum T_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} \cdot \mathbf{v}^{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}^{i_r} \otimes \mathbf{v}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_{j_s}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r; \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^s). \end{aligned}$$

alapján a $\mathbf{v}^{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}^{i_r} \otimes \mathbf{v}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_{j_s}$ tenzorok generálják az összes tenzort, ami igazolja az állítást. ■

Definíció. Az $(r, 0)$ -típusú valós értékű T tenzort *alternáló tenzornak* vagy *külső formának* nevezzük, ha $T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r) = \text{sign } \sigma T(\mathbf{v}_{1\sigma}, \dots, \mathbf{v}_{r\sigma})$ minden $\sigma \in S_r$ permutációra, ahol $\text{sign } \sigma$ jelöli a paritást, mely $+1$, ha σ páros, és -1 , ha σ páratlan. Az alternáló tenzorok terét $\wedge^r \mathcal{V}^*$ jelöli. ▲

Grassmann-algebrának hívjuk a $\wedge \mathcal{V}^* = \mathbb{R} + \mathcal{V}^* + \wedge^2 \mathcal{V}^* + \dots + \wedge^n \mathcal{V}^*$ teret. Világos, hogy $\wedge^0 \mathcal{V}^* = \mathbb{R}$, $\wedge^1 \mathcal{V}^* = \mathcal{V}^*$, és ha $m > n$, akkor $\wedge^m \mathcal{V}^*$ egyetlen eleme a nulla tenzor.

F.6.1. Tétel. A $\wedge^r \mathcal{V}^*$ vektortér dimenziója $\binom{n}{r}$, és egy bázisa

$$B^{i_1 \dots i_r} = \sum_{\sigma \in S_r} \frac{\text{sign } \sigma}{r!} \mathbf{v}_{i_{1\sigma}} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_{i_{r\sigma}}, \quad (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n).$$

Bizonyítás. Az nyilvánvaló, hogy $\wedge^r \mathcal{V}^*$ vektortér, és $B^{i_1, \dots, i_r} \in \wedge^r \mathcal{V}^*$.

Legyenek $c_{i_1, \dots, i_r}$ az $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$ indexhalmazhoz rendelt konstansok. Legyen $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n$. Ekkor

$$0 = \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} c_{i_1, \dots, i_r} B^{i_1, \dots, i_r} \right) (\mathbf{v}_{j_1}, \dots, \mathbf{v}_{j_r}) = \frac{c_{j_1, \dots, j_r}}{r!},$$

ami bizonyítja a megadott rendszer függetlenségét.

Ha $T \in \wedge^r \mathcal{V}^*$, és $\mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_j^i \mathbf{v}_i$, akkor

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r) &= \sum_{i_1, \dots, i_r} \mathbf{x}_1^{i_1} \dots \mathbf{x}_r^{i_r} T(\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_r}) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} r! T(\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_r}) \sum_{\sigma \in S_r} \frac{\text{sign } \sigma}{r!} \mathbf{x}_1^{i_{1\sigma}} \dots \mathbf{x}_r^{i_{r\sigma}} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} r! T_{i_1, \dots, i_r} B^{i_1, \dots, i_r}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r), \end{aligned}$$

vagyis a $B^{i_1, \dots, i_r}$ külső formák generáló rendszert is alkotnak. ■

Definíció. Ha $T \in \wedge^p \mathcal{V}^*$ és $S \in \wedge^q \mathcal{V}^*$, akkor

$$\begin{aligned} T \wedge S(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p, \mathbf{x}_{p+1}, \dots, \mathbf{x}_{p+q}) \\ = \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \frac{\text{sign } \sigma}{(p+q)!} T(\mathbf{x}_{1\sigma}, \dots, \mathbf{x}_{p\sigma}) S(\mathbf{x}_{(p+1)\sigma}, \dots, \mathbf{x}_{(p+q)\sigma}) \end{aligned}$$

az ő *külső szorzatuk*. ▲

A $T \wedge S$ külső szorzat a $\wedge^{p+q}\mathcal{V}^*$ térben van, hiszen

$$\begin{aligned}
 T \wedge S(\mathbf{x}_{1\pi}, \dots, \mathbf{x}_{p\pi}, \mathbf{x}_{(p+1)\pi}, \dots, \mathbf{x}_{(p+q)\pi}) \\
 &= \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \frac{\text{sign } \sigma}{(p+q)!} T(\mathbf{x}_{1\pi\sigma}, \dots, \mathbf{x}_{p\pi\sigma}) S(\mathbf{x}_{(p+1)\pi\sigma}, \dots, \mathbf{x}_{(p+q)\pi\sigma}) \\
 &= \sum_{\tau \in S_{p+q}} \frac{\text{sign}(\pi^{-1}\tau)}{(p+q)!} T(\mathbf{x}_{1\tau}, \dots, \mathbf{x}_{p\tau}) S(\mathbf{x}_{(p+1)\tau}, \dots, \mathbf{x}_{(p+q)\tau}) \\
 &= \text{sign } \pi \cdot T \wedge S(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p, \mathbf{x}_{p+1}, \dots, \mathbf{x}_{p+q}).
 \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $T \wedge S = (-1)^{pq} S \wedge T$. Ha S konstans, akkor $q = 0$, és így

$$T \wedge S(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p) = \sum_{\sigma \in S_p} \frac{\text{sign } \sigma}{p!} T(\mathbf{x}_{1\sigma}, \dots, \mathbf{x}_{p\sigma}) S = ST(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p).$$

Tétel. A külső szorzás asszociatív és disztributív az összeadásra nézve.

Bizonyítás. A disztributivitás nyilvánvaló, így elég az asszociativitást, azt is csak a $B^{i_1, \dots, i_r}$ báziselemekre belátni. Elég tehát látni, hogy $B^{1, \dots, r} \wedge B^{r+1, \dots, k} = B^{1, \dots, k}$.

$$\begin{aligned}
 B^{1, \dots, r} \wedge B^{r+1, \dots, k}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) \\
 &= \sum_{\tau \in S_k} \frac{\text{sign } \tau}{k!} B^{1 \dots r}(\mathbf{x}_{1\tau}, \dots, \mathbf{x}_{r\tau}) B^{r+1 \dots k}(\mathbf{x}_{(r+1)\tau}, \dots, \mathbf{x}_{k\tau}) \\
 &= \sum_{\tau \in S_k} \frac{\text{sign } \tau}{k!} \sum_{\sigma \in S_r} \frac{\text{sign } \sigma}{r!} \mathbf{v}^{1\sigma}(\mathbf{x}_{1\tau}) \dots \mathbf{v}^{r\sigma}(\mathbf{x}_{r\tau}) \times \\
 &\quad \times \sum_{\rho \in S_{k-r}} \frac{\text{sign } \rho}{(k-r)!} \mathbf{v}^{r+1\rho}(\mathbf{x}_{(r+1)\tau}) \dots \mathbf{v}^{r+(k-r)\rho}(\mathbf{x}_{k\tau}) \\
 &= \sum_{\tau \in S_k} \frac{\text{sign } \tau}{k!} \sum_{\sigma \in S_r} \frac{\text{sign } \sigma}{r!} \mathbf{v}^1(\mathbf{x}_{1\sigma\tau}) \dots \mathbf{v}^r(\mathbf{x}_{r\sigma\tau}) \times \\
 &\quad \times \sum_{\rho \in S_{k-r}} \frac{\text{sign } \rho}{(k-r)!} \mathbf{v}^{r+1}(\mathbf{x}_{(r+1)\rho\tau}) \dots \mathbf{v}^k(\mathbf{x}_{(r+(k-r)\rho)\tau}) \\
 &= \sum_{\sigma \in S_r} \frac{\text{sign } \sigma}{r!} \sum_{\rho \in S_{k-r}} \frac{\text{sign } \rho}{(k-r)!} B^{1, \dots, k}(\mathbf{x}_{1\sigma}, \dots, \mathbf{x}_{r\sigma}, \mathbf{x}_{r+1\rho}, \dots, \mathbf{x}_{r+(k-r)\rho}) \\
 &= \sum_{\sigma \in S_r} \frac{(\text{sign } \sigma)^2}{r!} \sum_{\rho \in S_{k-r}} \frac{(\text{sign } \rho)^2}{(k-r)!} B^{1, \dots, k}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}_{r+1}, \dots, \mathbf{x}_k) \\
 &= B^{1, \dots, k}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a fentiek szerint $B^{i_1, \dots, i_r} = \mathbf{v}^{i_1} \wedge \mathbf{v}^{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{v}^{i_r}$, amiből viszont következik, hogy $\wedge^n \mathcal{V}^*$ minden eleme $c\mathbf{v}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}^n$ valamilyen c konstansra, vagyis az $(n, 0)$ -típusú alternáló tenzorok 1-dimenziós teret alkotnak, ahogy azt már az F.6.1. Tétel alapján is tudtuk.

Definíció. Az $(n, 0)$ -típusú alternáló tenzorokat *determinánsnak* nevezzük. ▲

Mivel a determinánsok egymás valós számmal vett többszörösei, szokásos ki-jelölni közülük egy sztenderd determinánst. Ez az, amely egy rögzített bázison 1 értéket ad. Euklidészi vektortér esetén általában egy ortonormált bázist választunk. Ha másként nincs specifikálva, akkor az $\mathbb{R}^n$ téren mindig a sztenderd determinánst használjuk, amelyet a következőképpen kapunk. Vegyük az $\mathbb{R}^n$ sztenderd bázisát (ez azon szám- n -esekből áll, melyekben pontosan egy 1 van, a többi elem pedig 0). Jelölje $\det: (\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathbb{R}$ azt a determinánst, amelynek ezen a bázison 1 az értéke.

Egy n -dimenziós $\mathcal{V}$ vektortéren az $\langle \cdot, \cdot \rangle$ euklidészi szorzat szorosan kapcsolódik a lineáris funkcionálokhoz. Például a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ euklidészi szorzásból minden $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ vektorral egy $\mathbf{v} \rightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ lineáris funkcionál készíthető.

F.6.2. Tétel. Bármely $\mathcal{V}$ euklidészi vektortéren minden $\ell: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris funkcionálhoz létezik pontosan egy olyan $\mathbf{w}_\ell \in \mathcal{V}$ vektor, melyre $\ell(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_\ell \rangle$ minden $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektorra.

Bizonyítás. *Unicitás.* Ha a $\mathbf{w}$ és $\mathbf{w}'$ vektorra $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = f(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}' \rangle$ minden $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ esetén, akkor $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}' - \mathbf{w} \rangle = 0$ minden $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektorra, így a $\mathbf{w}' - \mathbf{w}$ vektorra is, amiért $|\mathbf{w}' - \mathbf{w}| = 0$, és így $\mathbf{w}' - \mathbf{w} = \mathbf{0}$.

Egzisztencia. Minthogy ℓ lineáris, értékét meghatározza bármely bázison felvett értékei. Ha tehát $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ a $\mathcal{V}$ egy ortonormált bázisa, akkor a $\mathbf{w}_\ell := \sum_{i=1}^n \ell(\mathbf{u}_i) \mathbf{u}_i$ vektorra $\ell = \langle \cdot, \mathbf{w}_\ell \rangle$. ■

Ez a tétel teljes általánosságában Riesz reprezentációs tételeként ismert.

Eredményünk szerint a $\mathcal{V}$ vektortér kanonikusan izomorf a $\mathcal{V}^*$ duálisával, mégpedig a $\cdot^*: \mathbf{v} \mapsto (\mathbf{v}^*: \mathbf{u} \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)$ izomorfizmussal, amiért minden $T, S \in \wedge^r \mathcal{V}^*$ külső forma $T = \bigwedge_{i=1}^r \mathbf{u}_i^*$ és $S = \bigwedge_{i=1}^r \mathbf{v}_i^*$ alakú valamely megfelelő $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i \in \mathcal{V}$ vektorokra. Defináljuk ez alapján a

$$\langle T, S \rangle_r := \det \begin{pmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_i \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_i \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k \rangle \end{pmatrix}$$

szorzatot. Ennek értéke nem függ a megfelelő $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i \in \mathcal{V}$ vektorok választásától, lineárisan függ mindkét változójától, és nem elfajuló, azaz $\langle T, S \rangle_r = 0$ csak úgy teljesülhet minden $S \in \Lambda^r \mathcal{V}^*$ külső formára, ha T éppen a nullforma.

Jegyezzük meg, hogy $r = 1$ esetén $\langle \mathbf{u}_1^*, \mathbf{v}_1^* \rangle_1 = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 \rangle$, továbbá $\langle T, T \rangle_r$ nem negatív és csakis akkor nulla, ha T éppen a nullforma.

Rögzítsük azt a $D \in \Lambda^n \mathcal{V}^*$ determinánst, melynek ortonormált bázisokon 1 az értéke. Ekkor a bázisbontás egyértelműsége miatt minden $T \in \Lambda^r \mathcal{V}^*$ külső formához pontosan egy olyan $R \in \Lambda^{n-r} \mathcal{V}^*$ külső forma van, amelyre $T \wedge R = D$. Ez lehetővé teszi, hogy minden $S \in \Lambda^r \mathcal{V}^*$ külső formához hozzárendeljük azt az egyértelmű $\star S \in \Lambda^{n-r} \mathcal{V}^*$ külső formát, melyre $T \wedge \star S = \langle T, S \rangle_r D$. A $\star$ -művelet *Hodge-csillag*, az eljárás *Hodge-dualizálás* néven ismert.

Speciálisan az $n = 3$ esetben bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektorokhoz pontosan egy olyan $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$ vektor létezik, melyre $\star(\mathbf{u}^* \wedge \mathbf{v}^*) = \mathbf{w}^*$, és a $\mathbf{w}$ vektor nem más mint az $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ keresztszorzat, mert annak *kifejtési tétele* miatt

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* \wedge \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \mathbf{u}^*(\mathbf{x})\mathbf{v}^*(\mathbf{y}) - \mathbf{v}^*(\mathbf{x})\mathbf{u}^*(\mathbf{y}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{v} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle = \langle (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (\mathbf{u} \times \mathbf{v})^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ vektor esetén.

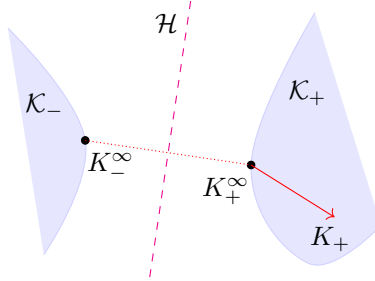
F.7. Konvex halmazok elválasztása

Egy ponthalmaz konvex burka lezártjának képzéséhez nincs szükség a definícióban megkövetelt összes, a ponthalmazt tartalmazó konvex ponthalmazra, hanem elegendő a ponthalmazt tartalmazó zárt affin félterek figyelembevétel. Ennek igazolására elég látni, hogy bármely, a lezárt konvex burkon kívüli ponthoz létezik olyan hipersík, melynek különböző oldalaira esik a pont és a konvex burok. Ennél azonban jóval több is igaz.

Tétel. *Legyen a $\mathcal{K}_-$ és $\mathcal{K}_+$ konvex halmazok metszete üres, mindkettő zárt, az egyikük, mondjuk $\mathcal{K}_-$, korlátos is. Ekkor létezik olyan hipersík, melynek a $\mathcal{K}_-$ és $\mathcal{K}_+$ konvex halmazok különböző oldalára esnek.*

Bizonyítás. Vegyünk az affin téren egy d euklidészi metrikát, és tekintsük $d(K_-, K_+)$ számokat minden $K_\pm \in \mathcal{K}_\pm$ esetén. Ezek nem negatív számok, ezért a $\{d(K_-, K_+) : K_\pm \in \mathcal{K}_\pm\}$ halmaznak van egy nem negatív d_0 alsó határa. Ekkor vannak olyan $K_\pm^n \in \mathcal{K}_\pm$ pontsorozatok, hogy $d(K_-^n, K_+^n) \rightarrow d_0$. Mivel $\mathcal{K}_-$ kompakt, a K_-^n sorozatnak van végtelen konvergens részsorozata, mondjuk $K_-^n \rightarrow K_-^\infty$. Mivel $d(K_-^{n_i}, K_+^{n_i}) \rightarrow d_0$ is teljesül, ebből $K_+^{n_i}$ korlátossága is következik, amiből viszont eszerint kiválasztható egy végtelen konvergens $K_+^{n_{i_j}}$ sorozat, melynek határértéke

mondjuk K_+^∞ . Ebből $d_0 = d(K_-^\infty, K_+^\infty)$ adódik, ahol a zárttság miatt $K_\pm^\infty \in \mathcal{K}_\pm$. Mivel $\mathcal{K}_-$ és $\mathcal{K}_+$ egymástól idegen, adódik, hogy $d_0 > 0$.



Tetszőleges $K_+ \in \mathcal{K}_+$ pontra és $\lambda \in [0, 1]$ számra legyen K_+^λ az a pont a $\overrightarrow{K_+^\infty K_+}$ szakaszon, melyre $\overrightarrow{K_+^\infty K_+^\lambda} = \lambda \overrightarrow{K_+^\infty K_+}$. A K_+^λ pont a konvexitás miatt a $\mathcal{K}_+$ halmazban van, ezért

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\overrightarrow{K_+^\infty K_+^\lambda}|^2 - |\overrightarrow{K_+^\infty K_+^\infty}|^2 = |\overrightarrow{K_+^\infty K_+^\infty} + \overrightarrow{K_+^\infty K_+^\lambda}|^2 - |\overrightarrow{K_+^\infty K_+^\infty}|^2 \\ &= \lambda^2 |\overrightarrow{K_+^\infty K_+}|^2 + 2\lambda \langle \overrightarrow{K_+^\infty K_+^\infty}, \overrightarrow{K_+^\infty K_+} \rangle. \end{aligned}$$

Elosztva ezt a $\lambda > 0$ számmal, majd a $\lambda \rightarrow 0$ határátmenetet véve azt kapjuk, hogy minden $K_+ \in \mathcal{K}_+$ pontra $0 \leq \langle \overrightarrow{K_+^\infty K_+^\infty}, \overrightarrow{K_+^\infty K_+} \rangle$ teljesül.

Legyen $\mathcal{H}$ a $\overrightarrow{K_+^\infty K_+^\infty}, \overrightarrow{K_+^\infty K_+^\infty}$ szakaszfelező merőleges hipersíkja, és $\bar{H} = \mathcal{H} \cap \overrightarrow{K_+^\infty K_+^\infty}$. Ekkor a $\mathcal{H}$ minden H pontjára

$$\langle \overrightarrow{K_+^\infty K_+^\infty}, \overrightarrow{K_+^\infty H} \rangle = \langle \overrightarrow{K_+^\infty K_+^\infty}, \overrightarrow{K_+^\infty H} + \overrightarrow{H H} \rangle = \langle \overrightarrow{K_+^\infty K_+^\infty}, \overrightarrow{K_+^\infty H} \rangle = -\frac{d_0^2}{2} < 0.$$

Eszerint a $\mathcal{H}$ hipersík nem metszi a $\mathcal{K}_+$ halmazt. Ugyanezen a módon látható, hogy a $\mathcal{H}$ hipersík a $\mathcal{K}_-$ halmazt sem metszi, tehát a $\mathcal{K}_\pm$ halmazok a $\mathcal{H}$ hipersík különböző oldalára esnek. ■

A korlátosság feltételének elhagyása esetén előfordulhat, hogy csak olyan hipersík választja el a két konvex zárt halmazt, amely belemetsz legalább az egyik konvex halmazba. Ez a helyzet például a síkbeli konvex

$$\mathcal{K}_- = \{(x, y) : y \leq 0 \text{ és } x \in \mathbb{R}\} \text{ és } \mathcal{K}_+ = \{(x, y) : y \geq 1/x \text{ és } 0 < x \in \mathbb{R}\}$$

halmazokkal. Nyílt konvex halmazokkal tovább élesíthető az elválasztás.

Egy $p: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést *szubadditív funkcionálnak* nevezünk a $\mathcal{V}$ vektortéren, ha $p(\mathbf{x}) \geq 0$, $p(\lambda \mathbf{x}) = \lambda p(\mathbf{x})$, és $p(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq p(\mathbf{x}) + p(\mathbf{y})$ minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ és $\lambda \geq 0$ esetén. Nyilván minden norma szubadditív funkcionál.

Hahn–Banach-tétel. *Legyen adott a $\mathcal{V}$ véges dimenziós vektortéren egy p szubadditív funkcionál, egy $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{V}$ lineáris altér és egy $\ell: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, melyre $\ell(\mathbf{x}) \leq p(\mathbf{x})$ minden $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ esetén. Ekkor létezik olyan $\hat{\ell}: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, melyre $\hat{\ell}(\mathbf{v}) \leq p(\mathbf{v})$ minden $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ esetén, és $\hat{\ell}(\mathbf{x}) = \ell(\mathbf{x})$ minden $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ esetén.*

Bizonyítás. Először igazoljuk, hogy amennyiben $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{V}$ olyan lineáris altér, melyre $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ és $\dim(\mathcal{Y}) - \dim(\mathcal{X}) = 1$, akkor létezik olyan $\bar{\ell}: \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, melyre $\bar{\ell}(\mathbf{y}) \leq p(\mathbf{y})$ minden $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ esetén, és $\bar{\ell}(\mathbf{x}) = \ell(\mathbf{x})$ minden $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ esetén.

Legyen $\mathbf{y}_0 \in \mathcal{Y}$ az $\mathcal{X}$ altéren kívül. Ilyen biztosan van, hiszen másként $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ lenne. Az $\mathbf{y}_0$ vektor emiatt nem állítható elő az $\mathcal{X}$ vektortér $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^k$ báziselemeinek lineáris kombinációjaként, tehát az $\mathbf{y}_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ vektorok függetlenek, amiért az $\mathcal{Y}$ bázisát alkotják, hiszen $\dim \mathcal{Y} = k + 1$. Eszerint $\mathcal{Y}$ minden eleme előáll a $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}_0$ formában, ahol $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$.

Olyan $\bar{\ell}$ funkcionált keresünk tehát, melyre $\bar{\ell}(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}_0) \leq p(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}_0)$ és $\bar{\ell}(\mathbf{x}) = \ell(\mathbf{x})$ minden $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén. Mivel az $\bar{\ell}$ funkcionál lineáris is, az egyenlőtlenséget a $|\lambda| > 0$ számmal osztva, feltételünket az

$$\bar{\ell}\left(\frac{\mathbf{x}}{|\lambda|}\right) + \text{sign}(\lambda)\bar{\ell}(\mathbf{y}_0) \leq p\left(\frac{\mathbf{x}}{|\lambda|} + \text{sign}(\lambda)\mathbf{y}_0\right)$$

alakban kapjuk, ami ekvivalens az $\bar{\ell}(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x} - \mathbf{y}_0) \leq \bar{\ell}(\mathbf{y}_0) \leq p(\mathbf{x}' + \mathbf{y}_0) - \bar{\ell}(\mathbf{x}')$ egyenlőtlenségek megkövetelésével minden $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X}$ vektorra.

Mivel

$$\ell(\mathbf{x}) + \ell(\mathbf{x}') = \ell(\mathbf{x} + \mathbf{x}') \leq p(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = p((\mathbf{x}' + \mathbf{y}_0) + (\mathbf{x} - \mathbf{y}_0)) \leq p(\mathbf{x}' + \mathbf{y}_0) + p(\mathbf{x} - \mathbf{y}_0),$$

létezik olyan $y_0 \in \mathbb{R}$ szám, melyre $\ell(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x} - \mathbf{y}_0) \leq y_0 \leq p(\mathbf{x} + \mathbf{y}_0) - \ell(\mathbf{x})$. Legyen $\bar{\ell}(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}_0) = \ell(\mathbf{x}) + \lambda y_0$. Ez nyilván lineáris, és $\bar{\ell}(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}_0) \leq p(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}_0)$, mert $\lambda = 0$ esetén $\bar{\ell}(\mathbf{x}) = \ell(\mathbf{x}) \leq p(\mathbf{x})$, $\lambda \neq 0$ esetén pedig

$$\bar{\ell}(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}_0) = |\lambda| \left(\bar{\ell}\left(\frac{\mathbf{x}}{|\lambda|}\right) + \text{sign}(\lambda)y_0 \right) \leq |\lambda| p\left(\frac{\mathbf{x}}{|\lambda|} + \text{sign}(\lambda)\mathbf{y}_0\right) = p(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}_0).$$

A fenti eljárást összesen $\dim \mathcal{V} - \dim \mathcal{X}$ alkalommal elvégezve, az $(\mathcal{X}, \ell)$ altér-funkcionál párból egy sorozatot kapunk, melyben az előző funkcionál mindig a következő megszorítása a saját alterére, miközben a következő altér dimenziója mindig meghaladja eggyel az előző altér dimenzióját, és a sorozat végén a kívánt $(\mathcal{V}, \hat{\ell})$ altér-funkcionál pár található. ■

Tekintsünk egy tetszőleges ℓ lineáris funkcionált valamely O pontbeli helyvektortérben. Azon H pontok $\mathcal{H}$ halmaza, melyre $\ell(H_O) = \kappa$ valamely $\kappa \in \mathbb{R}$ számra, affin geometriát (síkot illetve egyenest) alkot, mert ha $X, Y \in \mathcal{H}$, akkor

közös egyenesük Z pontjaira

$$\ell(Z_O) = \ell(\lambda X_O + (1 - \lambda)Y_O) = \lambda \ell(X_O) + (1 - \lambda)\ell(Y_O) = \kappa,$$

vagyis $\mathcal{H}$ tartalmazza a pontpárjaira illeszkedő egyeneseket. Ez azt is mutatja, hogy bármely $P \in \mathcal{H}$ pontra a $T_P\mathcal{H}$ helyvektortér a P ponthoz tartozó helyvektortér lineáris altére.

Egy $\mathcal{H}$ ponthalmaz akkor és csak akkor hipersík, ha létezik olyan ℓ lineáris funkcionál és $\kappa \in \mathbb{R}$ szám, hogy $\mathcal{H} = \{H : \ell(H_O) = \kappa\}$ valamely O pontra, hiszen az $\ell(H_O) = \kappa$ egyenlet éppen egy lineáris egyenlet a ponthalmazra, a hipersíkot meg éppen egy lineáris egyenlet megoldáshalmaza definiálja. Mivel a lineáris funkcionálok többszörösei is lineáris funkcionálok, ezen kapcsolat a hipersíkok és lineáris funkcionálok között nem egyértelmű, de érvényes a következő.

Tétel. *Egy $\mathcal{H}$ ponthalmaz akkor és csak akkor hipersík, ha tartalmazza pontpárjai egyeneseit és van hozzá egy olyan $\mathbf{h}_O$ helyvektor is, hogy minden K ponthoz létezik olyan $H^K \in \mathcal{H}$ és $\lambda_K \in \mathbb{R}$, melyre $K_O = H_O^K + \lambda_K \mathbf{h}_O$.*

Bizonyítás. Mivel $\mathcal{H}$ a pontpárjaival együtt tartalmazza az azokra illeszkedő egyeneseket is, bármely H pontjához a $\mathcal{H}_H = \{X_H : X \in \mathcal{H}\}$ vektortér a H pontban lévő helyvektortér egy altére. Legyenek a $\hat{\mathbf{h}}^i$ szabad vektorok olyanok, hogy $\{\hat{\mathbf{h}}^i\}_{i=1}^m$ a $\mathcal{H}_H$ egy bázisa. Ekkor a $\{\mathbf{h}_O^i\}_{i=1}^m \cup \{\mathbf{h}_O\}$ az origó helyvektorterének egy bázisa, mert minden K pontra

$$\begin{aligned} K_O &= H_O^K + \lambda_K \mathbf{h}_O = (H_O^K - H_O^O) + H_O^O + \lambda_K \mathbf{h}_O \\ &= \left(\sum_{i=1}^m \mu_i \mathbf{h}_O^i \right) - \lambda_O \mathbf{h}_O + \lambda_K \mathbf{h}_O = \sum_{i=1}^m \mu_i \mathbf{h}_O^i + (\lambda_K - \lambda_O) \mathbf{h}_O, \end{aligned}$$

és a $\mathbf{h}_O$ nem állhat elő a $\{\mathbf{h}_O^i\}_{i=1}^m$ bázis elemeinek lineáris kombinációjaként, hiszen nincs benne a $\mathcal{H}_H$ helyvektortérben. Ebből következik, hogy $\mathcal{H}_H$ dimenziója éppen eggyel kisebb a teljes helyvektortér dimenziójánál, vagyis sík esetén egy egyenes, tér esetén egy sík.

Legyen $\ell(K_O) = \lambda_K - \lambda_O$. Ez nyilván egy lineáris funkcionál, hiszen nem más, mint a vektorok $\{\mathbf{h}_O^i\}_{i=1}^m \cup \{\mathbf{h}_O\}$ bázisban vett bázisbontásában az utolsó, $\mathbf{h}_O$ báziselem együtthatója. Ekkor $\ell(K_O) = 0$ pontosan akkor, ha $K \in \mathcal{H}$, ami definíció szerint azt jelenti, hogy $\mathcal{H}$ egy hipersík.

A fordított irányú állítás igazolásához vegyük a $\mathcal{H}$ hipersíkot definiáló egyik ℓ lineáris funkcionált, melyre $\ell(H_O) = \kappa$ pontosan a $H \in \mathcal{H}$ pontokra.

Legyen P egy tetszőleges pont a $\mathcal{H}$ hipersíkon kívül, melyre $\mu := \ell(P_O) \neq 0$.

Legyen $\mathbf{h}_O = P_O$ és $H_O^K = K_O - \frac{\ell(K_O) - \kappa}{\mu} \mathbf{h}_O$. Ekkor

$$\begin{aligned} \ell(H_O^K) &= \ell\left(K_O - \frac{\ell(K_O) - \kappa}{\mu} \mathbf{h}_O\right) = \ell(K_O) - \frac{\ell(K_O) - \kappa}{\mu} \ell(\mathbf{h}_O) \\ &= \ell(K_O) - (\ell(K_O) - \kappa) = \kappa, \end{aligned}$$

tehát $H^K \in \mathcal{H}$, ami igazolja az állítást. ■

Definíció. Legyen $\mathcal{K}$ egy zárt konvex ponthalmaz, mely tartalmazza az origót, és a belseje nem üres. Ekkor az origó helyvektorain értelmezett $p_{\mathcal{K},O}(P_O) = \inf\{\nu : \frac{1}{\nu}P_O \in \mathcal{K}, \nu > 0\}$ függvényt *Minkowski-funkcionálnak* hívják. ▲

Az induktrixok vizsgálatánál már láttuk, hogy a Minkowski-funkcionál tényleg funkcionál, és azt is igazoltuk, hogy szubadditív, vagyis nemnegatív, homogén a pozitív számokra, és teljesíti a háromszög-egyenlőtlenséget, ha pedig $\mathcal{K}$ szigorúan konvex, akkor a szigorú háromszög-egyenlőtlenséget is.

Most bemutatjuk a (nem feltétlen szigorú) háromszög-egyenlőtlenségnek egy, az egyenlőtlenség szigorúságának bizonyítására alkalmatlan, de az eddiginél egyszerűbb bizonyítását.

Tétel. *A Minkowski-funkcionál szubadditív.*

Bizonyítás. A fenti okok miatt csak a háromszög-egyenlőtlenséget igazoljuk. Legyen $\mathcal{K}$ egy zárt konvex ponthalmaz, mely tartalmazza az origót, és tekintsük az $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ tetszőleges nem nulla helyvektorokat. Nyilván $\mathbf{x}/p(\mathbf{x}), \mathbf{y}/p(\mathbf{y}) \in \mathcal{K}$, ezért

$$\mathcal{K} \ni \frac{p(\mathbf{x})}{p(\mathbf{x}) + p(\mathbf{y})} \left(\frac{\mathbf{x}}{p(\mathbf{x})} \right) + \frac{p(\mathbf{y})}{p(\mathbf{x}) + p(\mathbf{y})} \left(\frac{\mathbf{y}}{p(\mathbf{y})} \right) = \frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{p(\mathbf{x}) + p(\mathbf{y})},$$

amiből az infimum képzése miatt $p(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq p(\mathbf{x}) + p(\mathbf{y})$ következik. ■

Hahn–Banach tétel. (geometriai alak) *Ha két nem üres konvex halmaz metszete üres, és az egyik nyílt, akkor létezik olyan hipersík, melynek egyik nyílt féltere az egyik, a másik zárt féltere pedig a másik konvex halmazt tartalmazza.*

Bizonyítás. Legyenek adottak a nem üres, idegen $\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y}$ konvex ponthalmazok, melyek közül mondjuk az $\mathcal{X}$ nyílt. Válasszunk egy $\bar{X} \in \mathcal{X}$ és $\bar{Y} \in \mathcal{Y}$ pontot.

Legyen $\mathcal{K} := \{K \text{ pont} : K_O = X_O - Y_O + \bar{X}_O - \bar{Y}_O, X \in \mathcal{X}, Y \in \mathcal{Y}\}$. Ez egy nyílt halmaz, hiszen az $\mathcal{X}$ halmaz eltoltjainak uniója, és konvex is, hiszen tetszőleges $0 \leq \lambda \leq 1$ esetén

$$\begin{aligned} \lambda K_O + (1 - \lambda)K'_O &= \lambda(X_O - Y_O + \bar{X}_O - \bar{Y}_O) + (1 - \lambda)(X'_O - Y'_O + \bar{X}_O - \bar{Y}_O) \\ &= (\lambda X_O + (1 - \lambda)X'_O) - (\lambda Y_O + (1 - \lambda)Y'_O) + \bar{X}_O - \bar{Y}_O. \end{aligned}$$

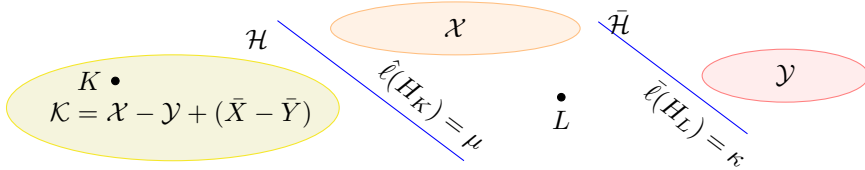
Az L pont, melyre $L_O = \bar{X}_O - \bar{Y}_O$ nincs a $\mathcal{K}$ halmazban, hiszen $\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y}$ egymástól idegen.

Legyen most $K \in \mathcal{K}$, és tekintsük a K pontból induló helyvektorokon a szubadditív $p_{\mathcal{K},K}(P_K) = \inf\{\nu : \frac{1}{\nu}P \in \mathcal{K}, \nu > 0\}$ Minkowski-funkcionált, valamint azt az ℓ lineáris funkcionált, melyre $\ell(\lambda L_K) = \lambda$ az 1-dimenziós $\{\lambda L_K : \lambda \in \mathbb{R}\}$ altéren. Mivel $L \notin \mathcal{K}$,

$$p_{\mathcal{K},K}(\lambda L_K) = |\lambda|p_{\mathcal{K},K}(L_K) > |\lambda| > \lambda = \ell(\lambda L_K),$$

amiért a Hahn–Banach-tétel értelmében létezik olyan $\hat{\ell}$ lineáris funkcionál a K teljes helyvektorterén, melyre $\hat{\ell} \leq p_{\mathcal{K},K}$ és $\hat{\ell}(\lambda L_K) = \lambda$.

Válasszunk egy $\mu \in \mathbb{R}$ számot úgy, hogy $1 < \mu < p_{\mathcal{K},K}(L_K)$. Azon H pontok $\mathcal{H}$ hipersíkja, melyre $\hat{\ell}(H_K) = \mu$, elválasztja az L pontot a $\mathcal{K}$ minden pontjától, hiszen ezen pontokra egyfelől $1 < \mu = \hat{\ell}(L_K) \leq p_{\mathcal{K},K}(L_K)$, amiért $\mathcal{H}$ pontjai a $\mathcal{K}$ halmazon kívülre esnek, tehát $\mathcal{H} \cap \mathcal{K} = \emptyset$, másfelől az $LK = \{P : P_K = \lambda L_K, \lambda \in \mathbb{R}\}$ egyenes metszi a $\mathcal{H}$ hipersíkot, hiszen $\hat{\ell}(\mu L_K) = \mu$, miközben az L pont nincsen rajta a $\mathcal{H}$ hipersíkon, mert $\hat{\ell}(L_K) = 1 \neq \mu$.



Tekintsük most az L helyvektorterében azt az $\bar{\ell}$ lineáris funkcionált, melyre $\bar{\ell}(H_L) = 1$ pontosan a $H \in \mathcal{H}$ pontokra. Ekkor $\bar{\ell}(X_L - Y_L) > 1$ minden $X \in \mathcal{X}$ és $Y \in \mathcal{Y}$ pontra, hiszen $\mathcal{K}$ és L a $\mathcal{H}$ hipersík két különböző oldalára esik. Eszerint $\bar{\ell}(X_L) > 1 + \bar{\ell}(Y_L)$ minden $X \in \mathcal{X}$ és $Y \in \mathcal{Y}$ pontra, amiért létezik olyan $\kappa \in \mathbb{R}$ szám, hogy $\bar{\ell}(X_L) > \kappa > \bar{\ell}(Y_L)$ minden $X \in \mathcal{X}$ és $Y \in \mathcal{Y}$ pontra. Tehát az $\bar{H}$ pontok $\bar{\mathcal{H}}$ hipersíkja, melyre $\bar{\ell}(\bar{H}_L) = \kappa$, elválasztja az $\mathcal{X}$ és az $\mathcal{Y}$ konvex halmazokat, ami a tételt bizonyítja. ■

F.8. Görbék és hosszuk

Ebben a szakaszban euklidészi síkon dolgozunk.

Egy $G: [a, b] \rightarrow \mathfrak{S}$ injektív leképezést *görbének* nevezzük. A görbét a $G(x)$ pontban differenciálhatónak mondjuk, ha létezik olyan $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in T_{G(x)}\mathfrak{S}$ helyvektor, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, melyre $|x - y| < \delta$ esetén $\left| \frac{(G(y))_O - (G(x))_O}{y - x} - \mathbf{u} \right| < \varepsilon$. Ekkor az $\mathbf{u}$ helyvektort a görbe *deriváltjának* mondjuk a $G(x)$ pontban. Ezt a deriváltat $\dot{G}(x)$ jelöli.

Az olyan $\{x_i\}_{i=0}^{n+1}$ sorozatokat, melyekre $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$ ($n \in \mathbb{N}$) teljesül, az $[a, b]$ intervallum *beosztásának*, a $\max\{x_{i+1} - x_i\}_{i=0}^n$ számot a beosztás *finomságának* nevezzük.

Vegyük minden beosztáshoz azon törött vonalakat, melyeknek $\{G(x_i)\}_{i=0}^{n+1}$ törésponthalmaza. Az ilyen törött vonal *finomságának* a $\max\{d(G(x_i), G(x_{i+1}))\}_{i=0}^n$ számot nevezzük. A törött vonal hosszát az $L_x = \sum_{i=0}^n d(G(x_i), G(x_{i+1}))$ formula adja, mely a háromszög-egyenlőtlenség miatt nem csökken, ha valamely $x_i < y < x_{i+1}$ helyen újabb $G(y)$ töréspontot veszünk hozzá a sorozathoz.

Definíció. Egy görbét *rektifikálhatónak* mondunk, ha az összes beosztásból eredő törött vonalak hosszainak létezik felső határa. Ezt a görbe *hosszának* nevezzük. ▲

Nem minden folytonos görbe rektifikálható. Például a folytonos

$$G: [0, 1] \rightarrow \mathcal{S} = \mathbb{R}^2 \quad G(x) = \begin{cases} (x, x \cos(\pi/x)), & \text{ha } x \neq 0, \\ (0, 0), & \text{ha } x = 0, \end{cases}$$

görbe nem rektifikálható. Ennek bizonyítására tekintsük a $[0, 1]$ intervallum $x_k = 1/k$ ($0 < k \leq n$) beosztását. Ekkor

$$\begin{aligned} d(G(x_k), G(x_{k-1})) &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (x_k \cos(\pi/x_k) - x_{k-1} \cos(\pi/x_{k-1}))^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right)^2 + \left(\frac{(-1)^k}{k} - \frac{(-1)^{k-1}}{k-1}\right)^2}. \end{aligned}$$

A második tagot tekintve $\left(\frac{(-1)^k}{k} - \frac{(-1)^{k-1}}{k-1}\right)^2 = \frac{(2k-1)^2}{(k(k-1))^2}$, amiért

$$d(G(x_k), G(x_{k-1})) = \frac{\sqrt{1 + (2k-1)^2}}{k(k-1)} \geq \frac{2k-1}{k(k-1)} \geq \frac{2}{k}.$$

Eszerint a $G(0), G(x_n), G(x_{n-1}), \dots, G(x_1), G(1)$ törött vonal hossza legalább $2 \sum_{k=2}^n 1/k$, ami nem korlátos módon növekszik, ha n tart a végtelenbe.

Tétel. Ha egy görbe minden pontjában deriválható, és a deriváltak halmaza korlátos, akkor a görbe rektifikálható. Ha a derivált függvény normája folytonos, akkor a görbe hossza $\int_a^b |\dot{G}(x)| dx$.

Bizonyítás. Legyen a deriváltak normáinak felső határa h . Ekkor

$$\begin{aligned} L_{\{x_i\}_{i=0}^{n+1}} &:= \sum_{i=0}^n d(G(x_i), G(x_{i+1})) = \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) \left| \frac{(G(x_{i+1}))_O - (G(x_i))_O}{x_{i+1} - x_i} \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) |\dot{G}(\hat{x}_i)| \leq \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) h \\ &= (x_{n+1} - x_0)h = (b - a)h, \end{aligned}$$

ahol $\hat{x}_i \in [x_i, x_{i+1}]$ a vektorértékű függvényekre vonatkozó középérték-tétel miatt. Ez bizonyítja, hogy a G görbe rektifikálható.

Mivel a $|\dot{G}|$ függvény zárt intervallumon folytonos, egyenletesen is folytonos, amiért minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy $|x - y| < \delta$ esetén $\left| \frac{(G(x))_O - (G(y))_O}{x - y} - \dot{G}(x) \right| < \varepsilon$. Eszerint egy a δ értéknél finomabb beosztásra

$$L_{\{x_i\}_{i=0}^{n+1}} \leq \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) (|\dot{G}(x_i)| + \varepsilon) = (b - a)\varepsilon + \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) |\dot{G}(x_i)|,$$

$$L_{\{x_i\}_{i=0}^{n+1}} \geq \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) (|\dot{G}(x_i)| - \varepsilon) = (a - b)\varepsilon + \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) |\dot{G}(x_i)|,$$

amiért minden a δ értéknél finomabb beosztásra $|L_{\{x_i\}_{i=0}^{n+1}} - I_{\{x_i\}_{i=0}^{n+1}}| \leq (b - a)\varepsilon$, ahol

$$I_{\{x_i\}_{i=0}^{n+1}} = \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) |\dot{G}(x_i)|.$$

Ha L jelöli a görbe hosszát, akkor minden $\varepsilon > 0$ esetén minden elegendően finom beosztásra

$$\left| L - \int_a^b |\dot{G}(x)| dx \right|$$

$$\leq |L - L_{\{x_i\}_{i=0}^{n+1}}| + |L_{\{x_i\}_{i=0}^{n+1}} - I_{\{x_i\}_{i=0}^{n+1}}| + \left| I_{\{x_i\}_{i=0}^{n+1}} - \int_a^b |\dot{G}(x)| dx \right|$$

$$\leq 3(b - a)\varepsilon,$$

ami igazolja a tétel formuláját. ■

F.9. Valós szögfüggvények

Tétel. *A valós $\sin$ és $\cos$ függvények deriváltjai léteznek, és teljesítik a $\sin' x = \cos x \sin' 0$ és $\cos' x = -\sin x \sin' 0$ azonosságokat, ahol $x, y \in (-p, p]$.*

Bizonyítás. Az addíciós formulák szerint egyrészt

$$\begin{aligned} \sin' x &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(x + y) - \sin x}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y - \sin x}{y} \\ &= \sin x \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos y - \cos 0}{y} + \cos x \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y - \sin 0}{y} \\ &= \sin x \cos' 0 + \cos x \sin' 0, \end{aligned}$$

másrészt $\cos' x = \cos x \cos' 0 - \sin x \sin' 0$ adódik, így a deriváltak léteznek, ha $\cos' 0$ és $\sin' 0$ is létezik. Először a $\sin' 0 = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y}$ létét igazoljuk.

Az addíciós képletek szerint $\cos x = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)$, amiért

$$\begin{aligned}\cos' 0 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)) - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\sin(x/2)}{x/2} \sin(x/2) \right) = 0\end{aligned}$$

adódik. Ezzel a tételt beláttuk. ■

Az iménti bizonyítás mutatja, hogy $\sin' 0$ értéke az ott konstruált törött vonalak hosszainak $s_\infty(\alpha)$ határértékéből számolható, hiszen $m(\alpha) \sin' 0 = s_\infty(\alpha)$. Valójában $s_\infty(\epsilon)$ az egységkörvonal azon két részének hossza (lásd az F.8. szakaszt), melyekre az origón átmenő valamely egyenes vágja ketté. Ezt a számot hagyományosan π jelöli. Mivel $m(\epsilon) = p$ és így $\sin' 0 = \pi/p$ adódik, a továbbiakban élünk a szokásjoggal.

Konvenció. Azt a szögmérést választjuk, amelyben $p = \pi$, és így $\sin' 0 = 1$. ▲

A deriváltakra vonatkozó eredmény lehetővé teszi a $\sin$ és $\cos$ valós függvények minden $4k + i$ -edik ($k, i \in \mathbb{N}$)

$$\sin^{(4k+i)} x = \begin{cases} \sin x & \text{ha } i = 0, \\ \cos x & \text{ha } i = 1, \\ -\sin x & \text{ha } i = 2, \\ -\cos x & \text{ha } i = 3, \end{cases} \quad \text{és} \quad \cos^{(4k+i)} x = \begin{cases} \cos x & \text{ha } i = 0, \\ -\sin x & \text{ha } i = 1, \\ -\cos x & \text{ha } i = 2, \\ \sin x & \text{ha } i = 3. \end{cases}$$

deriváltjának meghatározását, aminek teljes indukciós bizonyítása az olvasóra marad. Ennek következtében a Taylor-sorfejtés szerint kapjuk a $\sin$ és $\cos$ valós függvények

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{és} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

előállítását mindenütt konvergens sorokkal.

Furfangos formulák segítségével akár kézzel is ki lehet számolni a π jó néhány számjegyet, de számítógéppel ez sokkal hatékonyabb, és már sok-sok számjegyet ki is számították. Valójában a *Bailey–Borwein–Plouffe*-féle

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right) \right]$$

formula azt is lehetővé teszi, hogy 16-os számrendszerben a π számjegyeit a megelőző számjegyek meghatározása nélkül számítsuk ki. Más formulák konvergenciasebességét vizsgálva pedig igazolható, hogy π nem egyszerűen irracionális szám, de még racionális együtthatós polinomnak sem lehet gyöke.

Ízelítőként most kiszámítjuk a π értékét egy tizedesjegynyi pontossággal.

Alsó becsléshez az iménti bizonyítás ℓ_n töröttvonalát használjuk.

Mint hogy az ℓ_n töröttvonal s_n hossza monoton növekvő, ezért $2^n \sin(\epsilon 2^{-n}) < \pi$ minden n esetén. Nyilván $\sin(\epsilon 2^{-1}) = 1$, innen pedig a $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ összefüggésből

$$\begin{aligned} 1 &= \sin(\epsilon 2^{-1}) = 2 \sin(\epsilon 2^{-2}) \cos(\epsilon 2^{-2}) = 4 \sin(\epsilon 2^{-3}) \cos(\epsilon 2^{-3}) \cos(\epsilon 2^{-2}) = \dots \\ &= 2^n \sin(\epsilon 2^{-n-1}) \prod_{i=2}^{n+1} \cos(\epsilon 2^{-i}) = s_n \frac{1}{2} \prod_{i=2}^{n+1} \cos(\epsilon 2^{-i}) \end{aligned}$$

következik. A $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ azonosságból $\cos(\alpha/2) = \sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{2}}$ adódik, amiből $\cos(\epsilon 2^{-2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} < 0,7072$ alapján

$$\cos(\epsilon 2^{-3}) = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} < 0,9239 \quad \text{és} \quad \cos(\epsilon 2^{-4}) = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}}{2}} < 0,9809,$$

amiért

$$s_\infty > \frac{2}{\prod_{i=2}^4 \cos(\epsilon 2^{-i})} > \frac{2}{\prod_{i=2}^4 \cos(\epsilon 2^{-i})} > \frac{2}{0,7072 \cdot 0,9239 \cdot 0,9809} > 3,12.$$

Ha kilenc tényezőt becsültünk volna meg, akkor a π első öt jegyét kaptuk volna helyesen: $\pi > 3,141591$.

A másik irányú becsléshez az imént használt törött vonal helyett azt a törött vonalat vesszük, amely az indukciót (egységkört) „kívülről” követi. Ennek hossza $2^n \frac{\sin(\epsilon 2^{-n})}{\cos(\epsilon 2^{-n})} = 2^n \operatorname{tg}(\epsilon 2^{-n})$. Ez monoton fogyó, és határértéke ugyancsak s_∞ , így minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $s_\infty < 2^n \operatorname{tg}(\epsilon 2^{-n})$, ahol definíció szerint $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$. Az addíciós tételeket ügyesen használva azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{tg}(\alpha/2) = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - 1}{\operatorname{tg} \alpha},$$

amiért $\operatorname{tg}(\epsilon/4) = 1$ alapján

$$\operatorname{tg}(\epsilon 2^{-3}) = \frac{\sqrt{2} - 1}{1} < 0,4143 \quad \text{és} \quad \operatorname{tg}(\epsilon 2^{-4}) = \frac{\sqrt{1 + (\sqrt{2} - 1)^2} - 1}{\sqrt{2} - 1} < 0,1990$$

adódik, és utóbbi éppen a felső becslést adja. Ezzel a formulával csak a $2^{11} \operatorname{tg}(\epsilon 2^{-11})$ adja az első öt számjegyet helyesen: $\pi < 3,141595$.

Összefoglalva azt kaptuk, hogy $3,12 < \pi < 3,184$.

A π szám értékének fontosságát mutatja az is, hogy nem csak a kör kerületének és átmérőjének aránya, de meghatározza a kör területét is.

F.9.1. Tétel. *Ha egy ellipszis két tengelyének hossza $2a$ és $2b$, bezárt szögük pedig $\alpha \in (0, \pi/2)$, akkor területe $\pi ab \sin \alpha$.*

Bizonyítás. Annak az affinitásnak, amely az origót fixen hagyja és az $(1, 0)$ és $(0, 1)$ pontokat rendre a $(b, 0)$ és $a(\cos \alpha, \sin \alpha)$ pontokba viszi, a mátrixa $\begin{pmatrix} b & 0 \\ a \cos \alpha & a \sin \alpha \end{pmatrix}$, melynek determinánsa $ab \sin \alpha$, ezért elegendő az egységsugarú kör lap területéről megmutatni, hogy éppen π .

Vegyük a $(0, 0)$, $(\cos(\pi/n), \sin(\pi/n))$ és $(\cos(\pi/n), 0)$ pontok által meghatározott $\bar{\Delta}_n$ és a $(0, 0)$, $(1, \sin(\pi/n)/\cos(\pi/n))$ és $(1, 0)$ pontok által meghatározott $\hat{\Delta}_n$ háromszöget minden $n > 3$ természetes számra. Legyen ϕ az $(0, 0)$ körüli π/n szögű forgatás. Ekkor a $\mathcal{B}$ egységkörlapra

$$\bigcup_{i=0}^{2n-1} \phi^i(\bar{\Delta}_n) \subset \mathcal{B} \subset \bigcup_{i=0}^{2n-1} \phi^i(\hat{\Delta}_n),$$

ezért bármely t területmérésre $2nt(\bar{\Delta}_n) \leq t(\mathcal{B}) \leq 2nt(\hat{\Delta}_n)$, hiszen ϕ izometria és így területtartó. Ugyanakkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2nt(\bar{\Delta}_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\pi \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \right) = \pi$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2nt(\hat{\Delta}_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) / \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \right) = \pi. \quad \blacksquare$$

F.10. Additivitás és homogenitás

Egy $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *additív* mondunk, ha $f(x) + f(y) = f(x + y)$, és *homogén* neveziünk, ha $\lambda f(x) = f(\lambda x)$ minden $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$ esetén. Bár hétköznapi tapasztalataink szerint ezek egybeeső fogalmaknak tűnnek, e szakasz végén megmutatjuk, hogy léteznek olyan additív függvények, amelyek nem homogének.

F.10.1. Tétel. *Ha az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény additív, és valamely $[a, b]$ ($a \neq b$) intervallumon (alulról vagy felülről) korlátos, akkor homogén is, mégpedig $f(x) = xf(1)$.*

Bizonyítás. Ha m tetszőleges pozitív egész szám, akkor

$$f(m) = f(\underbrace{1 + \dots + 1}_m) = \underbrace{f(1) + \dots + f(1)}_m = mf(1),$$

és hasonló módon

$$f(1) = f\left(\frac{m}{m}\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{m} + \cdots + \frac{1}{m}}_m\right) = mf\left(\frac{1}{m}\right)$$

is fennáll, ezért minden pozitív m/n ($m, n > 0$) racionális számra

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_m\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n}f(1).$$

Mivel $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, nyilván $f(0) = 0$, továbbá minden x valós számra $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$ miatt $f(-x) = -f(x)$ is teljesül.

Összességében az $f(r) = rf(1)$ azonosságot minden $r \in \mathbb{Q}$ racionális számra bizonyítottuk, valamint beláttuk, hogy f páratlan függvény.

Legyen $\hat{f}(x) := f(x) - xf(1)$. Ekkor tetszőleges $r \in \mathbb{Q}$ és $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\begin{aligned}\hat{f}(x+r) &= f(x+r) - (x+r)f(1) = (f(x) - xf(1)) + (f(r) - rf(1)) \\ &= f(x) - xf(1) = \hat{f}(x),\end{aligned}$$

vagyis az $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek minden racionális szám a periódusa.

Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén van olyan r racionális szám, melyre $x+r \in [a, b]$, ami $\hat{f}$ periódusossága miatt azt jelenti, hogy $\hat{f}$ a teljes számegyenesen ugyanazokkal a korlátokkal rendelkezik, mint az $[a, b]$ intervallumon. Csakhogy így az

$$(r, x) \mapsto r\hat{f}(x) = r(f(x) - xf(1)) = f(rx) - rxf(1) = \hat{f}(rx)$$

függvény is ugyanazokkal a korlátokkal rendelkezik, ami csak úgy lehet, ha $\hat{f}(x) = 0$. Ezzel az állítást beláttuk. ■

Intervallum folytonos és monoton függvényei korlátosak, így adódik az alábbi.

Tétel. Ha az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény additív, és valamely $[a, b]$ ($a \neq b$) intervallumon folytonos vagy monoton, akkor f homogén is, mégpedig $f(x) = xf(1)$.

Sokszor van szükség a következő egyszerű általánosításra.

Tétel. Ha az $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény additív, és valamely $[a, b]$ ($a \neq b$) intervallumon korlátos, akkor homogén is, mégpedig $f(x) = xf(1)$.

Bizonyítás. Defináljuk a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a úgy, hogy

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ha } 0 < x, \\ 0 & \text{ha } 0 = x, \\ -f(-x) & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

A g additív, mert $g(x) + g(0) = g(x + 0)$, és

$$g(x) + g(y) = \begin{cases} f(x) + f(y) & \text{ha } 0 < x, y, \\ (f(x - (-y)) + f(-y)) - f(-y) & \text{ha } y < 0 < x \text{ és } |y| \leq |x|, \\ f(x) - (f((-y) - x) + f(x)) & \text{ha } y < 0 < x \text{ és } |x| \leq |y|, \\ (f(y - (-x)) + f(-x)) - f(-x) & \text{ha } x < 0 < y \text{ és } |x| \leq |y|, \\ f(y) - (f((-x) - y) + f(y)) & \text{ha } x < 0 < y \text{ és } |y| \leq |x|, \\ -f(-x) - f(-y) & \text{ha } x, y < 0, \end{cases}$$

így alkalmazható rá előbbi eredményünk, ami bizonyítja tételünket. ■

Ahogy fentebb láttuk, egy additív f függvény esetében minden x valós és r racionális szám esetén $f(rx) = rf(x)$. Ennek kiterjesztése a nem racionális számokra addicionális feltételeket követelt. Az alábbi tétel megmutatja, hogy ez nem véletlen.

A valós számok $\mathbb{R}$ halmaza nyilván vektorteret — legyen ez $\mathcal{R}$ — alkot az összeadással és a racionálissal való szorzás műveleteivel a racionális számok $\mathbb{Q}$ teste felett. Az $\mathcal{R}$ vektortér bázisait *Hamel-bázisnak* nevezzük. Egy Hamel-bázis eszerint egyetlen nem nulla racionális és végtelen sok irracionális számból áll.

Tétel. *A nem nulla $s, t \in \mathbb{R}$ számokhoz akkor és csak akkor létezik olyan additív $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyre $f(st) \neq sf(t)$, ha s irracionális.*

Bizonyítás. Ha s racionális szám, és f additív, akkor $f(sx) = sf(x)$ minden valós x számra.

Most vizsgáljuk azt az esetet, ha s egy irracionális szám.

Mivel $\mathcal{R}$ két vektora (valós számok!) pontosan akkor alkot függő rendszert, ha egyikük a másiknak racionális többszöröse, a t és st számok $\mathcal{R}$ független elemei.

Tekintve, hogy független vektorokból álló bármely halmazt újabb független elemek hozzáválasztásával bázissá lehet bővíteni, van olyan $\mathcal{H}$ Hamel-bázis, amelynek t és st egy-egy eleme.

Legyen $\{t, st\}_{\mathbb{Q}} = \{x \in \mathbb{R} : \exists r_1, r_2 \in \mathbb{Q}, \text{ melyre } x = r_1t + r_2st\}$ a t, st elemek által az $\mathcal{R}$ térben kifeszített altér, $\{t, st\}_{\mathbb{Q}}^c$ pedig ennek kiegészítő altere.

Ekkor bármely x valós számhoz pontosan egy olyan $(r_1, r_2) \in \mathbb{Q}^2$ racionális számpár létezik, melyre $x - r_1t - r_2st \in \{t, st\}_{\mathbb{Q}}^c$, hiszen ha $x - \tilde{r}_1t - \tilde{r}_2st \in \{t, st\}_{\mathbb{Q}}^c$ is teljesül, akkor $-r_1t - r_2st + \tilde{r}_1t + \tilde{r}_2st \in \{t, st\}_{\mathbb{Q}}^c$ is, miközben nyilván $(\tilde{r}_1 - r_1)t + (\tilde{r}_2 - r_2)st \in \{t, st\}_{\mathbb{Q}}$, márpedig a kettő együtt csak $\tilde{r}_1 = r_1$ és $\tilde{r}_2 = r_2$ esetén lehetséges.

Definiáljuk az $f_{a,b}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy

$$f_{a,b}(z) = r_1a + r_2b, \quad \text{ha } x - r_1t - r_2st \in \{t, st\}_{\mathbb{Q}}^c \text{ és } r_1, r_2 \in \mathbb{Q},$$

ahol $a, b \in \mathbb{R}$ tetszőleges két szám.

Tetszőleges $\hat{x}, \check{x} \in \mathbb{R}$ számokra vegyük az egyértelmű $\hat{r}_1, \hat{r}_2, \check{r}_1, \check{r}_2$ racionális számokat, melyekre $\hat{x} - \hat{r}_1 t - \hat{r}_2 st \in \{t, st\}_{\mathbb{Q}}^c$ és $\check{x} - \check{r}_1 t - \check{r}_2 st \in \{t, st\}_{\mathbb{Q}}^c$. Ekkor

$$f_{a,b}(\hat{x}) + f(\check{x}) = (\hat{r}_1 + \check{r}_1)a + (\hat{r}_2 + \check{r}_2)b = f_{a,b}(\hat{x} + \check{x}),$$

vagyis az $f_{a,b}$ függvény additív.

Ha az $a, b \in \mathbb{R}$ számokat különbözőnek választjuk, akkor $f_{a,b}(t) = a \neq b = f_{a,b}(st)$ igazolja a tételt. ■

F.11. Az algebra néhány alapfogalma

A $\mathcal{H}$ halmaz valamely kétváltozós $\alpha: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \{0, 1\}$ leképezését *relációnak* nevezzük. Ha a $\mathcal{H}$ halmaz a és b eleméhez rendelt érték 1, azt az $a \alpha b$ formulával jelöljük. A α reláció *reflexív*, ha $a \alpha a$, *szimmetrikus*, ha $a \alpha b$ esetén $b \alpha a$ következik, *antiszimmetrikus*, ha $a \alpha b$ és $b \alpha a$ esetén $a = b$ következik, *transzítív*, ha $a \alpha b$ és $b \alpha c$ esetén $a \alpha c$ következik minden $a, b, c \in \mathcal{H}$ elemre. Az olyan relációt, amely reflexív, szimmetrikus és transzítív, *ekvivalenciának* vagy *ekvivalencia-relációnak* nevezzük. Ilyen például a szokásos = egyenlőség is. Egy relációt (szigorú) *rendezésnek* nevezzük, ha antiszimmetrikus és transzítív. A rendezést *teljesnek* mondjuk, ha minden $a, b \in \mathcal{H}$ esetén $a \alpha b$, $a = b$ és $b \alpha a$ közül pontosan egy teljesül (ez a trichotómia).

Egy $\diamond: \mathcal{H}^n \rightarrow \mathcal{K}$ függvényt ($n \in \mathbb{N}$) a $\mathcal{H}$ halmazon n -változós *műveletnek* nevezzük. Ha a $\diamond$ művelet értékészlete a $\mathcal{H}$ része, vagyis $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$, akkor a $\diamond$ műveletet *zártnak* mondjuk (a zártaságot sokszor beleértik a „művelet” fogalmába).

Algebrai struktúrának nevezzük egy (alap)halmaz és rajta értelmezett zárt műveletek rendszerét. Két algebrai struktúrát *homomorf*nak mondunk, ha van az egyik halmazról a másik halmazba olyan leképezés, *homomorfia*, mely minden műveletnek megfeleltet egy műveletet úgy, hogy az egyik elemein elvégzett művelet eredményének képe éppen a másik megfelelő elemeinek a megfeleltetett művelet szerinti eredménye. *Izomorfának* nevezzük a bijektív homomorfákat, az izomorfiaival összekötött struktúrákat pedig *izomorf*nak mondjuk.

Egy algebrai struktúra alaphalmazán értelmezett α ekvivalencia-relációt *kongruenciának* mondunk, ha minden egyes művelet úgy változtatja eredményét az argumentumainak relációban lévő elemekre való cseréjére, hogy a változás utáni eredmény α relációban áll a változás előtti eredménnyel.

Innentől csak kétváltozós műveletekről lesz szó, amelyek jelölésekor gyakran használatos az $a \diamond b := \diamond(a, b)$ forma.

A $\diamond$ művelet *kommutatív*, ha $a \diamond b = b \diamond a$, *asszociatív*, ha $(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c)$ teljesül minden $a, b, c \in \mathcal{H}$ elemre. Valamely $e \in \mathcal{H}$ elemet a $\diamond$ művelet *neutrális elemének* mondunk, ha minden $a \in \mathcal{H}$ elemre $a \diamond e = e \diamond a = a$ teljesül. Ha e_1 és e_2 is

a $\diamond$ művelet neutrális eleme, akkor $e_1 = e_2 \diamond e_1 = e_2$, tehát csak egy neutrális elem lehetséges. Ha a $\diamond$ művelet szorzásra vagy összeadásra emlékeztet, akkor a neutrális elemet inkább *egységelemnek*, illetve *nullelemnek*, vagy nullának nevezik.

Ha a $\diamond$ műveletnek van e neutrális eleme, akkor valamely h elem bal illetve jobb oldali *inverzén* olyan $\bar{h}$ elemet értünk, amelyre $\bar{h} \diamond h = e$, illetve $h \diamond \bar{h} = e$ érvényes. Ha a $\diamond$ művelet asszociatív, és $\bar{h}_b$ és $\bar{h}_j$ a h bal illetve jobb oldali inverze, akkor $\bar{h}_b = \bar{h}_b \diamond e = \bar{h}_b \diamond (h \diamond \bar{h}_j) = (\bar{h}_b \diamond h) \diamond \bar{h}_j = e \diamond \bar{h}_j = \bar{h}_j$ miatt a h elem összes inverze egybeesik. Ha az a elemnek van kétoldali inverze, akkor a b elem a elem szerinti *konjugáltján* az $a \diamond b \diamond \bar{a}$ elemet értjük.

Egy $(\mathcal{H}, \diamond)$ rendszert *csoportnak* nevezünk, ha a kétváltozós $\diamond$ művelet zárt, asszociatív, létezik neutrális eleme, és bármely elemének létezik (mindkét oldali) inverze. Ha $\diamond$ kommutatív, akkor *kommutatív csoportról* vagy *Abel-csoportról* beszélünk.

A valós számok $\mathbb{R}$ halmaza az összeadás műveletével, a pozitívak a szorzás műveletével alkotnak Abel-csoportot. Ezek izomorfak, hiszen közöttük bármely logaritmus függvény izomorfia.

Csoportot alkotnak a leképezésszorzás műveletével bármely halmaz önmagára való bijektív leképezései (ezeket hívjuk transzformációknak). Ezt a csoportot *teljes transzformációcsoportnak* vagy *permutációcsoportnak* is nevezzük. A permutációcsoportok általában nem Abel-csoportok.

Ha egy csoport bármely eleme előáll egyetlen elemének hatványaként, vagyis $h \diamond h \diamond h \diamond h \dots$ alakban, akkor *ciklikus csoportról* beszélünk. Ilyen ciklikus csoportot alkotnak például az egész számok és az oszthatósági maradékosztályok is.

Ha a $(\mathcal{H}, \diamond)$ csoport valamely $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ részhalmazán a csoport $\diamond$ művelete zárt, és $\mathcal{H}'$ minden elemével együtt annak inverzét is tartalmazza, akkor $(\mathcal{H}', \diamond)$ is csoport, melyet a $(\mathcal{H}, \diamond)$ *részcsoporthjának* nevezünk.

Például az egész számok az összeadásra nézve részcsoporthot alkotnak a valós számok additív csoportjában, ahogy a pozitív racionális számok is részcsoporthot alkotnak a pozitív valós számok multiplikatív csoportjában.

Egy $(\mathcal{H}, \diamond, \star)$ rendszert *testnek* nevezünk, ha $(\mathcal{H}, \diamond)$ és $(\mathcal{H} \setminus \{0\}, \star)$ kommutatív csoportok, ahol 0 a $\diamond$ művelet neutrális eleme, és teljesül az $a \star (b \diamond c) = (a \star b) \diamond (a \star c)$ *disztributivitás*. Ha $(\mathcal{H} \setminus \{0\}, \star)$ nem kommutatív, akkor *ferde testről* beszélünk, és a disztributivitást a $(b \diamond c) \star a = (b \star a) \diamond (c \star a)$ formában is megköveteljük.

F.12. Valóság és geometria

A geometria valóságához való viszonyát, benne a háromszög szögösszegéről szóló tétel kapcsán Euklidész párhuzamossági posztulátumának helyzetét jól mutatja az az

alábbi, az általános relativitáselmélet körüli fogalomátértékelések kapcsán létrejött tanbeszélgetés, melyet *Eddington* „Tér, idő és gravitáció” című könyvéből *Simonyi Károly* fordított [33].

Ebben hárman beszélgetnek a geometria és a valóság viszonyáról: egy matematikus (Math), egy kísérleti fizikus (Phys) és az általános relativitáselmélet egy lelkes propagálója (Rel).

Rel. Euklidész egy általános tétele így hangzik: „Bármely háromszögben két oldal összege nagyobb, mint a harmadik oldal.” Meg tudná valamelyikük mondani, hogy ezen tétel helyessége manapság teljesen megalapozottnak tekinthető?

Math. Ami engem illet, teljes mértékben képtelen vagyok dönteni afelől, hogy a tétel igaz-e vagy sem. Bizonyos más tételekből vagy axiómákból, amelyeket még elemibbnek tartunk, megbízható bizonyítási módszerek segítségével le tudom vezetni őket. Amennyiben ezek az axiómák igazak, igaz a tétel is; ha az axiómák nem igazak, általában nem igaz a tétel sem. De, hogy maguk az axiómák igazak vagy sem, azt nem tudom megmondani; ez nem is tartozik az illetékességem alá.

Phys. De nem követeljük-e meg azt, hogy ezen axiómák igazsága magától értetődő legyen?!

Math. Számomra semmiképpen sem magától értetődőek, és ezt a követelményt — véleményem szerint — ma már senki sem tartja fenn.

Phys. De hát ezekkel az axiómákkal mégiscsak sikerült Önnek egy logikus és önmagában ellentmondásmentes geometriai rendszert felépíteni; vajon ez nem tekinthető az axiómák közvetlen bizonyítékaként?

Math. Nem. Az euklidészi geometria nem az egyetlen ellentmondásmentes geometria. Kiindulhatok más axiómákból is, és akkor például a Bolyai–Lobacsevszkij-geometriához jutok, amelyben Euklidész sok tétele már nem érvényes. Az én álláspontom nem teszi lehetővé, hogy ezek közül a különböző geometriák közül válasszak.

Rel. Hogy lehet mégis az, hogy az euklidészi geometria jelentősége messze túlhaladja a többiét?

Math. Alig tudnám elképzelni, hogy ez lenne a legfontosabb geometria. De, bizonyos okoknál fogva, amelyek számomra — ezt be kell vallanom — nem teljesen világosak, az én fizikus barátom sokkal jobban érdeklődik az euklidészi geometria iránt, mint bármely másik iránt, és számunkra állandóan vele kapcsolatban állít fel problémákat. Éppen emiatt kénytelenek voltunk az euklidészi rendszerrel aránytalanul többet foglalkozni.

De voltak nagy geometérek, mint *Riemann*, akik azon fáradoztak, hogy a helyes viszonyokat újból helyreállítsák.

Rel. (a fizikushoz) Tulajdonképpen miért érdeklődik Ön annyira az euklidészi geometria iránt? Úgy gondolja, hogy ez az igazi geometria?

Phys. Igen. Kísérleteink bizonyítják helyességét.

Rel. Hogyan bizonyítja például, hogy egy háromszögben két oldal összege nagyobb, mint a harmadik oldal?

Phys. Természetesen csak úgy tudnám ezt bizonyítani, hogy méréseket végeznék igen nagyszámú konkrét esetben, és ...

Rel. Én viszont csak egyetlenegy esetben szeretném az Ön fáradságát igénybe venni. Itt ez az ABC háromszög! Hogyan bizonyítja be, hogy $d(A, B) + d(B, C)$ nagyobb mint $d(A, C)$?

Phys. Vezek egy mérőrudat, és megmérem a három oldalt.

Rel. Úgy tűnik nem értettük meg egészen egymást. Én ugyanis egy geometriai tételről beszéltem — a tér tulajdonságáról —, nem pedig az anyagéről. Az Ön kísérlete azonban csak egy anyagi mérőrud viselkedéséről állít valamit, miközben azt különböző helyzetekbe hozza.

Phys. Elvégezhetném a méréseket optikai úton is.

Rel. Na, ez egyre rosszabb lesz ... Most meg a fény tulajdonságairól kezd beszélni.

Phys. Így egyáltalán nem tudok semmit sem mondani, ha nem engedi meg, hogy valamilyen mérést végezzek. Én kizárólag mérések útján kutathatom a természetet. Nem vagyok metafizikus.

Rel. Rendben van, akkor állapodjunk meg abban, hogy Ön hosszúság és távolság alatt mindig egy olyan mennyiséget ért, amelyet anyagi vagy optikai eszközök segítségével lehet meghatározni. Ön kísérletileg így azokat a törvényszerűségeket határozta meg, amelyeknek a mért hosszúságok engedelmeskednek, és így találta azt a geometriát, amely Önnek megfelelt. ...

Rel. ... De, haladjunk csak tovább ezen „természetes” geometria törvényeinek ellenőrzésével. Íme, itt egy mérőszalag, és megmérem vele ezt a háromszöget: $d(A, B) = 90\text{cm}$, $d(B, C) = 0,6\text{cm}$, $d(C, A) = 91\text{cm}$. Na lám csak, a tétele nem stimmel!

Phys. Ön nagyon jól tudja, mitől van ez. Hiszen az AB oldal mérésénél a mérőszalagot alaposan megnyújtotta.

Rel. Miért ne?

Phys. Egy hosszúságot magától értetődően egy merev mérőrúddal kell

mérni.

Rel. Látja, ez egy nagyon fontos többlet a hossz Ön által adott definíciójához. De mi is az a merev mérőrúd?

Phys. Egy olyan mérőrúd, amelynek hossza állandó marad.

Rel. Az előbb épp abban állapotunk meg, hogy a távolság egy olyan mennyiség, amelyet egy merev mérőrúddal való mérés segítségével határozhatunk meg; most azonban Önnek egy másik merev mérőrúdra van szüksége, hogy ellenőrizze, hogy az első rúd nem változtatta-e meg a hosszát? Aztán egy harmadikra, hogy a másodikat ellenőrizze, és így tovább ad infinitum. . . .

Math. Nagyon elterjedt az a vélemény, hogy a tér tulajdonságai nem fizikai méréseken és nem is metafizikai megfontolásokon, hanem megállapodásokon alapszanak. *Poincaré* „Tudomány és feltevés” című könyvének következő mondatai világítják meg a tér eme felfogását: „Ha a Lobacsevszkij-geometria igaz, akkor egy nagyon távoli csillag is véges parallaxissal rendelkezne. Ha a Riemann-geometria igaz, akkor ugyanez negatív lenne. Ezek olyan kijelentések, amelyek hozzáférhetőnek látszanak a kísérleti ellenőrzés számára, és azt a reményt keltik, hogy asztrolómiai megfigyelések segítségével dönteni lehet a két geometria között. De az asztrolómia egyenese egyszerűen a fénysugarak pályája. Ha tehát negatív parallaxist mutatnának a kísérletek, vagy ha be tudnák bizonyítani, hogy minden parallaxis egy meghatározott érték felett van, akkor két végkövetkeztetés között lehetne választani: vagy feladjuk az euklidészi geometriát, vagy úgy változtatjuk meg az optika törvényeit, hogy aszerint a fény nem pontosan egyenes vonalban terjed. Szükségtelen hozzátennünk, hogy mindenki ez utóbbi megoldást tekintené előnyösebbnek. Az euklidészi geometriának nincs mit félnie az új kísérletektől.”

Rel. *Poincaré* eme ragyogó meggondolása nagyon alkalmas arra, hogy megértsük azt a problémát, amellyel most szembe kell nézni. Hangsúlyozza ugyanis a geometria és az optika törvényszerűségeinek egymástól való kölcsönös függését, amelyet sosem szabad szemünk elől téveszteni: egy tételt elvehetünk az egyikből, és beépíthetjük a másikba. . . . Egyébként most valóban elérkeztünk ahhoz a válaszúthoz, amelyre *Poincaré* utal, bár a döntést nem éppen az ő általa említett kísérlet kényszeríti ránk.

Irodalomjegyzék

- [1] M. AIGNER és G. M. ZIEGLER, *Bizonyítások a Könyvből*, Typotex, Budapest, 2009.
- [2] D. AMIR, *Characterizations of Inner Product Spaces*, Birkhäuser, Basel, 1986.
- [3] NIELS BOHR, *Atomfizika és emberi megismerés*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1964.
- [4] V. G. BOLTYANSZKIJ és I. C. GOHBERG, *Alakzatok felbontása kisebb részekre*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1976.
- [5] H. BUSEMANN, *The geometry of geodesics*, Academic Press, New York, 1955.
- [6] R. COURANT és H. ROBBINS, *Mi a matematika?*, Gondolat, Budapest, 1966.
- [7] H. S. M. COXETER, *A geometriák alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.
- [8] H. S. M. COXETER és S. L. GREITZER, *Az újra felfedezett geometria*, Gondolat, Budapest, 1977.
- [9] EUKLIDÉSZ, *Elemek*, Gondolat, Budapest, 1983.
- [10] CLARK KIMBERLING, *Encyclopedia of triangle centers*, University of Evansville, <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/>.
- [11] FRIED ERVIN, *Klasszikus és lineáris algebra*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.
- [12] GEHÉR LÁSZLÓ, *Bevezetés a geometriába*, Egyetemi előadások, Szeged, 1981 és 1982.
- [13] GYÉMÁNT IVÁN és GÖRBE TAMÁS F., *Lineáris algebra fizikusoknak*, Polygon, Szeged, 2011.
- [14] HAJÓS GYÖRGY, *Bevezetés a geometriába*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.
- [15] D. HILBERT és S. COHN-VOSSEN, *Szemléletes geometria*, Gondolat, Budapest, 1982.
- [16] I. M. JAGLOM és BOLTYANSZKIJ, *Konvex alakzatok*, Polygon, Szeged, 2011.
- [17] N. D. KAZARINOFF, *Geometriai egyenlőtlenségek*, Gondolat, Budapest, 1980.
- [18] KÉRCHY LÁSZLÓ, *Bevezetés a véges dimenziós vektorterek elméletébe*, Polygon, Szeged, 1997.
- [19] KINCSES JÁNOS, *Bevezetés a geometriába*, Egyetemi előadás-vázlatok, Szeged, 2000.
- [20] KISS GYÖRGY és SZÖNYI TAMÁS, *Véges geometriák*, Polygon, Szeged, 2001.
- [21] A. KOSTOVSKII, *Geometrical constructions with compasses only*, MIR, Moscow, 1986.
- [22] A. G. KUROS, *Felsőbb algebra*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.

- [23] KURUSA ÁRPÁD, *Bevezetés a differenciálgeometriába*, Polygon, Szeged, 1999.
- [24] KURUSA ÁRPÁD, *Nemeuklidészi geometriák*, Polygon, Szeged, 2009.
- [25] LACZKOVICH MIKLÓS, *Sejtés és bizonyítás*, 2. kiadás, Typotex, Budapest, 2010.
- [26] LÁNCZOS KORNÉL, *A geometriai térfogalom fejlődése*, Gondolat, Budapest, 1976.
- [27] MÓRICZ FERENC, Az $\sqrt[n]{N}$ (amikor nem egész), e és π számok irracionálisok, *Polygon*, **XV/1** (2006), 25–42.
- [28] MOUSSONG GÁBOR, *Geometria*, ELTE TTK & Typotex, Budapest, 2014.
- [29] NAGY GÁBOR, *Transzformációcsoportok*, Jegyzetvázlat, Szeged, 2001.
- [30] NAGY GÁBOR, *Koordinátagometria*, Jegyzetvázlat, Szeged, 2002.
- [31] REIMANN ISTVÁN, *A geometria és határterületei*, Gondolat, Budapest, 1986.
- [32] W. RUDIN, *A matematikai analízis alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.
- [33] SIMONYI KÁROLY, *A fizika kultúrtörténete a kezdetektől a huszadik század végéig*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2011.
- [34] SZABÓ LÁSZLÓ, *Bevezetés a lineáris algebrába*, Polygon, Szeged, 2003.
- [35] SZABÓ LÁSZLÓ, *Kombinatorikus geometria és geometriai algoritmusok*, Polygon, Szeged, 2003.
- [36] SZABÓ ZOLTÁN, *Bevezető fejezetek a geometriába 1. kötet*, JATE Jegyzet, Szeged, 1982; http://www.math.u-szeged.hu/Geo/_site/index.php/download/category/57.
- [37] SZABÓ ZOLTÁN, *Geometriai transzformációk - Kurzus példatár*, JATE, Szeged, 1982; http://www.math.u-szeged.hu/Geo/_site/index.php/download/category/57.
- [38] SZENDREI ÁGNES, *Diszkrét matematika*, Polygon, Szeged, 1996.
- [39] SZŐKEFALVI NAGY GYULA, *A geometriai szerkesztések elmélete*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968.
- [40] SZŐKEFALVI-NAGY GYULA, GEHÉR LÁSZLÓ és NAGY PÉTER, *Differenciálgeometria*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.
- [41] SZŐNYI TAMÁS, Note on planar functions over the reals, *Note di Matematica*, **X** (1990), 59–65.
- [42] A. C. THOMPSON, *Minkowski geometry*, Cambridge UP, Cambridge, 1996.
- [43] VIGASSY LAJOS, *Egybevágósági transzformációk a síkban és a térben*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.

Jelölések és konvenciók

$\mathfrak{S}, \mathfrak{T}, \mathfrak{A}$	– affin sík, tér, geometria
$\mathcal{V}$	– vektorterek írott nagybetűvel
$\mathcal{H}$	– halmazok és tartományok írott nagybetűvel
T_O	– az O pontnál vett helyvektorok halmaza az adott térben
P_O és $\mathbf{v}_O$	– az O pontnál vett helyvektor P ponthoz és $\mathbf{v}$ vektorhoz
$\cdot$ és $\langle \cdot, \cdot \rangle$	– euklidészi belső szorzás
$\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}_{0\leq}$	– valós számok és nem negatív valós számok halmaza
$\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$	– természetes, racionális és egész számok halmaza
κ, λ, μ	– valós számok görög kisbetűvel
x, y, z	– valós számok dőlt kisbetűvel
q, r, s	– racionális számok dőlt betűvel
i, j, k	– természetes vagy egész számok dőlt betűvel
$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$	– vektorok félkövér kisbetűvel
$\mathbf{M}$	– mátrix
P, Q, R	– pontok dőlt nagybetűvel
$\overline{PQ}$	– pontpár szakasza
(P, Q)	– rendezett pontpár kötött vektora
$\overrightarrow{PQ}$	– rendezett pontpár által reprezentált szabad vektor
α, β, γ	– szögek görög kisbetűvel
φ, ψ, ϕ	– leképezések görög kisbetűvel
$\iota, \varphi, \varepsilon, \delta$	– izometriák, forgatások, eltolások, dilatációk görög kisbetűvel
e, f, g, h	– egyenesek dőlt kisbetűvel
a_+, b_+	– félegyenesek
$\sphericalangle(a_+b_+)$	– félegyenesek szöge
$\sphericalangle(ABC)$	– BA , és BC félegyenesek szöge
$\sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$	– $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ helyvektorok szöge
$ \cdot , \ \cdot\ $	– abszolút érték, norma, vektorhossz
$X_P(\lambda, Q)$	– az az X pont, melyre $\lambda \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PX}$
τ_e, τ_P, τ_S	– egyenesre, pontra illetve síkra vonatkozó tükrözés
O_λ	– az O középpontú λ együtthatós homotécia
$\varepsilon_{\mathbf{u}}^t$	– a $t\mathbf{u}$ vektorhoz tartozó eltolás, ahol $\mathbf{u}$ egységnyi vektor, $t \geq 0$
φ_O^α	– az O pont körüli α -szögű forgatás

Görög betűk

név	kisbetű	nagybetű	verzió	név	kisbetű	nagybetű	verzió
alfa	α			nű	ν		
béta	β			kszí	ξ	Ξ	
gamma	γ	Γ		pí	π	Π	ϖ
delta	δ	Δ		ró	ρ		ϱ
epsilon	ϵ		ε	szigma	σ	Σ	ς
zéta	ζ			tau	τ		
éta	η			üpszilon	υ	Υ	
theta	θ	Θ	ϑ	fi	ϕ	Φ	φ
iota	ι			chi	χ		
kappa	κ		$\varkappa$	pszí	ψ	Ψ	
lambda	λ	Λ		omega	ω	Ω	
mű	μ						

Gótikus betűk

név	kisbetű	nagybetű	név	kisbetű	nagybetű
a	a	A	n	n	N
b	b	B	o	o	O
c	c	C	p	p	P
d	d	D	q	q	Q
e	e	E	r	r	R
f	f	F	s	s	S
g	g	G	t	t	T
h	h	H	u	u	U
i	i	I	v	v	V
j	j	J	w	w	W
k	k	K	x	x	X
l	l	L	y	y	Y
m	m	M	z	z	Z

Héber betűk

név	betű
alef	א

Név- és tárgymutató

i -reláció, 188

k -szög, 47

m -reláció, 87

p -reláció, 10

π , 293

A

addíciós formulák

szög, 104

additív, 295

affin

altér, 202

" metsző, 206

féltér, 205, 168

független, 202

geometria, 201

homotécia, 38

invariánsok, 117

koordináta, 203

koordinátázás, 203

nyújtás, 40

sík, 6

" valós $\sim$, 44

struktúra, 201

tér, 168

tükrözés, 38

affinitások alaptétele, 209

alapkör (inverzióé), 149

alappont, 203

alapsík (kúpé), 262

alaptartomány, 157

alkotó (kúpé), 262

alsó határ, 5

általános helyzet, 203

síkban, 10

térben, 165

antiszimmetria

formáé, 112

relációé, 298

Apollóniosz tétele, 144

aszimptota, 136

aszimptotikus irány, 137

asszociatív, 298

átfogó, 126

átdarabolás, 109

sokszögé, 109

politópé, 194

átfordítás

síkon, 83

térben, 185

átmenetleképezés, 30

átmérő, 66, 233

axióma

illeszkedési $\sim$, 3, 165

párhuzamossági $\sim$, 3, 166

rendezési $\sim$, 4, 168

B

Bailey–Borwein–Plouffe, 293

Banach–Tarski paradoxon, 195

baricentrikus koordinátázás, 132

Barlow, 156

bázis, 268

befogó, 126

Bolyai Farkas, 110

Bolyai János, 2

Bohr, Niels, 1

C

Caratheodory-tétel, 212

Cauchy

-féle sorozat, 272

-Bunyakovszkij–Schwarz

-egyenlőtlenség, 269, 178, 63

centrális

dilatáció, 70

tükrözés, 38, 241, 79, 182

centrum, 77

Ceva tétele, 117

csavarmozgás, 182

csoport, 299

Abel-~, 299

affin lineáris ~, 209

általános lineáris ~, 209

ciklikus ~, 299

kommutatív ~, 299

permutáció ~, 299

rész~, 299

speciális lineáris ~, 209

szimmetria-~, 153

teljes transzformáció ~, 299

csúcs

kúpé, 262

poliéderé, 218

poligoné, 55

politópé, 216

szimplexé, 215

törtvonalé, 47

csúsztatva forgatás, 182

csúsztatva tükrözés, 81, 182

D

Dandelin-gömb, 263

Darboux-metrika, 221

Dedekind axióma, 5

definiáló

félsík, 53

féltér, 217

pont, 52, 215

rendszer, 53, 52, 217, 215

definitéség, 61

pozitív ~, 269

Dehn, Max, 193

derivált, 289

derékszög, 126

Desargues

-sík, 9

-tétel, 170

-tulajdonság, 9

determináns, 283

affinitásé, 30, 38, 115, 197

mátrixé, 37

dilatáció, 69

együtthatója, 69

dimenzió, 268

szimplexé, 216

direktrix, 133

Dirichlet-cella, 155

diszkrét

ponthalmaz, 155

izometria-csoport, 157

mozgás-csoport, 157

disztributivitás, 299

duális bázis, 280

duális tér, 280

E

Eddington, 300
 egybevágóság, 83
 egyenes
 irányvektora, 66
 kitérő $\sim$, 166
 tartó, 6
 kitérő, 206
 kúp, 262
 metsző $\sim$, 3
 metsző $\sim$, 166
 normálisa, 30
 normálisa, 66
 szög, 85, 91
 egyenességet tartó, 6, 169
 egység
 elem, 299
 gömb, 232
 kör, 232
 együttható
 affinitásé, 115
 dilatációé, 69
 ekvivalencia, 298
 -reláció, 298
 él, 47, 55
 elfajuló
 egyenlet, 29
 háromszög, 4
 paralelogramma, 7
 szakasz, 5
 ellentmondásmentesség, 2
 relatív $\sim$, 2
 ellipszis, 60
 főköre, 141
 nagy tengelye, 134
 ellipszoid, 234
 eltolás, 38
 -vektor, 122

elválasztás, 5, 145
 érintő, 139
 Escher, M.C., 157
 Euklidész, 1
 euklidészi
 metrika, 63, 178, 236
 norma, 270
 sík, 63, 269
 tér, 178
 vektortér, 270
 Euler tétele, 189, 220
 Euler-egyenes, 131
 excentricitás, 133

F

fedő
 mozgás, 153
 csoport, 153
 félegyenes, 4, 168
 elválaszt, 86
 felezőpont, 12
 metrikus $\sim$, 222
 félsík, 6, 168
 felső határ, 5
 ferdetest, 299
 Feuerbach-tétel, 131
 Feuerbach-kör, 132
 fix, 38
 egyenes, 7
 pont, 7
 "-tétel, 76, 179
 folytathatóság, 5
 folytonossági axióma, 5, 168
 forgatás, 77
 centruma, 77
 tengelye, 181
 szöge, 123
 forgatva

csúsztatás, 182
 tükrözés, 182
 főkör, 141
 főtengely-transzformáció, 132
 affin $\sim$, 58
 funkcionál
 Minkowski- $\sim$, 288
 lineáris $\sim$, 280
 szubadditív $\sim$, 285
 függetlenség, 268
 függvény
 egyenletesen folytonos $\sim$, 272
 folytonos $\sim$, 272
 trigonometrikus $\sim$, 106

G

Gallai–Sylvester-tétel, 119
 Gauss, 2
 gömb, 232
 típusú, 233
 görbe, 289
 hossza, 290
 rektifikálható $\sim$, 290
 Gram–Schmidt-eljárás, 270, 197
 Grassmann-algebra, 281

H

Hahn–Banach tétel, 286
 geometriai alakja, 288
 Hamel-bázis, 297
 háromszög, 4
 alapja, 126
 belső szögfelezője, 96
 egyenlőszárú $\sim$, 126
 egyenlőoldalú $\sim$, 126
 elfajuló $\sim$, 4, 269, 61
 irányítatlan $\sim$, 4
 irányított $\sim$, 4

oldala, 5
 ortogonális $\sim$, 65
 szárai, 126
 hasonló $\sim$, 85
 szabályos $\sim$, 126
 háromszög-egyenlőtlenség, 61
 hasáb, 192
 egyenes $\sim$, 192
 hasonlóság, 85
 határ, 55, 218, 269
 pont, 5
 érték, 272
 Heisenberg, 1
 Helly-tétel, 213
 helyvektor, 25
 Hilbert, 2
 hiperbola, 60
 hiperlap, 216, 218
 hiperél, 216, 218
 hipersík, 202, 205
 Hodge-csillag, 284
 Hodge-dualizálás, 284
 homogenitás
 függvényé, 295
 normáé, 269
 homomorfia, 298
 homotécia
 affin $\sim$, 38
 együtthatója, 39
 húr, 142

I

ideális
 egyenes, 9 , 170
 pont, 9, 170
 sík, 170
 identitás, 7
 illeszkedési axióma, 3, 165

illeszkedés, 3, 165, 165
 indikátor, 277
 indikátrix, 278
 invariáns, 38
 egyenes, 7
 csoportra, 153
 inverz, 299
 inverzió, 149
 inverzív sík, 149
 involúció, 7
 irányításváltás, 38 , 83
 irányvektor, 66
 izometria, 70, 222
 izomorf, 7, 63, 169, 178, 201, 221, 298
 izomorfia, 268, 298
 kanonikus $\sim$, 268

J

Jacobi-azonosság, 199

K

keresztpolitóp, 52, 215, 268
 kicsinyítés, 70
 kifejtési tétel, 199
 kifeszít, 203
 kistengely, 134
 Klein, 2
 kocka, 192
 kollineáció, 6, 169
 kollineáris pontok, 3, 169, 165
 kommenzurabilitás, 277
 kommutatív
 csoport, 299
 művelet, 298
 komplanáris, 165
 koncentrikus, 142
 konform, 152
 kongruencia, 298

konjugált elem, 299
 irány, 249
 konkurrens, 3, 165
 kontrakció, 276
 konvergens, 272
 konvex, 52
 burok, 52, 210
 lineáris kombináció, 210, 269
 ponthalmaz, 209
 " belseje, 209, 269
 belső pontja, 209
 poliéder, 217
 poligon, 53
 szigorúan $\sim$, 210, 269
 vektorhalmaz, 269
 koordináta
 -egyenes, 29
 -sík, 175
 -tér, 27, 172
 transzformáció, 176
 koordinátázás, 27, 172
 korlátosság, 272, 268
 koszinusz, 102, 241
 -tétel, 103
 kögyenes, 151
 kör, 65
 kilenc pontos $\sim$, 132
 sugara, 232, 66
 ív, 142
 re vonatkozó hatvány, 151
 beírt $\sim$, 129
 körülírt $\sim$, 129
 hozzáírt $\sim$, 129
 Thalész- $\sim$, 144
 tartó, 145
 körüljárás, 4
 azonos $\sim$ ú, 38
 kötött szög, 85

felezője, 89
 rendezése, 87
 partos $\sim$, 86
 szinusza, 102
 kötött vektor, 10
 középpont, 39, 65, 233
 inverzióé, 149
 középpontos
 dilatáció, 70
 tükrözés, 79
 affin tükrözés, 38
 tükrözés, 241, 182
 közrefog, 5
 Kronecker-delta, 280
 kúp, 262
 kúpszelet, 133
 belső pontja, 139
 fokálisan, 136
 fókusza, 133
 külső pontja, 139
 sugara, 136
 rádiuszvektora, 133
 tengelye, 133
 paramétere, 136
 érintési pontja, 139
 külső forma, 281
 külső szorzat, 281

L

Lagrange-azonosság, 199
 lap
 poliéderé, 218
 politopé, 216
 lapháló, 216
 látószög, 142
 lexikografikus rendezés, 42
 lineáris
 funkcionál, 280

függetlenség, 268
 kombináció, 268
 összetevő, 37
 Lobacsevszkij, 2

M

magasság, 130
 pont, 130
 vonal, 130
 másodrendű görbe, 56
 egyenlete, 56
 közönséges $\sim$, 60
 valódi $\sim$, 60
 másodrendű polinom, 56
 Menelaosz tétele, 118
 merőleges, 178
 egyenesek, 238, 66
 síkok, 243
 vetület, 67
 metrika, 61
 additivitása, 61
 affin $\sim$, 61
 diszkrét $\sim$, 61
 szimmetrikus $\sim$, 61
 tükrözéses $\sim$, 238, 243, 75, 222
 metrikus
 affin geometria, 221
 tér, 61
 " teljessége, 273
 Minkowski
 -funkcionál, 288
 -metrika, 225
 -tulajdonság, 222
 modell, 2
 mozgás, 83, 185
 csoport, 83, 185, 157
 osztályozása, 158
 művelet, 298

N

nagyítás, 70
 nagytengely, 134
 neutrális elem, 298
 négyzet, 106
 norma, 63, 269
 normális, 30
 egyenes $\sim$ a, 66
 normált bázis, vektor, tér, 269
 normáltranszverzális, 179
 null
 elem, 299
 szög, 85
 vektor, 10, 14
 numerikus excentricitás, 133

Ny

nyírás, 38
 nyitott könyv
 tulajdonság, 8
 tétele, 9, 169

O

oldal, 5
 szemközti $\sim$, 8
 origó, 203
 oroszánfogás módszere, 273
 ortogonális
 bázis, 270
 egyenes, 66
 vektor, 65, 270
 ortonormált, 65, 270
 osztóviszony, 25
 metrikus $\sim$, 67, 222, 228

P

pálya, 153
 parabola, 60

paralelepipedon, 192
 paralelogramma, 7
 -azonosság, 63, 222, 235
 -szabály, 26
 párhuzamos
 egyenesek, 3
 síkok, 166
 egyenes síkkal, 166
 affin alterek, 202
 eltolás, 79, 181
 szelők tétele, 12, 23, 64, 228
 párhuzamossági axióma, 3, 166
 partosság, 6, 168
 Pasch-axióma, 4
 perspektív, 9
 Pitagorasz-tétel, 65, 65
 platóni test, 190
 Poincaré, 2, 302, 302
 poliéder, 217
 poligon, 53
 politóp, 52, 215
 éle, 189
 csúcsa, 189
 hiperéle, 216
 hiperlapja, 216
 lapja, 189
 szabályos $\sim$, 190
 pozitivitás, 61
 Ptolemaiosz-egyenlőtlenség, 245

R

rács, 155
 rádiuszvektor, 133
 Radon tétele, 212, 147
 Radon-görbék, 249
 rektifikálhatóság, 290
 reláció, 298
 rendezés, 298

kötött szögé, 87
 szabad szögé, 93
 rendezési axióma, 4, 168
 reprezentál, 13
 reprezentáns
 szabadvektoré, 13
 szabadszögé, 91
 Riemann, 2, 301
 Riesz reprezentációs tétele, 283

S

saját
 vektor, 39
 érték, 39
 Segre, 250
 Simonyi Károly, 300
 sík
 inverzív $\sim$, 149
 normálisa, 175
 ok szöge, 188
 sokszög, 47
 oldala, 47
 átdarabolása, 109
 bel- és külseje, 51
 súlypont, 130
 súlyvonal, 130
 Sylvester faladata, 119

Sz

szabad szög, 91, 188
 összege, 91
 rendezése, 93
 szabad vektorok, 13
 összege, 14
 reprezentánsa, 13
 szabályos
 ponthalmaz, 154
 pontrendszer, 155

sokszög, 154
 szakasz, 5, 168
 hossza, 62
 felező merőlegese, 67, 237, 243, 240
 szimmetria, 153
 középpontos, centrális, 39
 relációé, 298
 vektorhalmazé, 268
 szimplex, 215
 szinusz
 szabad szögé, 103
 -tétel, 103
 szorzás
 belső $\sim$, 271
 euklidészi $\sim$, 64
 kereszt $\sim$, 198
 valóssal $\sim$, 18
 vektoriális $\sim$, 198
 vegyes $\sim$, 200
 szög, 188, 151
 belső $\sim$ felező, 129
 csúcsa, 85
 csúcs $\sim$, 86
 derék $\sim$, 126
 egyállású $\sim$, 86
 félsíkoké, 188
 felezője, 129
 kiegészítő $\sim$, 86
 kötött $\sim$, 85
 külső $\sim$, 125
 mellék $\sim$, 86
 mérése, 101
 szára, 85
 váltó $\sim$, 86
 szubadditivitás
 funkcionálé, 285
 metrikáé, 61
 normáé, 269

T

talppont, 67
 támasz, 216
 egyenes, 52
 félsík, 52
 félter, 216, 189 , 189
 hipersík, 216
 félegyenes, 52
 pont, 52
 sík, 189
 távolság, 61
 téglatest, 192
 tengely
 körüli forgatás, 181
 kúpé, 262
 affinitásé, 39
 tengelyes
 affinitás, 38
 tükrözés, 72, 181
 en perspektív, 9
 tenzor, 280
 alternáló $\sim$, 281
 antiszimmetriája, 112, 195
 szorzat, 280
 terület, 109
 forma, 112
 test (algebrai), 299
 ferde $\sim$, 299
 téglalap, 106
 térfogat, 193
 forma, 195
 Thalész-tétel, 65, 144
 Thalész-kör, 144
 torlódási pont, 272
 törött vonal, 47
 kísérője, 48

transzformáció, 7, 169
 affin $\sim$, 30, 176
 egybevághósági $\sim$, 83
 egyenestartó $\sim$, 169
 hasonlósági $\sim$, 69
 " centrális $\sim$, 70
 identikus $\sim$, 7
 involutív $\sim$, 7
 izometrikus, 222
 koordináta- $\sim$, 30
 körüljárásváltó $\sim$, 83
 ortogonális $\sim$, 237
 szögtartó $\sim$, 152, 96
 térfogattartó, 197
 területtartó, 115
 trigonometrikus függvények, 106
 tükrözés
 egyenésre, 238
 síkra, 243
 tükrözve csúsztatás, 182
 tükrözve forgatás, 182

V

vektortér, 268
 vezéregyenes, 133
 Voronoj-sokszög, 155
 vektor hossza, 63

W

Wallace–Bolyai–Gerwien-tétel, 110
 Weierstrass tétele, 273

Z

zárt halmaz, 272
 zárt művelet, 298
 zászló, 185

Még nem besorolt mutatók

Tennivalók