

NÉHÁNY ALAKFELISMERÉSI PROBLÉMA

(diploma munka)

Készítette: Kurusa Árpád matematikus 1986-ban

TARTALOMJEGYZÉK

I	Bevezetés	2
II	Radon transzformáció.	4
II/1	Radon operátor és más operátorok.	5
	Inverzformula	8
II/2	d-dimenziós Radon transzformáció.	11
III	Bumeráng transzformáció	13
III/1	Bumeráng transzformáció a síkon	15
III/2	Folytonos gömbfüggvények inverze.	16
III/3	Inverzformula	22
III/4	d-dimenziós bumeráng transzformáció	27
IV	Radon és bumeráng transzformáció.	28
V	Alkalmazások.	31
	Utószó.	33
	Jelölések	34
	Irodalom.	35

I. BEVEZETÉS

Alakfelismerésen mást és mást értenek a különböző tudomány-ágak képviselői. Így míg az orvosok például bizonyos daganatok formájára kíváncsiak annak röntgen árnyékai alapján, a fizikusok egyes testek belső "alakját" (anyagok eloszlása, sűrűség stb.) szeretnék ismerni kívülről mért adatokból kiindulva.

A számítástechnikusok a számítógépet szeretnék megtanítani a látásra, vagyis diszkrét adatokból visszanyerni a kép osztályba sorolásához szükséges információkat.

Mindezek természetes matematikai általánosítása a következő:

Adott egy A halmaz és egy P részhalmaz rendszere, melynek minden $p \in P$ elemén adott egy m_p mérték.

Adott továbbá egy $f: A \rightarrow R$ függvény, mely minden m_p szerint P minden elemén integrálható.

Tekintsük az $\hat{f}: P \rightarrow R$ függvényt, melyre ha $p \in P$, akkor

$$/I.1/ \quad \hat{f}(p) = \int_P f dm_p$$

A feladat ezután az, hogy ha csak f -t ismerjük, meg tudjuk-e határozni f -et, és ha igen, akkor hogyan.

Nézzünk erre most néhány példát:

a. Legyen $A = N$ (természetes számok), P az A tíz elemű halmazainak halmaza, m_p pedig a diszkrét mérték rajta.

Ekkor:

$$/I.2/ \quad \hat{f}(p) = \sum_{i \in p} f(i) \cdot m_p(i)$$

Világos, hogy f ismeretében ezek $f(i)$ -kre lineáris egyenletek és mint az algebrából ismert, bizonyos pontosan leírt feltételek mellett f meghatározható ezekből.

Ezek a feltételek lényegében azt írják elő, hogy f hordozzon elég információt f -ről, de ne ellentmondásosan.

b. Legyen $A = \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$). P az A $d < n$ dimenziós hipersíkja-
inak halmaza, és $p \in P$ -re m_p az $\mathbb{R}^n$ -n megszokott
Lebesgue mérték.

Ekkor $\hat{f}$ -t az f d -dimenziós Radon transzformáltjának
nevezzük.

c. Legyen A mint előbb, P az origót átmetsző d -dimen-
ziós gömbök halmaza. A $p \in P$ -én vett m_p mérték pedig
legyen az origó körül vett megfelelő d -dimenziós
egységgömb felületmértékének kivetítése p -re.
Ekkor $\hat{f}$ -t az f d -dimenziós bumeráng transzformáltjá-
nak nevezzük.

Mielőtt e két utóbbi transzformációval foglalkoznánk
meg kell említeni, hogy a /I.1/ transzformációhoz ter-
mészetes módon kapcsolódik annak "duálisa".

Minden $a \in A$ -ra legyen $H_a = \{p \in P : a \in p\}$ és m_a egy ezen értel-
mezett mérték. Ekkor, ha $F: P \rightarrow \mathbb{R}$ az

$$\text{/I.3/} \quad \overset{v}{F}(a) = \int_{H_a} F dm_a$$

a duális transzformáció

Láthatólag a duális transzformáció is /I.1/ típusú
és ha a /I.2/ képlettel meghatározott transzformáció-
ra tekintünk megfelelő m_a esetén felismerhetjük benne
az egyenletrendszer megoldását mely jól mutatja, mi-
lyen fontos a duális vizsgálata.

II. RADON TRANSZFORMÁCIÓ

Jelöljük ebben a fejezetben az egyszerűség kedvéért a Radon operátort " $\hat{\cdot}$ "-pal, duálisát pedig " $\hat{\cdot}^*$ "-val.

Ahhoz, hogy $\hat{f}$ valóban létezzen, bizonyos kikötéseket kell tennünk f -re vonatkozóan ti., hogy az integrál létezők és további számításainkban se legyen probléma. Ezért a továbbiakban csak az $f \in S(\mathbb{R}^n)$ -ekkel fogunk foglalkozni, ahol

$$S(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall P \text{ polinomra } \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^m P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f(x) < \infty \right\}$$

Jelölje P^n az $\mathbb{R}^n$ $(n-1)$ -dimenziós hipersíkjait. Világos, hogy P^n azonosítható az $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ térrel, így ha $\phi : P^n \rightarrow \mathbb{R}$, akkor ϕ -t felfoghatjuk, mint egy kétváltozós S^{n-1} -en és $\mathbb{R}$ -n értelmezett függvényt, és ilyen értelemben értelmes a következő definíció

$$S^{\square}(P^n) = \left\{ \phi \in C^\infty : \forall D \text{ } S^{n-1}\text{-n értelmezett differenciál operátorra} \right. \\ \left. \sup_{(\omega, r) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}} |(1+r)| \frac{d^e}{dr^e} (D\phi)(\omega, r) < \infty \right\}$$

ami teljesen analóg előző definíciókkal, és lehetővé teszi a duális transzformációval való munkát.

Mivel $\hat{f}(\omega, r) = \hat{f}(-\omega, -r)$, kézenfekvő további megszorítást fejez ki a következő:

$$S(P^n) = \left\{ \phi \in S^{\square}(P^n) : \phi(\omega, r) = \phi(-\omega, -r) \right\}$$

További jelölésként vezessük be a Laplace operátort és a $\phi(\omega, r) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi(\omega, r)$ operátort L és $\square$ jelekkel.

II-1 A RADON OPERÁTOR ÉS MÁS OPERÁTOROK

II-1. Lemma:

Ha $f \in S(\mathbb{R}^n)$ és $\phi \in S(\mathbb{P}^n)$ akkor $(Lf)^\wedge = \square(\hat{f})$ illetve $(\square\phi)^\vee = L(\hat{\phi})$ %
 Ha $f_t(x) = f(x+t)$, akkor nyilván $\hat{f}_t(\omega, p) = \hat{f}(\omega, p+(t, \omega))$
 Mármost ezt derirálva t_i szerint a $t=0$ pontban adódik:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\right)^\wedge(\omega, p) = \omega_i \frac{\partial \hat{f}}{\partial p}(\omega, p)$$

és ez első állításunkat azonnal igazolja.

A második állításunk a következő egyenlőség trivális következménye

$$\text{/II-1.2/ } \phi^\vee(x) = c \cdot \int_{S^n} \phi(\omega, (x, \omega)) d\omega$$

-OK-

Itt meg kell jegyeznünk, hogy ha

$$g(x) = \phi\left(\frac{x}{|x|}, |x|\right) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (0\text{-ban } 0)$$

akkor ez azt jelenti, hogy

$$\text{/II-1.3/ } \phi^\vee(x) = c' B(g)(x)$$

mint azt majd látni fogjuk a III-as fejezetben, sőt ebből a képletből majd a bumeráng transzformációra is fel tudunk írni egy inverz képletet a IV-es fejezetben.

II-1.4 Tétel:

Jelöljük " $\sim$ "-mal a Fourier transzformációt. Ekkor $f \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\text{esetén: } \tilde{f}(s\omega) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega, r) e^{-isr} dr$$

%

A bizonyításban a Fubini tételt kell felhasználni.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega, r) e^{-isr} dr &= \int_{\mathbb{R}} \int_{(x, \omega)=r} f(x) e^{-is(x, \omega)} dm(x) dr = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(x, s\omega)} dx = \hat{f}(s\omega) \end{aligned}$$

-OK-

Eszerint az n -dimenzió Fourier operátorá az 1 -dimenzió Fourier operátorának és a Radon operátornak az összetétele. Ez azt jelenti, hogy $S(\mathbb{R}^n)$ -n Radon operátor injektív, hiszen a Fourier operátor is az.

II-1.5 Tétel:

Minden $k \in \mathbb{N}$ és $f \in S(\mathbb{R}^n)$ esetén a $\psi(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega, r) \cdot r^k dr$ k -ad fokú homogén polinom $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ -ben.

%

Ismét a Fubini tétel segít:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega, r) \cdot r^k dr &= \int_{\mathbb{R}} \int_{(x, \omega)=r} f(x) \cdot (x, \omega)^k dm(x) dr = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot (x, \omega)^k dx \end{aligned}$$

-OK-

Jelölje $S_H(\mathbb{P}^n)$ az $S(\mathbb{P}^n)$ azon elemeit, melyek teljesítik a tétel állítását, vagyis minden $k \in \mathbb{N}$ -re

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(\omega, p) p^k dp$$

k -ad fokú homogén polinom $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ -ben.

Mivel II-1.4 tétel szerint $\hat{f}(\omega, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(s \cdot \omega) e^{isr} ds$, ha $f \in S(\mathbb{R}^n)$, akkor $\tilde{f} \in S(\mathbb{R}^n)$ is, amiért nyilvánvaló, hogy $\hat{f} \in S(\mathbb{P}^n)$. Ez pedig előző tételünk értelmében arra vezet, hogy $\hat{f} \in S_H(\mathbb{P}^n)$.

II-1.6 Tétel:

A Radon operátor lineáris bijekció $S(\mathbb{R}^n)$ -ről $S_H(\mathbb{P}^n)$ -re
A tétel teljes belátásához a szürjektivitást kellene még %
belátnunk, melyben a II-1.4 tételre támaszkodhatnánk, de
ezt most hossza és érdektelensége miatt mellőzzük.

A továbbiak kedvéért vezessünk most be néhány jelölést.

Legyen: $S_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y|=r\}$ és $A(r)$ az $S_r(x)$ felszíne.

$$M^n f(x) = \frac{1}{A(r)} \int_{S_r(x)} f(\omega) dm(\omega) = \int_K f(x+ky) dk \quad y \in S_r(0)$$

ahol az utóbbi integrálban "dk" az n dimenzió-beli gömb
K forgáscsoportjának a Haar mértéke. A második egyenlőség
a Haar mérték egyértelműsége miatt igaz,

II-1.7 Tétel:

Ha $f \in S(\mathbb{R}^n)$, akkor $(\hat{f})^v(x) = \frac{\Omega_{n-1}}{\Omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|y-x|} dy$ ahol $\Omega_k = A(1)$
k dimenzióban. %

Ennek igazolására a következő, a Fubini tételt és definí-
ciónkat felhasználó azonosság sorozat szolgál:

$$\begin{aligned} (\hat{f})^v(x) &= \int_K \hat{f}(x+k\xi_0) dk = \int_K \int_{\xi_0} f(x+ky) dm(y) dk = \\ &= \int_{\xi_0} (M^{|y|} f)(x) dm(y) = \Omega_{n-1} \int_0^\infty r^{n-2} \left(\frac{1}{\Omega_n} \int_{S^{n-1}} f(x+r\omega) dm(\omega) \right) dr = \\ &= \frac{\Omega_{n-1}}{\Omega_n} \int_0^\infty \frac{1}{r} \left(r^{n-1} \int_{S^{n-1}} f(x+r\omega) dm(\omega) \right) dr \end{aligned}$$

ahol ξ_0 egy rögzített (n-1)-dimenziós altér.

-OK-

Észrevehetjük, hogy eszerint,

/II-1.8/
$$(\hat{f})^v = \frac{\Omega_{n-1}}{\Omega_n} H_n(n-1) I^{n-1}(f)$$

ahol $H_n(i) = 2^i \cdot \pi^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma(\frac{i}{2}) / \Gamma(\frac{n-i}{2})$

és $I^i(f)(x) = \frac{1}{H_n(i)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{i-n}} dy$

az úgynevezett Riesz potenciál.

Ismert, hogy $0 < k < n$ esetén I^k és I^{-k} egymás inverzei, továbbá legalább is $p \in \mathbb{N}$ esetén $(-L)^p = I^{-2p}$. Értelmezve L^p értékét ezen egyenlőség alapján arra az esetre is mikor csak $2p \in \mathbb{N}$, nyerjük a következő tételt.

II-1.9 Tétel:

Ha $f \in S(\mathbb{R}^n)$, akkor $f = \frac{1}{c} L^{\frac{n-1}{2}}((\hat{f})^\vee)$

ahol $c = (-4\pi)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{n}{2}) / \Gamma(\frac{1}{2})$

A következőkben mutatunk egy másik bizonyítást erre a tételre, mert annak módszere később is használható. Ehhez előbb azonban bebizonyítjuk a következő egyszerű lemmát.

II-1.10 Lemma:

Ha $f \in S(\mathbb{R}^n)$ és $r > 0$, akkor a következő két állítás igaz:

$LM^r f = M^r Lf$ és $L_x((M^r f)(x)) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) (M^r f(x))$

A bizonyításhoz vegyük észre, hogy ha $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ és létezik $\tilde{f}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, melyre $f(x) = \tilde{f}(|x|)$ (vagyis f 0 körüli gömbfüggvény) akkor:

$$Lf = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2} \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} \right) = \frac{d^2 \tilde{f}}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{d\tilde{f}}{dr}$$

Jelöljük ezután a z -vel való eltolást T_z -vel az $\mathbb{R}^n$ -beli forgáscsoport egy k eleméhez tartozó forgásoperátort pedig R_k -val.

Ekkor a következő azonosság sorozat bizonyítja a lemmát-

$$\begin{aligned} (LM^r f)(x) &= \int_K L_x(f(x+ky))dk = \int_K Lf(x+ky)dk = (M^r Lf)(x) = \\ &= \int_K ((Lf) \circ T_x \circ R_k)(y)dk = \int_K (L(f \circ T_x \circ R_k))(y)dk = \\ &= L_y \int_K f(x+ky)dk = L_y (M^{1/y} f)(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) (M^r f)(x) \end{aligned}$$

Láthatólag mindvégig csak az operátorok elemi tulajdonságait használtuk ki.

-OK-

Ez a lemma lehetővé teszi számunkra, hogy a II-1.9 tételre ha n páratlan egy új, a Riesz potenciál fogalmát nem használó bizonyítást adjuk.

Mint azt II-1.7 tétel bizonyításában láttuk, ha $f \in S(\mathbb{R}^n)$

$$/II-1.11/ \quad (\hat{f})^v(x) = \Omega_{n-1} \cdot \int_0^\infty (M^r f)(x) \cdot r^{n-2} dr$$

Ebből előző lemmánk szerint, ha élünk az $F(r) = (M^r f)(x)$ jelöléssel:

$$L((\hat{f})^v) = \Omega_{n-1} \cdot \int_0^\infty \left(\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{dF}{dr} \right) r^{n-2} dr$$

Ugyanakkor parciális integrállással:

$$\int_0^\infty \frac{d^2 F}{dr^2} r^{n-2} dr = \left[\frac{dF}{dr} r^{n-2} \right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{dF}{dr} r^{n-3} (n-2) dr$$

amiért:

$$L((\hat{f})^v) = \Omega_{n-1} \cdot \int_0^\infty \frac{dF}{dr} r^{n-3} dr$$

Újabb parciális integrálással:

$$L((f^1)^v) = \begin{cases} -\Omega_{n-1} f(x) & \text{ha } n=3 \\ -\Omega_{n-1} (n-3) \int_0^\infty F(r) r^{n-4} dr & \text{ha } n>3 \end{cases}$$

Láthatólag újra /II-1.11/-szerű egyenlőséghez jutottunk és így a következő azonosság valóban lehetővé teszi f kiszámítását $(\hat{f})^v$ -ből néhány $\frac{n-1}{2}$ L operátor felhasználásával.

$$L\left(\int_0^\infty F(r) \cdot r^k dr\right) = \begin{cases} -(n-2)f(x) & \text{ha } k=1 \\ -(n-1-k)(k-1) \int_0^\infty F(r) r^{k-2} dr & \text{ha } k>1 \end{cases}$$

Ez a képlet ugyanúgy kapható mint ahogy fentebb eljártunk $k=n-2$ esetén.

-OK-

II-2 D-DIMENZIÓS RADON TRANSZFORMÁLT

Nyilvánvaló, hogy $d \leq n-1$ esetén ez a probléma visszavezethető az $(n-1)$ -dimenziós Radon transzformált esetére, hiszen véve egy $(\omega, p) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}^n$ hipersíkot, abban is ugyanúgy a d -dimenziós hipersíkokon vett integrálok adóttak, melyek közül ha kiválasztunk egyet és az azzal (ω, p) -ben párhuzamos többi, majd ezeket integráljuk $\mathbb{R}^{n-d-1}$ -n, akkor máris adott $\hat{f}(\omega, p)$, amiből mint előbb láttuk f kiszámítható.

A probléma itt az, hogy túl sok információ adott f -ről, és ezért ellentétben a $d=n-1$ esettel, elég nehéz eldönteni, hogy nincs e benne ellentmondás.

II-2.1 Tétel:

Ha $f \in S(\mathbb{R}^n)$ és $c = (-4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{n}{2}) / \Gamma(\frac{n-d}{2})$

akkor $f = \frac{1}{c} L^{\frac{d}{2}}((\hat{f})^v)$

A bizonyításban a II-1.9 tétel első bizonyításához hasonlóan fogunk eljárni.

Legyen σ egy az origón átmenő fix d -dimenziós altér.

Ekkor mint azt II-1.7 tétel bizonyításában is csináltuk:

$$\begin{aligned} (\hat{f})^v(x) &= \int_{\sigma} \int_{\sigma^\perp} f(x+ky) dm(y) dk = \int_{\sigma} \int_{\sigma^\perp} f(x+ky) dk dm(y) = \\ &= \int_{\sigma} (M^{|y|} f)(x) dm(y) = \int_{\sigma} \int_{\sigma^\perp} (M^r f)(x) r^{d-1} dr \end{aligned}$$

Innen úgy is folytathatnánk, mint ahogy /II-1.12/ azonosság sugalja, de tovább véve a formulát, azt kapjuk, hogy:

$$(\hat{f})^\vee(x) = \frac{\Omega_d}{\Omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) |x-y|^{d-n} dy$$

Innen a Riesz potenciálra ismert összefüggések
/II-1.9 tételnél!/ bizonyítják a tételt.

-OK-

Ez a tétel tehát azt mutatja, hogy aggodalmunk az el-
lenmondások miatt, bizonyos fokig alaptalan, csak hogy
vegyük észre, ehhez azt a nagyon erős feltételt kellett
tenni, hogy $f \in S(\mathbb{R}^n)$.

III. BUMERÁNG TRANSZFORMÁCIÓ

Következőkben egy teljesen konstruktív módon felépített inverz-formulát fogunk adni a bumeráng operációra az ún. gömbfüggvényekre támaszkodva.

Azokat az $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket, melyre létezik $\bar{f}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, hogy $f(x) = \bar{f}(|x|)$, gömbfüggvénynek nevezzük, míg ha létezik $e \in S^{n-1}$, melyre $f(x) = f(e(e, x))$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ -re, akkor nyél, illetve cylinder függvényeknek nevezzük őket.

A könnyebb számolás kedvéért módosítsuk a bevezető (c) pontjában definiált bumeráng operátor fogalmát, a következő képpen.

Jelöljük S_x^{n-1} -szel az S^{n-1} gömb-nek azt a felét, melyre $(e, x) \geq 0$, ha $e \in S_x^{n-1}$, továbbá jelölje $\odot$ az origón átmenő gömbök halmazát és legyen $f_e: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ az a függvény, melyet f -ből az $f_e(x) = f(e(e, x))$ szerint nyerünk. Definiáljuk mostmár a B^t bumeráng operátort a következő módon:

$$/III.1/ \quad B^t(f(t))(x) = \int_{S_x^{n-1}} f_e(x) dm(e)$$

ahol m az S^{n-1} Haar mértéke.

Itt a jobb felső "t" index azt jelöli, hogy a bumeráng transzformációt a "t" változójú függvényre kell végrehajtani.

Ezt a "t" indexet csak olyankor fogjuk kiírni, amikor enélkül el lehetne téveszteni és ugyanígy teszünk majd f argumentumával is.

Világos, hogy ez a definíció ugyanaz mint a bevezetőben definiált, csak a gömböket megfeleltettük R^n egy-egy pontjának és ezt a megfeleltetést "hozzá tettük" az első definícióhoz. A megfeleltetésnél a gömbnek az origóval átellenes pontját rendeltük a gömbhöz.

Láthatjuk ugyanakkor, hogy f_g tulajdonképpen egy cylinder függvény, amiért a bumeráng transzformáció úgy is felfogható, mint amely a cylinder függvények egy-egy sokaságából, melyen m a mérték, integrálással állít elő egy újabb $R^n \rightarrow R$ függvényt.

Mint látni fogjuk éppen ez a felfogás teszi majd lehetővé, hogy a nem origó körüli gömbfüggvények bumeráng inverzést is képezni tudjuk.

III-1 BUMERÁNG TRANSZFORMÁCIÓ A SIKON

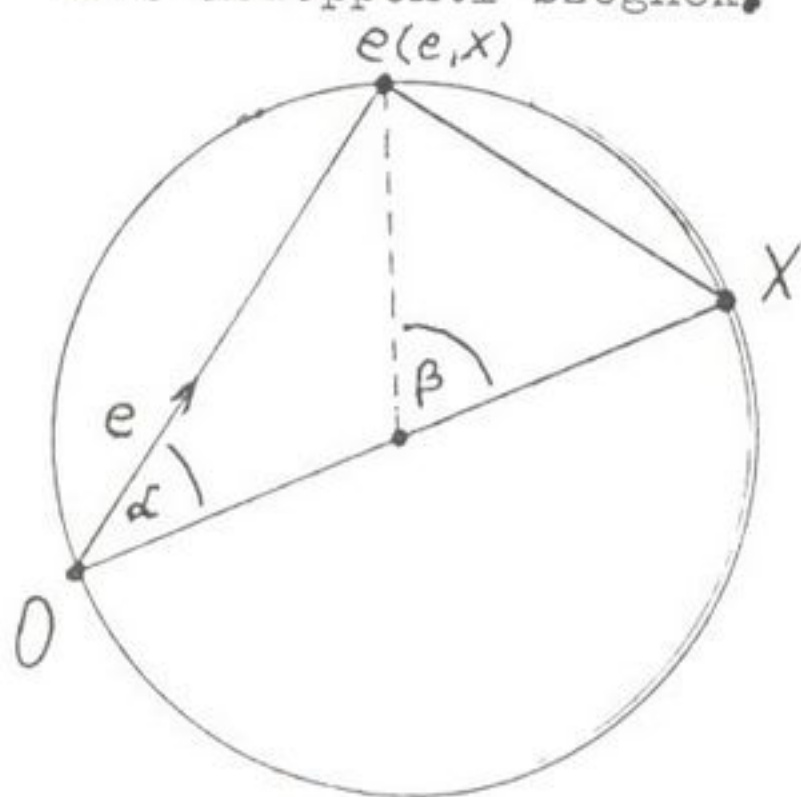
Azért kell külön foglalkoznunk a két dimenzióban vett bumeráng operátorral, mert ezen a téren nagyon is értelmes, közvetlen geometriai jelentést tulajdoníthatunk neki.

III-1. Tétel:

Ha $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény integrálható az origón átmenő körökön, akkor $2B(f)(x)$ nem más, mint f átlaga a $\overline{Ox}$ átmérőjű gömbön.

%

A bizonyítás a kerületi szögek tételén alapszik, mely szerint bármely kerületi szög éppen fele a hozzá tartozó középponti szögnek.



A rajzon látható jelölésekkel tehát $2\alpha = \beta$, ami azt jelenti, hogy a $B(f)$ -t definiáló integrálban szereplő kivetített mérték éppen fele a körre a kör középpontjából kivetített szögmértéknek, ami éppen a normált kerületi mérték.

Ez pedig nyilván a tétel állítását adja.

-OK-

Sajnos ez az állítás több dimenzióban nem igaz, már csak azért sem, mert mint azt könnyű látni, állításunk ekvivalens a kerületi szögek tételével, mely kettőnél nagyobb dimenzióban nem igaz (más konstans szorzóval se), így több dimenzióban meg kell elégednünk definícióval magával, illetve a III. fejezetben tett utolsó bekezdés értelmezésével.

III-2 FOLYTONOS GÖMBFÜGGVÉNYEK INVERZE

Mint tudjuk a $t \in S_x^{n-1}$ -hez tartozó felületelem $\frac{dt_{n-1} \dots dt_1}{t_n}$ ezért /III.1/ miatt

$$/III-2.1/ \quad B(f)(x) = \int_0^1 \int_{-s_1}^{s_1} \dots \int_{-s_{n-2}}^{s_{n-2}} f(t|x|t_1) + f(t^\circ|x|t_1) \frac{dt_{n-1} \dots dt_1}{t_n}$$

ahol $s_i = \sqrt{1-t_1^2 - \dots - t_i^2}$, $t = (t_1, \dots, t_n)$ és $t^\circ = (t_1, \dots, t_{n-1}, -t_n)$ valamint úgy tekintjük, hogy x az első tengelyen van, illetve a koordináta rendszert úgy vettük fel, hogy x éppen az első tengelyre essék.

Jelöljük a továbbiakban G_P -vel a $P \in R^n$ pont körüli folytonos gömbfüggvények terét, és amíg külön nem írjuk az ellenkezőjét, legyen $f \in G_0$ és $\bar{f}: R_+ \rightarrow R$ olyan függvény, melyre $f(x) = \bar{f}(|x|)$.

Elvégezve /III-2.1/-ben az integrálásokat, adódik:

$$/III-2.2/ \quad B(f)(x) = 2c_0 c_1 \dots c_{n-3} \int_0^1 \bar{f}(|x|t_1) \sqrt{1-t_1^2}^{n-3} dt_1$$

ahol $c_k = \pi^{k/2} \int_0^{\pi/2} \cos^k \alpha d\alpha$, hiszen ha $k \geq -1$ egész,

$$\text{akkor} \quad c_{k+1} \cdot a^{k+1} = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2}^k dx$$

Legyen $f_i: R^n \rightarrow R$ ($f_i(x) = |x|^i$) az i természetes számokra, /III-2.2/-ből nyerjük az alábbi:

$$/III-2.3/ \quad B(f_i)(x) = f_i(x) \cdot 2c_0 c_1 \dots c_{n-3} \int_0^1 t_1^i \sqrt{1-t_1^2}^{n-3} dt_1$$

Könnyen kiszámíthatjuk ez utóbbi integrál értékét, ha egyszerű helyettesítéssel behozzuk a trigonometrikus függvényeket.

Vezessük be a $d_{k=0}^m \int_0^{\pi/2} \sin^k \alpha \cos^m \alpha d\alpha$ jelölést.

Parciális integrálással nyerjük az alábbiakat:

$$k c_k = (k-1) c_{k-2} \quad (k+1) d_k^m = (m-1) d_{k+2}^{m-2} \quad (m+1) d_k^m = (k-1) d_{k-2}^{m+2}$$

A trivális $d_{k+2}^{m-2} = d_k^{m-2} - d_k^m$ illetve $d_{k-2}^{m+2} = d_{k-2}^m - d_k^m$ azonosságokat figyelembe véve, újabb immár bizonyos számításokat lehetővé tévő azonosságokat nyerünk.

$$(m+k) d_k^m = (m-1) d_k^{m-1} \quad \text{és} \quad (m+k) d_k^m = (k-1) d_{k-2}^m$$

Ez ak segítségével könnyű, teljes indukciós bizonyítást adhatjuk az alábbiaknak.

III-2.4 Tétel:

Ha $k \geq 1$ természetes szám, akkor

(i) $k c_k c_{k-1} = 2 \cdot \pi$

(ii) Ha m páros $d_k^m \cdot d_{k-1}^m = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (m-1))^2}{k \cdot (k+1) \cdot \dots \cdot (k+m)}$

(iii) Ha m páratlan $d_k^m = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (m-3) \cdot (m-1)}{(k+1) \cdot (k+3) \cdot \dots \cdot (k+m-2) \cdot (k+m)}$

Következmény:

Ha n páros

$$c_0 c_1 \cdot c_2 c_3 \cdot \dots \cdot c_{n-2} c_{n-3} = \frac{(2\pi)^{\frac{n-2}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-5) \cdot (n-3)}$$

Ha pedig n páratlan

$$c_0 \cdot c_1 c_2 \cdot c_3 c_4 \cdot \dots \cdot c_{n-2} c_{n-3} = \frac{2^{\frac{n-3}{2}} \cdot \pi^{\frac{n-1}{2}}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (n-5) \cdot (n-3)}$$

/III-2.3/-ből nyilvánvalóan

$$B(f_i, B(f_i))_{(x)} = \int_{i+1}^x (x) \cdot (2 c_0 c_1 \cdot \dots \cdot c_{n-3})^2 \cdot d_i^{n-2} \cdot d_{i+1}^{n-2}$$

melybe ha beírjuk a következmény eredményeit illetve

előbbi tételünk utolsó két formuláját, azt látjuk, hogy

$$B(f, B(f_i))(x) = f_{i+1}(x) \cdot \frac{(2\pi)^{n-1}}{(i+1) \cdot (i+2) \cdot \dots \cdot (i+n-1)}$$

mégpedig minden egynél nagyobb n természetes számra,
amiből elemi integrálási szabályokkal adódik:

$$/III-2.5/ \int_{n-2} (x) B(f, B(f_i))(x) = (2\pi)^{n-1} \int_0^x \int_0^{y_1} \dots \int_0^{y_{n-2}} f(y_{n-1}) dy_{n-1} \dots dy_1$$

Tekintve, hogy mindkét oldalon csak lineáris operátorok szerepelnek, /III-2.5/ természetesen igaz az f_i -k tetszőleges véges lineáris kombinációjára is.

Ugyanakkor az is igaz, hogy mindkét oldal operátorai folytonosak az egyenletes konvergenciára nézve, így /III-2.5/ igaz az f_i -k lineáris kombinációinak egyenletes lezártjában lévő bármely függvényre is.

A Stone-Weierstrass tétel viszont éppen azt állítja, hogy minden folytonos függvény ebben a térben van.

III-2.6 Tétel:

Ha $f \in G_0$, akkor

$$\int_{n-2} (x) B(f, B(f))(x) = (2\pi)^{n-1} \int_0^x \int_0^{y_1} \dots \int_0^{y_{n-2}} f(y_{n-1}) dy_{n-1} \dots dy_1$$

ahol az integrálokat sugárirányban kell venni.

%

III-2.7 Lemma:

Ha $h \in G_0$ és $B(h)=0$, akkor $h=0$.

%

Előző tételünkből következik, hogy $B(h)=0$ esetén:

$$0 = \int_0^x \int_0^{y_1} \dots \int_0^{y_{n-2}} h(y_{n-1}) dy_{n-1} \dots dy_1$$

Mivel h folytonos, itt $n-1$ deriválás után $h=0$ -t kapunk

-OK-

III-2.8 Tétel:

G_0 -n a bumeráng transzformáció bijekció.

Az eddigieket figyelembe véve nyilván elegendő a bumeráng transzformáció szürjektivitását megmutatni.

Legyen $f \in G_0$ és

$$/III-2.9/ \quad g(x) = (2\pi)^{1-n} \left(\frac{d}{dr} \right)^{n-1} \left(f_{n-2} B(f, f) \right)(x)$$

Ekkor III-2.6 tétel miatt

$$f_{n-2}(x) B(f, f)(x) = f_{n-2}(x) B(f, B(g))(x)$$

Ha $x \neq 0$, akkor III-2.7 lemma szerint, ebből $f(x) = B(g)(x)$ következik, de mivel mindkét oldal folytonos, ez $x=0$ -ban is igaz, tehát $f = B(g)$.

-OK-

Az eddigiekben a bumeráng transzformációt úgy vizsgáltuk, hogy a transzformációhoz szükséges gömbök mindig az origón mentek át. Csakhogy az origót végsősoron tetzőlegesen választhatjuk, így kézenfekvő a következő definíció.

A B_p^v operátort a v változóra vonatkozó $P \in \mathbb{R}^n$ pont körüli bumeráng transzformációnak nevezzük, ha

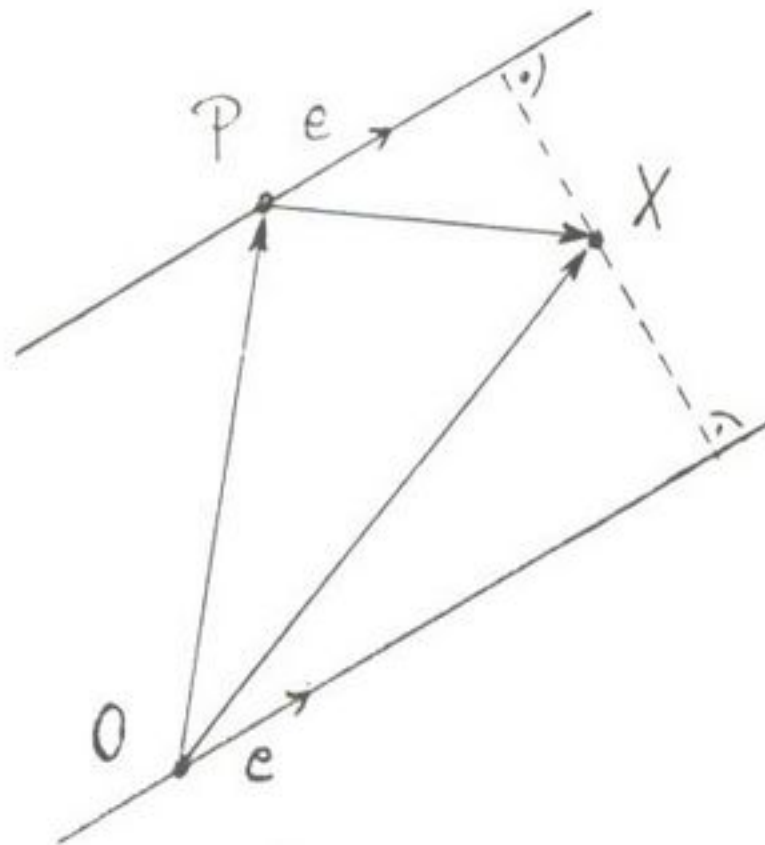
$$B_p^v(f(v))(x) = B^t(f(t+P))(x-P)$$

Nyilván mindaz amit a bumeráng transzformációról eddig megtudtunk, bármely P esetén B_p -re is igaz, ha P -t tekintjük origónak.

Eszerint, ha $f \in G_p$, akkor létezik $g \in G_p$, melyre $f = B_p(g)$. A definíció szerint ennek jelentése:

$$f(x) = B(g(t+P))(x-P) \quad \text{amiből} \quad g(t) = B^{-1}(f(x+P))(t-P)$$

Nézzük most meg, hogyan "működik" a B_P operátor g -n!
Mint azt már a /III.1/ képlet kapcsán megjegyeztük, ilyenkor g -t cylinder függvényekre bontjuk, és ezeket integráljuk, de most nem az origó körül bontjuk fel g -t, hanem a P pont körül, vagyis az $e \in S^{n-1}$ irányhoz tartozó nyélfüggvény g -ből a P -n átmenő és e irányú egyenesre való megszorítással alakul ki.



Ahhoz tehát, hogy megkapjuk f bumeráng inverzét, csak egy olyan h függvényt kell keresnünk, melynek a belőle az origóban nyerhető nyélfüggvényei megegyeznek a g -ből P -ben nyert nyélfüggvényekkel. Ez éppen azt jelenti, mint az a rajzon jól látható, hogy $h_e(x) = g(P + e(x - P), e)$ teljesül

minden $e \in S^{n-1}$ és $x \in \mathbb{R}^n$ esetén. Ez a képlet azonnal adja h explicit alakját, ha $|x| \cdot e$ -t helyettesítünk.

$$h(x) = g\left(P + x \cdot \frac{(x - P, x)}{(x, x)}\right)$$

Mivel ennek csak $x \neq 0$ esetén van értelme legyen definíció szerint $h(0) = 0$. Természetesen h az origót kivéve mindenütt folytonos.

III-2.10 Tétel:

Ha $f \in G_P$ valamely $P \in \mathbb{R}^n$ pontra, akkor a

$$h(x) = \bar{B}^{-1}\left(f(t+P)\right)_{(x-P)} = (2\pi)^{n-1} \left(\frac{d}{dr}\right)^{n-1} \left(\int_{n-2}^t B^t\left(f_1(t)\right) f(t+P)\right) \left(x \frac{(x-P, x)}{(x, x)}\right)$$

függvény, mely az origóban 0, az origó kivételével mindenütt folytonos, és $f = B(h)$.

%

Ezzel tehát mostmár minden folytonos gömbfüggvénynek meg tudjuk határozni egy bumeráng inverzét, csak hogy a képlet, ami erre szolgál, nagyon bonyolult. Most a /III-2.3/ képletre és a III-2.4 tétel harmadik pontjára támaszkodva forunk egy olyan formulát megmutatni, mely bár csak páratlan dimenzióban igaz, de lényegesen egyszerűbb.

III-2.11 Tétel:

Ha $n \in \mathbb{N}$ páratlan és $f \in G_p$ valamely $P \in \mathbb{R}^n$ -re,

akkor a $h(x) = M^{\frac{n-1}{2}} \left(\int_{n-1} (v) f(v+P) \right) \left(x \frac{(x-P, x)}{(x, x)} \right)$

függvény, mely az origóban 0; az origó kivételével mindenütt folytonos, és $f=B(h)$, ahol

$$M(\varphi) = \frac{d}{dr} \left(\frac{\varphi(x)}{2\pi r} \right)$$

Végig nézve újra III-2.10 tétel bizonyítását, világossá válik, hogy a bizonyítás a /III-2.5/ képlet miatt jutott az ottani formulához, így nyilvánvalóan elég látni,

$$f_{n-2}(x) B(f_i)(x) = (2\pi)^k \int_0^x f_1(y_k) \int_0^{y_k} \dots \int_0^{y_2} f_1(y_1) dy_1 \dots dy_k$$

Ez /III-2.3/ és III-2.4 miatt igaz, hiszen k éppen n-1 fele.

III-3 AZ INVERZFORMULA

Természetes gondolat az előző fejezet eredményeit nézve, hogy általánosabb függvényekre úgy próbáljunk inverzet adni, hogy azt mintegy "felépítjük" a gömb-függvényekből. Jó lehetőséget ad erre az alábbi lemma.

III-3.1 Lemma:

Legyen $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g \in S(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ és $f(x) = \int g(x, y) dy$, ahol az integrált az egész téren vesszük.

Ekkor
$$B(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} B^t(g(t, y))(x) dy \quad \%$$

Nyilván alkalmazhatjuk a Fubini tételt, így ez a lemma trivális,

Ennek egyenes következménye, hogy ha $f(x) = \int g(x, y) dy$, -OK-

akkor a
$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (B^t)^{-1}(g(t, y))(x) dy$$

függvény éppen f inverze, vagyis $f = B(h)$. Ez a gondolat adja az ötletet, hogy tekintsük az $f(x) = \int f(y) \delta(x-y) dy$ előállítást, ahol $\delta(x)$ az $\mathbb{R}^n$ -n vett Dirac féle disztribúció. Eszerint elég volna a Dirac féle disztribúció bumeráng inverzet venni, abból már adódna f bumeráng inverze. Az ötlet kivitelezéséhez szükséges az alábbi lemma.

III-3.2 Lemma:

Legyen $v_k \in G_0$ minden k természetes számra olyan kompakt tartójú függvény, mely végtelenszer deriválható és ha k a végtelenbe tart, akkor v_k disztribúció értelemben tart a Dirac féle disztribúcióhoz,

Ekkor a
$$V_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (x \mapsto \frac{|x|^{n-1} v_k(e|x|) \Omega_{n-1}}{2})$$

függvénysorozat $\mathbb{R}$ -n tart a Dirac féle disztribúcióhoz, ahol $e \in S^{n-1}$.

A bizonyításhoz két dolgot kell igazolni V_k -ra:

$$\int_{\mathbb{R}} V_k(t) dt = 1 \quad \text{és} \quad \int_{|y| > k} V_k(t) dt \rightarrow 0 \quad (k > 0)$$

Tekintsük tehát a következő a következő egyenlőséget:

$$\int_{\mathbb{R}} V_k(t) dt = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} t^{n-1} \int_{S^{n-1}} V_k(t\omega) dm(\omega) dt = \frac{1}{2} \int_{|y| \geq k} V_k(y) dy$$

Ez igazolja mindkét fentebbi állításunkat, hiszen v_k az $\mathbb{R}^n$ -n vett Dirac disztribúcióhoz tart, ha k a végtelenbe tart.

-OK-

III-3.3 Tétel:

Ha n páratlan természetes szám és f az $S(\mathbb{R}^n)$ egy eleme, akkor a

$$h(x) = \frac{2}{\Omega_{n-1}} (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \left(\frac{d}{dr} \right)^{n-1} (R(f)(e_x, r)) (|x|)$$

függvény az f egy inverze, vagyis $f=B(h)$, ahol R a Radon operátort jelöli és $e_x = \frac{x}{|x|}$ ha $x \neq 0$. %

Legyen v_k mint az előző lemmában és $T_y^k(x) = f(y) v_k(x-y)$

valamint $t_y^k \in S(\mathbb{R}^n)$, melyre $T_y^k = B(t_y^k)$.

Legyen ezután a t_y^k függvények y szerint $\mathbb{R}^n$ -n vett integrálja a $h_k(x)$ függvény, vagyis

$$h_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} t_y^k(x) dy$$

Ha $k \rightarrow \infty$, akkor $B(h_k) \rightarrow f$, mert $v_k \rightarrow$ valamint:

$$h_k(x) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\frac{d}{dr} \right)^{n-1} \left(\int_{S^{n-1}} B(f, v_k) \right) \left(x \frac{(x-y, x)}{(x, x)} \right) dy$$

Ez azt jelenti, hogy elegendő belátnunk, hogy h_k egyenletesen konvergál a h függvényhez.

A Fubini tétel szerint

$$h_k(x) = (2\pi)^{1-n} \int_{\mathbb{R}} R(f)(e_x, r) \left(\frac{d}{dr}\right)^{n-1} \left(\int_{n-2} B(f, v_k) \right) (x - re_x) dr$$

Helyettesítsünk most r helyébe $|x| - r$ -et, majd integráljunk parciálisan. Ennek eredménye:

$$h_k(x) = (2\pi)^{1-n} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{-d}{dr}\right)^{n-1} \left(R(f)(e_x, |x| - r) \right) (r) \bar{f}_{n-2}(r) B(f, v_k)(re_x) dr$$

Alkalmazzuk most a III-2.11 tétel eredményét integrálos formában azzal a Q operátorral, mely G_0 -n az alábbi módon működik

$$Q(\varphi)(y) = \int_0^{|y|} x \cdot \varphi(x \cdot e_y) dx$$

Ekkor:

$$h_k(x) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{-d}{dr}\right)^{n-1} \left(R(f)(e_x, |x| - r) \right) (r) Q^{\frac{n-1}{2}}(v_k)(re_x) dr$$

Jelölje most W azt az $S(R)$ -n működő operátort, melyre

$$W(\phi)(y) = \int_0^{|y|} \phi(x) dx$$

Alkalmazva előbb formulánkra a parciális integrálást, azt nyerjük, hogy

$$h_k(x) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \int_{\mathbb{R}} W^{\frac{n-1}{2}} \left(\left(\frac{d}{dr}\right)^{n-1} \left(R(f)(e_x, |x| - r) \right) \right) (r) v_k(re_x) dr$$

A III-3.2 lemma jelölését alkalmazva:

$$h_k(x) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \frac{2}{\Omega_{n-1}} \int_{\mathbb{R}} r^{1-n} W^{\frac{n-1}{2}} \left(\left(\frac{d}{dr}\right)^{n-1} \left(R(f)(e_x, |x| - r) \right) \right) (r) v_k(r) dr$$

De a lemma szerint v_k a Dirac féle disztribúcióhoz tart $\mathbb{R}$ -n, így elég belátni, hogy a

$$g(r) = \frac{2 \cdot r^{1-n}}{\Omega_{n-1}} (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} W^{\frac{n-1}{2}} \left(\left(\frac{d}{dr}\right)^{n-1} \left(R(f)(e_x, |x| - r) \right) \right) (r)$$

függvény $S(R)$ -ben van, és $g(0)$ éppen az állításban szereplő formula.

A II-1.6 tételben látjuk, hogy a Radon transzformált $S(\mathbb{R}^n)$ -ben van, ebből pedig nyilvánvaló, hogy g is $S(\mathbb{R})$ -ben van. A bizonyítást a következő lemma teszi tehát teljessé.

-OK-

III-3.4 Lemma:

Ha $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, akkor a

$$k(\lambda) = \lambda^{1-n} W^{\frac{n-1}{2}}(g)(\lambda)$$

függvény is $C^\infty(\mathbb{R})$ -ben van. Természetesen n páratlan természetes szám.

%

A bizonyítást teljes indukcióval végezhetjük el. Nyilvánvalóan teljesül az állítás $n=1$ -re, tekintsünk tehát $n+2$ -re.

Tekintve, hogy

$$\lambda^{1-(n+2)} W^{\frac{(n+2)-1}{2}}(g)(\lambda) = \lambda^{-n} \int_0^\lambda t^{n-1} \frac{W^{\frac{n-1}{2}}(g)(t)}{t^{n-1}} dt$$

a teljes indukciós feltétel szerint elég látni, hogy ha $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ -beli, akkor

$$f(\lambda) = \lambda^{-n} \int_0^\lambda t^{n-1} h(t) dt$$

is $C^\infty(\mathbb{R})$ -ben van.

Egyszerű integrál transzformációval adódik az alábbi:

$$f(\lambda) = \int_0^\lambda t^{n-1} h(t\lambda) dt$$

Márpedig ebből nyilvánvaló a lemma állítása, hiszen a λ szerinti deriválás bevihető az integrálon belültre.

-OK-

Meg kell itt jegyeznünk, hogy a III-3.3 tétel nem ad minden tekintetben teljes inverzet, hiszen az eredményben szereplő függvényt az origóban nem definiálja.

Ennek legfőbb oka persze az, hogy a bizonyításban felhasznált III-2.10 tétel is ilyen volt, de szerepet játszik benne az is, hogy a III-3.3 tétel csak azt állítja, hogy az eredményül kapott függvény bumeráng transzformáltja f .

Márpedig egy függvényt egyetlen pontban megváltoztatva, annak bumeráng transzformáltja nem változik.

III-4 D DIMENZIÓS BUMERÁNG TRANSZFORMÁCIÓ

Jelöljük a d dimenziós bumeráng transzformáltat $\Delta^d(v)$ -vel ahol v valamely az origón átmenő d dimenziós gömb. Némi számolás után láthatjuk, hogy a II-2 fejezetben ajánlott módszer, hogy tudniillik "építsük" fel az $n-1$ dimenziós bumeráng transzformáltat a d dimenziós transzformáltakból, a $d=2$ esetet kivéve nem járható út, mivel az integrálás mértéke nagyon eltérő.

Az inverz meghatározása mégis lehetséges egy egyszerű módszerrel, ha minden $d+1$ dimenziós alteret külön-külön tekintjük. Azt kell ugyanis észrevenni, hogy egy ilyen altéren a d dimenziós bumeráng transzformáció éppen a bumeráng transzformáció, így rajta az inverz minden pontban meghatározható,

Rögzítsünk most egy H d dimenziós al teret R^n -ben. Tetszőleges $x \in R^n$ pontot hozzá véve H -hoz egy $d+1$ dimenziós alteret kapunk, így ha R_d^H -vel jelöljük azt a Radon operátort, melyre $R_d^H(f)(x)$ az $\bar{x}$ -nek az $\overline{x+H}$ hipertéren vett Radon transzformáltja, akkor a III-3 fejezet módszerével nyerjük a III-3.3 tétel analogonját.

III-4.1 Tétel:

Ha d páros természetes szám, $f \in S(R^n)$ és H egy rögzített d dimenziós altér,

akkor a
$$h(x) = \frac{2}{\Omega_d} (2\pi)^{\frac{d}{2}} \left(\frac{d}{dr} \right)^d \left(R_d^H(f)(e_x, r) \right) / (|x|)$$

függvény éppen az f d dimenziós bumeráng inverze.

%

Meg kell jegyezni, hogy helyesebb lett volna a tételben f helyett f_H -t írni, mint egy jelezve, hogy f változik a H változása esetén, ti. arról van szó, hogy egy d dimenziós bumeráng transzformált a d dimenziós origón átmenő gömbökön van értelmezve, és f_H ebből úgy adódik, hogy az x ponthoz az $\overline{x+H}$ -beli origót metsző gömbön felvett értéket rendeljük.

IV. RADON ÉS BUMERÁNG TRANSZFORMÁCIÓ

Ebben a fejezetben a két operátor viszonyát fogjuk vizsgálni, ezzel nyerve új tételeket mindkettőre, továbbá az eddigi formulák teljessé tételére mutatunk egy teljes bizonyítást a Radon transzformált inverzének képzésére. A III-3.3 tétel formulájának bumeráng transzformáltját véve, az alábbiakat kapjuk.

IV.1 Tétel:

Ha n páratlan természetes szám és $f \in S(\mathbb{R}^n)$,

$$\text{akkor } f(x) = \frac{2}{\Omega_{n-1}} (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \mathcal{B} \left(\left(\frac{d}{dr} \right)^{n-1} (R(f)(e_y, r)) (|y|) \right) (x) \quad \%$$

Ez a formula tehát képes a Radon operátort invertálni.

Ha III-4.1 tételből indultunk volna ki, hasonlóan kaptunk volna a d dimenziós Radon operátorra, összhangban a II-2.1 tétellel. A II-1.3 formulát és a II-1.1 lemmát tekintve adódik, hogy

$$f(x) = \frac{2}{c' \Omega_{n-1} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \mathcal{L}^{\frac{n-1}{2}} \left(\hat{f} \right)^{\vee} (x)$$

Összevetve ezt a II-1.9 tétellel azonnal kiszámíthatjuk:

$$c' = (-2)^{\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) / \left(\Omega_{n-1} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right)$$

Tekintsük most a II-1.9 tételt, és alkalmazzuk a fenti ötletet, vagyis vegyük a formula mindkét oldalának Radon transzformáltját.

IV.2 Tétel:

$$\text{Ha } f \in S^+(\mathbb{P}^n), \text{ akkor } f = \frac{1}{c} \square^{\frac{n-1}{2}} \left(\hat{f} \right)^{\vee} \text{ ahol } c = (-4\pi)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \quad \%$$

Itt az a fő probléma, hogy $S^+(\mathbb{R}^n)$ olyan kell legyen, mely

része a Radon operátor képterének, hisz másként a Radon operátort nem lehetne elhagyni. Erre vonatkozóan tekint-
sük a következő lemmát.

IV.3 Lemma:

Az $f \rightarrow \hat{f}$ és $F \rightarrow \check{F}$ transzformációk $S^+(R^n)$ és $S^+(P^n)$
közt adnak bijekciót, ahol

$$S^+(R^n) = \left\{ f \in S(R^n) : \forall i \in N\text{-re} \int_{R^n} f(x) f_i(x) dx = 0 \right\}$$

$$S^+(P^n) = \left\{ F \in S(P^n) : \forall i \in N\text{-re} \int_{P^n} F(\omega, r) r^i dr = 0 \right\} \quad \%$$

A lemma bizonyítását most nem végezzük el, mert hosszú
és számunkra nem fontos, de az (1)-ben megtalálható.
Az ígért inverzformula bizonyításához előbb vezessük
be a Λ operátort az $S(P^n)$ -en. Ha $F \in S(P^n)$, akkor

$$(\Lambda F)(\omega, p) = \begin{cases} \left(\frac{d}{dp} \right)^{n-1} F(\omega, p) & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ \frac{i}{\pi} \int_{R^n} \left(\frac{d}{dp} \right)^{n-1} F(\omega, t) \frac{dt}{t-p} & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$$

IV.4 Tétel:

Ha f és c ugyanaz mint II-1.9 tételben, akkor $cf = (\Lambda \hat{f})^\vee$.

Tekintsük a II-1.4 tételt és invertáljuk a Fourier
transzformáltat az ismert módon úgy, hogy polár koordi-
nátákat használunk: %

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty \int_{R^n} \hat{f}(\omega, p) e^{-isp} dp s^{n-1} e^{is(x, \omega)} ds d\omega$$

Ebből nyilvánvaló, hogy

$$f(x) = \frac{1}{2} (2\pi)^{-n} \int_{S^{n-1}} \int_{R^n} \int_{R^n} \hat{f}(\omega, p) e^{-isp} dp |s|^{n-1} e^{is(x, \omega)} ds d\omega$$

Ha n páratlan, akkor az abszolút-érték elhagyható és s^{n-1}
bevihető a belső integrálba, ahol viszont a parciális

Integrállással számolva adódik az alábbi.

$$f(x) = \frac{1}{2} (2\pi)^{-n} \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{-id}{dp} \right)^{n-1} f(w, p) e^{-isp} dp e^{is(x, w)} ds dw$$

Ebből pedig az $\mathbb{R}$ -n vett Fourier transzformáció inverze alapján kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{1}{2} (2\pi)^{1-n} \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{-id}{dp} \right)^{n-1} (f(w, p))_{((x, w))} dw$$

ami éppen az állítás. Ha n páros, akkor hasonló lépésekkel a következő formulát kapjuk.

$$f(x) = \frac{1}{2} (2\pi)^{-n} \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{-id}{dp} \right)^{n-1} f(w, p) e^{-isp} dp \operatorname{sgn}(s) e^{is(x, w)} ds dw$$

ahol $\operatorname{sgn}(s)$ a nullában 1, egyébként pedig s előjele. Tekintve a bizonyítandó formulát, világos, hogy elég a következőt bizonyítani.

$$\tilde{F}(s) \cdot \operatorname{sgn}(s) = \left(\frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{R}} F(p) \frac{dp}{p-t} \right)^{\sim}(s)$$

Ez definíció szerint azonos azzal az állítással, hogy a Cauchy féle főérték disztribúció Fourier transzformáltja $-i\pi \operatorname{sgn}(s)$, ahol i a komplex egység. Ennek az állításnak a bizonyítását megtalálhatjuk (4)-ben, mi most egyszerű integrál transzformációval bizonyítjuk a fentebbi formulát.

$$\begin{aligned} \frac{i}{\pi} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \frac{F(p)}{p-t} dp e^{-ist} dt &= \frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{F(p+t)}{p} dp e^{-ist} dt = \\ &= \frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} F(t) e^{-ist} dt \frac{e^{isp}}{p} dp = \frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{F}(s) \frac{e^{isp}}{p} dp = \\ &= \tilde{F}(s) \operatorname{sgn}(s) \frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{isp}}{p} dp = \tilde{F}(s) \operatorname{sgn}(s) \end{aligned}$$

Ezzel beláttuk a tételt, mellyel mostmár a bumeráng transzformációt is épp úgy képesek vagyunk invertálni, mint a Radon transzformáltat.

V. ALKALMAZÁSOK

Eredményeink igen jól alkalmazhatók a parciális differenciál egyenletek területén, amire jó példa a következő tétel.

V.1 Tétel:

Ha a D differenciál operátor olyan, melynek megszorítása az $e \in S^{n-1}$ normálisú síkhullámokra nem azonosan 0 és $f \in S(R^n)$, akkor a $Du=f$ egyenletnek az

$$u = \frac{1}{2} (2\pi i)^{\frac{n-1}{2}} \int_{S^{n-1}} u_w dw$$

függvény megoldása, ahol u_e a $Dv = \hat{f}(e, (\cdot, e))$ egyenletnek olyan megoldása, mely e -től símán függ.

%

Azt, hogy u_e a feltételeknek megfelelően választható, 1963-ban Tréves bizonyította. Ekkor viszont a II-1.9 tétel szerint

$$Du = \frac{1}{2} (2\pi i)^{\frac{n-1}{2}} \int_{S^{n-1}} Du_w dw = f$$

-OK-

Mivel a $Dv = \hat{f}(e, (\cdot, e))$ egyenlet tulajdonképpen egy változós, ezzel a parciális differenciál egyenletek egy részét sikerült visszavezetni az egy változós egyenletekre. Ha a III-3.3 tételt nézzük, abban is észre vehetjük egy másként igen bonyolult differenciál egyenlet megoldását.

V.2 Tétel:

Ha n páratlan természetes szám és $f \in S(R^n)$, akkor az $f = D^{n-1}u$ egyenletnek, ahol D a sugár szerinti differenciál operátor, az

$$u = \frac{2 \cdot (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\Omega_{n-1}} R(B(f))|_{(e_x, |x|)}$$

függvény egy megoldása.

%

Igazi gyakorlati alkalmazásra ad lehetőséget egy orvosi vizsgálat esete, amikor a páciens testét vékony Röntgen sugár nyalábokkal pásztázzák végig daganatok után kutatva.

Tegyük fel, hogy a beteg testének sűrűségét egy $x \in \mathbb{R}^3$ pontban az f függvény adja meg. Az orvosok jól tudják, hogy a daganatoknál a szövetek sűrűsége ugrásszerűen nagyobb, mint az egészséges szöveteknél, ezért számukra éppen elég lenne ezt az f függvényt ismerni.

1963-ban egy Cormack nevű fizikus megmutatta, hogy ha a Röntgen sugár intenzitása I_0 és a testen való áthaladás után I , akkor

$$\log(I_0/I) = \int_{\gamma} f(x) d\mu(x)$$

ahol γ az az egyenes, melynek mentén a sugárnyaláb haladt. Mint látjuk ez éppen az f egy dimenziós Radon transzformáltja, amiből a II-2.1 tétel segítségével visszakaphatjuk f -et.

U T Ó S Z Ó

A dolgozatot 1986-ban készítettem a JATE Geometria Tanszékén.

Külön köszönet illeti Dr. Szabó Zoltán docenst, aki szakvezetői minőségén túl is segített gondolataim kibontakoztatásában és a téma irodalmának egyre jobb megismerésében.

Kurusa Árpád

1986. április 26.

JELÖLÉSEK

R^n	n dimenziós valós Euklideszi tér
N	természetes számok halmaza
P_d^n	R^n -beli d dimenziós hiperalterek halmaza
P^n	R^n hipersíkjainak halmaza
$(.,.,.)$	mindig az adott tér belsőszorzata
S^k	R^n -beli k dimenziós egységgömb
Ω_d	S^d felszíne
e, ω	egységvektor
G_P	$P \in R^n$ körüli folytonos gömbfüggvények tere
r	origótól való távolság
$S(R^n)$	$f \in S(R^n)$ akkor és csak akkor, ha $f \in C^\infty(R^n)$ és minden P polinomra:
	$\forall m \in N \quad \sup_{x \in R^n} x ^m P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f(x) < \infty$
L	Laplace operátor
$\square$	$F: S^{n-1} \times R \longrightarrow R$ esetén $\square F(e, p) = \frac{\partial^2}{\partial p^2} F(e, p)$
$\wedge$	Radon operátor
$\vee$	Radon operátor duálisa
R_d	d dimenziós Radon operátor
B	bumeráng operátor
B^{-1}	bumeráng transzformált egy őst képezi
Δ^d	d dimenziós bumeráng operátor
m	gömb felszínének mértéke

IRODALOM

- (1) S. Helgason: Groups and geometric analysis
(1984 Academic Press Inc.)
- (2) R. Cristescu - G. Marinescu:
Bevezetés a disztribúció elméletbe
és alkalmazásaiba
(1969 Műszaki Könyvkiadó)
- (3) P. R. Halmos: Mértékelmélet
(1984 Gondolat Könyvkiadó)