

KURUSA ÁRPÁD

A RADON-TRANSZFORMÁCIÓ

Kandidátusi értekezés

Szeged, 1990. november.

Az eredeti dokumentum T^3 szövegszerkesztővel készült. Azóta nem csak a T^3 szerkesztő tűnt el, de a forrásfájlok is elvesztek. Jelen dokumentum az eredeti újra gépelésével létrejött $\text{\TeX}$ forrásfájlból származik, melyben a szöveghűségén kívül nem volt cél a formázás és oldalszámozás megőrzése, így ezekben jelentősen eltér az eredetitől, mely viii+75 oldal terjedelmű. *K.Á. 2009.03.25.*

Tartalom

Bevezetés	i
Klasszikus Radon-transzformációk	1
1.1. Inverz formulák	3
1.2. Képtér-jellemzés	10
Radon-transzformációk euklidészi téren	19
2.1. Eltolás-invariáns Radon-transzformációk	21
2.2. Invertálható Radon-transzformációk alapgörbéi	27
Radon-transzformációk forgás sokaságokon	37
3.1. Invertálhatóság forgás sokaságokon	39
3.2. Konstans görbületű terek	46
Irodalomjegyzék	57

Bevezetés

Nehéz megmondani mikor és kivel kezdődött a ma már Radon transzformációknak nevezett függvény transzformációk kutatása. Amennyire az irodalom alapján megállapítható [50], az első matematikus P. Funk lehetett.

Funk 1916-os cikkében [25] jutott ahhoz a problémához, hogy vajon hogyan lehet egy a gömbön adott szimmetrikus függvényt meghatározni a főkörökön vett integráljaiból. Egy évvel később J. Radon vizsgált hasonló kérdést a síkon és a térben [89]. Konkrétan bebizonyította, hogy egy kompakt tartójú sima függvény meghatározható az egyeneseken illetve a síkokon vett integráljai alapján.

Ezután majd 20 évig szinte semmi nem történt a területen és azután is majdnem 1960-ig az egyetlen említésre méltó eredményt F. John 1938-as cikke [61] jelentette. Ebben F. John a négyváltozós ultrahiperbolikus differenciálegyenlet megoldását adja a Radon transzformáció segítségével. Amint ez a cikke is mutatja F. John differenciálegyenletekre koncentrált munkásságában is csak a segédeszköz szerepét töltötte be az általa most már Radon transzformációnak nevezett függvénytranszformáció.

1960-ban azonban alapvetően változott a helyzet és attól kezdve napjainkig is igen erős kutatás alatt áll a téma. Kiderült, hogy igen sok alkalmazása van a Radon által vizsgált transzformációnak a gyakorlatban épp úgy ahogy az elméletben.

A gyakorlati alkalmazhatóság legelőször a csillagászatban merült fel [8], de nem sokkal később A.M. Cormack cikkében [10] az orvosi tomográf ötlete is megjelenik. Ennek lényege az az összefüggés, hogy ha egy vékony röntgen-sugarat egy f sűrűségfüggvénnyel rendelkező testen keresztül engedünk egy ξ egyenes mentén, akkor

$$\log(I_0/I) = \int_{\xi} f(x) dx,$$

ahol dx az ívhossz mérték a ξ egyenesen, I_0 a sugár eredeti intenzitása és I a sugár kilépéskori intenzitása. Ez azt jelenti, hogy minden ξ egyenesen megmérve a $\log(I_0/I)$ értéket, f minden egyenesmenti integrálja ismertté válik, melyből viszont Radon eredménye miatt f is visszanyerhető. Ez lehetőséget ad műtéti beavatkozás nélkül a daganatok észlelésére az emberi testben. Természetesen a valóságban itt egy további approximációs lépés is szükséges, hiszen $\log(I_0/I)$ nyilván csak közelítőleg ismerhető meg [20—24,32,44,74,77,83,96,97,99,105,106,108]. Szegeden is folyik ilyen jellegű kutatás Dr. Kuba Attila vezetésével. Hasonló problémák

vetődnek fel manapság a modern radarok és más kifinomult mérőeszközök fejlesztői előtt is [1,19].

A mi szempontunkból, habár sokszor termékenynek bizonyult a két vonulat összetalálkozása, fontosabb a Radon transzformáció elméleti alkalmazhatósága. Mivel ezekhez már némileg jobban kellene ismerni a Radon transzformációt, a részletesebb ismertetés helyett csak felsoroljuk ezeket, utalva a megfelelő irodalomra és a további fejezetekben található leírásokra.

A Radon által vizsgált transzformáció alkalmazhatóságát a parciális differenciálegyenletekre G. Herglotz vette észre 1931-ben [54]. Kiderült ugyanis, hogy a „rendesebb” parciális differenciálegyenleteket a transzformáció egyváltozós differenciálegyenletekbe viszi át [48,50,52]. Szép példa erre a Cauchy probléma

$$\Delta u = \partial_2^2 u \quad u(x, 0) = 0 \quad \partial_2 u(x, 0) = f(x)$$

a [62,82].

Csoportelméleti módszerek alkalmazásával erőteljesen általánosítva a Radon transzformációt, S. Helgason olyan Radon transzformációt kapott egészen általános tereken, melynek segítségével a differenciálegyenleteket sokaságokon lehet tanulmányozni [46—48]. Szimmetrikus tereken is éppen ezen transzformációval sikerült bizonyítani az invariáns differenciálegyenletek megoldhatóságát a C^∞ függvény-osztályon [48,49].

Olyan híres elméletekben, mint például a Yang—Mills elmélet, is szerepet játszik a Radon transzformáció, és éppen az ultrahiperbolikus differenciálegyenlet általános megoldásával, melyet az első fejezet második szakaszában taglalunk [2]. Végül meg kell említenünk Hilbert negyedik problémáját, melynek Szabó Zoltán által adott megoldásában igen nagy szerepet játszik a Radon transzformáció vagy pontosabban a duálisa [102].

Mivel az elmúlt harminc évben az elmélet fejlődése rendkívül sokrétű és szerteágazó lett, részletesebb leírása helyett utalunk Gelfand és Helgason könyveire [27,28,50,52] és [75,96,100,112] cikkekre. Ugyanakkor meg kell jegyezzük, hogy bár a gyakorlati problémák továbbra is megkövetelik az egyébként nagyon jelentős konkrét problémák vizsgálatát [22,44,99], az elmúlt néhány év eredményei alapján [37,42,81] úgy tűnik, a fejlődés az egységesedés irányába halad.

Dolgozatunkban szemelvényeket közlünk a kutatások néhány irányáról, főleg saját eredményeinkre támaszkodva [63—70], miközben a kérdéskörök jobb megvilágítása érdekében néhány más szerző eredményeit is felhasználjuk, illetve megemlítjük. Mielőtt azonban részletesen ismertetnénk a dolgozat felépítését, teszünk néhány általános érvényű megállapítást.

Mindenekelőtt nyilvánvaló, hogy egy Radon transzformáció vizsgálatakor a legfontosabb kérdés az invertálhatóság [46, I/1]. Ezzel közvetlen kapcsolatban

állnak azok a kérdések, melyek tisztázzák egyes függvénytereken a transzformáció működését, vagyis a magtér és a képtér mibenlétét [50,58,65,68,69,85,I/2]. Ezek a csaknem tisztán analízisbeli kérdések, a kutatások fényében úgy tűnik, szoros kapcsolatban vannak az úgynevezett tartótételekkel, melyek durván szólva azt állítják, hogy az f függvény és az Rf Radon transzformáltja ugyanott nem nullák. A tartótételek azonban már erős geometriai jelentést is hordoznak, amint azt látni fogjuk a II.—III. fejezetekben. Míg egy-egy Radon transzformáció megismeréséhez ezek a kérdések a legtermészetesebbek, addig egy egészen más irányú megközelítést kíván a következő áttekintő, általános jellegű kérdés, mely inkább geometriai, legalábbis abban az értelemben, hogy a Radon transzformációk többnyire geometriai konstrukciók eredményei.

Legyen $\mathcal{P}$ egy (pont-) halmaz, f ezen egy valós függvény, $\mathcal{E}$ a $\mathcal{P}$ részhalmazainak egy (egyenest-) halmaza és végül $\mathcal{E}$ minden ε elemén legyen μ_ε egy ték. Ekkor f Radon transzformáltja az az Rf valós függvény $\mathcal{E}$ -n, melyre

$$Rf(\varepsilon) = \int_{\varepsilon} f d\mu_\varepsilon.$$

A fentebb említett kérdés mármost így hangzik: Milyen feltételek teljesülése szükséges a $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mu)$ rendszerre, hogy az R Radon transzformáció invertálható legyen? [6,7,67,78, II. fejezet]

Az első fejezetben a klasszikus Radon transzformációval foglalkozunk. A klasszikus (d, n) -dimenziós Radon transzformáció, egy az n -dimenziós euklideszi téren értelmezett elég jó [99] f valós függvényhez a d -dimenziós hipersíkok halmazán $(G(d, n))$ a Grassmann sokaság értelmezett $R_d^n f$ valós függvényt rendel úgy, hogy minden d -dimenziós $\xi \in G(d, n)$ hipersík esetén

$$R_d^n f(\xi) = \int_{\xi} f(x) dx,$$

ahol dx a ξ természetes felületmértéke. A fejezet első szakaszában inverz formulákat fogunk bizonyítani $d = n - 1$ esetre. Ezek az inverz formulák, és a módszer ahogy nyerjük őket úgy tűnik alkalmasabbak a gyakorlati felhasználásra mint az eddigiek, mivel eleve egyszerű, jól modellezhető függvényekkel való approximáción alapulnak. A második szakaszban a $d < n - 1$ esettel foglalkozunk. Parciális differenciálegyenlet-rendszerrel jellemezzük az R_d^n transzformáció képterét, kimutatva, hogy az úgynevezett Helgason féle momentum feltétel ekvivalens a mi differenciálegyenlet-rendszerünkkel. Ez több nyitott kérdésre is választ ad. Egyrészt megkapjuk belőle a négyváltozós ultrahiperbolikus parciális differenciálegyenlet

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2 - \partial_3^2 - \partial_4^2)u = 0$$

általános megoldását, másrészt tisztázódik, hogy a korábban csak erős analitikus eszközökkel, mint például a parciális Fourier transzformációval [91], bizonyított differenciálegyenletes jellemzések (ezek rendkívül bonyolultak és többnyire hiányosak voltak [29, 38]) igazából geometriai tartalmat fednek (a napokban megjelent F.B. Gonzalez cikk csoportelméleti módszerekkel nyert negyedrendű differenciálegyenlettel jellemzi a képteret [35]).

A második fejezetben a klasszikus Radon transzformáció olyan általánosításait vizsgáljuk, melyek még mindig az euklideszi tér keretein belül vannak. Az első szakaszban az úgynevezett általánosított Radon transzformációval foglalkozunk. Ezt az $(n-1, n)$ -dimenziós Radon transzformációból származtatjuk úgy, hogy a ξ hipersíkon nem a szokásos felszín mértéket vesszük, hanem egy μ_ξ mértéket, vagyis az

$$R_\mu f(\xi) = \int_\xi f(x) d\mu_\xi(x)$$

az általánosított Radon transzformáció. Bebizonyítjuk, hogy egy eltolás-invariáns általánosított Radon transzformáció, vagyis amelyre $R_\mu \mathcal{T}f = \mathcal{T}R_\mu f$ minden $\mathcal{T}$ eltolás esetén, nem más mint az úgynevezett exponenciális Radon transzformáció [106] egy általánosítása, mely egyébként igen fontos a ‘single-photon emission’ tomográf technikában [77, 96]. Inverz formulát adunk és igazoljuk a tartótételt, mely szerint, ha $R_\mu f(\xi) = 0$ minden olyan ξ hipersíkra mely távolabb van az origótól mint s , akkor f tartója az s sugarú gömbön belül van. Megjegyezzük, hogy a klasszikus Radon transzformáció is eltolás-invariáns. A második szakaszban geometriai szempontból vizsgálunk egy Radon transzformáció-osztályt. Legyen $\mathcal{S}$ egy Jordan görbe a síkon, mely átmegy az origón és $\mathcal{S}$ ennek egy pontja. Ekkor nyilván minden P ponthoz a síkon pontosan egy az origót fixen hagyó $\mathcal{H}_P$ hasonlósága létezik a síknak, melyre $P = \mathcal{H}_P \mathcal{S}$. Minden $\mathcal{S}$ görbéhez rendeljük hozzá azt az $R_\mathcal{S}$ Radon transzformációt, melyre

$$R_\mathcal{S} f(P) = \int_{\mathcal{H}_P \mathcal{S}} f(x) dx$$

ahol dx a $\mathcal{H}_P \mathcal{S}$ ívhosszmértéke. Az $\mathcal{S}$ görbét e Radon transzformáció alapgörbéjének nevezzük. Bebizonyítjuk, hogy az $R_\mathcal{S}$ Radon transzformáció akkor és csak akkor invertálható, ha az $\mathcal{S}$ alapgörbének van görbülete (ez nulla is lehet) az origótól legtávolabbi pontjában. Inverzió alkalmazásával hasonló tétel nyerhető olyan görbékre, melyek a ‘végtelen távoli pontot’ tartalmazzák [67]. Ez alátámasztja azt a sejtést, hogy ha egy olyan fóliázás van a síkon, mely minden ponton minden irányban áthalad, akkor egy függvényt meghatároznak összes integráljai ennek görbéin [6].

A harmadik fejezetben az absztrakt forgás sokaságokon tekintjük az 1-kodimenziós alsokaságokon integráló Radon transzformációt. Ez természetes általánosítása a klasszikus $(n-1, n)$ -dimenziós Radon transzformációnak. Az invertálhatóságot a tartótétel bizonyításával igazoljuk az első szakaszban [70]. A második szakaszban a konstans görbületű terekre szorítkozva folytatjuk az első szakaszban megkezdett utat. Jellemezzük a transzformáció kép- és magterét és inverz formulákat adunk [68,69]. Az utolsó zárt inverz formula különösen érdekes nem csak azért, mert formailag teljesen analóg a három $(-1, 0, +1)$ görbületű konstans görbületű téren, hanem mert egy 30 éve létező problémát old meg. Az euklideszi téren ugyanis a klasszikus $(n-1, n)$ -dimenziós Radon transzformáció inverz operátorának jellege, amint az leginkább talán F. John inverz formuláiból tűnik ki [62], erősen függ a dimenziótól. Páros dimenzióban az interv operátor globális, tartalmazza a Cauchy-féle főérték disztribúciót, páratlan dimenzióban pedig lokális, kizárólag differenciál operátorokat tartalmaz. Mióta 1965-ben Helgason [46] vizsgálta a Radon transzformációt kétponthomogén tereken, azóta kérdés a párosdimenziós inverz-operátor jellege, mivel Helgason módszere csak páratlan dimenziós konstant görbületű tereken adott inverz formulát. Az általunk adott inverz formulák tisztázzák a kérdést, bizonyítva, hogy páratlan dimenzióban lokális, páros dimenzióban pedig globális az inverz formula, mely éppen a Cauchy-féle főérték disztribúció egy természetes változatát tartalmazza.

A kicsit talán hosszúra nyúlt bevezetést végül azzal szeretném zárni, hogy köszönetemet fejezem ki szakvezetőmnnek Dr. Szabó Zoltánnak, aki elindított ebben a témában. Köszönet illeti Dr. Nagy Pétert is, aki munkám folyamán mindvégig támogatott. Ugyancsak szeretném megköszönni a JATE Bolyai Intézet összes dolgozójának a barátságos légkört, mellyel körülvettek.

Klasszikus Radon-transzformációk

Ennek a fejezetnek mindkét szakaszában a klasszikus (d, n) -dimenziós Radon transzformációkkal foglalkozunk. Ha a tér dimenziója egyértelmű, akkor a terminológia egyszerűsítése érdekében egyszerűen d -sík transzformációnak fogjuk nevezni [29,35].

Definíció. Legyen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ minden d -dimenziós hipersíkon integrálható függvény és $G(d, n)$ ezen hipersíkok Grassmann sokasága. Ekkor f (d, n) -dimenziós Radon transzformáltja az az $R_d^n f: G(d, n) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyre

$$R_d^n f(\xi) = \int_{\xi} f(x) dx,$$

ahol dx a $\xi \in G(d, n)$ természetes felületmértéke.

Megjegyezzük, hogy bár a definíció elég általános annak tekintetében, hogy milyen függvényterén tekintjük a transzformációt, azért ezt mégsem tehetjük teljesen szabadon. Minden problémát elkerülendő, ebben a fejezetben, bár nagyobb általánosságot is megengedhetnénk, a Schwartz-féle próbafüggvények $S(\mathbb{R}^n)$ terén fogunk dolgozni [16], sőt néha ezek közül is csak a kompakt tartójúak $D(\mathbb{R}^n)$ terén. Az általánosabb függvénytereken esetleg fellépő problémákra jó példa található [97,99]-ben: az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|^{-n/2}}{\log |x|}, & |x| \geq 2, \\ 0, & |x| < 2, \end{cases}$$

függvény ugyanis nem integrálható az $n/2$ -él nagyobb dimenziójú hipersíkokon, bár ő maga az $L^2(\mathbb{R}^n)$ tér eleme.

Fontos szerepet játszik R_d^n tanulmányozásában a duális transzformáció, mely maga is egyfajta Radon transzformáció [12].

Definíció. Legyen $F: G(d, n) \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, mely minden $x \in \mathbb{R}^n$ pont esetén integrálható az x ponton áthaladó d -dimenziós hipersíkok X halmazán arra az egyértelmű μ mértékre nézve, mely invariáns az x körüli forgásokra és $\mu(X) = 1$. (Ilyen mérték létét a Haar tétel garantálja.) Ekkor az F (d, n) -dimenziós duális Radon transzformáltja az az $\tilde{R}_d^n F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyre

$$\tilde{R}_d^n F(x) = \int_{\mathcal{X}} F(\xi) d\mu.$$

Az így definiált Radon transzformáció-osztály bizonyos értelemben a legegyszerűbb és ugyanakkor talán a legfontosabb is, így nem meglepő, hogy temérdek szempontból vizsgálva számtalan eredmény született vele kapcsolatban [50]. Ezek közül két nagy vonult emelkedik ki.

Az egyik ilyen kiemelkedő kérdéskör a transzformáció invertálhatósága [13, 50]. Itt is két út lehetséges, attól függően, hogy a balinverzet ('back-projection') vagy a jobbinverzet ('pre-image') határozzuk meg. Helgason [50] és Solmon [98] eredményei a $d = n - 1$ esetre azonban mégis ezek egyezését mutatja:

$$f = (-4\pi)^{\frac{1-n}{2}} \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(n/2)} L^{\frac{1-n}{2}} \tilde{R} R f \quad \text{ha} \quad f \in S(\mathbb{R}^n), \quad [50],$$

$$F = (4\pi)^{\frac{1-n}{2}} \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(n/2)} R \Lambda^{n-1} \tilde{R} F \quad \text{ha} \quad F \in S(G(d, n)), \quad [98],$$

ahol L a Laplace operátor (törthatványai a Riesz potenciállal vannak értelmezve), Γ a gamma-függvény és Λ a Calderon–Zygmund operátor. Mivel $-L = \Lambda^2$ [9, 98], a bal- és jobbinverz operátor megegyezik.

Az első szakaszban két olyan balinverz („back-projection”) formulát bizonyítunk, melyek nem tartalmazznak a klasszikus formulákhoz hasonló szingularitást, és azokkal ellentétben a dimenziótól függetlenül egységes alakúak. Mivel a bizonyítás egyszerű „bumm” függvényekkel való approximáción alapul, mint eljárás, hasznosnak bizonyulhat a gyakorlatban is.

A másik kiemelkedő témakör a d -sík transzformáció képterének vizsgálata [29, 38]. Ennek jelentősége több szempontból nagy. Világos, hogy a d -sík transzformáció megszorítva egy $(d + 1)$ -dimenziós alterre a fenti értelmű Radon transzformációt ad, így ott invertálható az előbbi formulák segítségével. Egy ilyen invertálás azonban esetleg különböző eredményeket adhat más más alterek esetén, ezért tudni kell, hogy az invertálandó F függvény valóban a képtér eleme-e. Ugyanakkor egészen más fontos eredményeket is várhatunk egy ilyen jellemzéstől, ami már F. John [61] cikkéből is kitűnik. Ebben a cikkben F. John a $d = 1$, $n = 3$

esetet vizsgálva kapta meg a négyváltozós ultrahiperbolikus differenciálegyenlet megoldását.

Míg F. John eredménye [61] rendkívül bonyolult geometriai és differenciálegyenletes megfontolások következménye volt, addig azok akik általánosítani igyekeztek tételét, az analízis rendkívül erős eszközeiben bíztak [29,38,42,91]. Ezek közül kiemelkedik Guillemin és Sternberg cikke [42], melyben megmutatják, hogy majdnem minden Radontranszformáció képtere jellemezhető parciális differenciálegyenletrendszer segítségével, bár ezek konkrét alakját nyilván nem adják meg.

Természetesen más jellegű képtér-jellemzések is születtek, melyek közül a Helgason-féle momentum feltétel [50] bizonyult a legjelentősebbnek. Sokáig a kétféle képtér-jellemzés függetlennek tűnt, mígnem Grinberg [38] a két feltételt együtt alkalmazta a jellemzésre, bár a köztük lévő kapcsolat felfedezése nélkül.

A második szakaszban bebizonyítjuk a két feltétel ekvivalenciáját a $d < n - 1$ esetben, továbbá egy igen egyszerű bizonyítást adjuk F. John [61]-beli tételének. Mindezt egyszerű geometriai eszközök alkalmazásával.

1.1. Inverz formulák

Ebben a szakaszban az $(n-1, n)$ -dimenziós Radon transzformációt egyszerűen R fogja jelölni. Jelölje továbbá $\mathbb{P}^n$ az $(n-1)$ -dimenziós hipersíkok halmazát $\mathbb{R}^n$ -ben.

Nyilván minden $\xi \in \mathbb{P}^n$ hipersík jellemezhető egy $\omega \in S^{n-1}$ egységvektorral és egy p valós számmal úgy, éhogy $\xi = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \omega \rangle = p\}$. Ez egy paraméterezését adja a hipersíkok halmazának az $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ hengeren. A továbbiakban ennek a paraméterezésnek az értelmében azonosítjuk a hipersíkok $\mathbb{P}^n$ halmazán értelmezett függvényeket az $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ hengeren értelmezett függvényekkel, melyekre $\phi(\omega, p) = \phi(-\omega, -p) = \phi(\xi)$.

Amint azt Radon [89] és John [62] bebizonyította, minden C^∞ kompkt tartójú f függvény rekonstruálható Rf -ből, mégpedig ha L jelöli Laplace operátort $\mathbb{R}^n$ -en és $d\omega$ az S^{n-1} felületelemét, akkor az

$$(1) \quad f(x) = 2(2\pi)^{1-n}(-L)^{(n-1)/2} \int_{S^{n-1}} Rf(\omega, \langle \omega, x \rangle) d\omega \quad (\text{ha } n \text{ páratlan})$$

$$(2) \quad f(x) = -(2\pi)^{-n}(-L)^{(n-2)/2} \int_{S^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_2 Rf(\omega, p) \frac{dp}{p - \langle \omega, x \rangle} d\omega \quad (\text{ha } n \text{ páros})$$

képletekkel, ahol a (2) formulában a Cauchy-féle főérték-disztribúció jelenik meg.

Ezeket a formulákat később igen sokan sokféle feltétel mellett bizonyították [27,46,52,75,97], de ezek a bizonyítások többnyire kevésbé geometriaiak voltak és amint (1) és (2) is, a kapott inverz formulák páros és páratlan dimenzióban különböztek. Deans [13]-ban egységes inverz formulát kapott, de az sorfejtéses, nem olyan explicit mint (1) és (2). Meg kell jegyeznünk ugyanakkor, hogy ez leginkább annak köszönhető, hogy a két különböző paritású dimenzióban az inverz operátor jellege különbözik. Páratlan dimenzióban lokális, páros dimenzióban pedig globális.

Ebben a szakaszban explicit inverz formulákat fogunk bizonyítani elemi geometriai módszerrel, melyek egyszerre érvényesek páratlan és páros dimenzióban. Ámbár az így nyert formulák az 1.- és 2. tételekben bonyolultabbnak tűnnek mint a klasszikus (1) és (2), mégis előnyösebbek lehetnek a numerikus eljárásokban, mert felépítésükben eleve csak jól kezelhető egyszerű ‘bumm’ függvényeket használunk. Az 1. tételbeli inverz formula pedig nem tartalmaz a (2)-ben szereplőhöz hasonló szingularitást.

A Radon transzformáció duálisa helyett, könnyebb kezelhetősége miatt, a Szabó Zoltán által bevezetett [102] bumeráng transzformációt fogjuk használni. Könnyen látható, a hipersíkokhoz az origóhoz legközelebbi pontjukat rendelve, hogy ez a két transzformáció valójában csak az értelmezés terében tér el. Legyen f valós függvény az $\mathbb{R}^n$ téren. Az f függvény bumeráng transzformáltja az az $\mathbb{R}^n$ -en értelmezett Bf függvény, melyre

$$Bf(x) = \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} f(\omega \langle \omega, x \rangle) d\omega,$$

ahol $d\omega$ a felület mérték S^{n-1} -on. Legyen $e_x = x/|x|$, ahol $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

1. Tétel. *Ha $f \in S(\mathbb{R}^n)$, $2 \leq n \in \mathbb{N}$ és*

$$\begin{aligned} h(x) = C \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^\infty (r^2 - 1)^{(n-3)/2} \times \\ \times \left(\left(\frac{d}{dr} \right)^{n-1} Rf(e_x, |x| + r\varepsilon) + \left(\frac{d}{dr} \right)^{n-1} Rf(e_x, |x| - r\varepsilon) \right) dr, \end{aligned}$$

ahol $C = (-1)^{n-1} 2\Gamma(n/2)(\pi^{1/2}/\Gamma((n-1)/2))(2\pi)^n$. akkor $f = Bh$.

2. Tétel. Ha $f \in S(\mathbb{R}^n)$, $2 \leq n \in \mathbb{N}$ és

$$h(x) = C \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|r| > \varepsilon} r^{n-2} \left(\frac{d}{r dr} \right)^{n-1} (Rf(e_x, |x| - r)) dr,$$

ahol $C = (-1)^{n-1} 2\Gamma(n/2) \pi^{1/2} / \Gamma((n-1)/2) (2\pi)^n$, akkor $f = Bh$.

Megjegyezzük, hogy mint utóbb kiderült, a 2. tétel parciális integrálással megkapható az (1) és (2) formulákból felhasználva [28, 11 o. (12)]-öt, az 1. tételből pedig kissé komolyabb analitikus arsenál segítségével (1) és (2) bizonyítható az $(r^2 - 1)^{(n-3)/2}$ Taylor sorfejtését felhasználva. Ezek a technikai jellegű számítások ugyanakkor a határértékek létezését is bizonyítják.

Az általunk alkalmazott bizonyítás egyszerű geometriai megfigyeléseken alapszik. Egy $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt hívunk szférikusnak a $P \in \mathbb{R}^n$ pontban, ha létezik olyan $\bar{f}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyre $f(x) = \bar{f}(|x - P|)$. Lényegében a következő tényeken múlik a bizonyításunk: Minden függvény felépíthető szférikus függvényekből, és minden szférikus függvény approximálható tetszőleges kompakt tartományon olyan szférikus f függvényekkel, melyek $\bar{f}$ függvénye polinom. Amiért ezek alkalmazhatók, az az, hogy mi a bumeráng transzformáció jobbinverzét ('pre-image') fogjuk keresni, márpedig az kompakt tartományon integrál, így minfenéle approximáció jól működik.

A megvalósítás a következő módon történik: A 3. tétel három inverz formulát ad a radiális, origónál szférikus, folytonos függvények terén. A 2. lemma ezt általánosítja szférikus függvényekre. A 4. tétel pedig egy közelítő inverz formulát ad, minden függvényt szférikus függvényekkel approximálva. Ezek után az 1.-2. tételt lényegében az approximáció határértékének kiszámításával nyerjük.

1. Lemma. Ha h folytonos radiális függvény, akkor

$$Bh(x) = |S^{n-2}| \int_0^1 \bar{h}(p|x|) (1 - p^2)^{(n-3)/2} dp,$$

ahol $|S^{n-2}|$ az S^{n-2} felszíne, és így ha $f_i(x) = |x|^i$ ($i \in \mathbb{N}$), akkor

$$Bf_i(x) = f_i(x) \pi^{(n-1)/2} \frac{\Gamma((i+1)/2)}{\Gamma((n+i)/2)}.$$

Ez a lemma egyszerű számolással igazolható [50], mégis van egy fontos következménye.

1. Következmény. Ha f folytonos radiális függvény, akkor

$$\text{i)} \quad f_{n-1}B(f_{n-1}Bf) = Q^{n-1}(f)(2\pi)^{n-1},$$

$$\text{ii)} \quad f_{n-2}B(f_1Bf) = I^{n-1}(f)(2\pi)^{n-1},$$

$$\text{iii)} \quad f_{n-1}Bf = Q^{(n-1)/2}(f)(2\pi)^{(n-1)/2} \text{ ha } n \text{ páratlan,}$$

ahol

$$Qf(x) = |x| \int_0^{|x|} \bar{f}(t) dt \quad \text{és} \quad If(x) = \int_0^{|x|} \bar{f}(t) dt.$$

Bizonyítás. Ha $f = f_i$, akkor i), ii) és iii) egyszerű számolással kapható az előbbi lemma második részéből. De B, Q és I lineárisak, így formuláink akkor is igazak, ha $\bar{f}$ polinom. Ugyanakkor ezek az operátorok folytonosak az egyenletes konvergenciára nézve, hiszen integrál operátorok, így a Weierstrass tétel bizonyítja az állítást. ■

Jelölje a továbbiakban G a radiális C^∞ függvények terét.

3. Tétel. A bumeráng transzformáció bijekció G -ről G -re. Ha $f \in G$ és

$$\text{i)} \quad h_1 = (2\pi)^{1-n} \left(\frac{d}{dr} \right)^{n-1} (f_{n-1}B(f_{n-1}f)),$$

$$\text{ii)} \quad h_2 = (2\pi)^{1-n} \left(\frac{d}{dr} \right)^{n-1} (f_{n-2}B(f_1f)),$$

$$\text{iii)} \quad h_3 = (2\pi)^{(1-n)/2} \left(\frac{d}{dr} \right)^{(n-1)/2} (f_{n-1}f) \text{ ha } n \text{ páratlan,}$$

ahol $\frac{d}{dr}$ radiális irányú deriválást jelent, akkor $f = Bh_1 = Bh_2$ és ha n páratlan $f = Bh_3$ is.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy h folytonos radiális függvény és $Bh = 0$. Akkor a fenti következmény miatt $I^{n-1}(h) = 0$, amiből $(n-1)$ -szeres differenciálással adódik $h = 0$ vagyis a bumeráng transzformáció injekció.

Most bebizonyítjuk, hogy $h_2 \in G_O$. Mivel az eljárás hasonló a másik két $h_1, h_3 \in G_O$ esetre is, azt az olvasó belátására bízunk. Ehhez nem kell mást tennünk, mint egyszerűen beírni ii)-be az első lemma eredményét:

$$(3) \quad |x|^{n-2}B(f_1f)(x) = |S^{n-2}| \int_0^{|x|} \bar{f}(p)p(|x|^2 - p^2)^{(n-3)/2} dp,$$

amiből az állítás nyilvánvaló.

Már csak azt kell megmutatnunk, hogy $f = Bh_2$. A másik két esetet ismét az olvasóra bízunk. Mivel az origóban h_2 $(n-1)$ rendben nulla, ii)-ből integrálással azt kapjuk, hogy

$$f_{n-2}B(f_1f) = I^{n-1}(h_2)(2\pi)^{n-1}.$$

Ebből viszont $f = Bh_2$ adódik az előző következmény ii) pontja és B injektivitása miatt. ■

Ez a tétel lehetővé teszi a β transzformáció definiálását a G függvénytéren a $B \circ \beta f = f$ összefüggés alapján, vagyis β a bumeráng transzformáció jobbinverze G -n.

Legyen g egy függvény $\mathbb{R}^n$ -en. Ekkor minden $\omega \in S^{n-1}$ egységvektorra a $g_\omega(x) = g(\omega \langle \omega, x \rangle)$ függvény egy ‘síkhullám’, vagyis minden az ω -ra merőleges hipersíkon konstans. Eszerint Bg tekinthető az $\omega \rightarrow g_\omega$ függvény értékű függvények integráljaként az S^{n-1} halmazon. Ha tehát a h és a g függvényeknek az ilyen síkhullámokra való felbontása megegyezik, akkor $Bh = Bg$. A következő tételt éppen ez az észrevétel indokolja geometriai szempontból, bár a definíció alapján közvetlenül is könnyen igazolható.

2. Lemma. Ha $g = Bh$, akkor $g_y = B\left(h\left(x + x \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle}\right)\right)$, ahol $g_y(x) = g(x + y)$.

Egy $\{v_k\}$ függvénysorozatot delta-konvergensnek nevezünk, ha a Dirac-féle disztribúcióhoz tart a folytonos korlátos függvények duális terében. A következő tétel döntő fontosságú a bizonyításunkban.

4. Tétel. Legyen $f \in S(\mathbb{R}^n)$ és $\{v_k\} \subset G_O$ egy delta-konvergens sorozat. Ha a

$$h_k(t\omega) = \int_{\mathbb{R}} Rf(\omega, t-r) \overline{\beta v_k}(|r|) dr, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \omega \in S^{n-1}$$

függvénysorozat $S(\mathbb{R}^n)$ -ben konvergál egy h függvényhez, akkor $f = Bh$.

Bizonyítás. Az $r = t - s$ helyettesítéssel és a Fubini tétel segítségével formulánk a következő alakot ölti

$$h_k(t\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \beta v_k(t\omega + \omega \langle \omega, y \rangle) dy.$$

Erre alkalmazva a bumeráng transzformációt, majd lecserélve az integrálások sorrendjét, a 2. lemma azt adja, hogy

$$Bh_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) v_k(x - y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

ami éppen a bizonyítandó. ■

Két technikai állításra van még szükségünk fő tételeink bizonyításához. Az első egyszerűen az integrálás polár-koordinátás átírásából következik.

3. Lemma. Ha $\{v_k\} \subset G$ delta-konvergens sorozat, akkor a

$$w_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (r \mapsto |r|^{n-1} \bar{v}_k(|r|) |s^{n-1}|/2)$$

függvény sorozat is delta-konvergens.

4. Lemma. Ha $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R})$ és $f(r) = \gamma(r) - \gamma(-r)$, akkor

$$\frac{1}{c} \left(\frac{d}{dr} \right)^k f \in C^\infty \quad \text{és} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr} \right)^k f(r) = f^{(2k+1)}(0) \frac{1}{(2k+1)!!}.$$

Bizonyítás. Egyszerű indukcióval kaphatjuk, hogy

$$\left(\frac{d}{dr} \right)^k f(r) = \gamma_k(r) - \gamma_k(-r),$$

ahol $\gamma_k \in C^\infty$ s $\gamma_k(0) = 0$, ami rögtön adja az első állítást. A második állításunk viszont azonnal adódik felhasználva a γ Taylor sorfejtését a nulla körül. ■

A rövidség kedvéért bevezetjük a $\varphi(r) = Rf(e_x, |x| - r)$ jelölést ($e_x = x/|x|$), amit ha az x -től való függőség fontos, akkor a $\varphi_x(r)$ alakban fogunk használni.

1. Tétel bizonyítása. A 3. tétel ii) pontja és a 4. tétel értelmében kapjuk, hogy

$$h_k(x) = (2\pi)^{1-n} \int_0^\infty (\varphi(r) + \varphi(-r)) \left(\frac{d}{dr} \right)^{n-1} (f_{n-2} B(f_1 v_k))|_{re_x} dr,$$

ahol $\{v_k\} \in G$ delta-konvergens sorozat. Vegyük most a 3. tétel által garantált $U_k \in G$ függvényt, melyre $v_k = BU_k$, vagyis

$$(*) \quad I^m U_k = (2\pi)^{1-n} \left(\frac{d}{dr} \right)^{n-1-m} (f_{n-2} B(f_1 v_1)),$$

mely szerint $(n-1)$ -szeres parciális integrálással kapjuk, hogy

$$h_k(x) = (-2\pi)^{1-n} \int_0^\infty \left\{ \left(\frac{d}{dr} \right)^{n-1} (\varphi(r) + \varphi(-r)) \right\} r^{n-2} B(f_1 v_k)(re_x) dr,$$

mivel a maradéktagok a 0-ban $(*)$ miatt, a ∞ -ben pedig $Rf \in S(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ [50] miatt mind nullák voltak. Figyelembe véve a 3. tétel bizonyításában található (3)-as formulát, megfordítva az integrálás sorrendjét és felhasználva az 1. lemma első formuláját, adódik, hogy

$$h_k(x) = (-2\pi)^{1-n} \frac{2|S^{n-2}|}{|S^{n-1}|} \int_0^\infty w_k(t) \int_t^\infty g(r) \frac{(r^2 - t^2)^{(n-3)/2}}{t^{n-2}} dr dt,$$

ahol

$$g(r) = \left(\frac{d}{dr}\right)^{n-1} \varphi(r) + \left(\frac{-d}{dr}\right)^{n-1} \varphi(-r)$$

és w_k a 3. lemma szerint nyert delta-konvergens sorozat. Az $r = st$ helyettesítést elvégezve a belső integrálban éppen a bizonyítandó

$$h(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} h_k(x) = (-2\pi)^{1-n} \frac{|S^{n-2}|}{|S^{n-1}|} \lim_{t \rightarrow 0} \int_1^\infty g(st)(s^2 - 1)^{(n-3)/2} ds,$$

összefüggést nyerjük. Megemlítjük, hogy ennek a határértéknek a létezése az $(s^2 - 1)^{(n-3)/2}$ Taylor sorfejtését felhasználva bizonyítható. ■

2. Tétel bizonyítása. A 3. tétel i) pontja és a 4. tétel alapján nyilván

$$h_k(x) = (2\pi)^{1-n} \int_0^\infty (\varphi(r) + \varphi(-r)) \left(\frac{d}{dr}\right)^{n-1} (f_{n-1}B(f_{n-1}v_k))|_{re_x} dr.$$

Hasonlóan mint az előző bizonyításban, ebből parciális integrálásokkal nyerjük, hogy

$$h_k(x) = (-2\pi)^{1-n} \int_0^\infty \left(\frac{d}{rdr}\right)^{n-1} (\varphi(r) + \varphi(-r)) r^{n-1} B(f_{n-1}v_k)(re_x) dr.$$

A 4. lemma szerint a $g(r) = \left(\frac{d}{rdr}\right)^{n-1} (\varphi(r) + \varphi(-r)) r^{n-1}$ függvény C^∞ , így az 1. lemmát, a 3. lemmát és a Fubini tételt használva kapjuk, hogy

$$h_k(x) = (-2\pi)^{1-n} \frac{2|S^{n-2}|}{|S^{n-1}|} \int_0^\infty w_k(s) \int_s^\infty \frac{g(r)}{r} (1 - s^2/r^2)^{(n-3)/2} dr ds,$$

ahol w_k a 3. lemma szerint nyert delta-konvergens sorozat. Ebből

$$h(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} h_k(x) = (-2\pi)^{1-n} \frac{|S^{n-2}|}{|S^{n-1}|} \lim_{s \rightarrow 0} \int_s^\infty \frac{g(r)}{r} (1 - s^2/r^2)^{(n-3)/2} dr.$$

A teljes bizonyításhoz így már elég látni, hogy

$$0 = \lim_{s \rightarrow 0} \int_s^\infty \frac{g(r)}{r} (1 - (1 - s^2/r^2)^{(n-3)/2}) dr.$$

Felhasználva az $(1 - s^2/r^2)^k = \sum_0^\infty \binom{k}{m} (-s/r)^{2m}$ Taylor sorfejtését, amit $g(r)/r \in S(\mathbb{R})$ miatt felcserélhetünk az integrállal, ezt az egyes tagok következő módon való

becslésével bizonyíthatjuk. Legyen $\varepsilon_s = \sqrt{s}$ és bontsuk fel az integrált két részre úgy, hogy $\int_s^\infty = \int_s^{\varepsilon_s^{-s}} + \int_{\varepsilon_s}^\infty$. Könnyen kapjuk, hogy

$$\left| \binom{(n-3)/2}{m} \right| \left| \int_s^\infty \left| \frac{g(r)}{r} \right| \frac{s^{2m}}{r^{2m}} dr \right| \leq \frac{1}{2} \left| \binom{(n-3)/2}{m} \right| \left(\sup_{(s, \varepsilon_s)} |g| + \varepsilon_s \frac{s^{2m}}{\varepsilon_s^{2m}} \sup |g| \right).$$

Mivel $g(0) = 0$ és $g(r)/r \in S(\mathbb{R})$ a jobboldal nyilván nullához konvergál, ha s nullához tart. Figyelembe véve, hogy $\left| \binom{(n-3)/2}{m} \right| = (-1)^m \binom{(n-3)/2}{m}$ könnyen összegezzük a jobb oldal is, melynek eredménye

$$\int_s^\infty \left| \frac{g(r)}{r} \right| (1 - (1 - s^2/r^2)^{(n-3)/2}) dr \leq \sup_{(s, \varepsilon_s)} |g| + \varepsilon_s \frac{1}{2} \left(1 - \frac{s^2}{\varepsilon_s^2} \right)^{(n-3)/2} \sup |g|,$$

melyből azonnal következik állításunk. Megemlíjtük, hogy a

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_s^0 \frac{g(r)}{r} (1 - (1 - s^2/r^2)^{(n-3)/2}) dr$$

határérték létezése egyszerű parciális integrálással bizonyítható. ■

Végül megemlíjtük, hogy hasonló eljárás iii)-ből rögtön (1)-et adja.

1.2. Képtér-jellemzés

Ebben a szakaszban a $D(\mathbb{R}^n)$ függvénytérnek a (d, n) -dimenziós R_d^n Radon transzformáció melletti képét fogjuk jellemezni parciális differenciálegyenlet-rendszerrel.

Igen sok cikk született erről a kérdéstről ([29,38,61,91]). Az első ezek közül, amennyire meg lehet állapítani, F. John cikke volt [61]. F. John ebben a cikkében csak az $(1, 3)$ -dimenziós Radon transzformáltra adott megoldást, melyhez a három-dimenziós tér igen sok specialitását és az Asgeirsson lemmát használta egy igen bonyolult konstrukcióban. Ugyanakkor bizonyítása a későbbiekhez viszonyítva geometriai volt, és igen nagy általánosságot eredményezett. A jellemzés alapját nála az adta, hogy

$$R_1^3 f(\xi) = R_1^3 f(x, y) = |y - x| \int_{-\infty}^{\infty} f(x + t(y - x)) dt,$$

ahol $\xi \in G(1, 3)$ az az egyenes, mely éppen a különböző x és y pontokon megy át. Ez viszont nyilván teljesíti a

$$\left(\frac{d}{dx_i} \frac{d}{dy_i} - \frac{d}{dy_i} \frac{d}{dx_j} \right) \frac{R_1^3 f(x, y)}{|y - x|} = 0$$

parciális differenciálegyenletet minden $1 \leq i, j \leq 3$ esetén. F. John eredménye éppen az volt, hogy ez az állítás megfordítható.

Ennek a jellemzésnek a későbbi általánosításai viszont erős analitikus eszközöket használtak, mint például a parciális Fourier transzformációt, valamint egy, szerintem legalább is nem igazán természetes, definícióját az $S(G(d, n))$ függvénytérnek. Ugyanakor, amint F. Richter is megjegyezte [91], Grinberg és Gelfand bizonyítása sem volt teljes. Másik alapvető eltérése az általánosításoknak az eredeti tételtől a hipersíkok paraméterezési módszerében mutatkozik. Richter, Grinberg és Gelfand ugyanis az $y = Ax + c$ összefüggéssel paraméterezett, ahol A egy $(n - d) \times d$ mátrix és $c \in \mathbb{R}^{n-d}$.

Mi visszatérünk F. John paraméterezési módszeréhez, a d -síkokat $(d + 1)$ általános helyzetű ponttal parametrizálva. Ezzel az eljárással aránylag egyszerű geometriai úton kapjuk a fenti jellemzés általánosítását, levezetve a Helgason-féle momentum feltételt az általánosított parciális differenciálegyenletről.

A fejezet végén részletesen analizáljuk az $(1, n)$ esetet, majd röviden bizonyítjuk John tételét, mely megadja a négyváltozós ultrahiperbolikus parciális differenciálegyenlet általános megoldását.

Legyen $\xi(x_0, x_1, \dots, x_d) \in G(d, n)$ minden általános helyzetű $(d + 1)$ pontból álló $x_0, x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}^n$ pontrendszer esetén, az azt tartalmazó egyértelmű d -sík. Ezt a paraméterezést használva a d -sík transzformációt a következő alakban írhatjuk

$$R_d^n f(x_0, x_1, \dots, x_d) = \int_{\xi} f(x) dx.$$

Megjegyezzük, hogy ebben a felfogásban $R_d^n f$ egy $G(d, n)$ feletti principális fibrált nyalábon van értelmezve, az $\mathbb{R}^d$ affin csoportjával mint struktúra csoporttal. Szintén pontosan ezen a principális fibrált nyalábon van értelmezve az alábbi $R_d^n f / |\det U_x^{-1}|$ függvény is.

Legyen U_x az $\mathbb{R}^n$ -nek egy olyan automorfizmusa, mely az $\{x_i - x_0\}_{i=1,d}$ rendszert ortonormált rendszerbe viszi. Ekkor az ennek megfelelő helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$R_d^n f(x_0, x_1, \dots, x_d) = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(x_0 + \sum_{i=1}^d \lambda_i (x_i - x_0)\right) |\det U_x^{-1}| d\lambda,$$

ahol $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$. Itt persze $|\det U_x^{-1}|$ éppen az $\{x_i - x_0\}_{i=1,d}$ vektorok által feszített paralelepipedon $\text{Vol}\{x_i - x_0\}$ térfogata. Az $(1, n)$ esetben $|\det U_x^{-1}| = |x_1 - x_0|$. Ezt az észrevételt igen gyakran fogjuk használni. A következő egyszerű lemma könnyen igazolható a differenciálásoknak az integráláson belüli alkalmazásával.

1. Lemma. Ha $f \in S(\mathbb{R}^n)$ akkor

$$(\partial_{i,k}\partial_{j,e} - \partial_{i,e}\partial_{j,k}) \frac{R_d^n f(x_0, x_1, \dots, x_d)}{\text{Vol}\{x_i - x_0\}_{i=1,d}} = 0,$$

ahol $0 \leq i, j \leq d$, $1 \leq k, e \leq n$ és $\partial_{i,k}$ az i -edik x_i paraméter k -adik x_i^k koordinátája szerinti parciális deriválás.

Most röviden leírjuk Helgason [50] momentum feltételét, mely jellemzi az R_d^n képterét.

Egy a $G(d, n)$ téren értelmezett f függvény tartozzon a $D_H(G(d))$ osztályhoz, ha $f \in C^\infty$, kompakt tartójú és teljesíti a következő feltételt: Minden $k \in \mathbb{N}$ számhoz létezik egy k -fokban homogén P_k polinom az $\mathbb{R}^n$ téren, melyre minden σ d -dimenziós altér esetén a

$$P_{\sigma,k}(u) = \int_{\sigma^\perp} f(x + \sigma(\langle x, u \rangle^k dx) \quad (u \in \sigma^\perp),$$

polinom, ahol $\sigma^\perp$ a σ ortogonális kiegészítője az $\mathbb{R}^n$ téren és dx a természetes felület mérték a $\sigma^\perp$ -n, éppen $P_k|_{\sigma^\perp}$, a P_k megszorítása $\sigma^\perp$ -ra.

A döntő feltétel ebben a $P_{\sigma,k}(u)$ függetlensége a σ választásától, ha $u \in \sigma^\perp$, mivel $P_{\sigma,k}(u)$ nyilvánvalóan k -fokban homogén [50]. A következő állítást bizonyította Helgason:

2. Lemma. (Corollary 2.28. [50]-ben) A d -sík transzformáció bijekció $D(\mathbb{R}^n)$ és $D_H(G(d, n))$ közt.

A mi bizonyításunk éppen ennek az állításnak az első lemmában leírt parciális differenciálegyenletből való levezetésén alapszik. A következő lemma egyszerű általánosítása [50] megfelelő tételének (Theorem 1.2.).

3. Lemma. Tegyük fel, hogy $v \in C^\infty((\mathbb{R}^n)^{d+1})$ csak a $(d+1)$ $\mathbb{R}^n$ -beli paraméter-pontjának d -síkjától, $\xi(x_0, x_1, \dots, x_d) \in G(d, n)$ -től függ, és

$$(1) \quad (\partial_{i,k}\partial_{j,e} - \partial_{i,e}\partial_{j,k}) \frac{v(x_0, x_1, \dots, x_d)}{\text{Vol}\{x_i - x_0\}_{i=1,d}} = 0,$$

ahol $0 \leq i, j \leq d$, $1 \leq k, e \leq n$. Akkor a transzformált

$$w(x_0, x_1, \dots, x_d) = v(Ax_0, Ax_1, \dots, Ax_d)$$

függvény is teljesíti (1)-et és szintén csak a $(d+1)$ $\mathbb{R}^n$ -beli paraméter-pontjának d -síkjától, $\xi(x_0, x_1, \dots, x_d) \in G(d, n)$ -től függ tetszőleges $A \in SO(n)$ esetén, ahol $SO(n)$ az $\mathbb{R}^n$ tér 1-determinánsú automorfizmusainak csoportja.

1. Tétel. Legyen $v \in D(G(d, n))$. Ahhoz, hogy egy $f \in D(\mathbb{R}^n)$ függvény létezzék, melyre $v = R_d^n f$, szükséges és elégséges, hogy v teljesítse az (1) parciális differenciálegyenlet-rendszert.

Bizonyítás. A szükségességet az 1. lemma bizonyítja, ezért nekünk most elég a feltétel elégségességét kimutatnunk, vagyis, hogy (1)-ből következik a Helgason-féle momentum feltétel. A definíció szerint, ha $u \in \sigma^\perp$, akkor

$$P_{\sigma,k}(u) = \int_{\sigma^\perp} v(x, x + \sigma_1, x + \sigma_2, \dots, x + \sigma_d) \langle x, u \rangle^k dx,$$

ahol $\{\sigma_i\}_{i=1,d}$ egy ortonormált bázis a σ d -dimenziós altérben. Meg kell mutatnunk, hogy ekkor $P_{\sigma,k}(u) = P_{\bar{\sigma},k}(u)$ minden $u \in \sigma^\perp \cap \bar{\sigma}^\perp$ esetén, ahol $\bar{\sigma}$ egy másik d -dimenziós altér. Ehhez először némileg egyszerűsítjük a problémát.

Az általánosság minden megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $|u| = 1$. Legyen $e_1, e_2, \dots, e_n$ ortonormált bázis $\mathbb{R}^n$ -ben, $\varepsilon = \xi(0, e_1, e_2, \dots, e_d)$ és $A \in SO(n)$ olyan, hogy $\sigma_i = AE_1$ és $u = Ae_n$. Az $x = Ay$ helyettesítés után kapjuk, hogy

$$P_{\sigma,k}(u) = P_{A\varepsilon,k}(e_n) = \int_{\varepsilon^\perp} v(Ay, A(y + e_1), \dots, A(y + e_d)) \langle y, e_n \rangle^k dy,$$

amiért az alábbi (*) állítás bizonyításához, amelyből könnyen következik majd eredeti állításunk, a 3. lemma értelmében elegendő azt az esetet vizsgálnunk, amikor $u = e_n$ és $\sigma_i = e_i$ $i = 1, 2, \dots, d$.

$$(*) \quad \begin{aligned} &\text{Ha } \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_d \text{ ortonormált rendszer, } \bar{\sigma}_1 \perp \sigma_2, \dots, \sigma_d, |\bar{\sigma}_1| = \\ &1, \sigma = \xi(0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_d) \text{ és } \bar{\sigma} = \xi(0, \bar{\sigma}_1, \sigma_2, \dots, \sigma_d) \text{ akkor} \\ &P_{\sigma,k}(e_n) = P_{\bar{\sigma},k}(e_n). \end{aligned}$$

Eszerint azt kell bizonyítanunk, hogy ha $E = a_1 e_1 + \sum_{i=d+1}^{n-1} a_i e_i$, ahol $a_1^2 + \sum_{i=d+1}^{n-1} a_i^2 = 1$, akkor $P_{\varepsilon,k}(e_n) = P_{\bar{\varepsilon},k}(e_n)$, ahol $\bar{\varepsilon} = \xi(0, E, e_2, \dots, e_d)$. Ezt az E olyan közelítésével fogjuk elvégezni, melyre $P_{\varepsilon_{\text{appr}},k}(e_n)$, a közbülső lépéseknél keletkező polinomok, nem változnak (itt az $\varepsilon_{\text{appr}} = \xi(0, E_{\text{appr}}, e_2, \dots, e_d)$ jelölést használtuk).

Első lépésként vegyük az $E_{\text{appr}} = e_1 \sin \beta + e_i \cos \beta$ vektort, ahol $i > d$. Nyilván feltételezhetjük, hogy $i = d + 1$. Legyen továbbá

$$P(\beta) = P_{\varepsilon_{\text{appr}},k}(e_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} v(x, x + E_{\text{appr}}, \dots, x + e_d) \lambda_n^d d\lambda_n d\lambda_{n-1} \dots d\lambda_{d+1},$$

ahol $x = (-e_1 \cos \beta + e_{d+1} \sin \beta) \lambda_{d+1} + \sum_{i=d+2}^n \lambda_i e_i$. Ezt az összefüggést deriválva β szerint adódik, hogy

$$P'(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lambda_{d+1} \sum_{j=0}^d (\sin \beta \partial_{j,1} v + \cos \beta \partial_{j,d+1} v) + \right. \\ \left. + \cos \beta \partial_{2,1} v - \sin \beta \partial_{2,d+1} v \right) \lambda_n^k d\lambda_n \cdots d\lambda_{d+1}.$$

Ahhoz, hogy kiszámítsuk ez utóbbi integrált, egy kis kerülőt kell tennünk. Mivel v $G(d, n)$ -en értelmezett, nyilván minden $\nu \in \mathbb{R} (\neq 0)$ esetén

$$\frac{v(x_0, x_1, \dots, x_d)}{\text{Vol}\{x_i - x_0\}_{i=1,d}} = \nu \frac{v(y_0, y_1, \dots, y_d)}{\text{Vol}\{y_i - y_0\}_{i=1,d}},$$

ahol $y_k = x_k$ minden k -ra kivéve a $k = i$ esetet, melyre $y_i = x_j + \nu(x_i - x_j)$. Ekkor a ν szerinti deriválás a $\nu = 1$ pontban adja, hogy

$$(2) \quad \frac{v(x_0, x_1, \dots, x_d)}{\text{Vol}\{x_i - x_0\}_{i=1,d}} + \sum_{m=1}^n (x_i^m - x_j^m) \partial_{i,m} \frac{v(x_0, x_1, \dots, x_d)}{\text{Vol}\{x_i - x_0\}_{i=1,d}} = 0.$$

Mármost ezt felhasználva a $j = 1$ és $j = 0$ esetre, integrálunk a következő alakot ölti

$$P'(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (\cos \beta \partial_{2,1} v - \sin \beta \partial_{2,d+1} v) \lambda_n^k d\lambda_n \cdots d\lambda_{d+1},$$

melyből λ_n szerinti parciális integrálással kapjuk, hogy

$$(k+1)P'(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\lambda_n} (\cos \beta \partial_{2,1} v - \sin \beta \partial_{2,d+1} v) \lambda_n^{k+1} d\lambda_n \cdots d\lambda_{d+1}.$$

De esetünkben $\frac{d}{d\lambda_n} = \sum_{j=0}^d \partial_{j,n}$ azért (1) alkalmazásával azt írhatjuk, hogy

$$(k+1)P'(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-d}{d\lambda_{d+1}} \partial_{2,n} v \lambda_n^{k+1} d\lambda_n \cdots d\lambda_{d+1}.$$

Mivel pedig $n > d+1$, a λ_{d+1} szerinti integrálás azt mutatja, hogy $P'(\beta) \equiv 0$, vagyis $P_{\varepsilon_{\text{appr}},k}(e_n) = P_{\varepsilon,k}(e_n)$. Könnyen látható, hogy $(n-1)$ hasonló lépéssel elérhető az általános E , amivel (*)-ot bebizonyítottuk.

Legyen mostmár $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_d$ és $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_d$ két ortonormált rendszer és $\sigma = \xi(0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_d)$, $\bar{\sigma} = \xi(0, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_d)$. Lépésenként bizonyítjuk, hogy $P_{\sigma,k}(e_n) = P_{\bar{\sigma},k}(e_n)$ egy olyan σ^r d -sík sorozatot mutatva, melyre $P_{\sigma,k}(e_n) =$

$P_{\sigma^1,k}(e_n) = \dots = P_{\sigma^m,k}(e_n) = P_{\bar{\sigma},k}(e_n)$, és mindezen egyenlőségek a (*) állítás következményei.

Ha $\bar{\sigma}_i$ legfeljebb egy j index esetén nem merőleges σ_j -re akkor a (*) értelmében a σ_j -vel oly módon cserélhető fel, hogy $P_{\sigma,k}(e_n)$ nem változik, vagyis $P_{\sigma,k}(e_n) = P_{\sigma^1,k}(e_n)$. Folytassuk ezt a cserélgetést mindaddig, amíg a végül nyert σ^r -ben már több mint egy elem nem merőleges $\bar{\sigma}_i$ -re. Ekkor σ^r olyan, hogy $\{\sigma_i^r\}_{i=1,d}$ elemei közül legalább kettő nem merőleges $\bar{\sigma}_i$ -re.

Legyen tehát σ_j^r és σ_k^r két $\bar{\sigma}_i$ -re nem merőleges vektor és transzformáljuk őket oly módon, hogy

$$\sigma_j^{r+1} = \sigma_j^r \cos \alpha \sigma_k^r \sin \alpha, \quad \sigma_k^{r+1} = \sigma_j^r \sin \alpha - \sigma_k^r \cos \alpha, \quad \text{és} \quad \sigma_s^{r+1} = \sigma_s^r \text{ ha } s \neq j, k,$$

ahol $\tan \alpha = \langle \bar{\sigma}_i, \sigma_k^r \rangle / \langle \bar{\sigma}_i, \sigma_j^r \rangle$. Az így kapott $\sigma^{r+1} = \xi(0, \sigma_1^{r+1}, \sigma_2^{r+1}, \dots, \sigma_d^{r+1})$ altér nyilván teljesíti a $P_{\sigma^{r+1},k}(e_n) = P_{\sigma^r,k}(e_n)$ egyenletet és legalább eggyel több vektora merőleges $\bar{\sigma}_i$ -re. Ezt a transzformációt elegendően sokszor elvégezve, olyan alteret fogunk kapni, melyre már az előző módszer is alkalmazható. Végül tehát éppen a kívánt sorozatot fogjuk megkapni ezzel a két eljárással, ami bizonyítja tételünket. ■

Mostantól az $(1, n)$ esetre fogunk koncentrálni, vagyis amikor az integrálás az egyeneseken történik. Ezt a transzformációt szokták még „X-ray” vagyis röntgen transzformációnak is nevezni [97]. Az egyeneseken Plücker koordinátáit fogjuk használni.

Legyen $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ és $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ két különböző pont a g egyenesen. A g Plücker koordinátái ekkor

$$p_{i,k} = \det \begin{pmatrix} \xi_i & \xi_k \\ \eta_i & \eta_k \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad q_j = \det \begin{pmatrix} \xi_j & 1 \\ \eta_j & 1 \end{pmatrix},$$

ahol $1 \leq i < k \leq n$ és $1 \leq j \leq n$. Jól ismert, hogy ezeknek a $p_{i,n}$ és q_j koordinátáknak a belső arányai nem függenek a ξ és η választásától, csakis a g egyenestől. A rövidség kedvéért a továbbiakban p_i -vel fogjuk jelölni $p_{i,n}$ -t.

A Plücker-koordináták segítségével most egy bijekciót adunk meg a $G(1, n)$ -en értelmezett és az $\mathbb{R}^{2n-2}$ -n értelmezett függvények között. Egy v $G(1, n)$ -en értelmezett függvényhez rendeljük hozzá azt az u $\mathbb{R}^{2n-2}$ -n értelmezett függvényt, melyre

$$(3) \quad v(\xi, \eta) = \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{q_i}{q_n} \right)^2 \right)^{1/2} u \left(\frac{x_1}{q_n}, \frac{x_2}{q_n}, \frac{x_3}{q_n}, \dots, \frac{x_{2n-2}}{q_n} \right) \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n,$$

ahol $x_i = \sum_{j=1}^{n-1} (\lambda_{i,j} p_j + \delta_{i,j} q_j)$ és $\lambda_{i,j}, \delta_{i,j} \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq 2n-2$). Nyilván a v függvény akkor és csak akkor rekonstruálható az u függvényből, ha a

$$\Lambda = [\lambda_{i,j}]_{\substack{i=1,2n-2 \\ j=1,n-1}} \quad \text{és} \quad \Delta = [\delta_{i,j}]_{\substack{i=1,2n-2 \\ j=1,n-1}}$$

mátrixok olyanok, hogy a $(2n-2) \times (2n-2)$ -es $\gamma = [\Lambda, \Delta]$ mátrix invertálható.

Mivel $|\xi - \eta| = \left(\sum_{i=1}^n q_i^2\right)^{1/2}$ a $v(\xi, \eta)/|\xi - \eta|$ ξ_k és η_e szerinti deriválása (1) és (3) felhasználásával adja, hogy

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{2n-2} (\lambda_{i,e} \delta_{i,k} + \lambda_{i,k} \delta_{i,e}) \partial_i^2 u + \sum_{1 \leq i < j}^{2n-2} (\lambda_{i,e} \delta_{j,k} - \lambda_{i,k} \delta_{j,e} + \lambda_{j,e} \delta_{i,k} - \lambda_{j,k} \delta_{i,e}) \partial_i \partial_j u = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy a (3) transzformáció egy ekvivalenciát definiál az (1) és (4) parciális differenciálegyenlet-rendszerek között, ha $k, e < n$.

4. Lemma. *A (3) transzformáció bijekciót ad $C^2(G(1, n))$ és $C^2(\mathbb{R}^{2n-2})$ között. Egy (3) által összekapcsolt $u \in C^2(\mathbb{R}^{2n-2})$ és $v \in C^2(G(1, n))$ függvénypár esetében, a (4) és (1) parciális differenciálegyenlet-rendszerek ekvivalensek.*

Bizonyítás. Az egyetlen nem triviális bizonyítandó, hogy ha u teljesíti (4)-et és v -t a (3) transzformáció definiálja, akkor v is teljesíti (1)-et nem csak a $k, e < n$ esetben hanem az $e = n$ esetén is. (2) alapján tudjuk

$$\frac{v(\xi, \eta)}{|\xi - \eta|} + \sum_{e=1}^n (\xi_e - \eta_e) \frac{\partial}{\partial \xi_e} \frac{v(\xi, \eta)}{|\xi - \eta|} = 0.$$

Deriválva ezt η_k szerint azt kapjuk, hogy

$$\left(\sum_{e=1}^n (\xi_e - \eta_e) \frac{\partial^2}{\partial \eta_k \partial \xi_e} - \frac{\partial}{\partial \xi_k} + \frac{\partial}{\partial \eta_k} \right) \frac{v(\xi, \eta)}{|\xi - \eta|} = 0.$$

Felcserélve ξ -t és η -t adódik, hogy

$$\sum_{e=1}^n (\xi_e - \eta_e) \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta_k \partial \xi_e} - \frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \eta_e} \right) \frac{v(\xi, \eta)}{|\xi - \eta|} = 0.$$

Mivel azonban v teljesíti (1)-et minden $1 \leq k, e \leq n-1$ -re ez éppen $e = n$ -re adja a bizonyítandót. ■

Most már egyszerű következményként írhatjuk fel F. John eredményét [62].

2. Tétel. Az $u: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ C_c^∞ -beli függvény akkor és csak akkor megoldása a

$$(5) \quad (\partial_1^2 + \partial_2^2 - \partial_3^2 - \partial_4^2)u = 0$$

ultrahiperbolikus parciális differenciálegyenletnek, ha létezik olyan $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ C_c^∞ függvény, melyre

$$R_1^3 f(\xi, \eta) = \left(\sum_{i=1}^3 \left(\frac{q_i}{q_3} \right)^2 \right)^{1/2} u \left(\frac{p_1 + q_2}{q_3}, \frac{-p_2 + q_1}{q_3}, \frac{p_1 - q_2}{q_3}, \frac{-p_1 q_1}{q_3} \right),$$

ahol p_i és q_i ($1 \leq i \leq 3$) a ξ -n és η -n átmenő egyenes Plücker-koordinátái.

Bizonyítás. Egyszerűen válasszuk (4)-ben az alábbi $\Gamma = [\Lambda, \Delta]$ mátrixot

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor a (3) szerinti kapcsolat v és u között egy-egy értelmű és (4) csak egy egyenletet ad, mégpedig (5)-t. Akkor pedig a fenti lemma és tétel adja állításunkat. ■

Hasonlóan szép formula létezéséhez magasabb dimenziókban nyilván az kellene, hogy a (4) parciális differenciálegyenlet ne függjön a k és e indexektől. Ez a feltétel lineáris egyenleteket ad a Γ elemeire, amelyeket egyszerűen leszámolva kiderül, hogy ez $n \geq 4$ dimenzió esetén nem lehetséges.

A 2. tétel azonban úgy is felfogható, hogy az az R_d^n képtér-jellemzéséből eliminálja az (1) rendszerhez még szükséges kiegészítő feltételt, hogy tudniillik a függvény csak a paraméter-pontjainak a d -síkjától függhet. Ebben az értelemben a következő egyben ebben a szakaszban és fejezetben utolsó tételünk nem más mint előző tételünk általánosítása. Ugyanakkor az eredményként kapott parciális differenciálegyenlet-rendszer, melynek így általános megoldását nyerjük, esetleg hasznosnak bizonyulhat a differenciálegyenletek elméletében.

3. Tétel. Az $u: \mathbb{R}^{2(n-1)} \rightarrow \mathbb{R}$ C_c^∞ függvény akkor és csak akkor megoldása a

$$(6) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial y_e} - \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial x_e} \right) u = 0 \quad (1 \leq e, k \leq n-1)$$

ultrahiperbolikus parciális differenciálegyenlet-rendszernek, ahol $u = u(x, y)$, $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ és $y = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, ha létezik olyan $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

C_c^∞ függvény, melyre

$$R_1^n f(\xi, \eta) = \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{q_i}{q_n} \right)^2 \right)^{1/2} \times \\ \times u \left(\frac{p_1 + q_1}{q_n}, \dots, \frac{p_{n-1} + q_{n-1}}{q_n}, \frac{p_1 - q_1}{q_n}, \dots, \frac{p_{n-1} - q_{n-1}}{q_n} \right),$$

ahol p_i és q_i ($1 \leq i \leq n-1$) a ξ -n és η -n átmenő egyenes Plücker-koordinátái.

Bizonyítás. Egyszerűen vegyük a $\Gamma = \begin{pmatrix} U & U \\ U & -U \end{pmatrix}$ mátrixot (4)-ben, ahol U az $(n-1) \times (n-1)$ -es egységmátrix. ■

Radon-transzformációk euklidészi téren

E fejezetben bizonyos Radon transzformáció-osztályokat fogunk vizsgálni, amely természetesen új megközelítési módot követel. Ez abban nyilvánul meg, hogy a konkrét formulák és leírások helyett ebben a két szakaszban a Radon transzformáció-osztályok általános tulajdonságainak vizsgálatáé a főszerep. Mindkét itt vizsgálandó Radon transzformáció-osztály a klasszikus $(n-1, n)$ -dimenziós Radon transzformáció általánosítása.

Az első szakaszban az úgynevezett általánosított Radon transzformációval foglalkozunk, mely bizonyos értelemben a legközvetlenebb általánosítás.

Definíció. Legyen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ minden $\mathcal{H}$ hipersíkon integrálható a $\mu: \mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvénnyel szorzott szokásos felületmérték szerint ($\mathbb{P} = G(n-1, n)$ a hipersíkok Grassmann sokasága). Ekkor az f μ -szerinti általánosított Radon transzformáltja az az $R_\mu f: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyre

$$R_\mu f(\mathcal{H}) = \int_{\mathcal{H}} f(x) \mu(x, \mathcal{H}) dx.$$

Ennek a Radon transzformáció-osztálynak a vizsgálata igen bőséges irodalommal rendelkezik, különösen, ha speciális eseteit is ideszámítjuk [7,41,66,78,80,84,87,88]. A vizsgálatok legfőbb célja pedig annak eldöntése, hogy milyen μ függvény esetén lesz az R_μ Radon transzformáció invertálható.

Két fő típusa van a μ függvényre kiszabott, az invertálhatósághoz elegendő feltételeknek, melyek alapvetően különböznek szemléletükben is. Az egyik típus, amikor is regularitási feltételeket adnak meg, legszebb reprezentánsa az a Markoe-tól és Quinto-tól származó tétel, mely szerint ha μ analitikus, akkor az R_μ Radon transzformáció lokálisan invertálható, vagyis az elég kicsiny tartójú f függvények meghatározhatók az $R_\mu f$ Radon transzformáltjukból [7,78].

A másik típushoz tartoznak azok az esetek, amikor a μ függvényre invariancia feltételeket szabnak [84,87]. Ennek egyik legszebb példája Quinto-tól származik, mely szerint, ha az R_μ Radon transzformáció forgás-invariáns, vagyis minden origó körüli ϕ forgásra és f függvényre $(R_\mu f) \circ \phi = R_\mu(f \circ \phi)$, akkor invertálható is (természetesen bizonyos alapvető analitikus feltételek is szükségesek).

Mi egy az utóbbi esethez tartozó feltételt fogunk vizsgálni, mégpedig azt, amikor az R_μ Radon transzformáció eltolás-invariáns, vagyis minden τ eltolásra

és f függvényre $(R_\mu f) \circ \tau = R_\mu(f \circ \tau)$. Kiderítjük, hogy ez a Radon transzformáció-osztály nem más mint az exponenciális Radon transzformáció [106] egy általánosítása, majd bebizonyítjuk, hogy invertálható és teljesíti a tartótételt [66].

A második szakaszban más módon általánosítjuk a Radon transzformációt. Abból az egyszerű megfigyelésből indulunk ki, hogy minden hipersík előállítható egy tetszőlegesen választott, de rögzített hipersíkból egy origó körüli forgással és egy origóból végzett nagyítással. Ha most a rögzített hipersíkot egy tetszőleges hiperfelületre cseréljük, ugyanezen forgatások és nagyítások adnak egy hiperfelület halmazt és az új Radon transzformáció éppen ezen hiperfelületeken fog integrálni.

Definíció. Legyen $f \in D(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}$ egy tetszőleges hiperfelület és $\mathcal{H}$ az $\mathbb{R}^n$ tér origót fixen hagyó hasonlóságainak halmaza. Ekkor az f $\mathcal{S}$ -szerinti Radon transzformáltja az az $R_{\mathcal{S}}f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyre

$$R_{\mathcal{S}}f(H) = \int_{H\mathcal{S}} f(x)dx \quad (H \in \mathcal{H}),$$

ahol dx a $H\mathcal{H}$ hiperfelület szokásos felületmértéke. Az $\mathcal{S}$ hiperfelületet az $R_{\mathcal{S}}$ Radon transzformáció alapgörbójének nevezzük.

Természetesen az itt felvetődő legfőbb kérdés az, hogy milyen $\mathcal{S}$ hiperfelületek esetén lesz a megfelelő Radon transzformáció invertálható. Erre a problémára nincs igazán jó válasz magasabb dimenziókban. Két dimenziós téren az eddigi legáltalánosabb jellegű eredményt Boman bizonyította [6]-ban. Eszerint ha $\mathcal{S}$ analitikus és rendelkezik néhány további merőben analízisbeli tulajdonsággal, akkor az $R_{\mathcal{S}}$ Radon transzformáció invertálható. Sajnos ez az eredmény teljességgel értelmezhetetlen geometriai úton, bár a kérdés nyilván geometriai. Mégis ennek a feltételnek van egy geometriai következménye, mely minden valószínűség szerint éppen a valódi döntő feltétel az invertálhatósághoz. Ez a geometriai feltétel az, hogy az $\mathcal{S}$ -ből generált hiperfelület-családnak át kell haladni minden egyes ponton minden irányban.

A második szakaszban az olyan $\mathcal{S}$ hiperfelületekkel foglalkozunk, melyek átmennek az origón, vagy a végtelen távoli ponton. Két dimenzióban szükséges és elegendő feltételt adunk az $\mathcal{S}$ görbére úgy, hogy a hozzá tartozó $R_{\mathcal{S}}$ Radon transzformáció invertálható legyen. Feltételünk, mely az $\mathcal{S}$ origótól legtávolabbi illetve origóhoz legközelebbi pontjában követeli meg a görbület létét, könnyen láthatólag ekvivalens a fentebb bemutatott geometriai feltétellel. Magasabb dimenzióban hasonló de csak elégséges feltételt adunk.

2.1. Eltolás-invariáns Radon-transzformációk

Most is paraméterezzük úgy a hipersíkok $\mathbb{P}^n$ sokaságát az $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ hengeren, hogy $\xi(\omega, p) = \xi(-\omega, -p)$ és ennek megfelelően értelmezzük az általánosított Radon transzformációt a következő módon.

Definíció. Legyen $\mu \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times S^{n-1} \times \mathbb{R})$ egy szigorúan pozitív függvény. Ekkor a μ -szerinti általánosított Radon transzformáció

$$(1) \quad R_\mu: C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_c^\infty(S^{n-1} \times \mathbb{R}), \quad R_\mu f(\omega, p) = \int_{H(\omega, p)} f(x) \mu(x, \omega, p) dx,$$

ahol $H(\omega, p) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \omega \rangle = p\} \in \mathbb{P}^n$, dx ezen a felszín mérték, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a skaláris szorzat az $\mathbb{R}^n$ téren és $\mu(x, \omega, p) = \mu(x, -\omega, -p)$.

Csakúgy mint a klasszikus esetben, most is fontos szerep jut vizsgálatainkban a duális Radon transzformációnak, melyet a következőképpen értelmezzünk.

Definíció. Legyen $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times S^{n-1} \times \mathbb{R})$ egy szigorúan pozitív függvény. Ekkor a λ -szerinti általánosított duális Radon transzformáció

$$(2) \quad R_\lambda^t: C_c^\infty(S^{n-1} \times \mathbb{R}) \rightarrow C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \quad R_\lambda^t f(x) = \int_{S^{n-1}} f(\omega, \langle \omega, x \rangle) \lambda(x, \omega, \langle \omega, x \rangle) d\omega,$$

ahol $d\omega$ az S^{n-1} egységgömb felszínmértéke és $\lambda(x, \omega, p) = \lambda(x, -\omega, -p)$.

A fejezet elején előadott koncepció az eltolás-invariáns Radon transzformációra ebben a paraméterezésben $R_\mu f_a(\omega, p) = R_\mu f(\omega, p - \langle a, \omega \rangle)$ (ahol $f_a(x) = f(a + x)$).

Ebben a szakaszban tovább általánosítjuk ezt az ideát azzal, hogy nem a teljes felcserélhetőséget követeljük meg, hanem az alábbi felcserélhetőségi relációt.

Definíció. Az R_μ μ -szerinti általánosított Radon transzformációt és az R_λ^t λ -szerinti általánosított duális Radon transzformációt eltolás-invariánsnak nevezzük, ha létezik olyan $\nu, \eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times S^{n-1} \times \mathbb{R})$, amelyre

$$R_\mu f_a(\omega, p) = \nu(a, \omega, p) R_\mu f(\omega, p - \langle \omega, a \rangle) \text{ és } (R_\lambda^t f)_a = R_\lambda^t (f(\omega, p - \langle \omega, a \rangle) \eta(a, \omega, p)),$$

ahol $f_a(x) = f(a + x)$.

Nyilvánvalóan a klasszikus esetben $\nu \equiv \eta \equiv 1$ és ha $\nu \equiv \eta$, akkor persze az $R^t \circ R$ operátor eltolás-invariáns. Quinto [84]-ben akkor nevez egy Radon transzformációt eltolás-invariánsnak, ha az $R^t \circ R$ operáció eltolás-invariáns.

Természetesen ez az elképzelés általában nagyobb osztályát fedi a Radon transzformációknak, mint a miénk, mégis a következőkben ki fog derülni, hogy a Quinto által használt két-fibrációs modell, melyet Gelfand vezetett be a Radon transzformáció általánosítására [28]-ban, szűkebb osztály vizsgálatát eredményezte, mint a miénk. A vizsgált modell szűkössége mindjárt látszik Quinto (20)-as és (21)-es formulájából a [84] cikkben. (Lásd 30. oldal itt.)

E szakasznak az első és döntő eredménye az eltolás-invariáns általánosított Radon transzformációk pontos meghatározása. Kiderítjük, hogy ez nem más, mint a Tretiak—Metz-féle exponenciális Radon transzformáció [106] alábbi általánosítása.

Definíció. Az R_μ μ -szerinti általánosított Radon transzformációt és az R_λ^t λ -szerinti általánosított duális Radon transzformációt exponenciálisnak nevezzük, ha

$$\mu(x, \omega, p) = \mu_1(\omega, p) \times \exp(\langle \mu_2(\omega), x \rangle) \text{ és } \lambda(x, \omega, p) = \lambda_1(\omega, p) \times \exp(\langle \lambda_2(\omega), x \rangle),$$

ahol $\mu_1, \lambda_1 \in C^\infty(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ és $\mu_2, \lambda_2: S^{n-1} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}^n$.

Ezen eredmény birtokában, miközben tisztázzuk a Quinto-féle eltolás-invariancia viszonyát a mi koncepciókhöz képest, inverzformulát adunk erre a Radon transzformáció-osztályra és bizonyítjuk a tartótételt is.

Ez utóbbi tételek csak két dimenzióban voltak ismertek ezelőtt [52,106], de a gyakorlatban is hasznosnak bizonyulhatnak, hiszen Markoe [77] bizonyította, hogy a változó gyengülésű röntgen sugár transzformáció ('variably attenuated X-ray transform') inverziója visszavezethető az exponenciális Radon transzformáció inverziójára. Orvosi alkalmazásokra is példát találhatunk [96]-ban. Másrészt azonban e visszavezetés nélkül is világos, hogy az exponenciális Radon transzformáció a változó gyengülésű röntgen sugár transzformáció elsőrendű közelítésének is tekinthető.

1. Tétel. Az R_μ általánosított Radon transzformáció a $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ függvénytéren akkor és csak akkor eltolás-invariáns, ha exponenciális.

Bizonyítás. Az exponenciális Radon transzformáció nyilván eltolás-invariáns, így elég a fordított állítással foglalkoznunk. Az eltolás-invariancia definíciójából kapjuk, hogy

$$(3) \quad \mu(x - a, \omega, p) = \nu(a, \omega, p)\mu(x, \omega, p + \langle \omega, a \rangle),$$

ahol $x \in H(\omega, p + \langle \omega, a \rangle)$. Legyen $a = a\omega + \beta\bar{\omega}_a$ és $x = p\omega + a + \kappa\bar{\omega}_x$, ahol $\bar{\omega}_a$ és $\bar{\omega}_x$ merőleges az $\omega \in S^{n-1}$ vektorra. Ekkor a $\kappa = 0$ eset felhasználásával a $\nu(a, \omega, p)$ faktor kifejezhető a (3) egyenletből. Most $a = 0$ és $\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_x$ esetében adódik, hogy

$$\frac{\mu(p\omega + (\beta + \kappa)\bar{\omega}_a, \omega, p)}{\mu(p\omega, \omega, p)} = \frac{\mu(p\omega + \beta\bar{\omega}_a, \omega, p)}{\mu(\omega, \omega, p)} \times \frac{\mu(p\omega + \kappa\bar{\omega}_a, \omega, p)}{\mu(p\omega, \omega, p)},$$

amiért a

$$\beta \mapsto \mu(p\omega + \beta\bar{\omega}_a, \omega, p) / \mu(p\omega, \omega, p)$$

leképezés folytonos homomorfizmus az $(\mathbb{R}, +)$ csoportról az $(\mathbb{R}_+, \bullet)$ csoportra. Amint az jól ismert, ez a leképezés csak az exponenciális lehet:

$$\mu(p\omega + \beta\bar{\omega}_a, \omega, p) = \bar{\mu}_1(\omega, p) \exp(\beta\bar{\mu}(\bar{\omega}_a, \omega, p)),$$

ahol $\bar{\mu}_1(\omega, p) = \mu(p\omega, \omega, p)$. A $\bar{\mu}$ függvény első paraméterében való linearitása azonnal következik, ha ezt a formulát előző egyenletünkbe írjuk, és feltételezzük, hogy $\bar{\omega}_a \neq \bar{\omega}_x$. Tehát létezik olyan $\bar{\mu}_2(\omega, p) \perp \omega$ vektor-függvény, melyre $\bar{\mu}(\bar{\omega}_a, \omega, p) = \langle \bar{\omega}_a, \bar{\mu}_2(\omega, p) \rangle$. Ha most az $a = a\omega$ értékkel írjuk a μ függvényt jelenlegi formájában (3)-ba, a

$$\bar{\mu}_1(\omega, p) \exp(\langle \kappa\bar{\omega}_x, \bar{\mu}_2(\omega, p) \rangle) = \nu(a\omega, \omega, p) \bar{\mu}_1(\omega, p + a) \exp(\langle \kappa\bar{\omega}_x, \bar{\mu}_2(\omega, p + a) \rangle)$$

egyenlet adódik. A κ -tól való függőség ebből azonnal adja, hogy $\bar{\omega}_x$ merőleges a $\bar{\mu}_2(\omega, p + a) - \bar{\mu}_2(\omega, p)$ vektorra. Csakhogy $\bar{\omega}_x$ tetszőleges az ω -ra merőleges vektor lehet, így például $\bar{\mu}_2(\omega, p + a) - \bar{\mu}_2(\omega, p)$ is, amiért ez utóbbi csak nulla lehet, vagyis $\bar{\mu}_2$ nem függhet a második argumentumától. Legyen $\tilde{\mu}_2(\omega) = \bar{\mu}_2(\omega, 0)$, $\hat{\mu}_2(\omega) \in C(S^{n-1})$, $\mu_2(\omega) = \tilde{\mu}_2(\omega) + \omega\hat{\mu}_2(\omega)$ és $\mu_1(\omega, p) = \bar{\mu}_1(\omega, p) \exp(-p\tilde{\mu}_2(\omega))$. Ekkor

$$\mu(x, \omega, p) = \mu_1(\omega, p) \exp(\langle \mu_2(\omega), x \rangle),$$

ami éppen a bizonyítandó volt. ■

2. Tétel. Az R_λ^t általánosított duális Radon transzformáció a $C_c^\infty(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ függvénytéren akkor és csak akkor eltolás-invariáns, ha exponenciális.

Ennek a tételnek a bizonyítását elhagyjuk, mert az az előző tétel teljes analógjaként könnyen bizonyítható. A következő két tétel teljesen tisztázza a mi definíciónk viszonyát a Quinto féle eltolás-invarianciához.

3. Tétel. Legyen R_μ és R_λ^t exponenciális. Az $R_\lambda^t \circ R_\mu$ operátor akkor és csak akkor eltolás-invariáns, ha $\mu_1(\omega, p)\lambda_1(\omega, p)$ nem függ a p paramétertől és $\mu_2(\omega) + \lambda_2(\omega) \equiv 0$.

Bizonyítás. Nyilván, az $R_\lambda^t \circ R_\mu$ operátor akkor és csak akkor eltolás-invariáns, ha $\nu \equiv \eta$, vagyis

$$\frac{\mu_1(\omega, p) \exp(\langle -\mu_2(\omega), a \rangle)}{\mu_1(\omega, p + \langle a, \omega \rangle)} = \frac{\lambda_1(\omega, p + \langle a, \omega \rangle) \exp(\langle \lambda_2(\omega), a \rangle)}{\lambda_1(\omega, a)}.$$

Legyen $a = a\omega + \beta\bar{\omega}$, ahol $\omega \perp \bar{\omega}$. A β paramétertől való függés azonnal adja, hogy $\mu(\omega) + \lambda_2(\omega) \equiv 0$, amiből már az első állításunk is nyilvánvaló. ■

Quinto formulái az eltolás-invariáns Radon transzformációra a (20) és (21) szám alatt találhatók a ‘Proposition 4.1’-ben [84]. Eszerint

$$(20^*) \quad Rf(\omega, p) = \int_{H(\omega, p)} f(x) \mu_1(\omega, p) \exp(\langle z, x \rangle) dx,$$

$$(21^*) \quad R^t f(x) = \exp(\langle -z, x \rangle) \int_{S^{n-1}} f(\omega, \langle \omega, x \rangle) \frac{a(\omega)}{\mu_1(\omega, \langle \omega, x \rangle)} d\omega,$$

ahol Quinto jelöléseivel éltünk, kivéve a $\mu_1(\omega, p) = \sqrt{m(0)a(\omega)/n(\langle \omega, p \rangle)}$ kifejezést. Mivel itt z konstans, ez nyilvánvalóan kevésbé általános mint a mai formuláink. A következő tétel bizonyítása közben rá fogunk mutatni, hogy a két-fibrációs modell mikor szorította Quinto-t az egyszerűbb eredményre.

4. Tétel. Az $R_\lambda^t \circ R_\mu$ operátor akkor és csak akkor eltolás-invariáns, ha minden $y \in \mathbb{R}^n$ és $\omega \in y^\perp \cap S^{n-1}$ esetén a

$$\lambda(x, \omega, \langle \omega, x \rangle)(\mu(x + y, \omega, \langle \omega, x \rangle) + \mu(x - y, \omega, \langle \omega, x \rangle)),$$

függvény nem függ az x -től, ha $x \perp y$.

Bizonyítás. Quinto módszerét és jelöléseit fogjuk használni [84]. Legyen K az $SO(n)$ csoport, L az $e_x = x/|x|$ izotrópia részcsoportha és M az $e \in S^{n-1} \cap E_x^\perp$ izotrópia részcsoportha. Továbbá legyen dk, dl és dm az invariáns mérték ezen a csoportokon, melyekkel a teljes mérték 1. Ekkor

$$R_\lambda^t \circ R_\mu f(x) = C \int_K \int_0^\infty \int_L r^{n-2} f(x + rkle) \times \\ \times \lambda(x, ke_x, \langle ke_x, x \rangle) \mu(x + rkle, ke_x, \langle ke_x, x \rangle) dl dr dk,$$

ahol $C = |S^{n-1}| |S^{n-2}|$. Legyen $\bar{a}(x, y, \omega) = \lambda(x, \omega, \langle \omega, x \rangle) \mu(x + y, \omega, \langle \omega, x \rangle)$. Ezt használva, felcserélve az l és k szerinti integrálásokat és helyettesítve kl^{-1} -et a k helyére, a dk jobb-invarianciája miatt adódik, hogy

$$R_\lambda^t \circ R_\mu f(x) = C \int_0^\infty \int_K r^{n-2} f(x + rke) \bar{a}(x, rke, ke_x) dk dr.$$

Legyen dk_m a K -invariáns mérték a K/M csoporton, melyre $dk = dmdk_m$. Ekkor

$$(4) \quad R_\lambda^t \circ R_\mu f(x) = C \int_0^\infty \int_{K/M} \left(r^{n-2} f(x + rke) \int_M \bar{a}(x, rke, ke_x) dm \right) dk_m dr.$$

A belső integrál az M csoport felett, az $|S^{n-2}|$ szorzótól eltekintve, nyilván éppen az $\bar{a}(x, rke, ke_x)$ integrálja az $S^{n-1} \cap H(ke, 0)$ nagykörökön. Jelöljük ezt $\hat{a}(x, rke, ke)$ -vel. Ekkor

$$(5) \quad R_\lambda^t \circ R_\mu f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x + y) \frac{\hat{a}(x, y, y/|y|)}{|y|} dy.$$

Felhasználva az $R_\lambda^t \circ R_\mu$ operátor eltolás-invarianciáját, itt Quinto két speciális disztribúcióra kiszámította $R_\lambda^t \circ R_\mu f$ -et, amelyből az

$$(6) \quad \hat{a}(x, 0, \omega) = \hat{a}(0, 0, \omega) \text{ és ha } x \perp \omega, \text{ akkor az } \hat{a}(x, r\omega, \omega) = \hat{a}(0, r\omega, \omega),$$

összefüggéseket nyerte az $\omega \in S^{n-1}$ egységvektorra. Ez utóbbi összefüggést beírva az (5) egyenletbe, egyszerűen látható, hogy ez a feltétel nem csak szükséges, de elégséges is, ahhoz, hogy az $R_\lambda^t \circ R_\mu$ operátor eltolás-invariáns legyen. Ugyanakkor az első feltétel (6)-ban nyilván következik a másodikból.

Mivel pedig a „ $\sim$ ” transzformáció invertálható az S^{n-1} -en értelmezett páros függvények terén [52], az első egyenlet (6)-ban ekvivalens az $\bar{a}(x, 0, \omega) = \bar{a}(0, 0, \omega) = a(\omega)$ egyenlettel. Itt használta ki a két-fibrációs modell szerkezetét Quinto, amikor lényegében az a négyzetgyökből számolta ki a μ mértéket.

Sajnos ez esetünkben nem kivitelezhető, mert a (6) második egyenletében nem feltétlen páros függvény szerepel, így az ekvivalens azzal, hogy a páros része az integrandusnak nulla. Ez éppen a tételbeli feltétel. ■

Legyen most R_μ és R_λ^t exponenciális, mégpedig a következő alakú, ahol az egyszerűség érdekében R jelöli a Radon transzformációt és R^t a duálisát:

$$Rf(\omega, p) = \int_{H(\omega, p)} f(x) \mu_1(\omega, p) \exp(\langle \mu_2(\omega), x \rangle) dx,$$

$$R^t f(x) = \exp(\langle -z, x \rangle) \int_{S^{n-1}} f(\omega, \langle \omega, x \rangle) \frac{\exp(\langle \mu_2(\omega), x \rangle)}{\mu_1(\omega, \langle \omega, x \rangle)} d\omega.$$

Ekkor az $R_\lambda^t \circ R_\mu$ operátor eltolás-invariáns a $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ függvénytéren és nyilván folytonos lineáris leképezés a $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ térben. Eszerint léteznie kell egy T temperált disztribúciónak [16], melyre $R_\lambda^t \circ R_\mu f = T * f$, ahol $*$ jelöli a konvolúció operátort. Az F Fourier transzformáció felhasználásával ez az alábbi inverzformulához vezet:

$$(7) \quad f = R_\lambda^t \circ R_\mu f * F^{-1}(1/FT).$$

5. Tétel. *Ha R_μ exponenciális, vagyis eltolás-invariáns, akkor az $R_\lambda^t \circ R_\mu$ operátor invertálható a $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ téren a (7) formulával, ahol*

$$T(x) = \int_{S^{n-2} \perp x} \exp(\langle \mu_2(\omega), x \rangle) d\omega.$$

Mivel az (5) formula azonnal adja a tétel állítását, a bizonyítást az olvasóra bízuk. A következő, ebben a szakaszban utolsó tételünk a tartótételt önti formába, amit Hertle bizonyításának általánosításával igazolunk magasabb dimenzióra [57].

6. Tétel. *Legyen R_μ exponenciális Radon transzformáció és f egy Lipschitz-folytonos kompakt tartójú függvény $\mathbb{R}^n$ -en. Ha $r > 0$ és $R_\mu f(\omega, p) = 0$ $|p| \leq r$ esetén, akkor az $f(x) = 0$, ha $|x| \leq r$.*

Bizonyítás. Ha U egy forgatás $\mathbb{R}^n$ -en, akkor $R_\mu f \circ U = R_{\bar{\mu}}(f \circ U)$, ahol $\bar{\mu}_1 = \mu_1 \circ U$ és $\bar{\mu}_2 = U^{-1} \circ \mu_2 \circ U$. Mármint $\bar{\mu}$ szintén exponenciális, így elegendő megmutatnunk, hogy f nulla minden az első koordináta tengelyre merőleges hipersíkon, ha $x_1 = p > r$. Mivel μ_1 szigorúan pozitív, egyszerűen elhagyható. Elég tehát bizonyítanunk, hogy

$$(8) \quad \int_{H(\omega, p)} x_i f(x) \exp(\langle \mu_2(\omega), x \rangle) dx = 0 \quad 1 \leq i \leq n,$$

ahol $\omega = (1, 0, \dots, 0)$ és $x = (x_1, \dots, x_n)$, mert utána teljes indukcióval az x_i faktor kicserélhető az $x_1, \dots, x_n$ faktorok tetszőleges polinomjára, ami már Weierstrass tétele értelmében implikálja, hogy $f \equiv 0$ a $H(\omega, p)$ hipersíkon. (8) bizonyításához legyen U_φ^i az i -edik és az első koordinátatengely által feszített síkban való φ szöggel való forgatás, vagyis

$$U_\varphi^i(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \cos \varphi + x_i \sin \varphi, x_2, \dots, x_{i-1}, -x_1 \sin \varphi + x_i \cos \varphi, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Differenciálva az $R_\mu f(U_\varphi^i \omega, p) = 0$ egyenletet φ szerint, a $\varphi = 0$ helyen adódik, hogy

$$0 = \int (-x_i \partial_1 f(x) + p \partial_i f(x)) \exp(\langle \mu_2(\omega), x \rangle) dx + \\ + \int f(x) \exp(\langle \mu_2(\omega), x \rangle) (\langle \partial_i \mu_2(\omega), x \rangle + p \mu_2^i - x_i \mu_2^1) dx,$$

ahol az integrálást a $H(\omega, p)$ hipersíkon kell érteni és μ_2^i az i -edik koordináta függvénye a μ_2 vektor-függvénynek. Legyen a (8) baloldalán lévő függvény $f_i(p)$. Ezzel átírva az utóbbi differenciálegyenletünket, azt látjuk, hogy

$$\frac{d}{dp} f_i(p) = \sum_{j=2}^n \partial_i \mu_2^j(\omega) f_j(p),$$

amiből integrálással kapjuk, hogy

$$(f_2(p), \dots, f_n(p)) = (f_2(0), \dots, f_n(0)) \exp([\partial_i \mu_2^j(\omega)]p)$$

ahol $[\partial_i \mu_2^j(\omega)]$ a μ_2 függvény deriváltjaiból szerkesztett $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrix. Ez érvényes minden $p \geq r$ esetén, így mivel a baloldal kompakt tartójú a jobb oldalnak is annak kell lennie, amiért az $(f_2(0), \dots, f_n(0)) \equiv 0$. Ez bizonyítja állításunk. ■

2.2. Invertálható Radon-transzformációk alapgörbéi

Radon legelső problémájának, egy a síkon értelmezett függvény meghatározásának az egyeneseken vett integráljaiból, igen sok általánosítása ismert. A mi szempontunkból a legérdekesebb az, amit Cormack vizsgált [11] cikkében. Ebben a cikkében Cormack inverzformulákat adott, arra a Radon transzformációra, amikor az egyenesek menti integrálokat felcseréljük az úgynevezett α -görbéken való integrálással. Az α -görbéket legegyszerűbben polár-koordinátákkal adhatjuk meg, az $r^\alpha \cos(\alpha(\psi - \varphi)) = p^\alpha$ egyenlettel, ahol α valós és nem nulla, valamint p és φ rögzített.

Ez a görbe-család sok szempontból meglehetősen nagy, hiszen tartalmazza a legismertebb görbéket, mint például a parabolát, egyenest, köröket stb. Ugyanakkor minden egyes görbe rendkívül szabályos mintsem hogy azt hihetnénk, hogy ez a létező legbővebb görbe-család, melyből invertálható Radon transzformáció nyerhető. Felmerül tehát a probléma, hogy találjuk meg a legnagyobb olyan görbe-osztályt, melyből invertálható Radon transzformáció származik.

Ebben a szakaszban ezt a problémát fogjuk lényegében megoldani. Arra a kérdésre viszont, hogy egy görbe mikor generál invertálható Radon transzformációt sajnos ez csak részleges felelet. Mindazonáltal állításainkat nem a lehetséges maximális általánosságban mondjuk ki, hogy jobban érzékelhető legyen az alkalmazott bizonyítási technika. Könnyen látható egyébként, hogy ez a technika sokkal többre is képes lenne közvetlenül e kérdéskörben is.

Definíció. Legyen $\mathcal{S}$ egy Jordan görbe a valós síkon, mely átmegy az origón. Legyen S ennek egy pontja. Minden P pontra a síkon pontosan egy $\mathcal{A}_P$ hasonlóság létezik, mely az S pontot a P pontba viszi és az origót fixálja. Az

$$R_{\mathcal{S}}f(P) = \int_{\mathcal{A}_P \mathcal{S}} f(X) dX$$

függvénytranszformációt az $\mathcal{S}$ alapgörbe szerinti Radon transzformációnak nevezzük, ahol dX az $\mathcal{A}_P \mathcal{S}$ görbe ívhosszmértéke.

Legyen S az $\mathcal{S}$ görbe origótól legtávolabbi pontja és tételezzük fel, hogy $|OS| = 1$, valamint, hogy $\mathcal{S}$ két része, melyre S és az origó osztja, a polár-koordináta rendszerben az $(r, \varphi(r))$ és $(r, \psi(r))$ paraméterezéssel rendelkezik az OS szakaszon és S ebben az $(1, 0)$ paraméterű pont.

Definiáljuk továbbá az alábbi függvénytereket minden $m > 0$ valós számra:

$$L_m^2(\mathbb{R}^n) = \{f \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n) : |X| \leq 1/m \Rightarrow f(X) = 0\} \text{ és } L_*^2(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{m>0} L_m^2(\mathbb{R}^n).$$

1. Tétel. Ha $\mathcal{S}$ szimmetrikus az OS tengelyre és van görbülete az S pontban, $\varphi, \psi \in C^1((0, 1])$, akkor

- i) $R_{\mathcal{S}}: L_m^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L_{\infty}^2(\mathbb{R}^2)$ folytonos,
- ii) ha $f \in L_*^2(\mathbb{R}^2)$ és $R_{\mathcal{S}}(f) = 0$ $|X| \leq 1/m$ esetén, akkor $f \in L_m^2(\mathbb{R}^2)$ és
- iii) $R_{\mathcal{S}}: L_*^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L_{\infty}^2(\mathbb{R}^2)$ egy-egy értelmű.

Az 1. ábra alapján nyilvánvaló, hogy $\alpha(\varepsilon)$ $\pi/2$ -höz tart, ha ε a nullához közelít. Ebből viszont adódik, hogy

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon) \operatorname{tg} \varphi(1-\varepsilon)} = 0.$$

A síkgörbék elméletének alapjaiból viszont tudjuk, hogy ha $P(\varepsilon)$ és tükörképe $P'(\varepsilon)$ is az S ponthoz tart. akkor a rajtuk és S -en átmenő kör $\rho(\varepsilon)$ sugara ϱ -hoz, a símuló kör sugarához tart. Ezért ha ε a nullához tart, akkor

$$\begin{aligned} \rho &= \lim \rho(\varepsilon) = \lim |SP(\varepsilon)| \operatorname{tg} \alpha(\varepsilon)/2 \\ &= \lim \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + (1-\varepsilon)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi(1-\varepsilon)}}{2} \times \frac{(1-\varepsilon) \operatorname{tg} \varphi(1-\varepsilon)}{\varepsilon} \\ &= \lim \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi(1-\varepsilon)}{2\varepsilon} = \lim \frac{\varphi^2(1-\varepsilon)}{2\varepsilon}. \end{aligned}$$

Két következménye is van ennek a számolásnak:

$$(*) \quad \sqrt{2\rho} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(1-\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} \quad \text{és} \quad -\rho = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \dot{\varphi}(1-\varepsilon)\varphi(1-\varepsilon),$$

melyek azonnal adják a fentebbi állításunk, és így a (2) integrálegyenlet az alábbi formát ölti:

$$(2') \quad (R_S f)_k(r) = 2 \int_{1/n}^r f_k(t) \frac{K(r,t)}{\sqrt{r-t}} dt,$$

ahol $K(r,t) = \overline{K}(r,t)\sqrt{r-t}$.

Mivel $K(t,t) = \sqrt{2\rho t} \neq 0$ az $[1/n, 1/m]$ intervallumon, ez az integrálegyenlet (valójában kettő: a valós és a képzetes részre) teljesíti a [87]-es cikk 'Theorem B' tételének minden feltételét, amely viszont azt állítja, hogy integrálegyenletünknek egyetlen megoldása létezhet az $[1/n, 1/m]$ intervallumon, ami nyilván csak a nulla lehet. Ezt kell bizonyítanunk. ■

Amint az könnyen látható, e tételünk két lényegi feltételen múlik:

(α) Az $\mathcal{S}$ görbe szimmetrikus az OS tengelyre.

(β) Az $\mathcal{S}$ görbe minden origó középpontú kört pontosan két pontban metsz.

Ezek közül azonban, amint az alábbi tétel mutatja, az (α) feltétel szükségtelen.

2. Tétel. *Ha $\mathcal{S}$ -nek van görbülete az S pontban és $\varphi, \psi \in C^1([0, 1])$, akkor az (i), (ii) és (iii) állítások igazak.*

Bizonyítás. Ismét csak a második állítással foglalkozunk. Az előző bizonyítás menetében a szimmetria mellőzése először a (2) formulánál jelent változást. Jelen esetben ugyanis

(2'')

$$(R_S f)_k(r) = 2 \int_{1/n}^r f_k(t) \left(e^{ik\varphi(\frac{t}{r})} \sqrt{1 + \frac{t^2}{r^2} \dot{\varphi}^2\left(\frac{t}{r}\right)} + e^{ik\psi(\frac{t}{r})} \sqrt{1 + \frac{t^2}{r^2} \dot{\psi}^2\left(\frac{t}{r}\right)} \right) dt,$$

ahol i a képzetes egység. Jelölje g^r és g^i a g függvény valós és képzetes részét, g és h pedig a (2'') integrálegyenlet magfüggvényének valós és képzetes részét. Ezeket felhasználva a (2'') integrálegyenlet az alábbi integrálegyenlet rendszerre vezet.

$$(R_S f)_k^r(r) = 2 \int_{1/n}^r f_k^r(t) g\left(\frac{t}{r}\right) dt = 2 \int_{1/n}^r f_k^i(t) h\left(\frac{t}{r}\right) dt$$

$$(R_S f)_k^i(r) = 2 \int_{1/n}^r f_k^r(t) h\left(\frac{t}{r}\right) dt + 2 \int_{1/n}^r f_k^i(t) g\left(\frac{t}{r}\right) dt,$$

ahol

$$g(x) = \cos(k\varphi(x)) \sqrt{1 + x^2 \dot{\varphi}^2(x)} + \cos(k\psi(x)) \sqrt{1 + x^2 \dot{\psi}^2(x)},$$

$$h(x) = \sin(k\varphi(x)) \sqrt{1 + x^2 \dot{\varphi}^2(x)} + \sin(k\psi(x)) \sqrt{1 + x^2 \dot{\psi}^2(x)}.$$

Ezekből egy kicsit hosszadalmas, de lényegében kézenfekvő számítás vezet az

$$\begin{aligned} & \int_{1/n}^q \left((R_S f)_k^i(r) \frac{g(r/q)}{r/q} - (R_S f)_k^r(r) \frac{h(r/q)}{r/q} \right) dr \\ &= 2 \int_{1/n}^q f_k^i(t) \int_t^q \left(\frac{g(t/r)g(r/q) + h(t/r)h(r/q)}{r/q} \right) dr dt, \\ & \int_{1/n}^q \left((R_S f)_k^i(r) \frac{h(r/q)}{r/q} - (R_S f)_k^r(r) \frac{g(r/q)}{r/q} \right) dr \\ &= 2 \int_{1/n}^q f_k^r(t) \int_t^q \left(\frac{g(t/r)g(r/q) + h(t/r)h(r/q)}{r/q} \right) dr dt, \end{aligned}$$

integrálegyenletekhez. Ezen integrálegyenleteknek ugyanaz a $B(t, q)$ magfüggvénye van, és mindkettőnek a baloldala nulla ha $q < 1/m$. Ahhoz tehát, hogy ugyanúgy bebizonyítsuk a tételt mint az előbb, elég bizonyítanunk, hogy $B(t, t) \neq 0$.

Az előző tétel bizonyításából tudjuk, hogy létezik olyan folytonos korlátos G és H függvény, melyre

$$g(x) = \frac{G(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad G(1) = 2\sqrt{\rho}, \quad \text{és} \quad h(x) = \frac{H(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad H(1) = 0.$$

Ezekkel

$$B(t, q) = q^2 \int_t^q \left(\frac{G(t/r)G(r/q) + H(t/r)H(r/q)}{r} \right) \left(\frac{r}{\sqrt{q^2 - r^2}\sqrt{r^2 - t^2}} \right) dr.$$

Mivel az integrandus első faktora egyenletesen tart $4\rho/t$ -hez ha q a t -hez tart és

$$\pi/2 = \int_t^q \frac{r}{\sqrt{q^2 - r^2}\sqrt{r^2 - t^2}} dr \quad [11, 52]$$

könnyen adódik $B(t, t) = 2\pi\rho t$, ami a fenti magyarázatok alapján bizonyítja a tételt. ■

A következő tétel könnyen bizonyítható az előzőhöz hasonló módon is, de úgy is könnyen adódik, ha invertáljuk a síkot.

Legyen $\mathcal{S}$ olyan végtelen görbe, mely a végtelenbe tart, ha paramétere a végtelenbe tart. Legyen $\mathcal{S}$ ennek az origóhoz legközelebbi pontja és tételezzük fel, hogy $|OS| = 1$, valamint az $\mathcal{S}$ két részét, melyre $\mathcal{S}$ osztja $\mathcal{S}$ -et, polárkoordinátákban az $(r, \varphi(r))$ és $(p, \psi(p))$ paraméterezi azon a félegyenesen, melyet $\mathcal{S}$ metsz ki az OS egyeneséből és nem tartalmazza az origót.

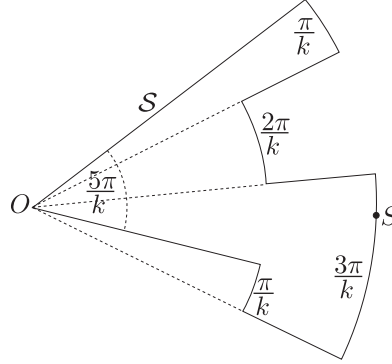
3. Tétel. *Ha $\mathcal{S}$ -nek van görbülete az S pontban és $\varphi, \psi \in C^1([0, 1])$, akkor*

- i) $R_{\mathcal{S}}: L^2(\{X \in \mathbb{R}^2: |X| \leq m\}) \rightarrow L_0^2(\mathbb{R}^2)$ folytonos,
 - ii) ha $f \in L_0^2(\mathbb{R}^2)$ és $R_{\mathcal{S}}(f) = 0$ ha $|X| \geq m$, akkor $f = 0$, ha $|X| \geq m$
 - iii) $R_{\mathcal{S}}: L_0^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L_0^2(\mathbb{R}^2)$ egy-egy értelmű,
- ahol $L_0^2(\mathbb{R}^2)$ a négyzetesen integrálható kompakt tartójú függvények tere.

A következőkben a (β) feltétel szükségességét indokló példákat mutatunk.

Példa. Legyen $f(r, \alpha) = F(r) \cos(k\alpha)$, ahol k természetes szám, továbbá

$$F(r) = \begin{cases} 0, & \text{ha } r \leq 1, \\ e^{-r^2/(r-1)}, & \text{ha } r > 1. \end{cases}$$



2. Ábra

Ekkor $f \in L_1^2(\mathbb{R}^2)$ és amint az könnyen látszik a 2. ábrából, $R_S f \equiv 0$. Nyilvánvalóan ez bizonyítja a (β) feltétel szükségességét a második tételben.

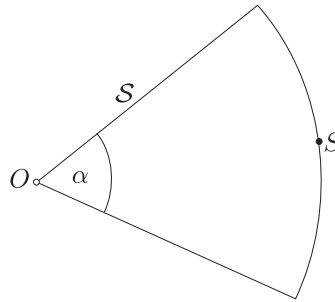
Példa. Legyen $\mathcal{S}$ az egységgör egy α szögű szektora, melyre

$$c = k \operatorname{ctg}(k\alpha) < -1/2$$

és

$$F(r) = -cr^{-1-c}.$$

Válasszuk az S pontot e görbe szimmetria tengelyén.



3. Ábra

Ekkor az $\mathcal{S}$ teljesíti az első tétel minden feltételét, ugyanakkor $R_S f \equiv 0$ és így $R_S: L_\infty^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L_\infty^2(\mathbb{R}^2)$ nem egy-egy értelmű. Másrésztől viszont ez a görbe arra is példa, hogy bár nem teljesíti a második tétel minden feltételét, mégis invertálható a hozzá tartozó Radon transzformáció.

A következőkben az első tétel analogonját bizonyítjuk magasabb dimenzióban.

Definíció. Legyen $\mathcal{S}$ egy olyan Jordan hiperfelület $\mathbb{R}^n$ -ben, mely átmegy az origón. Minden $f \in L^2_*(\mathbb{R}^n)$ függvényre az

$$R_{\mathcal{S}}f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R} \quad (R_{\mathcal{S}}f(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{AS}} f(X) dX)$$

függvényt az $\mathcal{S}$ hiperfelület szerinti Radon transzformáltnak nevezünk, ahol dX az $\mathcal{AS}$ szokásos felszínmértéke és $\mathcal{U}$ az origót fixen hagyó hasonlóságok halmaza. Az $\mathcal{S}$ hiperfelületet az $R_{\mathcal{S}}$ Radon transzformáció alapfelületének nevezzük.

Legyen S az $\mathcal{S}$ hiperfelület origótól legtávolabbi pontja. Tegyük fel, hogy $|OS| = 1$ és $\mathcal{S}$ hengersizmetrikus az OS tengelyre. Mivel $\mathcal{S}$ ezek szerint forgásfelület, legyen a megforgatott görbe polár-koordinátás egyenlete az OS paramétertartományon $(r, \varphi(r))$ hasonlóan, mint az első tételben.

Ez esetben ha $\mathcal{AS} = \mathcal{CS}$, akkor $R_{\mathcal{S}}f(\mathcal{A}) = R_{\mathcal{S}}f(\mathcal{C})$, vagyis a transzformált függvényeket levetíthetjük az $\mathbb{R}^n$ térre úgy, hogy minden $P \in \mathbb{R}^n$ pontra

$$R_{\mathcal{S}}f(P) = R_{\mathcal{S}}f(\mathcal{A}),$$

ahol $P = \mathcal{AS}$ és $\mathcal{A} \in \mathcal{U}$. A továbbiakban az $R_{\mathcal{S}}f$ függvényt éppen így fogjuk érteni.

4. Tétel. Ha az $(r, \varphi(r))$ görbének van görbülete az $r = 1$ paraméternél, akkor

- i) $R_{\mathcal{S}}: L^2_m(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2_{\infty}(\mathbb{R}^n)$ folytonos
- ii) ha $f \in L^2_*(\mathbb{R}^n)$ és $R_{\mathcal{S}}(f) = 0$ $|X| \leq 1/m$ esetén, akkor $f \in L^2_m(\mathbb{R}^n)$ és
- iii) $R_{\mathcal{S}}: L^2_*(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2_{\infty}(\mathbb{R}^n)$ egy-egy értelmű.

Bizonyítás. Amint az első tétel bizonyításában is, most is csak a (ii) állítás bizonyításával foglalkozunk, és feltesszük, hogy $f \in L^2_n(\mathbb{R}^n)$ és $m < n$. Legyen f_{lm} az f Y_{lm} melletti együtthatója a gömbi harmonikusokkal való sorfejtésében (ezt a következő fejezetben részletezzük), vagyis

$$f_{lm}(r) = \int_{S^{n-1}} f(r\omega) Y_{lm}(\omega) d\omega.$$

A Funk—Hecke tétel [95] a Dirac deltára azt adja, hogy

$$Y_{lm}(\eta) \frac{|S^{n-1}|}{C_m^{\lambda}(1)} C_m^{\lambda}(t) (1-t^2)^{\lambda} = \int_{S^{n-1}} \delta(\langle \omega, \eta \rangle - t) Y_{lm}(\omega) d\omega,$$

ahol $\lambda = (n-2)/2$, $|S^{n-1}|$ az S^{n-1} felszíne és C_m^{λ} az elsőfajú Gegenbauer polinom. Eszerint

$$(R_{\mathcal{S}}f)_{lm}(r) = \frac{|S^{n-1}|}{C_m^{\lambda}(1)} \int_0^1 f_{lm}(rt) C_m^{\lambda}(\cos \varphi(t)) r^{n-1} t^{n-2} \sqrt{1+t^2 \dot{\varphi}^2(t)} \sin^{n-2} \varphi(t) dt,$$

ahol $(R_S f)_{lm}$ az Y_{lm} -hez tartozó együttthatú $R_S f$ gömbi harmonikusokra való sorfejtésében. A $t = t/r$ helyettesítéssel

$$(4) \quad (R_S f)_{lm}(r) = \frac{|S^{n-1}|}{C_m^\lambda(1)} \int_{1/n}^r f_{lm}(t) C_m^\lambda\left(\cos \varphi\left(\frac{t}{r}\right)\right) \left(\frac{t}{r}\right)^{n-2} \times \\ \times \sqrt{1 + \frac{t^2}{r^2} \dot{\varphi}^2\left(\frac{t}{r}\right)} \sin^{n-2} \varphi\left(\frac{t}{r}\right) dt.$$

Mivel C_m^λ polinom és $(*)$ (az első tétel bizonyításában) itt is igaz, ennek az integrálegyenletnek a magfüggvényét a

$$K(r, t) \sqrt{r - t}^{n-3},$$

alakban írhatjuk, ahol $K(r, t)$ folytonos. Tehát a jelen helyzet

$$(R_S f)_{lm}(r) = \int_{1/n}^r f_{lm}(t) K(r, t) \sqrt{r - t}^{n-3} dt,$$

ahol $(R_S f)_{lm}(r) = 0$ ha $r < 1/m$ és $K(t, t) = |S^{n-2}| 2^{\frac{n-3}{2}} \rho^{\frac{n-1}{2}} t^{\frac{n-3}{2}} \neq 0$. A bizonyítás inentől ugyanúgy fejezhető be ahogy azt Quinto tette [86, 515/(3.9)]-ben. Ez nem más, mint annak bizonyítása, hogy ennek az integrálegyenletnek csak a nulla a megoldása. ■

Természetesen ez a tétel is könnyen átalakítható, a 4. Tétel általánosítására.

Meg kell jegyeznünk, hogy valójában az invertibilitásnál többet bizonyítottunk ezekre a Radon transzformációkra, mégpedig a tartótételt.

Ámbár R_S definíciójában csak a Jordan görbéket illetve hiperfelületeket engedjük meg, a bizonyításban azt sehol nem használtuk ki, vagyis a görbe illetve hiperfelület akár át is metszheti magát.

Tételeinkben a görbén és a hiperfelületen mindig a természetes mérték szerint integrálunk, de nyilván könnyen általánosíthatók lennének tételeink olyan mérték szerinti integrálásokra, ahol ez a természetes mérték például szigorúan pozitív korlátos függvényvel van szorozva.

Radon-transzformációk forgás sokaságokon

Ebben a fejezetben kilépünk az euklideszi tér szabta keretek közül és az eddigiekhez képest egészen új módon általánosítjuk ismét az $(n-1, n)$ -dimenziós klasszikus Radon transzformációt. Ez az általánosítás egyrészt azon a megfigyelésen alapul, hogy az $(n-1)$ -síkon az euklideszi térben 1-korimenziós totálgeodetikusok, másrészt pedig azon, hogy az euklideszi tér forgás sokaság.

Definíció. Egy n dimenziós $\mathcal{M}$ teljes Riemann sokaságot forgás sokaságnak nevezünk az $O \in \mathcal{M}$ bázisponttal, ha $\mathcal{M}$ O -t fixen hagyó izometriáinak csoportja a $T_{O\mathcal{M}}$ érintőtéren az $O(n)$ ortogonális csoportot indukálja [109].

Ez a tér-osztály az, amelyen vizsgálni fogjuk a Radon transzformációt ebben a fejezetben. Ide tartoznak persze az összes konstansgörbületű terek épp úgy, ahogy például a forgásfelületek is.

Definíció. Legyen f egy $\mathcal{M}$ forgás sokaságon értelmezett, minden 1-kodimenziós totálgeodetikuson integrálható valós függvény. Ezen 1-kodimenziós totálgeodetikusok sokaságát jelölje $\mathcal{N}$. Ekkor az f Radon transzformáltja az az $Rf: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyre

$$Rf(\xi) = \int_{\xi} f(x) dx,$$

ahol dx a $\xi \in \mathcal{N}$ természetes felületmértéke, melyet az öröklött Riemann metrika generál.

Ilyen általánosságban eddig nem volt még vizsgálva a Radon transzformáció, azonban a forgás sokaságok legfontosabb osztályán, a konstans görbületű tereken már folytak vizsgálatok [28,46,52].

Ezek közül kiemelkedik S. Helgason munkássága [52], aki az egész problémakört felvetette. Helgason az általa bevezetett csoportelméleti általánosítás egyik speciális eseteként vizsgálta a konstans görbületű tereken a Radon transzformációt. Amellett, hogy bebizonyította a tartótételeket, inverz formulákat is adott. Helgason módszere az inverz formulák bizonyítására annak általánosítása, amit az euklideszi tereken alkalmazott. Sajnos ez a módszer, mint ahogy az euklideszi esetben

is, csak páratlan dimenzióban működik jól, és páros dimenzióban nem is vezet eredményre (az euklideszi esetben ezt mégis meg lehet oldani a Riesz potenciál segítségével).

A mi módszerünk egészen más. Mi a gömb harmonikusok elméletét használjuk, amiről az euklideszi esetben már régóta tudott volt [75], hogy szoros kapcsolatban áll a Radon transzformációval. Ez a kapcsolat abban áll, hogy a gömbi harmonikusokra való vetítés egy szorzó erejéig felcserélhetők a Radon transzformációval, így a Radon transzformáció minden egy dimenziós téren, amit egy gömbi harmonikus feszít, egy változós integráltranszformációként tanulmányozható. Ez a kapcsolat, bár kicsit bonyolultabb formulákkal, fenn áll a forgás sokaságokon is és mi ezt fogjuk kihasználni. Ezzel a módszerrel, és ez nem csekély előny, a három konstans görbületű tér teljes analóg módon kezelhető, így nem csoda, hogy teljesen analóg inverz formulákhoz, képtér és magtér leírásokhoz vezet.

Az alapvető geometriai eszköz, amely lehetővé teszi eljárásunkat a forgás sokaságokon általában az az úgynevezett ‘méret függvény’, mely azt mondja meg, hogy egy r sugarú geodetikus gömb az O bázisponttal, mint középponttal milyen $g(r)$ sugarú euklideszi gömbbel izometrikus. Az a plusz eszköz, melyet a konstant görbületű terek ehhez képest nyújtanak és lehetővé teszi eljárásunk teljes végigvitelét, az az úgynevezett ‘vetítő függvény’. Ez a μ vetítő függvény ugyanis közvetlen geodetikus megfeleltetést, vagyis geodetikust geodetikusbba vivő kapcsolatot, tesz lehetővé a konstant görbületű terek és az euklideszi tér között. Polárkoordinátázva ezeket a tereket, ez a kapcsolat csak a radiális koordinátát érinti, mégpedig az $(\omega, r) \rightarrow (\omega, \mu(r))$ leképezés szerint, ahol $\omega \in S^{n-1}$ egységvektor. Megjegyezzük, hogy geodetikus kapcsolat egy konstans görbületű térrel, Beltrami tétele értelmében, kizárólag konstans görbületű terek esetén lehetséges (L.P. Eisenhart: Riemannian Geometry).

Az első szakaszban általános forgás sokaságokon tekintjük a Radon transzformációt. Bebizonyítjuk a tartótételt, amelyből természetesen következik az invertálhatóság.

A második szakaszban az előbbi eredményeket specializáljuk a konstans görbületű terekre. Leírjuk a Radon transzformáció képöterét, magterét és a gömbi harmonikus sorfejtésből keletkező egy változós integráltranszformációkra inverz formulákat adunk meg, melyek páros és páratlan dimenzióban egyaránt érvényesek. Végül ezeket olyan zárt alakú inverz formulákká alakítjuk, melyek érvényesek a páros és a páratlan dimenziókban, valamint tisztázzák, hogy páros dimenzióban globális, páratlan dimenzióban pedig lokális az inverz operátor. További érdekessége ezen inverz formuláknak, hogy csak radiális deriválást tartalmaznak, míg az eddig ismert inverz formulák mind a Laplace operátorra épültek.

3.1. Invertálhatóság forgás sokaságokon

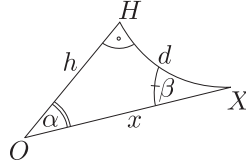
Amint azt már a fejezet bevezető részében jeleztük, az alapvető geometriai eszköz ebben a szakaszban a forgás sokaságok méret függvénye. Mivel ez a g méret függvény teljesen meghatározza az O bázispontú $\mathcal{M}$ forgás sokaságot, szokásos erre a rendszerre az $(\mathcal{M}, O, g)$ jelölést használni.

Erre a sokaság osztályra Wu-Zi [109] fejlesztette ki a trigonometria szabályait. Eszerint, ha tekintünk egy geodetikus derékszögű háromszöget, melynek egyik nem derékszögű csúcsa az O bázispontban van és mint az ábrán H jelöli a derékszögű és X a harmadik csúcsot, akkor ez a háromszög teljesen meghatározott az O -nál lévő $\alpha = \angle HOX$ által. Két összefüggés felel meg a szokásos trigonometriai egyenleteknek:

$$\sin \beta = g(h)/g(x) \quad (\text{szinusz tétel}),$$

és

$$d = \int_h^x \frac{g(r)}{\sqrt{g^2(r) - g^2(h)}} dr \quad (\text{koszinusz tétel}).$$



1. Ábra

Itt β az X -nél lévő szöget, h az OH , d a HX és x az OX távolságot jelöli. A továbbiakban ez alapján a β szöget és a d távolságot α függvényének is fogjuk tekinteni, amennyiben X -et, illetve H -t rögzítjük.

Természetesen ha az $\mathcal{M}$ forgás sokaság homogén, akkor minden pontja bázispontnak is tekinthető, így a fenti trigonometrikus összefüggések mellé további négyet kapunk, amely már lehetővé teszi az euklideszi síkban megszokott számításokat is. Ezért fontos az a [109]-ben található tétel, mely szerint az $(\mathcal{M}, O, g)$ forgás sokaság akkor és csak akkor homogén, ha konstans görbületű, illetve ha valamely κ konstansra a g méret függvény teljesíti a $\ddot{g} + \kappa g = 0$ differenciálegyenletet. Ez nyilván azt jelenti, hogy κ éppen a görbület.

A mostani és a következő szakaszban is a geodetikus polár-koordinátázást fogjuk használni számításainkhoz, amihez azonban előbb kicsit módosítanunk kell a forgás sokaság fogalmát.

Legyen $\mathcal{M}$ egy tetszőleges teljes Riemann sokaság és O ennek egy pontja. Azt mondjuk, hogy az O pont geodetikus injektivitási sugara az a legnagyobb $I_O > 0$

valós szám, esetleg a végtelen, melyre igaz az, hogy minden olyan G geodetikusnak, mely közelebb van O -hoz mint I_O , egyértelmű az a pontja, melyet az O -val összekötő geodetikus merőleges a G geodetikusra. Világos, hogy a geodetikus injektivitási sugár kisebb, mint az injektivitási sugár.

Forgás sokaságokon, amint azt a szinusz tétel mutatja, egy G geodetikus O -hoz legközelebbi pontja és az, amelynek az O -hoz csatlakozó geodetikusa merőleges a G geodetikusra, csak ugyanaz lehet. Ezért, ha ez a bizonyos pont nem egyértelmű, akkor a G geodetikus minden pontja az O bázisponthoz azonos távolságra kell legyen, amiért G egy geodetikus kör. Ebből Wu-Yi [109] cikke könnyen adja, hogy a geodetikus injektivitás sugarát éppen a g méret függvény deriváltjának első zérus helye adja.

Definíció. A továbbiakban forgás sokaságnak nevezzük, az eddigi értelemben vett forgás sokaságnak azt a részsokaságát, melyet az O bázisponthoz tartozó geodetikus injektivitás sugár jelöl ki.

Ezután az $(\mathcal{M}, O, g)$ forgás sokaság minden pontját egyértelműen paraméterezhetjük az $S^{n-1} \times [0, I_O)$ hengeren úgy, hogy az (ω, r) pár fogja az $\text{Exp}_O(r\omega)$ pontot jelenti. Hasonlóan egyszerű az 1-kodimenziós totálgeodetikusok paraméterezése az $S^{n-1} \times [0, I_O)$ hengeren úgy, hogy az (ω, r) pár fogja azt az 1-kodimenziós totálgeodetikust jelenteni, mely merőleges az $\text{Exp}_O(t\omega)$ geodetikusra és átmegy az $\text{Exp}_O(r\omega)$ ponton.

Legyen X az $\mathcal{M}$ sokaság egy pontja. Ekkor a rajta átmenő 1- kodimenziós totálgeodetikusok halmazát azonosíthatjuk az érintőtér egységömbjével, a normális vektoraik segítségével. Ez az azonosítás az egységömb felszínmértékét nyilvánvalóan rávetíti az 1-kodimenziós totálgeodetikusok halmazára.

Definíció. Ha F egy az $\mathcal{M}$ sokaság 1- kodimenziós totálgeodetikusain értelmezett olyan függvény, mely minden X pont esetén az előbbi mértékre nézve integrálható, akkor azt mondjuk, hogy az $\mathcal{M}$ sokaságon értelmezett

$$R^*F(x) = \int_{X \in \xi} F(\xi) d\mu_X$$

függvény az F duális Radon transzformáltja, ahol μ_X a fenti mérték az X -en átmenő ξ 1-kodimenziós totálgeodetikusok halmazán.

Ha egy forgás sokaságon tekintjük a duális Radon transzformációt, akkor ebből könnyen származtatható a ‘bumeráng transzformáció’, melyet azonban gyakran egyszerűbb kezelni.

Definíció. Legyen π az a leképezés az $\mathcal{M}$ forgás sokaságon értelmezett f függvények és az $\mathcal{M}$ ∞ -kodimenziós totálgeodetikusaknak halmazán értelmezett F függvények között, melyre az $F = \pi f$ függvény a ξ 1-kodimenziós totálgeodetikuson azt az $f(X)$ értéket veszi fel, melyet f a ξ origóhoz legközelebbi X pontjában vesz fel. Ekkor f bumeráng transzformáltja a $Bf(X) = R^* \pi f(X)$ függvény.

Ezt persze úgy is felfoghatjuk, hogy f -et azon pontok 1-kodimenziós sokaságán integráljuk, a T_X érintőtérbeli egységgömb kivetített mértéke szerint, melyekből az OX geodetikus szakasz 90° alatt látszik. Ebből a szempontból ez jó általánosítása a Cormack—Quinto- féle ‘gömbi átlag’ transzformációnak [12].

Számításaink legfontosabb analitikus eszköze ebben a fejezetben (az előző fejezet utolsó szakaszában is) a gömbi harmonikusok elmélete lesz. Ennek igen szép és tömör ismertetése található Seeley [95] cikkében, melynek legfontosabb számunkra szükséges eredményeit most részletezzük.

Jelölje H^m az $\mathbb{R}^n$ -en értelmezett m -ed fokú harmonikus polinomok halmazát ($h \in H^m$ akkor és csak akkor, ha m -fokú polinom és az $Lh = 0$ egyenletnek megoldása, ahol L a Laplace operátor). Ekkor a gömbi harmonikusok SH^m tere a H^m -beli polinomok megszorítása az S^{n-1} egységgömbre, vagy másként a gömbi Laplace operátor $-m(m+n-2)$ sajátértékéhez tartozó sajátfüggvényeiek tere. Ekkor $\dim(SH^m) = \frac{2m+n-2}{n-2} \binom{m+n-3}{m}$ és a $(p, q) = \int p(\omega) \bar{q}(\omega) d\omega$ skaláris szorzatra nézve az $L^2(S^{n-2})$ tér ezen terek ortogonális direktösszege. Ha $h_m \in SH^m$ és $\int_{-1}^1 |f(t)| (1-t^2)^{\lambda-1/2} dt < \infty$, ahol $\lambda = (n-2)/2$, akkor

$$\int_{S^{n-1}} f(\langle \omega, \bar{\omega} \rangle) h_m(\omega) d\omega = h_m(\bar{\omega}) \frac{|S^{n-2}|}{C_m^\lambda(1)} \int_{-1}^1 f(t) C_m^\lambda(t) (1-t^2)^{\lambda-1/2} dt,$$

ahol $|S^{n-2}|$ az S^{n-2} egységgömb felszíne, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ az euklideszi skaláris szorzat és C_m^λ az m -ed fokú elsőfajú Gegenbauer polinom. Ezt a formulát, melynek döntő jelentősége lesz a továbbiakban, szokás Funk—Hecke tételnek nevezni. Jelöljük SH^m egy ortonormált bázisának elemeit, amint szokásos, $Y_{l,m}$ -mel, ahol $1 \leq l \leq \dim(SH^m)$. Ha $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $r \in \mathbb{R}$ és $f_{l,m}(r) = f(r \cdot)$, $Y_{l,m} = \int f(r\omega) \bar{Y}_{l,m}(\omega) d\omega$, akkor a

$$\sum_{l,m} f_{l,m}(r) Y_{l,m}(\omega)$$

sor abszolút konvergens és $\mathbb{R}^n$ minden kompakt tartományán egyenletesen tart az f függvényhez, továbbá $f_{l,m}(r) = r^m v_{l,m}(r)$, ahol $v_{l,m} \in C^\infty(\mathbb{R})$ páros függvény.

Mielőtt kimondanánk végre a fejezet fő tételét, vezessük be a következő függvénytereket minden $m > 1/I_O$ számra, ahol $\mathcal{M}$ jelöli a forgás sokaságot és

$\mathcal{N}$ jelöli ennek 1-kodimenziós totálgeodetikusait, és használjuk a már bevezetett polár-koordinátázást.

$$L_m^2(\mathcal{M}) = \{f \in L_{\text{loc}}^2(\mathcal{M}) : d(O, X) \geq 1/m \Rightarrow f(X) = 0\} \text{ és } L_*^2 * (\mathcal{M}) = \bigcup_{m>0} l_m^2(\mathcal{M})$$

$$L_m^2(\mathcal{N}) = \{F \in L_{\text{loc}}^2(\mathcal{N}) : p \geq 1/m \Rightarrow F(\omega, p) = 0\}.$$

1. Tétel. Az $\mathcal{M}$ forgás sokaságon az $R: L_m^2(\mathcal{M}) \rightarrow L_m^2(\mathcal{N})$ Radon transzformáció folytonos és

- i) ha $f \in L_*^2(\mathcal{M})$ és $Rf(\omega, p) = 0$ $p \geq 1/m$ esetén, akkor $f \in L_m^2(\mathcal{M})$,
- ii) $R: L_*^1(\mathcal{M}) \rightarrow L_m^2(\mathcal{N})$ egy-egy értelmű.

Bizonyítás. Mivel a folytonosság triviális és az i) tartótételből nyilván következik a ii)-ben állított injektivitás, csak az i) állítás bizonyításával foglalkozunk.

Legyen α_0 az a szög, melyre az 1. ábra háromszögének (α, h) oldala éppen az O bázispont geodetikus injektivitás sugarával lesz egyenlő, és legyen

$$S_{\omega, t}^{n-1} = \{\omega \in S^{n-1} : t \leq \langle \bar{\omega}, \omega \rangle\}.$$

Legyen továbbá $(\bar{\omega}, h)$ a H pont geodetikus polár koordinátája, X pedig az $(\bar{\omega}, h)$ koordinátájú $\xi(\bar{\omega}, h)$ 1-kodimenziós totálgeodetikusnak az ω irányába eső pontja, melynek polár-koordinátái eszerint (ω, x) (1. ábra).

Először legyen a dimenzió $n = 2$ és paraméterezzük az egységkört S^1 elemeinek egy rögzített vektorhoz mért α szögével. Az 1. ábra szerint nyilván az X pont a $\xi(\bar{\omega}, h)$ geodetikuson az $[\bar{\alpha}, \alpha_0, \bar{\alpha} + \alpha_0]$ intervallumon paraméterezett, ha $\bar{\alpha}$ jelöli az $\bar{\omega}$ szögét. Ebből azonnal adódik, hogy

$$(1) \quad Rf(\bar{\alpha}, h) = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f(\alpha + \bar{\alpha}, x(\alpha)) \frac{d\alpha}{d\alpha} d\alpha,$$

ahol $d(\alpha)$ a koszinusz tételből adódik.

Ha a dimenzió nagyobb, mint 2, az új helyzetet egyszerűen az 1. ábrának az OH tengely körüli megforgatásával kapjuk. A g méret függvény definíciója szerint ekkor a ϱ sugarú geodetikus gömb izometrikus a $g(\varrho)$ sugarú euklideszi gömbbel, így felszín eleme $g^{n-1}(\varrho)d\omega$, vagyis az érintő tér bázis elemei éppen $g(\varrho)$ -szor akkorák, mint az egységgömbbé. Mivel a $\xi(\bar{\omega}, h)$ totálgeodetikus is forgás sokaság, ebből következik, hogy a $\xi(\bar{\omega}, h)$ felszín eleme az X pontnál éppen $g^{n-2}(x) \frac{d\delta}{d\alpha} d\omega$, ahol $\cos \alpha = \langle \omega, \bar{\omega} \rangle$. Tehát ebben az esetben

$$(2) \quad Rf(\bar{\omega}, h) = \int_{S_{\bar{\omega}, \cos \alpha_0(h)}^{n-1}} f(\omega, x(\arccos \langle \omega, \bar{\omega} \rangle)) \times \\ g^{n-2}(x(\arccos \langle \omega, \bar{\omega} \rangle)) \frac{d\delta}{d\alpha} (a \cos \langle \omega, \bar{\omega} \rangle) d\omega.$$

Helyettesítsük be az (1) és (2) integrálokba, az alábbi sorfejtéseket, hasonlóan alkalmazva Rf -re is:

$$f(\alpha, q) = \sum_{m=-\infty}^i n f t y_m = -\infty f_m(q) \exp(im\alpha) \quad \text{és} \quad f(\omega, q) = \sum_{l,m}^{\infty} f_{l,m}(q) Y_{l,m}(\omega).$$

Ha $n = 2$ helyettesítés azt adja, hogy

$$(Rf)_m(h) = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_m(x(\alpha)) \frac{d\alpha}{d\alpha} \exp(im\alpha) d\alpha,$$

amiből $\alpha = \arccos t$ helyettesítéssel adódik, hogy

$$(Rf)_m(h) = 2 \int_{\cos \alpha_0}^1 f_m(y(t)) \frac{dt}{d\alpha} (\arccos t) \frac{\cos(m \arccos t)}{\sqrt{1-t^2}} dt,$$

ahol $y(t) = x(\arccos t)$. A Funk—Hecke tételből a magasabb dimenzióra azt kapjuk, hogy

$$(Rf)_{lm}(h) = \frac{|S^{n-2}|}{C_m^\lambda(1)} \int_{\cos \alpha_0}^1 f_{lm}(y(t)) g^{n-2}(y(t)) \frac{dt}{d\alpha} (\arccos t) C_m^\lambda(t) (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}} dt.$$

Mivel $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{dx}{d\alpha}$, a koszinusz tétel alapján az $s = y(t)$ helyettesítésből

$$(3) \quad (Rf)_m(h) = 2 \int_h^{x(\alpha_0)} f_m(s) \frac{g(s) \sqrt{1-\tilde{y}^2(s)}}{\sqrt{g^2(s)-g^2(h)}} \frac{\cos(m \arccos \tilde{y}(s))}{\sqrt{1-\tilde{y}^2(s)}} ds$$

adódik kettő dimenzióban, és

$$(4) \quad (Rf)_{lm}(h) = \frac{2|S^{n-2}|}{C_m^\lambda(1)} \int_h^{x(\alpha_0)} f_{lm}(s) g^{n-2}(s) \frac{g(s) \sqrt{1-\tilde{y}^2(s)}}{\sqrt{g^2(s)-g^2(h)}} \times \\ \times C_m^\lambda(\tilde{y}(s)) (1-\tilde{y}^2(s))^{\frac{n-3}{2}} ds$$

magasabb dimenziókra, ahol az $\tilde{y}$ függvény az y függvény inverze.

Nyilvánvalóan, amint azt az előző fejezet utóbbi szakaszában is tettük, most e két (3) és (4) integrálegyenlet magfüggvényét kell vizsgálnunk. A L'Hospital szabály alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{g(x(\alpha)) \sin \alpha}{\sqrt{g^2(x(\alpha)) - g^2(h)}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{g^2(x) - g^2(h)}{\dot{g}(h) \dot{x}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{g(h) \dot{x}}{\ddot{x} \sqrt{g^2(x) - g^2(h)}},$$

amiből a két utóbbit összeszorozva, hiszen az első elem éppen az alábbi, adódik, hogy

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{g(x)\sqrt{1-\tilde{y}^2(x)}}{g^2(x)-g^2(h)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{g(h)}{\dot{g}(h)\ddot{x}} \right)^{1/2},$$

ahol az $x = x(\alpha)$ rövidítést használtuk. Ez nyilván nem nulla, és nem is végtelen, hiszen $x(\alpha)$ -nak valódi minimuma van a nulla szögnél (értéke éppen h). Ezért mindkét integrálegyenletünk magfüggvénye $K(s, h)(g^2(s)-g^2(h))^{\frac{n-3}{2}}P(\tilde{y}(s))$ alakú, ahol

$$K(x, h) = Cg(x) \left(\frac{g^2(x)(1-\tilde{y}^2(x))}{g^2(x)-g^2(h)} \right)^{\frac{n-2}{2}},$$

$$K(h, h) = Cg(h) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{g(h)}{\dot{g}(h)\ddot{x}} \right)^{\frac{n-2}{2}} \neq 0$$

és P egy olyan polinom (Csebisev, illetve Gegenbauer polinom), melyre $P(\tilde{y}(h)) = P(1) = 1$.

Mivel $f \in L_*^2(\mathcal{M})$ kell legyen egy $k > 0$, melyre $f \in L_k^2(\mathcal{M})$ és így, ahhoz, hogy tételünket bebizonyítsuk, csak azt kell látnunk, hogy amennyiben $(Rf)_{lm}(h) = 0$ $h > 1/m$ esetén, akkor $f_{lm}(s) = 0$ is $s > 1/m$ esetén. Ez viszont a [87]-es Quinto cikk B tétele miatt igaz, hiszen a magfüggvényünk teljesíti az ott kirótt feltételeket. ■

Az alábbiakban lényegesen tömörebben leírjuk e tétel megfelelőjét és annak bizonyítását a bumeráng transzformációra.

2. Tétel. *Ha az $\mathcal{M}$ forgás sokaságon $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ és $Bf(\omega, p) = 0$ $0 \leq p \leq A$ esetén, akkor $f(\omega, p) = 0$ is $a \leq p \leq A$ esetén.*

Bizonyítás. Legyen $(\bar{\omega}, x)$ az X pont geodetikus polár koordinátája, H pedig annak az (ω, h) koordinátájú $\xi(\omega, h)$ 1-kodimenziós totálgeodetikusnak az (ω, h) koordinátájú pontja, mely átmegy az X ponton (1. ábra).

Először legyen a dimenzió $n = 2$ és paraméterezzük az egységgörte S^1 elemeinek egy rögzített vektorhoz mért α szögével. Az 1. ábra szerint nyilván a H pont a $[\bar{\alpha} - \pi/2, \bar{\alpha} + \pi/2]$ intervallumon paraméterezett, ha $\bar{\alpha}$ jelöli az $\bar{\omega}$ szögét. Ebből azonnal adódik, hogy

$$(5) \quad Bf(\bar{\alpha}, x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\alpha + \bar{\alpha}, h(\alpha)) \frac{d\beta}{d\alpha} d\alpha,$$

ahol $\beta(\alpha)$ a szinusz tételből adódik.

Ha a dimenzió nagyobb mint 2, az új helyzetet egyszerűen az 1. ábrának az OX tengely körüli megforgatásával kapjuk. Mivel az X érintőterében lévő

egységgömb mértéke a β szöget kivéve megegyezik az O érintőterében lévőével, hiszen ugyanúgy hat rá a forgatás, ebben az esetben nyilvánvalóan kapjuk, hogy

$$(6) \quad Bf(\bar{\omega}, x) = \int_{S_{\bar{\omega},0}^{n-1}} f(\omega, h(\arccos\langle\omega, \bar{\omega}\rangle)) \frac{d\beta}{d\alpha} (a \cos\langle\omega, \bar{\omega}\rangle) d\omega$$

Helyettesítsük be az előző bizonyításban már alkalmazott sorfejtéseket itt is az integrálokba, hasonlóan alkalmazva Bf -re is. Ha $n = 2$ a helyettesítés azt adja, hogy

$$(Bf)_m(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_m(h(\alpha)) \frac{d\beta}{d\alpha} \exp(im\alpha) d\alpha,$$

amiből $\alpha = \arccos t$ helyettesítéssel adódik

$$(Bf)_m(x) = 2 \int_0^1 f_m(y(t)) \frac{d\beta}{d\alpha} (\arccos t) \frac{\cos(m \arccos t)}{\sqrt{1-t^2}} dt,$$

ahol $y(t) = h(\arccos t)$. A Funk—Hecke tételből a magasabb dimenzióra azt kapjuk, hogy

$$(Bf)_{lm}(x) = \frac{|S^{n-2}|}{C_m^\lambda(1)} \int_0^1 f_{lm}(y(t)) \frac{d\beta}{d\alpha} (\arccos t) C_m^\lambda(t) (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}} dt.$$

Mivel $\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{d\beta}{dh} \frac{dh}{d\alpha}$ a szinusz tétel alapján az $s = y(t)$ helyettesítésből

$$(7) \quad (Bf)_m(x) = 2 \int_0^x f_m(s) \frac{\dot{g}(s) \sqrt{1-\tilde{y}^2(s)}}{\sqrt{g^2(x)-g^2(s)}} \frac{\cos(m \arccos \tilde{y}(s))}{\sqrt{1-\tilde{y}^2(s)}} ds$$

adódik kettő dimenzióban, és

$$(8) \quad (Bf)_{lm}(h) = \frac{2|S^{n-2}|}{C_m^\lambda(1)} \int_0^x f_{lm}(s) \frac{\dot{g}(s) \sqrt{1-\tilde{y}^2(s)}}{\sqrt{g^2(x)-g^2(s)}} C_m^\lambda(\tilde{y}(s)) (1-\tilde{y}^2(s))^{\frac{n-3}{2}} ds$$

magasabb dimenziókra, ahol az $\tilde{y}$ függvény az y függvény inverze.

Innentől a bizonyítás pontosan ugyanúgy fejezhető be, mint a Radon transzformáció esetében, megvizsgálva integrálegyenleteink magfüggvényét. ■

3.2. Konstans görbületű terek

Ebben a szakaszban tovább folytatjuk a Radon transzformáció vizsgálatát a forgás sokaságok legfontosabb alosztályán, a konstans görbületű tereken. Itt jóval erősebb állításokat tudunk kimondani, mint általában. Inverz formulákat adunk, és leírjuk a Radon transzformáció kép- és magterét.

Jelölje $\mathbb{H}^n$ az n -dimenziós hiperbolikus teret, és $\mathbb{P}^n$ a nyílt egység sugarú félgömböt. Ezek természetesen forgás sokaságok, mégpedig a $\sinh r$ és $\sin r$ méret függvényrel ($\mathbb{R}^n$ is forgás sokaság, a $g(r) = r$ méret függvényrel). Eszerint az előző szakasz garantálja, hogy a Radon transzformáció és duálisa is invertálható ezeken a tereken. Vezessük be az egyszerűség kedvéért, az euklideszi tér analógiájára, a hipersík elnevezést ezeken a tereken is az 1-kodimenziós totálgeodetikusokra.

A legfontosabb különbség, ami ezeken a tereken lehetővé teszi a precízebb számolást, az az úgynevezett vetítő függvény.

Definíció. A $\mu: [0, L) \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvényt (L a geodetikus injektivitás sugara) az $\mathcal{M}$ n -dimenziós forgás sokaság vetítő függvényének nevezzük, ha az $\mathcal{M}(\omega, r(\omega))$ polárkoordinátázással definiált geodetikusának $(\omega, \mu(r(\omega)))$ polárkoordinátázással megadott képe az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térben egyenes.

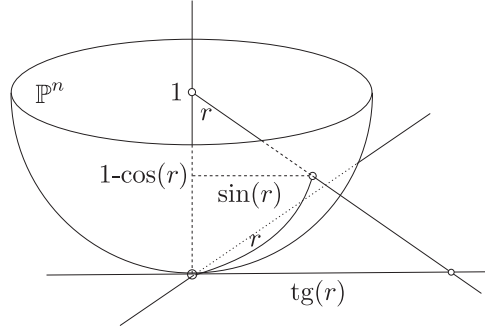
1. Tétel. Egy $\mathcal{M}$ forgás sokaságnak akkor és csak akkor létezik vetítő függvénye, ha konstans görbületű. Ez a μ vetítő függvény a $\mathbb{H}^n$ hiperbolikus tér esetén $\mu(r) = \text{th}(r)$, az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér esetén $\mu(r) = r$ és a $\mathbb{P}^n$ nyílt félgömbön (elliptikus tér) esetén $\mu(r) = \text{tg}(r)$.

Bizonyítás. Ha ilyen vetítő függvény létezik, akkor természetesen geodetikus kapcsolatot létesít az $\mathcal{M}$ tér és az euklideszi tér között, amiből Beltram tétele adja, hogy $\mathcal{M}$ konstans görbületű kell legyen.

Ha $\mathcal{M}$ konstans görbületű, akkor forgás sokaság és így létezik méret függvénye. Ezeken a tereken Wu-Yi [109] fejlesztette ki a trigonometriát, így ki lehetne számítani a vetítő függvényt közvetlenül a méret függvényből is. Mi most egy egyszerűbb utat fogunk mutatni. Mivel az euklideszi eset triviális, nem foglalkozunk vele.

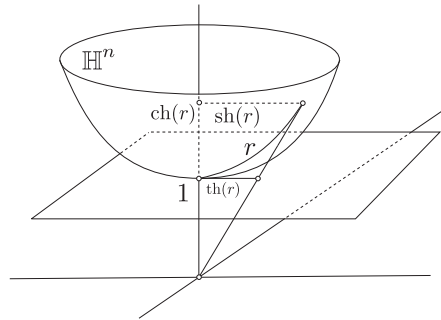
Tekintsük a $\mathbb{P}^n$ térnek azt az $\mathbb{R}^{n+1}$ -beli modelljét, amikor a $(0, \dots, 0, 1)$ középpontú egységsgömbnek vesszük azokat a pontjait, melyek utolsó koordinátája kisebb, mint 1. Ha most vesszük ennek a félgömbnek a középpontból való vetítését az origóbeli érintőterére, ami éppen $\mathbb{R}^n$, akkor világos módon láthatjuk, hogy a geodetikusokat éppen a félgömb középpontján átmenő síkmetszetek adják. Mivel pedig

a félgömb pontjainak a félgömbön mért geodetikus távolsága éppen a középponti szög (ebből az is látszik, hogy a méret függvény $\sin r$), az origótól r geodetikus távolságra lévő pont vetített képe $\operatorname{tg} r$ távolságra van az origótól (1. Ábra).



1. Ábra

A hiperbolikus esetben használjuk a kvadrátikus modellt. Ez a modell az $\mathbb{R}^{n+1}$ $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n^2 + \dots + x_1^2}$ egyenletű hiperfelülete a $-x_{n+1}^2 + x_n^2 + \dots + x_1^2$ kvadrátikus forma által generált Riemann metrikával. Könnyű látni, hogy ennek a modellnek -1 a görbüllete, és a geodetikusok nem mások, mint az origón átmenő síkokkal való metszetei [50]. Ha tehát most ezt a felületet az origón keresztül rávetítjük a $(0, \dots, 0, 1)$ pontbeli érintőtérre, akkor a keresett geodetikus kapcsolatot találjuk, és amint az könnyen kiszámítható, hiszen a $\operatorname{sh} r$ méret függvény éppen az $(n+1)$ -edik koordináta tengelytől való távolságban jelenik meg, a vetítő függvény éppen $\mu(r) = \operatorname{th}(r)$ (2. Ábra).



2. Ábra

A továbbiakban mindig csak ezen konstans görbületű terekkel fogunk foglalkozni, és $\mathcal{M}^n$ ezen három n -dimenziós tér valamelyikét, g a méret függvényt, μ a vetítő függvényt, $\tilde{\mu}$ ennek inverzét és κ görbületet jelöli.

2. Tétel. Ha $f \in L^2(\mathcal{M}^n)$, akkor a Radon transzformáció

$$Rf(\bar{\omega}, h) = \int_{S_{\bar{\omega}, \cos \alpha_0(h)}^{n-1}} f\left(\omega, \tilde{\mu}\left(\frac{\mu(h)}{\langle \omega, \bar{\omega} \rangle}\right)\right) \frac{(\langle \omega, \bar{\omega} \rangle^2 / \mu^2(h) + \kappa)^{-n/2}}{g(h)} d\omega$$

alakú, a bumeráng transzformáció pedig

$$Bf(\bar{\omega}, x) = \int_{S_{\bar{\omega}, 0}^{n-1}} f(\omega, \tilde{\mu}(\langle \omega, \bar{\omega} \rangle \mu(x))) \frac{(1 + \kappa \langle \omega, \bar{\omega} \rangle^2 \mu^2(x))^{-1}}{\dot{g}(x)} d\omega$$

alakú, ahol a jelölések megegyeznek az előző szakaszban használtakkal.

Bizonyítás. Az előző szakasz (2)-es és (6)-os formulájára fogunk támaszkodni. Ahhoz, hogy ezeket használni tudjuk, nem kell mást tennünk, mint kiszámítani az x és d függvényeket, ha H van rögzítve, illetve a h és β függvényeket, ha X van rögzítve (figyelemmel az előző szakasz ábrájára).

Mivel a μ vetítő függvény geodetikus kapcsolatot létesít az $\mathcal{M}^n$ és az $'R^n$ tér között, az x és h függvény a μ definíciójából azonnal adódik: $x(\alpha) = \tilde{\mu}(\frac{\mu(h)}{\cos \alpha})$ és $h(\alpha) = \tilde{\mu}(\mu(x) \cos \alpha)$. Ezekből viszont a d és β függvények egyszerűen adódnak az őket az x , illetve a h oldallal összekötő szinusz tételből.

A most következő két proposíció az előző szakaszban a (3,4,7,8) egyenletekkel már meghatározott gömbi harmonikus sorfejtéseket teszi konkrétta, felhasználva a vetítő függvény adta előnyöket. A bizonyításokat mellőzzük, mivel az a fenti x és h függvények ismeretében egyszerű számolás.

1. Propozíció. i) Ha $f \in L^2(\mathcal{M}^2)$, akkor

$$(1) \quad (Rf)_m(h) = \frac{2}{\dot{g}(h)} \int_h^L f_m(q) \frac{\cos(m \arccos(\mu(h)/\mu(q)))}{\sqrt{1 - \mu^2(h)/\mu^2(q)}} dq.$$

ii) Ha $f \in L^2(\mathcal{M}^2)$, akkor

$$(2) \quad (Rf)_{l,m}(h) = \frac{2|S^{n-2}|}{C_m^\lambda(1)\dot{g}(h)} \int_h^L f_{l,m}(q) C_m^\lambda\left(\frac{\mu(h)}{\mu(q)}\right) g^{n-2}(q) \left(1 - \frac{\mu^2(h)}{\mu^2(q)}\right)^{\frac{n-3}{2}} dq,$$

ahol L a geodetikus injektivitás sugara.

2. Propozíció. i) Ha $f \in L^2(\mathcal{M}^2)$, akkor

$$(3) \quad (Bf)_m(x) = \frac{2}{g(x)} \int_0^x f_m(q) \frac{\cos(m \arccos(\mu(q)/\mu(x)))}{\sqrt{1 - \mu^2(q)/\mu^2(x)}} dq.$$

ii) Ha $f \in L^2(\mathcal{M}^n)$, akkor

$$(4) \quad (Bf)_{l,m}(x) = \frac{2|S^{n-2}|}{C_m^\lambda(1)g(x)} \int_0^x f_{l,m}(q) C_m^\lambda\left(\frac{\mu(q)}{\mu(x)}\right) \left(1 - \frac{\mu^2(q)}{\mu^2(x)}\right)^{\frac{n-3}{2}} dq.$$

A következő technikai lemmák már az inverzformula bizonyításához szükségesek. Bizonyításuk egyszerű helyettesítéssel történik a [11]-ben, illetve a [13]-ban található analóg formulák alapján.

1. Lemma. Ha $m \in \mathbb{Z}$, akkor

$$\int_t^q \frac{\cos(m \arccos(\mu(h)/\mu(q)))}{\sqrt{1 - \mu^2(h)/\mu^2(q)}} \times \frac{\operatorname{ch}(m \operatorname{arcch}(\mu(h)/\mu(t)))}{\sqrt{\mu^2(h)/\mu^2(t) - 1}} \frac{\dot{\mu}(h)}{\mu(h)} dh = \frac{\pi}{2}.$$

2. Lemma. Ha $m \in \mathbb{Z}$ és $n > 2$, akkor

$$\begin{aligned} M & \left(\frac{1}{\mu(t)} - \frac{1}{\mu(q)} \right)^{n-2} \\ & = \int_t^q C_m^\lambda\left(\frac{\mu(h)}{\mu(t)}\right) \left(\frac{\mu^2(h)}{\mu^2(t)} - 1\right)^{\frac{n-3}{2}} C_m^\lambda\left(\frac{\mu(h)}{\mu(q)}\right) \left(1 - \frac{\mu^2(h)}{\mu^2(q)}\right)^{\frac{n-3}{2}} \frac{\dot{\mu}(h) dh}{\mu^{n-1}(h)}, \end{aligned}$$

ahol

$$M = \pi 2^{3-n} \left(\frac{\Gamma(m+n-2)}{\Gamma(m+1)\Gamma(\lambda)} \right)^2 \frac{1}{\Gamma(n-1)}.$$

A most következő Radon és bumeráng inverz formulák bizonyítása rendkívül hasonló, ezért csak az elsőt bizonyítjuk.

3. Tétel. i) Ha $f \in C_c^\infty(\mathcal{M}^2)$, akkor

$$(5) \quad f_m(t) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \int_t^L (Rf)_m(h) \frac{\operatorname{ch}(m \operatorname{arcch}(\mu(h)/\mu(t)))}{g(h) \sqrt{\mu^2(h)/\mu^2(t) - 1}} dh.$$

ii) Ha $n > 2$, $f \in C_C^\infty(\mathcal{M}^n)$, akkor

$$(6) \quad f_{l,m}(t) = (-1)^{n-1} \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(\lambda)}{2\pi^{n/2}\Gamma(m+n-2)} \begin{cases} \frac{d}{dt} \delta_2 \delta_4 \dots \delta_{n-2} F(t), & \text{ha } n \text{ páros,} \\ \delta_1 \delta_3 \delta_5 \dots \delta_{n-2} F(t), & \text{ha } n \text{ páratlan,} \end{cases}$$

ahol $\delta_k = \frac{d^2}{dt^2} + \kappa k^2$ ($k \in \mathbb{N}$) és

$$F(t) = g^{n-2}(t) \int_t^L (Rf)_{l,m}(h) C_m^\lambda\left(\frac{\mu(h)}{\mu(t)}\right) \left(\frac{\mu^2(h)}{\mu^2(t)} - 1\right)^{\frac{n-3}{2}} \frac{\dot{\mu}(h) \dot{g}(h)}{\mu^{n-1}(h)} dh.$$

Bizonyítás. Egyszerűen használjuk az első proposíciót és a lemmákat, amikor megcseréljük az integrálás sorrendjét. Az így kapott

$$F(t) = C \int_t^L f_{l,m}(q) g^{n-2}(q-t) dq$$

integrálegyenletet viszont, ahol C konstans, a tételben jelzett differenciál operátor valóban megoldja, hisz

$$\frac{d^2}{dt^2} g^k(q-t) = -\kappa k^2 g^k(q-t) + k(k-1) g^{k-2}(q-t). \quad \blacksquare$$

4. Tétel. i) $Ha f \in C^\infty(\mathcal{M}^2)$, akkor

$$(7) \quad f_m(t) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t (Bf)_m(x) \frac{\cos(m \arccos(\mu(x)/\mu(t)))}{\dot{q}(x) \sqrt{10\mu^2(x)/\mu^2(t)}} dx.$$

ii) $Ha n > 2, f \in C^\infty(\mathcal{M}^n)$, akkor

$$(8) \quad f_{l,m}(t) = (-1)^{n-1} \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(\lambda)}{2\pi^{n/2}\Gamma(m+n-2)} \times \\ \times g^{n-2}(t) \begin{cases} \frac{d}{dt} \delta_2 \delta_4 \dots \delta_{n-2} F(t), & \text{ha } n \text{ páros,} \\ \delta_1 \delta_3 \delta_5 \dots \delta_{n-2} F(t), & \text{ha } n \text{ páratlan,} \end{cases}$$

ahol

$$F(t) = g^{n-2}(t) \int_0^t (Bf)_{l,m}(x) C_m^\lambda \left(\frac{\mu(t)}{\mu(x)} \right) \left(\frac{\mu^2(t)}{\mu^2(x)} - 1 \right)^{\frac{n-3}{2}} \frac{1/\dot{g}(x)}{\mu^{n-2}(x)} dx.$$

A következő állításunk a zárt inverz formula. Ennek bizonyítása e két fenti tételre támaszkodik, felhasználva néhány összefüggést a Gegenbauer polinomokra. Az érdekessége ezeknek az összefüggéseknek az, hogy ezeket az euklideszi klasszikus Radon transzformáció vizsgálatából nyerték. Mivel azonban később önállóan is bizonyították őket, bizonyításunk az euklideszi esetben is értelmes.

5. Tétel. Legyen $n \geq 2$ és $f \in C_c^\infty(\mathcal{M}^n)$. $Ha n$ páratlan, akkor

$$f(\bar{\omega}, t) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2^{1-n}}{\pi^{n-1}} \delta_1 \delta_3 \dots \delta_{n-2} \left(R^* \left(Rf(\omega, h) \frac{\dot{\mu}(h)\dot{g}(h)}{\mu^{n-1}(h)} \right) (\bar{\omega}, t) g^{n-1}(t) \right).$$

$Ha n$ páros, akkor

$$f(\bar{\omega}, t) = (-1)^{\frac{n-2}{2}} \frac{2^{l-n}}{\pi^n} \frac{d}{dt} \delta_2 \delta_4 \dots \delta_{n-2} \left(R^* \left(\mathcal{H} \left(Rf(\omega, h) \frac{\dot{\mu}(h)\dot{g}(h)}{\mu^{n-1}(h)} \right) \right) (\bar{\omega}, t) g^{n-1}(t) \right),$$

ahol a $\mathcal{H}(\cdot)$ disztribúció

$$\mathcal{H}(f)(\omega, h) = \frac{1}{\dot{g}^2(h)} \int_{-L}^L f(\omega, r) \frac{1}{\mu(r) - \mu(h)} dr.$$

Bizonyítás. A bizonyításhoz a bumeráng transzformáció gömbi harmonikus sorfejtését fogjuk használni, mely nyilván ugyanaz, mint a duális Radon transzformációé.

Kezdjük a páratlan dimenziós esettel, amikor is a 3. Tétel szerint

$$f_{l,m}(t) = C\mathcal{D}\left[g^{n-2}(t) \int_t^L (Rf)_{l,m}(h) C_m^\lambda\left(\frac{\mu(h)}{\mu(t)}\right) \left(\frac{\mu^2(h)}{\mu^2(t)} - 1\right)^{\frac{n-3}{2}} \frac{\dot{\mu}(h)\dot{g}(h)}{\mu^{n-1}(h)} dh\right],$$

ahol $C = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(\lambda)}{2\pi^{n/2}\Gamma(m+n-2)}$ és $\mathcal{D} = \delta_1\delta_3\ldots\delta_{n-2}$. Ezt az $\int_t^L$ integrált most az $\int_t^L = \int_0^L - \int_0^t$ alakban írva azt kapjuk, hogy

$$(*) \quad f_{l,m}(t) = I + C(-1)^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{D}\left[g^{n-2}(t) \int_0^t (Rf)_{l,m}(h) C_m^\lambda\left(\frac{\mu(h)}{\mu(t)}\right) \times \right. \\ \left. \times \left(1 - \frac{\mu^2(h)}{\mu^2(t)}\right)^{\frac{n-3}{2}} \frac{\dot{\mu}(h)\dot{g}(h)}{\mu^{n-1}(h)} dh\right],$$

ahol

$$I = C\mathcal{D} \int_0^L (Rf)_{l,m}(h) C_m^\lambda\left(\frac{\mu(h)}{\mu(t)}\right) \left(\frac{\mu^2(h)}{\mu^2(t)} - 1\right)^{\frac{n-3}{2}} \frac{\dot{\mu}(h)\dot{g}(h)}{\mu^{n-1}(h)} dh.$$

A (2) formulát beírva, majd az integrálokat felcserélve adódik, hogy I az

$$\int_0^L f_{l,m}(q) g^{2\lambda}(q) \int_0^q C_m^\lambda\left(\frac{\mu(h)}{\mu(q)}\right) \left(1 - \frac{\mu^2(h)}{\mu^2(q)}\right)^{\frac{n-3}{2}} \times \\ \times \mathcal{D}\left[C_m^\lambda\left(\frac{\mu(h)}{\mu(t)}\right) \left(\frac{\mu^2(h)}{\mu^2(t)} - 1\right)^{\frac{n-3}{2}} g^{2\lambda}(t)\right] \frac{\dot{\mu}(h)dh}{\mu^{n-1}(h)} dq$$

konstansszoros. Behelyettesítve $x = \mu(h)/\mu(q)$ -t a belső integrálba, nevezzük ezt J -nek, és felhasználva, hogy az integrandus páros függvény, azt kapjuk, hogy

$$J = \frac{1/2}{\mu^{2\lambda}(q)} \int_{-1}^1 C_m^\lambda(x) (1-x^2)^{\frac{n-3}{2}} \mathcal{D}\left[C_m^\lambda\left(\frac{\mu(q)}{\mu(t)}x\right) \left(\frac{\mu^2(q)}{\mu^2(t)}x^2 - 1\right)^{\frac{n-3}{2}} g^{2\lambda}(t)\right] x^{1-n} dx.$$

Két dolgot kell itt megemlítenünk. Egyrészt, hogy $C_m^\lambda(x)(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}$ egy $(m+n-3)$ -ad fokú polinom, másrészt, hogy a $\{C_m^\lambda(x)\}$ ortogonális rendszer a $[-1, 1]$ intervallumon az $(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}$ súly függvénnnyel [36]. Eszerint, ha be tudjuk bizonyítani, hogy a

$$P(x) = \mathcal{D}\left[C_m^\lambda\left(\frac{\mu(q)}{\mu(t)}x\right) \left(\frac{\mu^2(q)}{\mu^2(t)}x^2 - 1\right)^{\frac{n-3}{2}} g^{2\lambda}(t)\right],$$

mint x polinomja, $n-1$ fokban homogén (vagyis ennek x^{1-n} -szerese is polinom), akkor abból $J = 0$ és $I = 0$ adódik. Nyilván az x^k együtthatója akkor és csak akkor 0 a $0 \leq k \leq n-2$ esetén, ha

$$\delta_1 \delta_3 \cdots \delta_{n-2}(g^{n-2}(t)/\mu^k(t)) = 0,$$

amit viszont teljes indukcióval könnyen igazolhatunk a

$$\delta_k(\dot{g}^k(t)) = -k(k-1)\dot{g}^{k-2}(t) \quad \text{és} \quad \delta_k(g^k(t)) = k(k-1)g^{k-2}(t)$$

azonosságokból kiindulva. Mivel tehát $I = 0$, a (*) egyenlet éppen a tételben szereplő zárt formula megfelelője a gömbi harmonikus sorfejtésben.

Térjünk most rá a páros dimenziók esetére, amikor nyilván λ egész szám. Jelölje most $\mathcal{D}$ a $\frac{d}{dt}\delta_2\delta_4\cdots\delta_{n-2}$ differenciál operátort. A 3. Tétel szerint

(**)

$$f_{l,m}(t) = -C\mathcal{D}\left[g^{n-2}(t) \int_t^L (Rf)_{l,m}(h) C_m^\lambda\left(\frac{\mu(h)}{\mu(t)}\right) \left(\frac{\mu^2(h)}{\mu^2(t)} - 1\right)^{\frac{n-3}{2}} \frac{\dot{\mu}(h)\dot{g}(h)}{\mu^{n-1}(h)} dh\right].$$

Elkerülendő a meglehetősen hosszú számolásokat és magyarázatokat, melyek egyébként eléggé kézenfekvők, a továbbiakban egyszerűen a [18]-as és [14]-es cikkek megfelelő számozott soraira, illetve képleteire fogunk hivatkozni.

Ugyanúgy ahogy a páratlan esetben, most is könnyű látni, hogy

$$0 = C\mathcal{D}\left[g^{n-2}(t) \int_0^L (Rf)_{l,m}(h) E_{m+2\lambda-1}^\lambda\left(\frac{\mu(h)}{\mu(t)}\right) \frac{\dot{\mu}(h)\dot{g}(h)}{\mu^{n-1}(h)} dh\right],$$

mivel az $E_{m+2\lambda-1}^\lambda$ függvény $(m+n-3)$ fokú polinom [18]. Írjuk most ezt az integrált az $\int_0^t + \int_t^L$ alakba, és rendre helyettesítsük be a [18]-as cikk (A.14) és (A.4) egyenletét. Ennek eredményét a (**) egyenlethez adva adódik, hogy

$$\begin{aligned} f_{l,m}(t) &= -C\mathcal{D}\left[g^{n-2}(t) \left(\int_t^L (Rf)_{l,m}(h) 2D_m^\lambda\left(\frac{\mu(h)}{\mu(t)}\right) \left(\frac{\mu^2(h)}{\mu^2(t)} - 1\right)^{\frac{n-3}{2}} \frac{\dot{\mu}(h)\dot{g}(h)}{\mu^{n-1}(h)} dh + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^t (Rf)_{l,m}(h) (-1)^\lambda D_m^\lambda\left(\frac{\mu(h)}{\mu(t)}\right) \left(1 - \frac{\mu^2(h)}{\mu^2(t)}\right)^{\frac{n-3}{2}} \frac{\dot{\mu}(h)\dot{g}(h)}{\mu^{n-1}(h)} dh \right) \right] \end{aligned}$$

Ebből a [14]-es Deans cikk (24) és (25) azonossága adja, hogy

$$f_{l,m}(t) = -\frac{C}{\pi} (-1)^\lambda \mathcal{D}\left(g^{n-2}(t) \int_0^L (Rf)_{l,m}(h) I_m^\lambda\left(\frac{\mu(h)}{\mu(t)}\right) \frac{\dot{\mu}(h)\dot{g}(h)}{\mu^{n-1}(h)} dh\right),$$

ahol definíció szerint [14(22)]

$$I_m^\lambda(y) = \int_{-1}^1 C_m^\lambda(x) (1-x^2)^{\frac{n-3}{2}} (y-x)^{-1} dx.$$

Elvégezve az $x = \mu(q)/\mu(t)$ helyettesítést (legyen $\mu(-q) = -\mu(q)$), majd lecserélve az integrálások sorrendjét, adódik az

$$f_{l,m}(t) = \frac{-C(-1)^\lambda}{\pi} \mathcal{D} \left[g^{2\lambda}(t) \int_{-t}^t C_m^\lambda \left(\frac{\mu(q)}{\mu(t)} \right) \left(1 - \frac{\mu^2(q)}{\mu^2(t)} \right)^{\frac{n-3}{2}} \frac{1}{\dot{g}^2(q)} \times \right. \\ \left. \times \int_0^L \frac{(Rf)_{l,m}(h)}{\mu(h) - \mu(q)} \frac{\dot{\mu}(h)\dot{g}(h)}{\mu^{n-1}(h)} dh dq \right]$$

egyenlet, ami éppen a tételben szereplő inverz formula gömbi harmonikus sorfejtése. Ezzel az állítást beláttuk. ■

A továbbiakban a Radon és a bumeráng transzformáció kép- és magterének leírásával fogunk foglalkozni. Legyen $\psi(\omega, p)$ az az 1- kodimenziós alsokaság az $\mathcal{M}$ forgás sokaságban, melyből az O -t és (ω, p) pontot összekötő geodetikus 90° alatt látszik.

6. Tétel. *Legyen S egy mérhető részhalmaza a $\mathcal{M}^n$ forgás sokaságnak, és $n \geq 3$. Ha $\mathcal{M}^n$ gömb legyen S kompakt. Ekkor az $R: L^2(S, g^{n-1}(\delta_x)dx) \rightarrow L^2(S^R)$ és $B: L^2(S, g^{1-n}(\delta_x)dx) \rightarrow L^2(S^B)$ leképezések folytonosak, ahol δ_x az x távolsága a bázisponttól, dx a Lebesgue mérték $\mathcal{M}^n$ -en és $S^R, S^B \subset S^{n-1} \times [0, L)$, melyre $S^R = \{(\omega, p) : \xi(\omega, p) \cap S \neq \emptyset\}$ és $S^B = \{(\omega, p) : \psi(\omega, p) \cap S \neq \emptyset\}$.*

Bizonyítás. Az $Y_{l,m}$ gömbi harmonikusok merőlegessége folytán elegendő azt megmutatnunk, hogy $f(\omega, p) = h(p)Y_{l,m}(\omega)$ esetén

$$\|Rf\|_{L^2(S^{n-1} \times [0, L))}^2 \leq 16C|S^{n-2}|^2 \|f\|_{L^2(\mathcal{M}^n, g^{n-1}(\delta_x)dx)}^2$$

valamely C , esetleg S -től függő konstansra. A (2) egyenletből viszont

$$\begin{aligned} & \|Rf\|_{L^2(S^{n-1} \times [0, L))}^1 \\ &= 4\|(Rf)_{l,m}\|_{L^2([0, L))}^2 \\ &= \frac{4|S^{n-2}|^2}{(C_m^\lambda(1))^2} \int_0^L \frac{1}{\dot{g}^2(h)} \left(\int_h^L h(q) C_m^\lambda \left(\frac{\mu(h)}{\mu(q)} \right) \left(1 - \frac{\mu^2(h)}{\mu^2(q)} \right)^{\frac{n-3}{2}} g^{n-2}(q) dq \right)^2 dh. \end{aligned}$$

Mivel $|C_m^\lambda(t)| \leq |C_m^\lambda(1)|$, ha $t \in [0, 1]$, $|1 - \mu^2(h)/\mu^2(q)| \leq 1$ nyilván

$$\|Rf\|_{L^2(S^{n-1} \times [0, L])}^2 \leq 4|S^{n-2}|^2 \int_0^L \frac{1}{\dot{g}^2(h)} \left(\int_h^L |h(q)| g^{n-2}(q) dq \right)^2 dh.$$

Helyettesítsünk most $x = 1/\mu(h)$ -t és $y = 1/\mu(q)$ -t (ekkor $-dx/x^2 = dh/\dot{g}^2(h)$). Azt kapjuk, hogy ez utóbbi

$$= 4|S^{n-2}|^2 \int_{1/\mu(L)}^\infty \left(\frac{1}{x} \int_{1/\mu(L)}^x \left| h\left(\tilde{\mu}\left(\frac{1}{y}\right)\right) \right| g^{n-2}\left(\tilde{\mu}\left(\frac{1}{y}\right)\right) \frac{dy}{y^2} \right)^2 dx.$$

Az

$$\left\| \frac{1}{v} \int_0^v g(u) du \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq 2\|g\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}$$

Hardy-féle egyenlőtlenség alapján tehát

$$\|Rf\|_{L^2(S^{n-1} \times [0, L])}^2 \leq 16|S^{n-2}|^2 \left\| h\left(\tilde{\mu}\left(\frac{1}{y}\right)\right) g^{n-2}\left(\tilde{\mu}\left(\frac{1}{y}\right)\right) y^{-2} \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2.$$

Visszahelyettesítve most az $y = 1/\mu(q)$ -t (ekkor $-dy/y^2 = dq/\dot{g}^2(q)$) adódik, hogy

$$\|Rf\|_{L^2(S^{n-1} \times [0, L])}^2 \leq 16|S^{n-2}|^2 \int_0^L h^2(q) g^{n-1}(q) \dot{g}^{-4}(q) g^{n-1}(q) dq,$$

ami bizonyítja állításunkat, hiszen $\dot{g}$ a hiperbolikus és euklideszi esetben nem kisebb, mint 1, a gömbön pedig a kompaktság miatt létezik egy $1/c$ alsó korlátja. ■

7. Tétel. Legyen S az $\mathcal{M}^n$ egy kompakt tartománya, és $n \geq 3$. A Radon transzformáció egy-egy értelmű leképezés az $L^2(S, g^{n-1}(\delta_x)dx)$ térről az

$$\mathcal{A} = \left(\text{Cl Sp} \left\{ g_{j,l,m}(\omega, h) = \frac{\mu^j(h)}{\dot{g}(h)} Y_{l,m}(\omega) : \begin{matrix} 0 \leq j < m \\ (m-j) \text{ páratlan} \end{matrix} \right\} \right)^\perp \cap L^2(S^R)$$

térbe, ahol a Cl Sp a feszített tér lezártját jelenti.

Bizonyítás. Az, hogy $g_{j,l,m} \in L^2(S^{n-1} \times \mathbb{R}_+)$ egyszerű integrálással ellenőrizhető (hiperbolikus téren éppen $2/\sqrt{2j+1}$). Legyen $f(\omega, p) = v(h)Y_{i,k}(\omega) \in L^2(S, g^{n-1}(\delta_x)dx)$ és $\ell^*(\omega, h) = \ell(\mu(h))Y_{l,m}(\omega)/\dot{g}(h)$. Egyszerű számolás adja (2)-ből, felcserélve az integrálás sorrendjét, hogy

$$\langle \ell^*, Rf \rangle_{L^2(S^R)} = \delta_l^i \delta_m^k \frac{4|S^{n-2}|}{C_k^\lambda(1)} \int_0^L v(q) \frac{g^{n-1}(q)}{\dot{g}(q)} \int_0^1 \ell(x\mu(q)) C_k^\lambda(x) (1-x^2)^{\frac{n-3}{2}} dx dq,$$

ahol a δ_m^k a Cronecker-deltát jelöli. Eszerint, Rf akkor és csak akkor merőleges az ℓ^* függvényre minden $f \in L^2(S, g^{n-1}(\delta_x)dx)$ esetén, ha

$$\int_0^1 \ell(xy) C_k^\lambda(x) (1-x^2)^{\frac{n-3}{2}} dx \equiv 0.$$

De a „Lemma 5.1” és „Theorem 5.2” a [85]-ös cikkben, valamint a „Theorem 3.2” a [75]-ös cikkben éppen azt adja, hogy ekkor ℓ benne kell legyen az x^j ($0 \leq j \leq k$, $k-j$ páratlan) függvények által feszített térben, így a Radon transzformáció képtere benne van $\mathcal{A}$ -ban.

Most az injektivitást fogjuk igazolni. Ez nem következik eddigi tételünkéből, hiszen más térből indultunk ki. Legyen $f(\omega, h) = v(h)Y_{i,k}(\omega) \in L^2(S, g^{n-1}(\delta_x)dx)$ olyan függvény, melynek a Radon transzformáltja nulla. Ekkor a $v \in L^2([0, L], g^{2n-2}(q)dq)$ függvénynek (1) miatt teljesítenie kell az

$$\int_h^L v(q) C_m^\lambda\left(\frac{\mu(h)}{\mu(q)}\right) \left(1 - \frac{\mu^2(h)}{\mu^2(q)}\right)^{\frac{n-3}{2}} g^{n-2}(q) dq \equiv 0$$

integrálegyenletet. Feltételezve, hogy $v(q) = \ell(1\mu(q))\mu(q)g^{-n}(q)$, majd $s = \mu(q)$ -t helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$0 \equiv \int_t^{\mu(L)} \frac{1}{s} \ell\left(\frac{1}{s}\right) C_m^\lambda\left(\frac{t}{s}\right) \left(1 - \frac{t^2}{s^2}\right)^{\frac{n-3}{2}} ds \quad (t = \mu(h)).$$

Ez az integrálegyenlet egy speciális Volterra típusú integrálegyenlet, melynek az $\ell(1/s) \in L^2([0, \mu(L)))$ megoldásáról kompakt tartományon Quinto bebizonyította [87(3.7)], hogy egyedül a nulla lehet. Mivel S kompakt, ez bizonyítja állításunkat. (Hiperbolikus esetben S kompaktsága nem szükséges, mivel $\mu(L) = 1$). ■

E módszerekkel természetesen hasonló eredményeket a bumeráng transzformációra is kaphatnánk.

Irodalomjegyzék

- [1] L.E. ANDERSON, On the determination of a function from spherical averages, *SIAM J. Math. Anal.*, **19** (1988), 214–232.
- [2] M.F. ATIYAH, *Geometry of Yang–Mills fields*, Scuola Normale Superiore, 1979.
- [3] W. BETORI, J. FARAUT and M. PAGLIACCI, An inversion formula for the Radon transform on trees, *Math. Z.*, **201** (1989), 327–337.
- [4] A. BESSE, *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Springer–Verlag, 1978.
- [5] E.D. BOLKER, The finite Radon transform, *Cont. Math.*, **63** (1987), 27–50.
- [6] J. BOMAN, Uniqueness theorems for generalized Radon transforms, *Const. Theory of Func.* '84, Sofia, 1984, 173–176.
- [7] J. BOMAN and E.T. QUINTO, Support theorems for real-analytic Radon transforms, *Duke Math. J.*, **55** (1987), 943–948.
- [8] R.N. BRACEWELL, Strip integration in radio astronomy, *Austral J. Phys.*, **9** (1956), 198–217.
- [9] A.P. CALDERON and A. ZYGMUND, On the existence of certain singular integrals, *Acta Math.*, **88** (1952), 85–139.
- [10] A.M. CORMACK, Representation of a function by its line integrals with some radiological applications I–II., *J. Appl. Phys.*, **34** (1963), 2722–2727; **35** (1964), 2908–2913.
- [11] A.M. CORMACK, The Radon transform on a family of curves in the plane I–II., *Proc. AMS*, **83** (1981), 325–330; **86** (1982), 293–298.
- [12] A.M. CORMACK and E.T. QUINTO, A Radon transform on spheres through the origin in $\mathbb{R}^n$ and applications to the Darboux equation, *Trans. AMS*, **260** (1980), 575–581.
- [13] S.R. DEANS, A unified Radon inversion formula, *J. Math. Phys.*, **19** (1978), 2346–2349.
- [14] S.R. DEANS, Gegenbauer transforms via the Radon transform, *SIAM J. Math. Anal.*, **10** (1979), 577–585.
- [15] P. DIACONIS and R.L. GRAHAM, The Radon transform on Z_2^k , *Pacific J. of Math.*, **118** (1985), 323–345.
- [16] W.F. DONOGHUE, *Distributions and Fourier transforms*, Academic Press, Inc., 1969.

- [17] S.W. DRURY, L^p estimates for certain generalizations of k -plane transforms, *Illinois J. of Math.*, **33** (1989), 367–374.
- [18] L. DURAND, P.M. FISHBANE and L.M. SIMMONS, Expansion formulas and addition theorems for Gegenbauer functions, *J. Math. Phys.*, **17** (1976), 1933–1948.
- [19] J.A. FAWCETT, Inversion of N -dimensional spherical averages, *SIAM J. Appl. Math.*, **45** (1985), 336–341.
- [20] D.V. FINCH, Sums of homogeneous functions and the range of the divergent beam X -ray transform, *Num. Func. Anal. Opt.*, **5** (1983), 363–419.
- [21] D.V. FINCH, Cone beam reconstruction with sources on a curve, *SIAM J. Appl. Math.*, **45** (1985), 665–673.
- [22] D.V. FINCH, Uniqueness of the attenuated X -ray transform in the physical range, *Inverse Probl.*, **2** (1986), 197–203.
- [23] D.V. FINCH and A. HERTLE, The exponential Radon transform, *Cont. Math.*, **63** (1987), 67–73.
- [24] D.V. FINCH and D.C. SOLMON, A characterization of the range of the divergent beam X -ray transform, *SIAM J. Math. Anal.*, **14** (1983), 767–771.
- [25] P. FUNK, Über eine geometrische Anwendung der Abelschen Integralgleichung, *Math. Ann.*, **77** (1916), 129–135.
- [26] R.J. GARDNER and P. McMULLEN, On Hammer’s X -ray problem, *J. London Math. Soc.*, **21** (1980), 171–175.
- [27] I.M. GELFAND and G.E. SHILOV, *Generalized functions vol. 1.*, Academic Press, Inc., 1964.
- [28] I.M. GELFAND, M.I. GRAEV and N.YA. VILENKIN, *Generalized functions vol. 5.*, Academic Press, Inc., 1966.
- [29] I.M. GELFAND, M.I. GRAEV and Z.YA. SHAPIRO, *Integral geometry on k -dimensional hyperplanes*, *Func. Anal. Appl.*, 1(1967), 15–31 (russian).
- [30] I.M. GELFAND and M.I. GRAEV, Complex straight line in $\mathbb{C}^n$, *Func. Anal. Appl.*, **2** (1968), 522–525 (russian).
- [31] I.M. GELFAND and M.I. GRAEV, Complex k -dimensional hyperplanes in $\mathbb{C}^n$ and formula of Plancherel for the group $GL(n, \mathbb{C})$, *Dokl. A. Nauk*, **179** (1968), 522–525.
- [32] P. GILBERT, Iterative methods for the three-dimensional reconstruction of an object from projections, *J. Theoret. Biol.*, **36** (1972), 105–107.
- [33] J. GLOBEVNIK, Zero integrals on circles and characterizations of harmonic and analytic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **317** (1990), 313–330.
- [34] F.B. GONZALEZ, Radon transforms on Grassmann manifolds, *J. Func. Anal.*, **71** (1987), 339–362.

- [35] F.B. GONZALEZ, Invariant differential operators and the range of the Radon d -plane transform, *Math. Ann.*, **287** (1990), 627–635.
- [36] I.S. GRADSHTEYN and I.M. RYZHIK, *Tables of integrals, series and products*, Academic Press, Inc., 1965.
- [37] E.L. GRINBERG, Spherical harmonics and integral geometry on projective spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **279** (1983), 187–203.
- [38] E.L. GRINBERG, Euclidean Radon transforms: ranges and restrictions, *Cont. Math. Amer. Math. Soc.*, **63** (1987), 109–133.
- [39] V. GUILLEMIN, Radon transform on Zoll surfaces, *Adv. in Math.*, **22** (1976), 85–119.
- [40] V. GUILLEMIN, On some results of Gelfand in integral geometry, *Proc. Symp. in Pure Math.*, **43** (1985), 149–155.
- [41] V. GUILLEMIN and D. SCHAFER, Fourier integral operators from the Radon transform point of view, *Proc. Symp. Pure Math.* **27**, Amer. Math. Soc., Providence R.I., 1975, 297–300.
- [42] V. GUILLEMIN and S. STERNBERG, Some problems in integral geometry and some related problems in micro-local analysis, *Amer. J. Math.*, **101** (1979), 915–955.
- [43] M. HAHN and E.T. QUINTO, Distances between measures from 1-dimensional projections as implied by continuity of the Radon transform, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **70** (1985), 361–380.
- [44] I.A. HAZOU and D.C. SOLMON, Filtered-backprojection and the exponential Radon transform, *J. Math. Anal. Appl.*, **141** (1989), 109–119.
- [45] S. HELGASON, Differential operators on homogeneous spaces, *Acta Math.*, **102** (1959), 239–299.
- [46] S. HELGASON, The Radon transform on Euclidean spaces, compact two-point homogeneous spaces and Grassmann manifolds, *Acta Math.*, **113** (1965), 153–180.
- [47] S. HELGASON, A duality for symmetric spaces with applications to group representations, *Adv. Math.*, **5** (1970), 1–154.
- [48] S. HELGASON, The surjectivity of invariant differential operators on symmetric spaces I., *Ann. Math.*, **98** (1973), 451–479.
- [49] S. HELGASON, Paley–Wiener theorems and surjectivity of invariant differential operators on symmetric spaces and Lie groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **79** (1973), 129–131.
- [50] S. HELGASON, *The Radon transform*, Birkhäuser, 1980.
- [51] S. HELGASON, Operational properties of the Radon transform with applications, *Proc. of Conf. on Diff. Geo.*, Czechoslovakia, 1983.

- [52] S. HELGASON, *Groups and geometric analysis*, Academic Press, Inc., 1984.
- [53] S. HELGASON, Some results on Radon transforms, Huygens principle and X -ray transforms, *Contemp. Math. Amer. Math. Soc.* **63**, Amer. Math. Soc., Providence, 1987, 151–177.
- [54] G. HERGLOTZ, *Notes of lectures on ‘Mechanik der Kontinua’*, Göttingen, 1931.
- [55] A. HERTLE, A characterization of Fourier and Radon transforms on Euclidean space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **273** (1982), 595–607.
- [56] A. HERTLE, Continuity of the Radon transform and its inverse on Euclidean space, *Math. Z.*, **184** (1983), 165–192.
- [57] A. HERTLE, On the injectivity of the attenuated Radon transform, *Proc. AMS*, **92** (1984), 201–205.
- [58] A. HERTLE, On the range of the Radon transform and its dual, *Math. Ann.*, **267** (1984), 91–99.
- [59] A. HERTLE, The identification problem for the constantly attenuated Radon transform, *Math. Z.*, **197** (1988), 13–19.
- [60] P. HEYWOOD and P.G. ROONEY, On the Gegenbauer transformation, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **115A** (1990), 151–166.
- [61] F. JOHN, The ultrahyperbolic differential equation with four independent variables, *Duke Math. J.*, **4** (1938), 300–322.
- [62] F. JOHN, *Plane waves and spherical means*, Springer-Verlag, Reprint, 1981.
- [63] Á. KURUSA, A characterization of the Radon transform and its dual on Euclidean space, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **54** (1990), 273–276.
- [64] Á. KURUSA, New Radon inversion formulas with geometric proof, *Acta Math. Hung.*, **60** (1992), 283–290.
- [65] Á. KURUSA, A characterization of the Radon transform’s range by a system of PDEs, *J. Math. Anal. Appl.*, **161** (1991), 218–226.
- [66] Á. KURUSA, Translation invariant Radon transforms, *Math. Balcanica*, **5** (1991), 40–46.
- [67] Á. KURUSA, Characterization of the support curves of invertible Radon transforms, *Arch. Math.*, **61** (1993), 448–458.
- [68] Á. KURUSA, The Radon transform on hyperbolic space, *Geom. Dedicata*, **40** (1991), 325–339.
- [69] Á. KURUSA, The Radon transform on half sphere, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **58** (1993), 143–158.
- [70] Á. KURUSA, The invertibility of the Radon transform on abstract rotational manifolds of real type, *Math. Scand.*, **70** (1992), 112–126.

- [71] P.D. LAX and R.S. PHILLIPS, Translation representations for the solution of the non-Euclidean wave equation, *Comm. Pure Appl. Math.*, **32** (1979), 617–667.
- [72] P.D. LAX and R.S. PHILLIPS, The Payley–Wiener theorem for the Radon transform, *Comm. Pure Appl. Math.*, **23** (1970), 409–424.
- [73] N. LERNER, Wich–Wigner functions and tomographic methods, *SIAM J. Math. Anal.*, **21** (1990), 1083–1092.
- [74] A.K. LOUIS, Ghosts in tomography – the null space of the Radon transform, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **3** (1981), 1–10.
- [75] D. LUDWIG, The Radon transform on Euclidean space, *Comm. Pure Appl. Math.*, **69** (1966), 49–81.
- [76] W.R. MADYCH and D.C. SOLMON, A range theorem for the Radon transform, *Proc. AMS*, **104** (1988), 79–85.
- [77] A. MARKOE, Fourier inversion of the attenuated X -ray transform, *SIAM J. Math. Anal.*, **15** (1984), 718–722.
- [78] A. MARKOE and E.T. QUINTO, An elementary proof of local invertibility for generalized and attenuated Radon transforms, *SIAM J. Math. Anal.*, **16** (1985), 1114–1119.
- [79] F. NATTERER, On the inversion of the attenuated Radon transform, *Num. Math.*, **32** (1979), 431–438.
- [80] A. NODA, Generalized Radon transform and Lévy’s Brownian motion I-II., *Nagoya Math. J.*, **105** (1987), 71–89–107.
- [81] J. ORLOFF, Invariant Radon transforms on a symmetric space, *Trans. AMS*, **318** (1990), 581–600.
- [82] A. PISTOREK, *On the Radon transform and the fundamental solutions for hyperbolic differential operators with constant coefficients*, Preprint of Polish Academy, No. 18.
- [83] R.M. PERRY, On reconstructing a function on the exterior of a disk from its Radon transform, *J. Math. Anal. Appl.*, **59** (1977), 324–341.
- [84] E.T. QUINTO, The dependence of the generalized Radon transform on defining measures, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **257** (1980), 331–346.
- [85] E.T. QUINTO, Null spaces and ranges for the classical and spherical Radon transform, *J. Math. Anal. Appl.*, **90** (1982), 408–420.
- [86] E.T. QUINTO, Singular value decompositions and inversion methods for the exterior Radon transform and spherical transform, *J. Math. Anal. Appl.*, **95** (1983), 437–448.
- [87] E.T. QUINTO, The invertibility of rotation invariant Radon transforms, *J. Math. Anal. Appl.*, **91** (1983), 510–522.

- [88] E.T. QUINTO, Injectivity of rotation invariant Radon transforms on complex hyperplanes in $\mathbb{C}^n$, *Cont. Math.*, **63** (1987), 245–260.
- [89] J. RADON, Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Math.-Nat. Kl.*, **69** (1917), 262–277.
- [90] A. RÉNYI, On projections of probability distributions, *Acta Math. Acad. Sci. Budapest*, **3** (1952), 131–141.
- [91] F. RICHTER, On the k -dimensional Radon transform of rapidly decreasing functions, *L. Notes Math.* **1209**, Springer-Verlag, 1986, 243–258.
- [92] R. SCHNEIDER, Functions on a sphere with vanishing integrals over certain subspheres, *J. Math. Anal. Appl.*, **26** (1969), 381–384.
- [93] V.I. SEMYANISTYI, On some integral transformations in Euclidean space, *Dokl. A. Nauk*, **134** (1960), 536–539 (russian).
- [94] V.I. SEMYANISTYI, Homogeneous functions and some problems of integral geometry in spaces of constant curvature, *Soviet Math. Dokl.*, **2** (1961), 59–62.
- [95] R.T. SEELEY, Spherical harmonics, *Amer. Math. Monthly*, **73** (1966), 115–121.
- [96] L.A. SHEPP and J.B. KRUSKAL, Computerized tomography: The new medical X-ray technology, *Amer. Math. Monthly*, **85** (1978), 420–439.
- [97] D.C. SOLMON, The X-ray transform, *J. Math. Anal. Appl.*, **56** (1976), 61–83.
- [98] D.C. SOLMON, Asymptotic formulas for the dual Radon transform and applications, *Math. Z.*, **195** (1987), 321–343.
- [99] K.T. SMITH, D.C. SOLMON and S.L. WAGNER, Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing objects from radiographs, *Bull. AMS*, **83** (1977), 1227–1270.
- [100] R.S. STRICHARTZ, Radon inversion – variations on a theme, *Amer. Math. Monthly*, **89** (1982), 377–384.
- [101] R.S. STRICHARTZ, Harmonic analysis on constant curvature surfaces with point singularities, *J. Func. Anal.*, **91** (1990), 37–116.
- [102] Z.I. SZABÓ, Hilbert’s fourth problem I., *Adv. in Math.*, **59** (1986), 185–301.
- [103] L.A. SZÉKELY, Holiday numbers: sequences resembling to the Stirling numbers of second kind, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **48** (1985), 459–467.
- [104] L.A. SZÉKELY, The analytic behavior of the holiday numbers, *Acta Sci. Math.*, **51** (1987), 365–369.
- [105] O.J. TRETIK, Attenuated and exponential Radon transforms, *Proc. Symp. Appl. Math.*, **27** (1982), 25–33.

- [106] O.J. TRETIAK and C. METZ, The exponential Radon transform, *SIAM J. Appl. Math.*, **39** (1980), 341–354.
- [107] F.G. TRICOMI, *Integral equations*, Interscience, 1957.
- [108] H.K. TUY, An inversion formula for cone-beam reconstruction, *SIAM J. Appl. Math.*, **43** (1983), 546–552.
- [109] WU-YI H., On the laws of trigonometries of two-point homogeneous spaces, *Ann. Global Anal. Geom.*, **7** (1989), 29–45.
- [110] A. VOLČIČ and T. ZAMFIRESCU, Ghosts are scarce, *J. London Math. Soc.*, **40** (1989), 171–178.
- [111] K. YOSIDA, *Lectures on differential and integral equations*, Interscience, 1960.
- [112] L. ZALCMAN, Offbeat integral geometry, *Amer. Math. Monthly*, **87** (1980), 161–175.