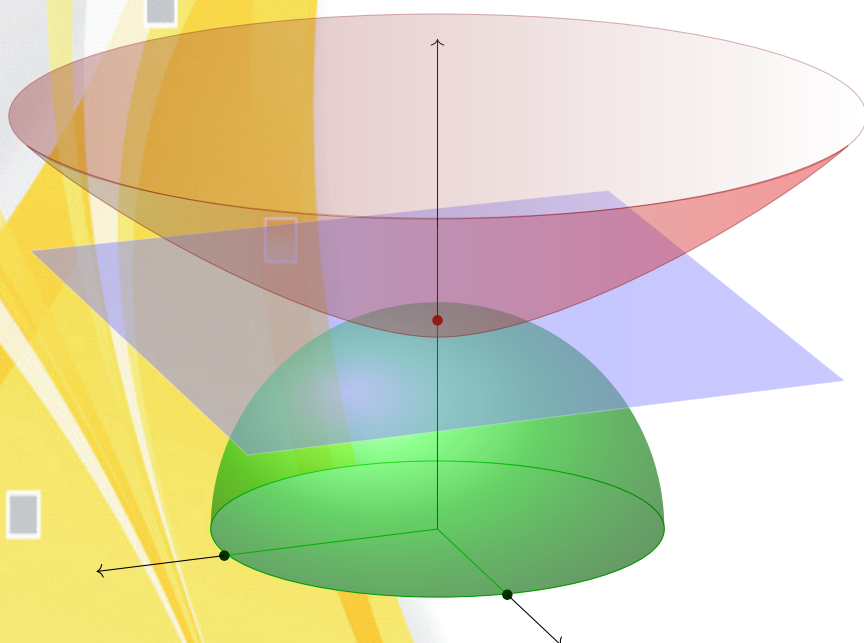


Kurusa Árpád

Bevezetés a differenciálgeometriába



Kurusa Árpád

Bevezetés a differenciálgeometriába

A címlapon a konstans görbületű terek
kvadratikus felület-modelljei láthatók.

Ez a dokumentum

- nem köztulajdon,
- kizárólag személyes használatra tölthető le,
- másolása, sokszorosítása és terjesztése tilos,
- bemutatása, előadása vagy felhasználása más műhöz kizárólag jelen dokumentum pontos megnevezésével (szerző, cím, megjelenés éve) és a publikáció oldalra mutató url (nem a közvetlen letöltési link) megadásával engedélyezett,
- semmilyen módon sem módosítható, nem készíthető belőle se átdolgozás, se származékos mű, és
- nem használható fel kereskedelmi célra.



Előszó

Ez a könyv az 1999-ben a szintén „Bevezetés a differenciálgeometriába” címmel a Polygon Kiadó Jegyzettár sorozatában megjelent könyvem új verziója.

Ez az új verzió azonban több szempontból is jelentős előrelépés és az idő előrehaladtával terveim szerint további fejlődést fog mutatni.

A legfontosabb változás az, hogy a tartalomban minden ismert hiba korrigálása megtörtént, néhány ponton javult a prezentáció és a logikai felépítés is, valamint néhány új ismeret is bekerült az anyagba. Ilyen például a görbék létezéséről szóló tétel, a felületek alaptétele, és a konvex síktartományok stabil egyensúlyi pontjairól szóló tétel is.

A kivitelezésben is jelentős változás történt: a korábbi $\text{\TeX}$ -rendszert felváltotta a $\text{\LaTeX}$, sőt a fordító $\text{\PDFLaTeX}$ lett, amely többek között lehetővé teszi, hogy a $\text{\PGF/TikZ}$ megjelenésének hála sokkal könnyebben kerülhessenek az anyagba ábrák. Az új rendszer a tartalom fejlesztését is könnyebbé teszi, melynek követését az igen pontos verziószámozás teszi lehetővé.

0.1:
Ábrák!

Az eredeti előszóban megfogalmazott fejlesztési tervek tekintetében változás, hogy a topológia függelékre már nincs szükség, mert (habár nincs teljesen készen, de) szabadon és ingyenesen elérhető a „*Topológiai alapismeretek*” könyvem [13]. Ma úgy látom, hogy a Lie-csoportokra nem egy ilyen alapvetően metrikus szemléletű könyvben kell sort keríteni, a Finsler-sokaságok témája viszont mindenképpen helyet kell találjon majd.

Végül az internet fejlődése és a megfelelő szttenderdek kialakulása (bizony, például a PDF csak 2008-ban lett hivatalos szabvány!) látványos változást hozott a forgalmazásban is: ez a könyv az interneten szabadon és ingyenesen hozzáférhető.

A 2020. tavaszi verzió létrejöttében alapvető szerepet játszott a SARS-CoV-2 vírus miatt 2020-ban kialakult COVID-19 világjárvány elfojtására alkalmazott közösségi távolságtartás.

Szeged, 2020. április 21.

dr. Kurusa Árpád

Eredeti előszó

Valamikor középiskolás koromban fogalmazódott meg bennem először, hogy mennyivel könnyebb lenne tanulni a könyvekből, ha nem kellene olyan sok, a lényegét elfedő, illetve késleltető szövegen átrágni magam. Azután az egyetemen gondosan jegyzeteltem minden előadáson, és örömmel vettem, hogy igen tömör jegyzeteim komoly népszerűsége tettek szert csoporttársaim körében (nem, nem csak azért, mert az enyém volt az egyetlen teljes jegyzet ...). Akkor azután úgy éreztem, hogy középiskolás elképzelésem jó volt, mások is szívesen tanulnak tömör, lényegre törő olvasmányból.

Az a könyv, amelyet most az olvasó a kezében tart, az első komoly próbálkozásom a szerintem hatékony tanulásra alkalmas leírás megvalósítására. Igyekeztem tömör, célratörő és mégis könnyen olvasható lenni, összeegyeztetni az ellentmondani látszó „minél precízebben” matematikai parancsolatot a „minél érthetőbben” emberi kívánsággal. Ez utóbbi kíváncsi eredményezte a ma olyan megszokott hivatkozási számok elhagyását és azt, hogy a könyvben minden, ha nincs külön másként jelezve, végtelenszer differenciálható. Ezzel sok-sok analitikus nehézségtől mentesül az olvasó, és reményeim szerint így könnyebb a lényegi konstrukciók és a felépítés megértése.

Eltérve a magyarországi hagyományoktól, a könyv a koordináta módszer helyett a felületeken is a sokaság gondolkodásmódját használja. A differenciálgeometria sok nagynevű és fontos tétele vált csaknem triviálissá ebben a fogalomrendszerben, de nincs kétségem afelől, hogy éppen ezek az eredmények vezettek a koordináta-mentes sokaságelmélet modern és hatékony fogalomrendszeréhez.

Szokásos dolog a bevezetőben bizonyos mértékig leírni a könyv tartalmát, rámutatni arra, hogy egyes témák miért maradtak ki, mások miért kerültek bele. Ezúttal ez elmarad, mert nem akarom szubjektív döntéseimet objektív indokok mögé rejteni. A differenciálgeometria hatalmas terület, amelyből igenis válogatni kell, és a válogatás mikéntjét bizonyos kereteken belül elsősorban az ízlés befolyásolja.

E jegyzetről tehát csak annyit most, hogy minden fejezet végén igyekeztem a fontosabb elvont fogalmakra rávilágító konkrét számításokat bemutatni, ami szerintem nagyban hozzájárul a mély fogalmak megértéséhez és megtapasztalásához. A tapasztalást csak önálló feladat megoldással lehetne tovább fokozni, mégsem közlök feladatokat, mert a megoldások kidolgozása már eltértené e könyvet a céljától, megoldás nélkül viszont könnyen zavart okozhat egy rosszul megértett, vagy különösen egy hibásan megoldott feladat.

Van néhány – már most látott – hiányossága is e könyvnek, melyeket már csak az esetleges következő kiadásban lesz módomban pótolni. Szükség lenne például ábrákra, egy tömör topológia függelékre (ez azért nélkülözhető, ha megvan Patterson könyve [19]), a Lie csoportnak a Riemann sokaság itteni tárgyalásához hasonló mélységű tanulmányozására és talán a relativitáselmélet matematikájának egy gyors ismertetésére.

A jegyzet megírásakor számos forrásmunkára támaszkodtam. Ezeket, valamint a tárgyalt anyaggal kapcsolatos, de azon túlmutató irodalmi utalásokat az olvasó az irodalomjegyzékben találhatja meg. Mindvégig törekedtem szabványos terminológiát, definíciókat és jelöléseket használni, bár néha nem volt könnyű az irodalomban előforduló számos konvenció közül kiválasztani a megfelelőt.

Azt remélem, hogy aki e könyv anyagát kellő alapossággal és *fantáziával* el-sajátítja, azt többé már „nem lehet eladni” ezen a területen. Ha ez így van, akkor én már el is értem a legfontosabb célo-m. Mégis – telhetetlenül – azt remélem, hogy talán néhány olvasó e könyv alapján meg is szereti majd a differenciálgeometria valóban sokszínű világát.

Köszönöm mindazok – de különösen mindig kérdező diákjaim – segítségét, akik hozzájárultak e könyv tartalmának és formájának kialakításához. Köszönet illeti Szabó Zoltánt, akinek rendkívül kellemes egyetemi előadásai nélkül ma biztosan nem ezen a területen dolgoznék, külön köszönet Simányi Nándornak a rendkívül részletes és inspiráló lektorálásért és köszönet a Polygon Kiadónak, amiért kísérleti könyvemet kiadásra érdemesnek találta.

Végül családomnak, Györgyinek és Leventének köszönöm a türelmet, amivel víselték a könyv írása közbeni „elvontságomat”, és köszönöm a pártolást és nyugalmat, ami körülvelt, és sokszor az éjjel-nappali munkában is erőt adott az írásra.

Mindenkinek kellemes olvasást kívánok!

Szeged, 1999. február 14.

dr. Kurusa Árpád

P.s.: Kérek mindenkit, hogy ha talál a könyvben hibát, még a legegyszerűbbet is, jelezze a kurusa@math.u-szeged.hu elektronikus levelezési címemre.

Ezt a munkát is elősegítette a T020066 és F016226 számú OTKA támogatás.

Az eredeti verzió támogatói:

- A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYV ÉS FOLYÓIRAT BIZOTTSÁGA
- A MŰVELŐDÉSI ÉS KÖZOKTATÁSI MINISZTERIUM által kiírt,
a FELSŐOKTATÁSI PÁLYÁZATOK IRODÁJA által lebonyolított
FELSŐOKTATÁSI TANKÖNYVTÁMOGATÁSI PROGRAM

Az eredeti verzió lektorai:

- DR NAGY PÉTER, a mat. tud. kandidátusa (azóta doktora)
- DR SIMÁNYI NÁNDOR, a mat. tud. doktora

Az eredeti verzió nyelvi lektora:

- DR KOZMA JÓZSEF (azóta PhD)

Az eredeti verzió kiadása:

- ISSN 1417—0590
- POLYGON KIADÓ 1999

Tartalomjegyzék

Előszó	i
Tartalomjegyzék	v
1. Görbék a síkon és a térben	1
1.1. Paraméterezés, érintő és ívhossz	1
1.2. Görbület, torzió, simulósík és simulókör	2
1.3. Frenet-formulák és a görbék alaptétele	5
1.4. Síkgörbék, körülfordulási és négycsúcs-tétel	8
1.5. Speciális görbék	12
1.5.1. Konstans görbületű és torziójú görbék	12
1.5.2. Lejtőgörbék és Bertrand-féle görbék	15
1.5.3. Síkbeli konvex tartományok egyensúlyi helyzetei	17
1.5.4. A kötélgörbe	20
1.5.5. Két feladat	22
1.6. Kitekintés magasabb dimenzióra	25
2. Differenciálható felületek	27
2.1. Paraméterezés, érintősík és atlasz	27
2.2. Differenciálás felületeken	29
2.3. Felületi görbék és párhuzamosság	32
2.4. Geodetikusok	35
2.5. Alapmennyiségek és görbületek	38
2.6. Lie-zárójel	44
2.7. A Riemann-görbület	48
2.8. Integrálás felületen, Stokes-tétel	52
2.9. Gauss–Bonnet-tétel	56
2.10. Speciális felületek	63
2.10.1. Konstans görbületű forgásfelületek	64
2.10.2. Minimálfelületek	67
2.10.3. Umbilikus felületek, nem umbilikus pontok	69
2.10.4. Síkba hajlítható, torz- és 0 görbületű felületek	73
2.10.5. Aszimptotikus görbék	76
2.10.6. Az $(x, y, f(x, y))$ felület jellemzői	80

3. Differenciálható sokaságok	83
3.1. Differenciálás, érintőtér, Lie-zárójel és Hesse-forma	87
3.2. Kotangenstér, tenzorok, differenciálformák és kohomológia	96
3.3. Integrálás sokaságokon és Stokes-tétel	103
3.4. Kovariáns deriválás, Christoffel-szimbólum, torzió és Riemann-görbület	108
3.5. Párhuzamosság és geodetikusok	111
3.6. Exponenciális, affin és geodetikus leképezések	115
4. Riemann-sokaságok	123
4.1. Levi-Civita kovariáns deriválás	124
4.2. Geodetikusok variációja és Jacobi-mezők	128
4.3. Metrika és izometrikus leképezések	134
4.4. Metszetgörbület	146
4.5. Konstans görbületű terek	150
F. Függelék	165
F.1. Vektor-vektor-függvények analízise	165
F.2. Görbék rektifikálhatósága	167
F.3. Tenzorok és Bianchi-tenzorok	169
F.4. Külsőformák	173
Irodalomjegyzék	179
Jelölések és konvenciók	181
Név- és tárgymutató	185
Tennivalók listája	191

1

Görbék a síkon és a térben

1.1. Paraméterezés, érintő és ívhossz

Definíció. Az $\mathbf{r}: (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható függvény $\text{Tr } \mathbf{r}$ képhalmazát *egyszerű görbeívnek* nevezzük, ha $\mathbf{r}$ injektív, inverze folytonos, és $\dot{\mathbf{r}} \neq 0$. Az $\mathbf{r}$ függvényt *paraméterezésnek*, a $\text{Tr } \mathbf{r}$ egyszerű görbeívet az $\mathbf{r}$ *nyomának* nevezzük. Két paraméterezést *ekvivalensnek* mondunk, ha nyomuk megegyezik

Definíció. Egy $\mathbf{r}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméterezésű egyszerű görbeív *ívhossza* $\int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt$.

Tétel. Az ívhossz független a paraméterezéstől.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{r}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ és $\mathbf{p}: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ugyanazon egyszerű görbeív két paraméterezése. Legyen $\phi = \mathbf{r}^{-1} \circ \mathbf{p}: (c, d) \rightarrow (a, b)$. Ekkor

$$\int_c^d \left| \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} \right| dt = \int_c^d \left| \frac{d\mathbf{r}(\phi(t))}{dt} \right| dt = \int_c^d \left| \frac{d\mathbf{r}(\phi)}{d\phi} \right| \cdot |\dot{\phi}(t)| dt = \int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(\phi)| d\phi. \quad \blacksquare$$

Ha az egyszerű görbeív bármely két pontja közti ív hossza éppen a paraméterek különbsége, akkor $s = \int_0^s |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt$. Ezt deriválva az alábbi következik.

Tétel. Ha az egyszerű görbeív $\mathbf{r}$ paraméterezése ívhossz szerinti, akkor $|\dot{\mathbf{r}}(s)| = 1$, ahol s az ívhossz szerinti paraméter.

Konvenció. Az s paraméter a továbbiakban mindig az ívhossz szerinti paramétert fogja jelenteni.

Definíció. Egy (térbeli) összefüggő ponthalmazt *differenciálható görbének* nevezzük, ha minden pontjának létezik olyan környezete, melyben a halmaz egyszerű görbeív.

Tétel. Bármely görbe vagy az egyenessel, vagy a körrel homeomorf.

Bizonyítás. Egy pontból kiindulva paraméterezzünk ívhossz szerint mind a két irányba, amíg a paraméterezés injektív marad. Vegyünk egy ilyen maximális paraméterezést (ilyen létezik a Bolzano–Weierstrass-tétel miatt [31]).

Egy ilyen maximális paraméterezés vagy minden pontot paraméterez, ez esetben a görbe homeomorf az egyenessel, vagy csak egy pontot hagy paraméter nélkül, és akkor homeomorf a körrel. Több pont kimaradása a maximalitás miatt lehetetlen, mert két kimaradó pont esetén valamelyik pont egyszerű görbeív környezetét hozzávéve a paraméterezéshez, egy nagyobb paraméterezés adódna. ■

Definíció. Az $\mathbf{r}$ paraméterezésű egyszerű görbeív t paraméterű pontjában az $\dot{\mathbf{r}}(t)$ érintő iránya $\mathbf{t}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)/|\dot{\mathbf{r}}(t)|$, az *egységnyi érintővektor*.

Az egységnyi érintővektor nyilván független a paraméterezés választásától, és ívhossz szerinti paraméterezés esetén $\mathbf{t}(s) = \dot{\mathbf{r}}(s)$.

1.2. Görbület, torzió, simulósík és simulóköör

Definíció. A görbe ívhossz szerinti $\mathbf{r}$ paraméterezésének $\ddot{\mathbf{r}}(s)$ második deriváltja a görbe *görbületi vektora*, melynek hossza $\kappa(s) = |\ddot{\mathbf{r}}(s)|$ a görbe *görbülete*, iránya pedig az $\mathbf{n}(s) = \ddot{\mathbf{r}}(s)/\kappa(s)$ *egységnyi görbületi vektor*, amit a görbe *normális vektorának* is szokás nevezni.

Differenciálva az $\langle \dot{\mathbf{r}}(s), \dot{\mathbf{r}}(s) \rangle \equiv 1$ azonosságot, az adódó $2\langle \ddot{\mathbf{r}}(s), \dot{\mathbf{r}}(s) \rangle = 0$ összefüggés bizonyítja az alábbi állítást.

Tétel. A görbületi vektor merőleges az érintőre, vagyis $\ddot{\mathbf{r}}(s) \perp \dot{\mathbf{r}}(s)$.

Tétel. Egy görbe akkor és csak akkor egy egyenes darabja, ha $\kappa(s) \equiv 0$.

Bizonyítás. Ha a görbe egyenesdarab, akkor $\mathbf{r}(s) = s \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v}$ valamely $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorra, ahol $|\mathbf{u}| = 1$, amiért $\ddot{\mathbf{r}}(s) = 0$. Ha $\ddot{\mathbf{r}}(s) = 0$, akkor kétszeri integrálás adja az $\mathbf{r}(s) = s \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v}$ egyenest valamely $\mathbf{u}$ ($|\mathbf{u}| = 1$) és $\mathbf{v}$ vektorokkal. ■

Tétel. Az $\mathbf{r}$ paraméterezésű görbe görbülete $\kappa(t) = \frac{|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)|}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|^3}$.

Bizonyítás. Ha $s = s(t)$ az ívhossz, akkor

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{r}}(s)s'(t), \quad \text{és} \quad \ddot{\mathbf{r}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(s)(s'(t))^2 + \dot{\mathbf{r}}(s)s''(t),$$

ezért

$$\frac{|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)|}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|^3} = \frac{|\dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s)| \cdot |s'(t)|^3}{|\dot{\mathbf{r}}(s)|^3 \cdot |s'(t)|^3} = |\ddot{\mathbf{r}}(s)| = \kappa(s) \quad \blacksquare$$

Ebben a bizonyításban fordul elő először, hogy egy hozzárendelés, most éppen a görbület, két paraméterezéséhez tartozó két függvényt ugyanazon betűvel jelöltük.

Konvenció. Amikor ez nem okozhat félreértést, ugyanazzal a névvel jelöljük egy hozzárendelés két paraméterezéséhez tartozó két függvényt. Ilyenkor a beírt paraméter értelemszerűen határozza meg a megfelelő függvényt, ami a görbület esetében azt jelenti, hogy $\kappa(t) = \kappa(s(t))$. Más szóval az $f(x)$ az $f(x(t))$ jelölés rövidítése is lehet, amennyiben a szövegkörnyezet meghatározza az $x(t)$ függvényt.

Definíció. Legyen az ívhossz szerinti $\mathbf{r}$ paraméterezésű görbe $\mathbf{r}(s_0)$ pontjában $\kappa(s_0) > 0$. Ha $s_1, s_2 \rightarrow s_0$ esetén az $\mathbf{r}(s_1)$, $\mathbf{r}(s_2)$ és $\mathbf{r}(s_0)$ kijelöl egy $\mathcal{S}(s_0, s_1, s_2)$ síkot, és ezeknek létezik határhelyzete, akkor azt a görbe $\mathbf{r}(s_0)$ pontban érintő *simulósík*jának nevezzük.

Azt, hogy a definíciónk helyes, vagyis a simulósík nem függ sem a paraméterezéstől, sem a választott sorozatoktól, azt a következő állítás igazolja.

Tétel. *A $\mathbf{t}(s_0)$ és $\mathbf{n}(s_0)$ által feszített sík éppen az $\mathbf{r}(s_0)$ pontnál érintő simulósík.*

Bizonyítás. Legyen $s_0^n = s_0$, és legyen s_1^n és s_2^n olyan sorozat, melyre $\mathbf{r}(s_1^n)$, $\mathbf{r}(s_2^n)$ és $\mathbf{r}(s_0)$ meghatároz egy $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}(s_0, s_1^n, s_2^n)$ síkot, valamint $s_1, s_2 \rightarrow s_0$, amint $n \rightarrow \infty$.

Legyen $\mathbf{m}_n$ az $\mathcal{S}_n$ sík normális vektora, és definiáljuk az $f_n(s) = \langle \mathbf{m}_n, \mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_0) \rangle$ függvényt. Ekkor nyilván $f_n(s_i^n) = 0$ ($i = 0, 1, 2$). Rolle tétele [34] szerint létezik τ_1^n és τ_2^n úgy, hogy $f_n'(\tau_i^n) = 0$ ($i = 1, 2$). Újra Rolle tétele miatt van olyan τ_0^n , hogy $f_n''(\tau_0^n) = 0$. Ebből $0 = \langle \mathbf{m}_n, \dot{\mathbf{r}}(\tau_1^n) \rangle$, és $0 = \langle \mathbf{m}_n, \ddot{\mathbf{r}}(\tau_0^n) \rangle$ adódik. Mivel s_1^n és s_2^n tart s_0 -hoz, τ_1^n és τ_0^n is ezt teszi, így legutóbbi egyenlőségeinkben a torlódási pontok $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{m}_n$ halmazára azt kapjuk, hogy

$$0 = \langle \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{m}_n, \dot{\mathbf{r}}(s_0) \rangle \quad \text{és} \quad 0 = \langle \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{m}_n, \ddot{\mathbf{r}}(s_0) \rangle.$$

Eszerint $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{m}_n$ elemei merőlegesek az érintő- és normálvektorokra, így a rájuk merőleges sík tartalmazza a $\mathbf{t}(s_0)$ és $\mathbf{n}(s_0)$ vektorokat. ■

Definíció. Legyen az ívhossz szerinti $\mathbf{r}$ paraméterezésű görbe $\mathbf{r}(s_0)$ pontjában $\kappa(s_0) \neq 0$. Ha $s_1, s_2 \rightarrow s_0$ esetén az $\mathbf{r}(s_1)$, $\mathbf{r}(s_2)$ és $\mathbf{r}(s_0)$ pontokra illeszkedik egy $\mathcal{K}(s_0, s_1, s_2)$ kör, és ezen köröknek létezik határhelyzete, akkor azt a görbe $\mathbf{r}(s_0)$, vagy s_0 -beli *simuló körének* nevezzük.

Az alábbi állítás nem csak azt igazolja, hogy a simulókör nem függ sem a paraméterezés, sem a sorozat megválasztásától, hanem azt is mutatja, hogy a görbület a görbe geometriai, a paraméterezéstől független jellemzője.

Tétel. *A simulókör mindig a simulósíkban van, érinti a görbe $\mathbf{t}$ érintőjét, és az $\mathbf{r}(s_0)$ pontban a sugara $\varrho(s_0) = 1/\kappa(s_0)$.*

Bizonyítás. Legyen $s_1^n, s_2^n \rightarrow s_0$, amint $n \rightarrow \infty$, és helyezzük az origót az $\mathbf{r}(s_0)$ pontba. Ebben a koordináta-rendszerben $\mathbf{r}(s_0) = 0$. Az $\mathbf{r}(s_0)$, $\mathbf{r}(s_1^n)$, $\mathbf{r}(s_2^n)$ pontok köré írt kör középpontjába mutasson a $\mathbf{d}_n$ helyvektor, és legyen $f_n(s) = |\mathbf{r}(s) - \mathbf{d}_n|^2 - d_n^2$.

Ekkor $\mathbf{d}_n$ minden torlódási pontja benne van a simulósíkban, és $f_n(s_0) = f_n(s_1^n) = f_n(s_2^n) = 0$. Rolle tétele szerint létezik τ_1^n és τ_2^n az s_1^n , s_0 és s_0 , s_2^n között úgy, hogy $f'_n(\tau_1^n) = f'_n(\tau_2^n) = 0$. Megint Rolle tételéből kapjuk, hogy létezik τ_0^n a τ_1^n és τ_2^n között, melyre $f''_n(\tau_0^n) = 0$. Eszerint

$$\begin{aligned} f'_n(\tau_1^n) &= 2\langle \mathbf{r}(\tau_1^n) - \mathbf{d}_n, \dot{\mathbf{r}}(\tau_1^n) \rangle = 0 \\ f''_n(\tau_0^n) &= 2\dot{\mathbf{r}}^2(\tau_0^n) + 2\langle \mathbf{r}(\tau_0^n) - \mathbf{d}_n, \ddot{\mathbf{r}}(\tau_0^n) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Mivel s_1^n és s_2^n tart s_0 -hoz, $\tau_0^n, \tau_1^n \rightarrow s_0$ is teljesül.

Egyenlőségeink határértékben a torlódási pontok $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{d}_n$ halmazára a

$$\begin{aligned} \langle \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{d}_n, \mathbf{t}(s_0) \rangle &= \langle \mathbf{r}(s_0) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{d}_n, \dot{\mathbf{r}}(s_0) \rangle = 0, \\ 2 - 2\langle \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{d}_n, \kappa(s_0)\mathbf{n}(s_0) \rangle &= 2\dot{\mathbf{r}}^2(s_0) + 2\langle \mathbf{r}(s_0) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{d}_n, \ddot{\mathbf{r}}(s_0) \rangle = 0, \end{aligned}$$

egyenletekhez vezetnek. Ezek szerint rendre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{d}_n \perp \mathbf{t}(s_0), \text{ és } 1 = \langle \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{d}_n, \ddot{\mathbf{r}}(s_0) \rangle = \langle \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{d}_n, \kappa(s_0)\mathbf{n}(s_0) \rangle$$

következik. Vagyis $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{d}_n = \mathbf{n}(s_0)/\kappa(s_0)$ teljesül, ami bizonyítja a tételt. ■

Definíció. A simulósík $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$ normálisát a görbe *binormális vektorának*, vagy egyszerűen *binormálisának* nevezzük.

A $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ hármast szokás a *görbe kísérő triéderének* hívni.

Lemma. A binormális deriváltja párhuzamos a normálissal, vagyis $\mathbf{n}(s) \parallel \dot{\mathbf{b}}(s)$.

Bizonyítás. Induljunk ki a nyilvánvaló $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = 1$ egyenlőség deriválásából. Ebből $2\langle \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{b} \rangle = 0$, vagyis $\dot{\mathbf{b}} \perp \mathbf{b}$ adódik, tehát $\dot{\mathbf{b}}$ a simulósíkban van.

Most a $\langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle = 0$ deriválásából kapjuk, hogy $\langle \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{t} \rangle + \langle \mathbf{b}, \dot{\mathbf{t}} \rangle = 0$, amiért $\langle \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{t} \rangle + \langle \mathbf{b}, \kappa \cdot \mathbf{n} \rangle = 0$, vagyis $\langle \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{t} \rangle = 0$. Tehát $\dot{\mathbf{b}} \perp \mathbf{t}$, ami igazolja állításunkat. ■

Megjegyzés. Ebben a bizonyításban fordul elő először, hogy egy függvénynek nem írjuk ki a paraméterezését. Ilyenkor az elhagyott paramétert értelemszerűen pótolhatjuk, ha minden szereplő mennyiséget azonos helyen tekintünk. A legutolsó képletünk esetében tehát a $\dot{\mathbf{b}}(s) \perp \mathbf{t}(s)$ állításra kell gondolni.

Konvenció. Amikor ez nem okozhat félreértést, a függvényegyenleteknél az azonos paramétereket elhagyjuk. Más szóval az $f(x) = g(x)$ egyenletet az $f = g$ jelöléssel rövidítjük azzal a hallgatólagos megállapodással, hogy ilyenkor a paramétereket mindig a szövegkörnyezet által meghatározott azonos pontban vesszük.

Definíció. A $\tau(s) = -\langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle$ értéket a görbe $\mathbf{r}(s)$ pontban vett *torziójának* nevezzük.

Tétel. Egy görbe akkor és csak akkor síkgörbe, ha torziója azonosan 0.

Bizonyítás. Síkgörbe esetén $\mathbf{b}$ a sík normálvektora, vagyis konstans, amiért $\dot{\mathbf{b}} \equiv 0$.

Ha $\tau \equiv 0$, akkor $\mathbf{n} \perp \dot{\mathbf{b}}$, miközben előző tételünk szerint $\mathbf{n} \parallel \dot{\mathbf{b}}$ is igaz. Ebből $\dot{\mathbf{b}} \equiv 0$, vagyis az adódik, hogy $\mathbf{b}$ konstans. Tekintsük az $f(s) = \langle \mathbf{b}, \mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_0) \rangle$ függvényt. Ennek deriváltja $f' = \langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle = 0$, tehát f konstans. Mivel $f(s_0) = 0$, $f \equiv 0$, vagyis a görbe a $\mathbf{b}$ normálisú, $\mathbf{r}(s_0)$ -on átmenő síkban van. ■

Alább megmutatjuk, hogy a torzió a görbe geometriai jellemzője, vagyis független a görbe paraméterezésétől.

Tétel. A torzió éppen a binormális forgásának szögsebessége a $\mathbf{t}$ tengely körül, vagyis

$$|\tau| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s},$$

ahol $\Delta \alpha$ a binormálisnak a Δs ívhossznyi elmozduláshoz tartozó szögelfordulása.

Bizonyítás. Ha $\Delta s \rightarrow 0$, akkor nyilván $\Delta \alpha \rightarrow 0$ is. Számoljunk az s paraméterű pont közelében:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\sin \Delta \alpha} \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta \alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta \alpha}{\Delta s} \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{b}(s) \times \mathbf{b}(s + \Delta s)|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{b}(s) \times (\mathbf{b}(s + \Delta s) - \mathbf{b}(s))|}{\Delta s} \\ &= \left| \mathbf{b}(s) \times \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{b}(s + \Delta s) - \mathbf{b}(s)}{\Delta s} \right| = |\mathbf{b} \times \dot{\mathbf{b}}| = |\mathbf{b} \times (-\tau \mathbf{n})| = |\tau|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.3. Frenet-formulák és a görbék alaptétele

Frenet-formulák. A kísérő triéder deriváltjára

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{t}} &= \quad \quad + \kappa \mathbf{n}, \\ \dot{\mathbf{n}} &= -\kappa \mathbf{t} \quad \quad + \tau \mathbf{b}, \\ \dot{\mathbf{b}} &= \quad \quad - \tau \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Bizonyítás. Az első és az utolsó sor a definíció megismétlése. Mivel pedig $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ és $\mathbf{b}$ orthonormált bázist alkot, a középső sor az alábbiakból adódik:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle &= 1 \Rightarrow 2\langle \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle &= 0 \Rightarrow \langle \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{t} \rangle + \langle \mathbf{n}, \dot{\mathbf{t}} \rangle = \langle \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{t} \rangle + \kappa = 0 \Rightarrow \langle \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{t} \rangle = -\kappa, \\ \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle &= 0 \Rightarrow \langle \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{n}, \dot{\mathbf{b}} \rangle = \langle \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{b} \rangle - \tau = 0 \Rightarrow \langle \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{b} \rangle = \tau.\end{aligned}$$

■

Megjegyzés. A Frenet-formulák egy másik felírása válik lehetségessé, ha bevezetjük a $\mathbf{d} = \tau \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b}$ Darboux-vektort. Ekkor $\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{d} \times \mathbf{t}$, $\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{d} \times \mathbf{n}$, és $\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{d} \times \mathbf{b}$.

A Frenet-formulák lehetővé teszik a torzió ívhossztól független kiszámítását.

Tétel. Az $\mathbf{r}$ paraméterezésű görbe torziója $\tau(t) = \frac{(\dot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t))}{|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)|^2}$.

Bizonyítás. Ha t történetesen az ívhossz szerinti paraméter, vagyis $t = s$, akkor

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{t}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \kappa \mathbf{n}, \quad \text{és} \quad \ddot{\mathbf{r}} = \kappa' \cdot \mathbf{n} + \kappa \cdot \dot{\mathbf{n}} = \kappa' \cdot \mathbf{n} + \kappa(-\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}),$$

így $(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}) = \langle \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}} \rangle = \kappa^2 \tau$ és $|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2 = \kappa^2$, vagyis a formula érvényes.

Tetszőleges t paraméterből kifejezhető az $s = s(t)$ ívhossz. Ezt használva

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}(t) &= \dot{\mathbf{r}}(s) \cdot s'(t) \\ \ddot{\mathbf{r}}(t) &= \ddot{\mathbf{r}}(s) \cdot (s'(t))^2 + \dot{\mathbf{r}}(s) \cdot s''(t) \\ \ddot{\mathbf{r}}(t) &= \ddot{\mathbf{r}}(s) \cdot (s'(t))^3 + \ddot{\mathbf{r}}(s) \cdot 3 \cdot s'(t) \cdot s''(t) + \dot{\mathbf{r}}(s) \cdot s'''(t),\end{aligned}$$

adódik, melyből

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) &= (s'(t))^3 \cdot \dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s), \\ (\dot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t)) &= \langle \dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t) \rangle = (s'(t))^6 \langle \dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s) \rangle\end{aligned}$$

következik. Ez igazolja a tételben megadott formula érvényességét.

■

Görbék alaptétele. Két görbéhez akkor és csak akkor létezik mozgás, mely őket egymásba viszi, ha megfelelő ívhossz szerinti paraméterezésben a görbület és torzió a két görbén azonosan egyenlő.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{r}$ egy görbe ívhossz szerinti paraméterezése, $\phi: \mathbb{R}^3 \ni \mathbf{x} \mapsto \Phi \mathbf{x} + \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ pedig egy mozgás, vagyis Φ egy forgatás-mátrix, $\mathbf{v}$ egy vektor. Ekkor az elmozgatott görbének $\mathbf{r}_\phi(s) = \Phi \mathbf{r}(s) + \mathbf{v}$ egy paraméterezése. Nyilván $\dot{\mathbf{r}}_\phi = \Phi \dot{\mathbf{r}}$, $\ddot{\mathbf{r}}_\phi = \Phi \ddot{\mathbf{r}}$ és $\ddot{\mathbf{r}}_\phi = \Phi \ddot{\mathbf{r}}$. Ezekből az $\mathbf{r}_\phi$ görbe ϕ indexszel jelölt mennyiségeire

$\tau_\phi(s) = \tau(s)$ és $\kappa_\phi(s) = \kappa(s)$ adódik a torzió és a görbület általános paraméterezés mellett levezetett képletei alapján.

Tegyük most fel visszafelé, hogy valamely ívhossz szerinti $\mathbf{r}$ és $\mathbf{p}$ paraméterezésű görbékre $\kappa_{\mathbf{r}} = \kappa_{\mathbf{p}}$ és $\tau_{\mathbf{r}} = \tau_{\mathbf{p}}$. A mozgató nem változtatja meg a görbület és torzió értékét, ezért elegendő olyan görbékre igazolni az állítást, melyeknek valamely $\mathbf{r}(s_0)$ illetve $\mathbf{p}(s_0)$ pontokban a kísérő a $(\mathbf{t}_{\mathbf{r}}(s_0), \mathbf{n}_{\mathbf{r}}(s_0), \mathbf{b}_{\mathbf{r}}(s_0))$ és $(\mathbf{t}_{\mathbf{p}}(s_0), \mathbf{n}_{\mathbf{p}}(s_0), \mathbf{b}_{\mathbf{p}}(s_0))$ triéderjeik megegyeznek, hiszen ezt mozgatóssal el tudjuk érni, mert mindkettő jobbsodrású ortonormált bázist alkot. Eszerint az

$$f(s) = \langle \mathbf{t}_{\mathbf{r}}(s), \mathbf{t}_{\mathbf{p}}(s) \rangle + \langle \mathbf{n}_{\mathbf{r}}(s), \mathbf{n}_{\mathbf{p}}(s) \rangle + \langle \mathbf{b}_{\mathbf{r}}(s), \mathbf{b}_{\mathbf{p}}(s) \rangle$$

függvény értéke az s_0 pontban 3 lesz. Ugyanakkor a Frenet-formulák szerint

$$\begin{aligned} f' &= \langle \dot{\mathbf{t}}_{\mathbf{r}}, \mathbf{t}_{\mathbf{p}} \rangle + \langle \mathbf{t}_{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{t}}_{\mathbf{p}} \rangle + \langle \dot{\mathbf{n}}_{\mathbf{r}}, \mathbf{n}_{\mathbf{p}} \rangle + \langle \mathbf{n}_{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{n}}_{\mathbf{p}} \rangle + \langle \dot{\mathbf{b}}_{\mathbf{r}}, \mathbf{b}_{\mathbf{p}} \rangle + \langle \mathbf{b}_{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{b}}_{\mathbf{p}} \rangle \\ &= \langle \kappa_{\mathbf{r}} \mathbf{n}_{\mathbf{r}}, \mathbf{t}_{\mathbf{p}} \rangle + \langle \mathbf{t}_{\mathbf{r}}, \kappa_{\mathbf{p}} \mathbf{n}_{\mathbf{p}} \rangle + \langle -\kappa_{\mathbf{r}} \mathbf{t}_{\mathbf{r}} + \tau_{\mathbf{r}} \mathbf{b}_{\mathbf{r}}, \mathbf{n}_{\mathbf{p}} \rangle + \langle \mathbf{n}_{\mathbf{r}}, -\kappa_{\mathbf{p}} \mathbf{t}_{\mathbf{p}} + \tau_{\mathbf{p}} \mathbf{b}_{\mathbf{p}} \rangle + \\ &\quad + \langle -\tau_{\mathbf{r}} \mathbf{n}_{\mathbf{r}}, \mathbf{b}_{\mathbf{p}} \rangle + \langle \mathbf{b}_{\mathbf{r}}, -\tau_{\mathbf{p}} \mathbf{n}_{\mathbf{p}} \rangle, \\ &= 0 \quad (\text{mivel } \kappa_{\mathbf{r}} = \kappa_{\mathbf{p}} \text{ és } \tau_{\mathbf{r}} = \tau_{\mathbf{p}}) \end{aligned}$$

vagyis f konstans, azaz $f \equiv 3$. Ez csak úgy lehet, ha a két görbe kísérő triéderjei mindvégig egybeesnek.

Eszerint $\dot{\mathbf{r}} = \kappa_{\mathbf{r}} \mathbf{t}_{\mathbf{r}} = \kappa_{\mathbf{p}} \mathbf{t}_{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{p}}$, amiért $\mathbf{r}(s) = \mathbf{p}(s) + \mathbf{v}$ valamely konstans $\mathbf{v}$ vektorra. Csakhogy $\mathbf{r}(s_0) = \mathbf{p}(s_0)$, vagyis $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, tehát $\mathbf{r} = \mathbf{p}$, tehát a két görbe egybeesik. ■

Az alaptételt egybevágóságokra is kiterjeszthetjük, ha megengedjük a torziók előjelének eltérését. Ez azonnal nyilvánvaló, ha megfigyeljük, hogy a torzió értéke -1 -szeresére vált, ha a görbét tükrözzük egy síkra.

Fontos felhívni a figyelmet, hogy tételünkből nem következik, hogy megadva κ és τ függvényeket, ezekhez létezne olyan görbe, amelynek éppen κ a görbülete és τ a torziója.

Görbék egzisztencia-tétele. *Ha adottak a $\tau: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ és a nemnegatív $\kappa: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvények, akkor létezik olyan $\mathbf{r}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbe, melynek görbülete az $\mathbf{r}(s)$ pontban $\kappa(s)$, torziója pedig $\tau(s)$.*

Bizonyítás. A Pickard–Lindelöf-tétel [33] szerint a 3×3 -as mátrixokra a Frenet-formulákból felírt

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{t}} \\ \dot{\mathbf{n}} \\ \dot{\mathbf{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

differenciálegyenletnek a $\mathbf{t}(a) = (1, 0, 0)$, $\mathbf{n}(a) = (0, 1, 0)$ és $\mathbf{b}(a) = (0, 0, 1)$ peremfeltétel mellett létezik pontosan egy megoldása. Feltéve, hogy $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$, az $\mathbf{r}(s) = \int_a^s \mathbf{t}(x)dx$ integrál adja egy megfelelő görbe paraméterezését. ■

1.4. Síkgörbék, körülfordulási és négycsúcs-tétel

Definíció. Legyen az $\mathcal{S}$ sík normálvektora $\mathbf{m}$. Az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorpár $\mathcal{S}$ -ben jobbsodrású ha $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = |\mathbf{x} \times \mathbf{y}|\mathbf{m}$, és balsodrású, ha $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -|\mathbf{x} \times \mathbf{y}|\mathbf{m}$.

Definíció. Egy síkgörbe $\mathbf{r}(s)$ pontban vett *előjeles görbületén* a

$$\begin{aligned} \kappa_e(s) &= \begin{cases} +\kappa(s), & \text{ha } \mathbf{t}(s) \text{ és } \mathbf{n}(s) \text{ jobbsodrású} \\ -\kappa(s), & \text{ha } \mathbf{t}(s) \text{ és } \mathbf{n}(s) \text{ balsodrású} \end{cases} \\ &= \langle \mathbf{m}, \mathbf{t}(s) \times \dot{\mathbf{t}}(s) \rangle = \kappa(s) \cdot \langle \mathbf{m}, \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle \end{aligned}$$

értéket értjük.

Tétel. Legyen $\mathbf{v}$ egy tetszőleges vektor a síkban, és jelölje $\alpha(s)$ a síkgörbe s paraméterű pontjában húzott érintő előjeles szögét az $\mathbf{v}$ irányához képest. Ekkor $\kappa_{\mathbf{v}} = \alpha'$.

Bizonyítás. Számoljunk az s paraméterű pont közelében:

$$\begin{aligned} \alpha' &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\sin \Delta \alpha} \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta \alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta \alpha}{\Delta s} \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\langle \mathbf{t}(s) \times \mathbf{t}(s + \Delta s), \mathbf{m} \rangle}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\langle \mathbf{t}(s) \times (\mathbf{t}(s + \Delta s) - \mathbf{t}(s)), \mathbf{m} \rangle}{\Delta s} \\ &= \left\langle \mathbf{t}(s) \times \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{t}(s + \Delta s) - \mathbf{t}(s)}{\Delta s}, \mathbf{m} \right\rangle = \langle \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{t}}, \mathbf{m} \rangle = \kappa_e. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Síkgörbék alaptétele. Két síkgörbéhez akkor és csak akkor létezik síkmozgás, mely őket egymásba viszi, ha ívhossz szerinti paraméterezésben az előjeles görbület a két görbén azonosan egyenlő.

Bizonyítás. Mielőtt belevágnánk, vegyük észre, hogy az előjeles görbület értéke -1 -szeresére vált, ha a görbét tükrözzük egy egyenesre.

A síkgörbék torziója 0, görbülete pedig az előjeles görbület abszolút értéke, ezért a görbék alaptétele értelmében két síkgörbe térbeli mozgással egymásba vihető, ha ívhossz szerinti paraméterezésben az előjeles görbület a két görbén azonosan egyenlő. Ez a térbeli mozgás a síkon mozgás vagy átfordítás, utóbbi esetben a két görbe előjeles görbület előjele egymás ellentettje kell legyen, ami a tételt igazolja. ■

Definíció. *Jordan-görbének* nevezünk egy önmagát nem metsző folytonos síkgörbét.

Jordan-tétel. *Egy Jordan-görbe komplementere a síkban, egy kompakt és egy nem korlátos, a görbe által határolt tartomány, melyek egy-egy pontját összekötő minden folytonos görbe metszi a Jordan-görbét, míg az azonos tartományon belüli pontok között van a Jordan-görbét nem metsző folytonos görbe.*

E tétel igazolása túlmenne e könyv keretein, de a [29] cikkben egy viszonylag frappáns bizonyítást találhat az olvasó. A Jordan-görbe által meghatározott kompakt illetve nem korlátos tartományt, a Jordan-görbe *belsejének* illetve *külsejének* hívjuk.

Definíció. A sík egy önmagára való bijektív folytonos leképezését, amelynek inverze is folytonos, *homeomorfizmusnak* nevezük. A sík azon önmagára való homeomorfizmusait, amelyek inverzükkel együtt végtelenszer differenciálhatók, *diffeomorfizmusoknak* nevezzük.

Schönflies-tétel. *Minden Jordan-görbéhez létezik a síknak olyan homeomorfizmusa, mely egy kört a Jordan-görbébe, a kör belsejét a Jordan-görbe belsejére, a kör külsejét a Jordan-görbe külsejére képezi.*

Differenciálható Jordan-görbe esetén létezik ugyanilyen diffeomorfizmus is.

E tétel igazolása helyett inkább a [28, Theorem 3.1] viszonylag könnyen érthető és elérhető bizonyítását ajánljuk az olvasó figyelmébe.

Definíció. A $\varphi: [0, 1] \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ leképezést *diffeomorfizmusok folytonos seregének* nevezzük az $\mathcal{S}$ síkon, ha $\varphi_t := \varphi(t, \cdot): \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ minden $t \in [0, 1]$ -re diffeomorfizmus, minden P pontra a síkban $\varphi(\cdot, P)$ differenciálható görbe az $\mathcal{S}$ síkon, és $\varphi(0, \cdot)$ identitás az $\mathcal{S}$ síkon.

Képzeljünk el egy végtelenül rugalmas gumi asztallapra rajzolt zárt, nem önmetsző görbét. Könnyű elképzelni, hogy az asztallap húzogatásával az eredetileg girbe-görbe vonalunkat szép íves görbévé alakíthatjuk.

Tétel. *Egy végtelenszer differenciálható Jordan-görbe diffeomorfizmusok folytonos seregével körré alakítható.*

Bizonyítás. A Schönflies-tétel szerint van egy $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ diffeomorfizmus, amely a $\mathcal{J}$ Jordan-görbét a $\mathcal{C}$ egységkörvonalra képezi. Minthogy ϕ egy diffeomorfizmus, $\phi'(\mathbf{0})$ nem elfajuló. Ha ez nem lenne irányítástartó, akkor a ϕ helyett vegyük a ϕ és az x -tengelyre való tükrözés szorzatát. Feltételezhetjük tehát, hogy $\det \phi'(\mathbf{0}) > 0$.

Legyen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\phi'(\mathbf{0}))^{-1}$. Legyen $\alpha \in [0, 2\pi)$ olyan, hogy $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}$ és $\sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}$, továbbá $p = \frac{a^2+c^2}{\sqrt{a^2+c^2}}$, $q = \frac{ad-bc}{\sqrt{a^2+c^2}}$, és $r = \frac{ab+cd}{\sqrt{a^2+c^2}}$. Ekkor $\phi'(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & r \\ 0 & q \end{pmatrix}$, és $q > 0$ miatt

$$\Psi: [0, 1] \ni t \mapsto \Psi_t := \begin{pmatrix} \cos(t\alpha) & -\sin(t\alpha) \\ \sin(t\alpha) & \cos(t\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+t(p-1) & tr \\ 0 & 1+t(q-1) \end{pmatrix}$$

a lineáris Ψ_t diffeomorfizmusok folytonos serege, melyre $\Psi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tekintve, hogy $\lim_{t \searrow 0} (\phi(t\mathbf{x})/t) = \phi'(\mathbf{0})\mathbf{x}$ minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ esetén és $\Psi_1 = (\phi'(\mathbf{0}))^{-1}$, a

$$\Phi: [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \ni (t, \mathbf{x}) \mapsto \Phi_t(\mathbf{x}) := \begin{cases} \mathbf{x}, & \text{ha } t = 0, \\ \Psi_{1-t}\phi(t\mathbf{x})/t, & \text{ha } t \in (0, 1], \end{cases} \in \mathbb{R}^2$$

leképezés a Φ_t diffeomorfizmusok folytonos serege. Ugyanakkor $\Phi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $\Phi_1 = \phi$, vagyis $\Phi_0\mathcal{J} = \mathcal{J}$ és $\Phi_1\mathcal{J} = \mathcal{C}$, ami bizonyítja a tétel állítását. ■

Definíció. Egy szakaszonként végtelenszer differenciálható görbe egy pontját *töréspontnak* nevezzük, ha két féloldali differenciálhányadosa nem egyezik meg. A két féloldali érintő előjeles szögét *törésszögnek* nevezzük.

Körülfordulási tétel. A legfeljebb véges sok törésponttal rendelkező és szakaszonként végtelenszer differenciálható Jordan-görbére

$$\oint \kappa_e + \sum_i \alpha_i = 2\pi,$$

ahol az integrálás a görbe mentén ívhossz szerint pozitív irányba történik, és α_i jelöli az i -edik töréspontban a törésszöget.

Bizonyítás. Legyen ℓ a görbe hossza. Ha nincs töréspont, akkor $\sum_i \alpha_i = 0$, és

$$\oint \kappa_e = \int_0^\ell \kappa_e ds = \int_0^\ell \alpha'(s) ds = \alpha(\ell) - \alpha(0) = n \cdot 2\pi,$$

ahol n valamely egész szám. A Schönflies-tétel szerint a görbe diffeomorfizmusok folytonos seregével körre deformálható, miközben az $n = \frac{1}{2\pi} \oint \kappa_e$ integrál persze folytonosan változik. Csakhogy a körnél $n = 1$, és az egészértékű függvények között csak a konstans függvény folytonos, ezért az eredeti görbére is $n = 1$ vonatkozik.

Ha van m darab töréspont, legyen a bal oldali érintő szöge α_- a jobb oldali α_+ . Az i -edik töréspont legyen s_i ívhosszra a nem töréspontba választott kezdőponttól.

Ekkor

$$\begin{aligned}
 \oint \kappa_e &= \int_0^\ell \kappa_e ds = \int_0^{s_1} \alpha' ds + \int_{s_1}^{s_2} \alpha' ds + \cdots + \int_{s_m}^\ell \alpha' ds \\
 &= \alpha_-(s_1) - \alpha(0) + \alpha_-(s_2) - \alpha_+(s_1) + \cdots \\
 &\quad \cdots + \alpha_-(s_m) - \alpha_+(s_{m-1}) + \alpha(\ell) - \alpha_+(s_m) \\
 &= \alpha(\ell) - \alpha(0) - \sum_{i=1}^m \alpha_i,
 \end{aligned}$$

ahol tudjuk, hogy $\alpha(\ell) - \alpha(0) = n \cdot 2\pi$ valamely n egész számra.

Elég tehát belátni, hogy $n = 1$. A síma görbéken már bizonyítottuk, hogy $n = 1$, vegyünk tehát minden töréspont köré ε ($\rightarrow 0$) sugarú kört, és azon belül simítsuk ki a törést. Nyilvánvaló, hogy ha $\varepsilon \rightarrow 0$, akkor a körülfordulásban bekövetkező változás is 0-hoz tart, vagyis a keresett n egész érték tetszőlegesen közel van az egyhez, így nem lehet más, csak maga is 1. ■

Megjegyzés. Ha nincs törésszög, akkor $\oint \kappa_e = 2\pi$, ezért egy zárt görbét valamely irányban lapítják, akkor máshol csúcsosodni kénytelen — magasabb dimenzióban ugyan, de ez a relativitáselmélet anyagmegmaradási tétele.

Négy csúcs tétele. *Konvex differenciálható Jordan görbe görbületének legalább négy szélsőértékhelye van.*

Bizonyítás. A görbület az ívhossz folytonos függvénye, ami most egy véges zárt halmazon, egy körön változik, tehát legalább kettő szélsőérték biztosan létezik.

Tegyük fel, hogy mondjuk csak a minimum és a maximum a κ szélsőértékei, és ezek helyei $\mathbf{r}(s_{\min})$ és $\mathbf{r}(s_{\max})$. Legyen $\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle = c$ az egyenlete annak az egyenesnek, amely átmegy ezeken a pontokon, vagyis $\langle \mathbf{v}, \mathbf{r}(s_{\min}) \rangle = c$ és $\langle \mathbf{v}, \mathbf{r}(s_{\max}) \rangle = c$.

Ekkor

$$\oint (\langle \mathbf{v}, \mathbf{r}(s) \rangle - c) \kappa'(s) ds \neq 0,$$

hiszen a görbület κ' deriváltja pontosan ott vált előjelet, ahol a $\langle \mathbf{v}, \mathbf{r}(s) \rangle - c$ kifejezés is, vagyis amikor a görbe az egyenes egyik oldaláról a másikra jut. Ugyanakkor, parciális integrálással

$$\oint \langle \mathbf{v}, \mathbf{r}(s) \rangle \kappa'(s) ds = - \oint \langle \mathbf{v}, \mathbf{t}(s) \rangle \kappa(s) ds = \oint \langle \mathbf{v}, \dot{\mathbf{n}}(s) \rangle ds$$

adódik, hiszen a Frenet-formulák szerint síkgörbékre $\dot{\mathbf{n}} = -\kappa \mathbf{t}$ érvényes, tehát

$$\oint (\langle \mathbf{v}, \mathbf{r}(s) \rangle - c) \kappa'(s) ds = \oint \langle \mathbf{v}, \dot{\mathbf{n}}(s) \rangle ds - \oint c \kappa'(s) ds = 0,$$

mivel a különbség mindkét tagja derivált függvényt integrál zárt görbén, vagyis mindkét tag eltűnik.

Ez az ellentmondás azt mutatja, hogy κ' kettőnél több helyen kell előjelet váltson. Mivel pedig egyetlen zárt görbén értelmezett függvény sem válthat előjelet páratlan sokszor, a κ' is legalább négy helyen vált előjelet, ami igazolja a tétel állítását. ■

A négy csúcs tétele azzal finomítja a körülfordulási tétel utáni megjegyzésünket, hogy rámutat, hogy egy síkgörbének legalább kettő nagyon „lapos” és legalább kettő nagyon „hegyes” pontja van.

1.5. Speciális görbék

Az alábbiakban néhány speciális és ezért érdekes görbe esetét vizsgáljuk meg. Ilyen érdekes görbék a konstans görbületű görbe, a Bertrand-féle görbe, a lejtőgörbe, a csavargörbe és néhány más görbe, melyeket most szisztematikusan áttekintünk.

1.5.1. Konstans görbületű és torziójú görbék

Differenciál-geometriai szempontból az ilyen görbék tanulmányozása a görbékkel való ismerkedés legelső és legegyszerűbb lépését jelenti.

Először a torziómentes esetet vizsgáljuk. Ilyenkor a görbe síkbeli.

Tétel. *A síkon kettő különböző típusú konstans görbületű görbe létezik, és ez a kör, valamint az egyenes.*

Számolással a következő módon bizonyíthatunk:

Bizonyítás. A Frenet-formulák szerint $\dot{\mathbf{n}} = -\kappa \mathbf{t}$ és $\dot{\mathbf{t}} = \kappa \mathbf{n}$. Mivel κ konstans, ezek a

$$\ddot{\mathbf{t}} = -\kappa^2 \mathbf{t}$$

differenciálegyenletre vezetnek azzal a további feltétellel, hogy $|\mathbf{t}| = 1$.

Esetekre kell bontanunk e differenciálegyenlet vizsgálatát.

A $\kappa = 0$ eset. Az egyenlet kétszeri integrálásával a $\mathbf{t}(s) = s \cdot \dot{\mathbf{t}}(0) + \mathbf{t}(0)$ megoldáshoz jutunk. Tekintve, hogy $\dot{\mathbf{t}} = \kappa \mathbf{n} = 0$, látjuk, hogy $\dot{\mathbf{t}}(0) = 0$, és ezért $\mathbf{t}(s) \equiv \mathbf{t}(0)$, vagyis a görbe érintője konstans, tehát a görbe egyenes.

A $\kappa \neq 0$ eset. Mivel $|\mathbf{t}| = 1$, az s ívhossz szerinti paraméterezés mellett létezik olyan φ függvény, melyre $\mathbf{t} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, és akkor $\mathbf{n} = \pm(-\sin \varphi, \cos \varphi)$. A kétszeri deriválás eredményét a differenciálegyenletünkbe írva azt kapjuk, hogy

$$\pm \varphi'' \mathbf{n} - (\varphi')^2 \mathbf{t} = -\kappa^2 \mathbf{t}.$$

Ebből $\varphi'' = 0$ és $(\varphi')^2 = \kappa^2$ következik, vagyis

$$(*) \quad \varphi(s) = \pm s\kappa + \varphi(0).$$

Megfelelően elforgatva a koordináta-rendszerünket, feltehetjük, hogy $\varphi(0) = 0$. Miután az $\mathbf{r}$ paraméterezésre $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{t}$, egyszerű integrálással kapjuk, hogy

$$\mathbf{r}(s) = \frac{1}{\kappa}(\sin(s\kappa), -\cos(s\kappa)) + \mathbf{r}(0),$$

vagyis a görbe egy $1/\kappa$ sugarú kör. ■

Megjegyzendő, hogy a $(*)$ egyenlethez számolás nélkül is eljuthatunk, ha arra gondolunk, hogy a görbület az érintő valamely rögzített irányhoz viszonyított forgási sebessége. Sőt, a legegyszerűbb bizonyítás a következő.

Újabb bizonyítás. Az egyenesnek 0 a görbülete, a ϱ sugarú körnek pedig $1/\varrho$ a görbülete. A görbék alaptétele szerint viszont bármely két ugyanazon konstans görbülettel rendelkező görbe mozgással egymásba vihető, tehát ezzel meg is találtuk az összes keresett görbét, vagyis bebizonyítottuk az állítást. ■

Definíció. *Csavargörbének* nevezzük azokat a görbéket, amelyek paraméterezése valamely megfelelő koordináta rendszerben $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, ct)$ alakú, ahol $a, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, és $0 < a$.

Tétel. *Egy legalább hatszor folytonosan differenciálható, nem egyenes görbe alábbi tulajdonsági ekvivalensek:*

- (1) csavargörbe,
- (2) a görbe bármely két pontjához létezik olyan mozgás, amely az egyik pontot a másikba viszi, miközben a görbét irányításával együtt invariánsan hagyja,
- (3) azonos hosszúságú ívekhez tartozó húrok hossza egyenlő,
- (4) a görbe torziója és görbülete konstans.

Bizonyítás. $(1) \implies (2)$. Ez a következtetés nagyon egyszerű, hiszen a csavargörbe tengelye menti forgatva eltolás invariánsan hagyja a görbét, ugyanakkor kellő hosszú „csavarás” után bármely pontot bármely pontba eljuttat (ahogy a dugóhúzó ...).

$(2) \implies (3)$. Vegyük a két azonos hosszú ív két kezdőpontját, és tekintsük azt a mozgást, amely a görbét invariánsan hagyva az egyik kezdőpontot a másikba viszi. Ez a másik két végpontot is egymásba fogja vinni, hiszen a mozgás távolságtartó, ezért a görbéivek ívhossza is változatlan marad. Eszerint az ívek által feszített húrok végpontjai is egymásra mozognak, így hosszuk megegyezik, amint azt állítottuk.

(3) $\implies$ (4). A feltétel szerint létezik egy folytonos és végtelenszer differenciálható f függvény, melyre $|\mathbf{r}(s+h) - \mathbf{r}(s)|^2 = 2f(h)$, ahol $\mathbf{r}$ ívhossz szerinti paraméterezés. Legyen $\mathbf{p}(s, h) = \mathbf{r}(s+h) - \mathbf{r}(s)$, és deriváljuk h szerint az

$$\langle \mathbf{r}(s+h) - \mathbf{r}(s), \mathbf{r}(s+h) - \mathbf{r}(s) \rangle = 2f(h)$$

összefüggést hatszor.

A könnyebb leírhatóság érdekében az alábbi formulákban elhagyjuk az argumentumokat, abban bízva, hogy az olvasó képes lesz mindenütt a megfelelő behelyettesítésre. Tehát

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}, \mathbf{p} \rangle &= f', \\ \langle \kappa \mathbf{n}, \mathbf{p} \rangle + \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle}_{=1} &= f'', \\ \langle \dot{\kappa} \mathbf{n} + \kappa(\tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{t}), \mathbf{p} \rangle + \underbrace{\langle \kappa \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle}_{=0} &= f''' \end{aligned}$$

az első három derivált, és

$$-\kappa^2 \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle}_{=1} + \langle \ddot{\kappa} \mathbf{n} + \dot{\kappa}(\tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{t}) + \dot{\kappa} \tau \mathbf{b} + \kappa \dot{\tau} \mathbf{b} - \kappa \tau^2 \mathbf{n} - 2\kappa \dot{\kappa} \mathbf{t} - \kappa^3 \mathbf{n}, \mathbf{p} \rangle = f^{(iv)}$$

a negyedik. Ha most $h = 0$, akkor ebből $\mathbf{p}(s, 0) = 0$ és $f(0) = 0$ miatt $\kappa(s) = \sqrt{-f^{(iv)}(0)}$ konstans adódik! Mivel a görbe nem egyenes, ez a konstans nem lehet 0.

Így ettől kezdve κ konstans pozitív szorzóként szerepel, ami sokat könnyít a deriválás végrehajtásán, de még utolsó formulánk is sokat egyszerűsödik:

$$-\kappa^2 + \kappa \langle \dot{\tau} \mathbf{b} - (\tau^2 + \kappa^2) \mathbf{n}, \mathbf{p} \rangle = f^{(iv)}.$$

Ennek deriválása, vagyis az ötödik deriválás eredménye

$$\kappa \underbrace{\langle \dot{\tau} \mathbf{b} - (\tau^2 + \kappa^2) \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle}_{=0} + \kappa \langle \ddot{\tau} \mathbf{b} - 3\tau \dot{\tau} \mathbf{n} + (\tau^2 + \kappa^2)(\kappa \mathbf{t} - \tau \mathbf{b}), \mathbf{p} \rangle = f^{(v)}.$$

A hatodik deriválást már nem szükséges teljesen kiszámolnunk. A bal oldalon ugyanis a skaláris szorzás deriváltjának az a része, amelyikben az első tagot deriválnánk, $\mathbf{p}(s, 0) = 0$ miatt nulla lesz a $h = 0$ pontban. Így a deriválás a $h = 0$ helyen a

$$\kappa \langle \ddot{\tau} \mathbf{b} - 3\tau \dot{\tau} \mathbf{n} + (\tau^2 + \kappa^2)(\kappa \mathbf{t} - \tau \mathbf{b}), \mathbf{t} \rangle = f^{(vi)}$$

eredményt adja, mely a mérőlegesség miatt a $\kappa^2(\tau^2 + \kappa^2) = f^{(vi)}$ alakra egyszerűsödik, amiből kiszámítható a torzió.

(4) $\implies$ (1). Számoljuk ki az $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, ct)$ csavargörbe legegyszerűbb jellemzőit. Mindenekelőtt az ívhosszra vagyunk kíváncsiak:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (-a \sin t, a \cos t, c), \quad \text{vagyis} \quad |\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{c^2 + a^2} = \sigma.$$

Eszerint

$$\mathbf{r}(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sigma}, a \sin \frac{s}{\sigma}, c \frac{s}{\sigma} \right)$$

egy ívhossz szerinti paraméterezés. Ezt deriválva az

$$\dot{\mathbf{r}}(s) = \frac{1}{\sigma} \left(-a \sin \frac{s}{\sigma}, a \cos \frac{s}{\sigma}, c \right), \quad \ddot{\mathbf{r}}(s) = \frac{1}{\sigma^2} \left(-a \cos \frac{s}{\sigma}, -a \sin \frac{s}{\sigma}, 0 \right)$$

formulákhoz jutunk. Ebből $\mathbf{n}(s) = (-\cos(s/\sigma), -\sin(s/\sigma), 0)$ a normális vektor, és $\kappa(s) = a/\sigma^2 = \frac{a}{c^2+a^2}$ a görbület. Továbbá $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \frac{1}{\sigma} (c \sin \frac{s}{\sigma}, -c \cos \frac{s}{\sigma}, a)$ a binormális vektor, melynek $\dot{\mathbf{b}}(s) = \frac{-c}{\sigma^2} \mathbf{n}$ deriváltjából $\tau(s) = \frac{c}{\sigma^2} = \frac{c}{c^2+a^2}$ adódik a torzióra.

Legyen most adott egy görbe a κ_0 pozitív konstans görbülettel és a τ_0 konstans torzióval. Legyen

$$a = \frac{\kappa_0}{\kappa_0^2 + \tau_0^2}, \quad \text{és} \quad c = \frac{\tau_0}{\kappa_0^2 + \tau_0^2}.$$

Az ezekkel szerkesztett csavargörbe görbülete κ_0 , torziója τ_0 , ezért a görbék alaptétele szerint egybevágó az adott görbével. ■

1.5.2. Lejtőgörbék és Bertrand-féle görbék

Eddig azt vizsgáltuk, hogy mi a helyzet állandó görbület és torzió esetén. Az alábbiakban azt vizsgáljuk, hogy milyen görbéket határoz meg egy-egy összefüggés a torzió és a görbület között. Először az arányuk állandóságát feltételezzük.

Definíció. *Lejtőgörbének* nevezünk egy nem nulla görbületű és nem nulla torziójú görbét, ha annak érintői állandó szöget zárnak be valamely rögzített vektorral.

Tétel. *Egy görbe alábbi tulajdonságai ekvivalensek:*

- (1) *lejtőgörbe,*
- (2) *normálisai merőlegesen egy rögzített vektorra,*
- (3) *binormálisai állandó szöget zárnak be valamely rögzített vektorral,*
- (4) *a görbe torziójának és görbületének hányadosa állandó.*

Bizonyítás. (1) $\implies$ (2). Legyen $\mathbf{v}$ az az egységnyi vektor, amellyel a $\mathbf{r}$ ívhossz paraméterezésű lejtőgörbe érintője konstans α szöget zár be. Ez azt jelenti, hogy $\langle \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{v} \rangle = \cos \alpha$, melyet deriválva azonnal kapjuk (2)-t.

(2) $\implies$ (3). Ha $\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle = 0$, akkor ezt megszorozva τ -val és hasznosítva a Frenet-formulákat azt nyerjük, hogy $\langle \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{v} \rangle = 0$, amiből integrálás adja, hogy valamely α szögre $\langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle = \cos \alpha$.

(3) $\implies$ (4). Ha $\langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle = \cos \alpha$, akkor ennek deriválásából $\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle = 0$ adódik, melyet újra deriválva a $\langle -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle = 0$ egyenlőséghez jutunk. Ugyanakkor κ -val szorozva az $\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle = 0$ egyenletet, aztán a Frenet formulákat és egy integrálást alkalmazva a $\langle \mathbf{t}, \mathbf{v} \rangle = \cos \beta$ formulát kapjuk valamely β szögre. Behelyettesítve ezeket a második derivált egyenletébe a $\tau \cos \alpha - \kappa \cos \beta = 0$ egyenlőséget kapjuk, mely szerint a τ és a κ aránya állandó.

(4) $\implies$ (1). Ha κ/τ állandó, és mondjuk éppen $\tan \alpha$, akkor $\kappa \cos \alpha - \tau \sin \alpha = 0$. Ezt beszorozva a $\mathbf{n}$ normálissal, és alkalmazva a Frenet-formulákat, $\dot{\mathbf{t}} \cos \alpha + \dot{\mathbf{b}} \sin \alpha = 0$. Ezt integrálva a

$$\mathbf{t} \cos \alpha + \mathbf{b} \sin \alpha = \mathbf{v}$$

egyenlethez jutunk valamely $\mathbf{v}$ egységnyi vektorra, amiből $\langle \mathbf{t}, \mathbf{v} \rangle = \cos \alpha$ adódik. ■

A Bertrand által geometriai vizsgálatokból megismert görbéket mi eleve a görbülettel és a torzióval határozzuk meg. Ezúttal ezek lineáris kombinációja állandó.

Definíció. *Bertrand-féle görbének* nevezzük azokat a görbéket, amelyekre a görbület és a torzió valamely lineáris kombinációja nemnulla konstans, vagyis létezik olyan λ és μ konstans, hogy $\lambda\kappa + \mu\tau = 1$ a görbe mentén.

Nyilvánvaló, hogy minden csavargörbe Bertrand-féle görbe és lejtőgörbe is, de nem minden lejtőgörbe Bertrand-féle görbe, és nem minden Bertrand-féle görbe lejtőgörbe. Most tisztázzuk a $\lambda\kappa + \mu\tau = 1$ összefüggés geometriai jelentését.

Tétel. *Legyen adott két görbe az $\mathbf{r}_1$ és $\mathbf{r}_2$ ívhossz szerinti paraméterezéssel. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan kölcsönösen egyértelmű $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés, melyre*

$$\mathbf{r}_2(\psi(s)) - \mathbf{r}_1(s) \parallel \mathbf{n}_1(s) \parallel \mathbf{n}_2(\psi(s))$$

minden s paraméter esetében, ahol $\mathbf{n}_1$ és $\mathbf{n}_2$ a két görbe normális vektora. Ekkor mindkét görbe Bertrand-féle.

A megadott formula geometriai jelentése az, hogy az egymásnak megfeleltetett pontokban a normálisok irányai párhuzamosak a megfeleltetett pontokat összekötő egyenessel.

Bizonyítás. A feltétel szerint pontosan egy olyan λ függvény létezik, melyre

$$\mathbf{r}_2(\psi(s)) - \mathbf{r}_1(s) = \lambda(s)\mathbf{n}_1(s).$$

Ennek deriváltjából a Frenet-formulák segítségével

$$\mathbf{t}_2(\psi(s))\psi'(s) - \mathbf{t}_1(s) = \lambda'(s)\mathbf{n}_1(s) + \lambda(s)(-\kappa_1(s)\mathbf{t}_1(s) + \tau_1(s)\mathbf{b}_1(s))$$

adódik. Figyelembe véve, hogy $\mathbf{n}_1(s) \parallel \mathbf{n}_2(\psi(s))$, ezt az egyenletet skalárisan szorozva az $\mathbf{n}_1(s)$ vektorral, a $\lambda' = 0$ eredményre jutunk, vagyis λ konstans. Fenti formulánk tehát a

$$\mathbf{t}_2(\psi(s))\psi'(s) = (1 - \lambda\kappa_1(s))\mathbf{t}_1(s) + \lambda\tau_1(s)\mathbf{b}_1(s)$$

alakra egyszerűsödik. Ezt tovább deriválva, és alkalmazva a Frenet-formulákat, az eredmény

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_2(\psi(s))\psi''(s) + \kappa_2(\psi(s))\mathbf{n}_2(\psi(s))(\psi'(s))^2 \\ = (1 - \lambda\kappa_1(s))'\mathbf{t}_1(s) + \lambda\tau_1'(s)\mathbf{b}_1(s) + (1 - \lambda\kappa_1(s))\kappa_1(s)\mathbf{n}_1(s) - \lambda(\tau_1(s))^2\mathbf{n}_1(s). \end{aligned}$$

Csak az $\mathbf{n}_1(s) \parallel \mathbf{n}_2(\psi(s))$ irányra merőleges tagokat tekintve

$$\mathbf{t}_2(\psi(s))\psi''(s) = (1 - \lambda\kappa_1(s))'\mathbf{t}_1(s) + \lambda\tau_1'(s)\mathbf{b}_1(s)$$

adódik. Összevetve ezt a korábban nyert hasonló összefüggéssel

$$\frac{\psi''(s)}{\psi'(s)} = \frac{(1 - \lambda\kappa_1(s))'}{1 - \lambda\kappa_1(s)} = \frac{\tau_1'(s)}{\tau_1(s)}$$

következik. Integrálva az utóbbi egyenlőséget

$$\ln |1 - \lambda\kappa_1(s)| = \ln |\tau_1(s)| + \ln |\mu|$$

adódik valamely μ konstansra. Ennek rendezésével már egyszerűen kapjuk a bizonyítandó összefüggést. ■

1.5.3. Síkbeli konvex tartományok egyensúlyi helyzetei

Legyen $O = (0,0)$ a konvex $\mathcal{D}$ síktartomány *súlypontja*, vagyis $(0,0) = \int_{\mathcal{D}}(x,y)dxdy / \int_{\mathcal{D}} dxdy$. Jelölje a $\mathcal{D}$ határoló görbét $\partial\mathcal{D}$. Vegyük ennek azt a $\mathbf{d}: [0, 2\pi) \rightarrow \partial\mathcal{D}$ paraméterezését, melyre $\mathbf{d}(\varphi) = r(\varphi)(\cos \varphi, \sin \varphi)$ és $r: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$. Egy $\mathbf{d}(\varphi)$ határpontot a $\mathcal{D}$ *egyensúlyi pontjának* nevezünk, ha φ az r egy szélsőértékhelye. Egy $\mathbf{d}(\varphi)$ egyensúlyi pontot *instablnak* mondunk, ha $r(\varphi)$ maximális érték a φ egy kis környezetében. Egy $\mathbf{d}(\varphi)$ egyensúlyi pontot *stabilnak* hívunk, ha φ egy kis környezetében az $r(\varphi)$ érték minden más $r(\cdot)$ értéknél szigorúan kisebb (vagyis φ az r szigorú minimumhelye).

Minthogy folytonos függvény kompakt tartományon felveszi szélsőértékeit, minden konvex $\mathcal{D}$ síktartománynak van legalább egy instabil egyensúlyi pontja, hiszen ahol r maximális, az biztosan instabil egyensúlyi pont. A körlap esetében r konstans, tehát a kör minden pontja egyensúlyi pont, ráadásul mind instabil és egy sem stabil.

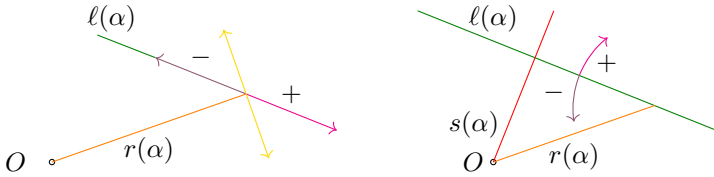
Tétel. *Ha egy konvex síktartomány egyensúlyi pontja izoláltak, akkor legalább két stabil és két instabil egyensúlyi pontja van.*

Bizonyítás. Legyen körlaptól különböző $\mathcal{D}$ konvex síktartomány súlypontja $O = (0, 0)$. Jelölje a $\mathcal{D}$ határoló görbéjét $\partial\mathcal{D}$, és vegyük ennek azt a $\mathbf{d}: [0, 2\pi) \rightarrow \partial\mathcal{D}$ paraméterezését, melyre $\mathbf{d}(\varphi) = r(\varphi)(\cos \varphi, \sin \varphi)$ és $r: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$.

Elég igazolni, hogy két stabil egyensúlyi pont létezik, hiszen két szigorú minimumhely között mindig van maximumhely is.

Legyen $s(\alpha)$ a $\mathcal{D}$ tartományt a $\mathbf{d}(\alpha)$ pontban érintő $\ell(\alpha)$ egyenesnek az O ponttól mért távolsága.

Ha $r(\alpha)$ az r (lokális) szélsőértéke, akkor $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ az $\ell(\alpha)$ érintő normálisa, tehát $s(\alpha) = r(\alpha)$. Ha $s(\alpha)$ az s (lokális) szélsőértéke, akkor az O merőleges vetülete az $\ell(\alpha)$ érintőn a $\partial\mathcal{D}$ pontja kell legyen, tehát $r(\alpha) = s(\alpha)$.



Ebből következik, hogy az s függvénynek akkor és csak akkor szélsőérték-helye az α , ha az r függvénynek is szélsőérték-helye az α , és ilyenkor $s(\alpha) = r(\alpha)$.

Ha feltesszük, hogy α az s minimum-helye és az r maximum-helye, akkor egyrészt egyenlőek, másrészt az α egy kis környezetében s nem csökkenhet, de a nála nem kisebb r viszont nem nőhet, így mindkettő konstans kell legyen, vagyis egyenlők az $s(\alpha)$ értékével. Ez azt jelenti, hogy α egy kis környezetében $\partial\mathcal{D}$ egy O középpontú $s(\alpha) = r(\alpha)$ sugarú körív.

Ha feltesszük, hogy α az s maximum-helye és az r minimum-helye, akkor egyrészt egyenlőek, másrészt az α egy kis környezetében s nem nőhet, de a nála nem kisebb r viszont nem csökkenhet. Utóbbi miatt a $\mathbf{d}(\alpha)$ egy kis $\mathcal{U}$ környezetében $\partial\mathcal{D}$ az $r(\alpha)$ sugarú $\mathcal{C}$ kör és az $\ell(\alpha)$ érintő közé esik. Mivel s nem nőhet, minden az $\mathcal{U}$ környezetbe eső $\mathbf{d}(\varphi)$ pontban az $\ell(\varphi)$ érintő távolsága az O ponttól nem nagyobb, mint $\ell(\alpha)$, tehát $\ell(\varphi)$ metszi a $\mathcal{C}$ kört, ami ellentmondás. Összességében tehát

az r ugyanott és ugyanolyan szélsőértékekkel rendelkezik, mint s , vagy
mindkettő egyforma konstans a szélsőértékhely egy környezetében. (*)

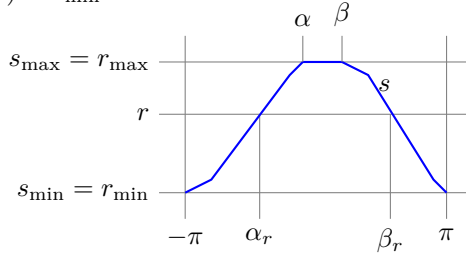
Utóbbi esetben egy α szélsőértékhelyhez tartozó $\mathbf{d}(\alpha)$ határpont egy kis környezetében $\partial\mathcal{D}$ egy O középpontú $s(\alpha) = r(\alpha)$ sugarú körív.

Tegyük fel innentől, hogy a $[-\pi, \pi)$ intervallumban

az s *egyetlen* minimum-helye $-\pi$.

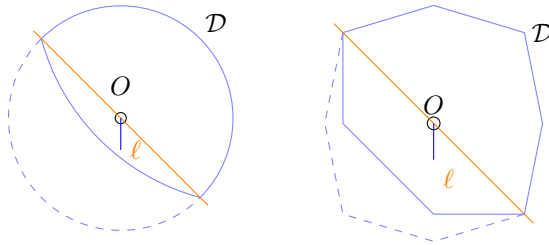
Mivel az s folytonos, rendelkezik maximum-hellyel is a $[-\pi, \pi)$ intervallumban. Legegyen az s legnagyobb és legkisebb értéke $s_{\max}$ és $s_{\min}$.

Tegyük fel, hogy s a $[-\pi, \pi)$ intervallum $\alpha \leq \beta$ helyein is felveszi az $s_{\max}$ értéket. Minthogy az s -nek csak egy minimum-helye van, az $[\alpha, \beta]$ intervallumon nem lehet újra minimum-hely, ezért s az $[\alpha, \beta]$ intervallumon konstans $s_{\max}$ értékű, így az s függvény a $[-\pi, \pi)$ intervallumon azzal írható le, hogy a $[-\pi, \alpha]$ intervallumon szigorúan monoton növekedő, az $[\alpha, \beta]$ (esetleg egyetlen pontot tartalmazó) intervallumon konstans $s_{\max}$ értékű, a $[\beta, \pi)$ intervallumon pedig szigorúan monoton fogyó, valamint $s(\pm\pi) = s_{\min}$.



A (*) és az azt követő megállapítások miatt a határvonal $\mathbf{d}([\alpha, \beta]) \subset \partial\mathcal{D}$ íve a $\mathcal{C}_\alpha^\beta$ íve az $s_{\max}$ sugarú $\mathcal{C} = \partial\mathcal{B}$ körnek.

Ha $\beta \geq \alpha + \pi$, akkor $\mathcal{C}_\alpha^\beta$ tartalmaz diametrális pontokat, így ezek ℓ egyenesének felső félsíkjában $\mathcal{B}$ és $\mathcal{D}$ egybeesnek. Ugyanakkor ℓ egyenesének alsó félsíkjában $\mathcal{B}$ tartalmazza a $\mathcal{D}$ minden pontját, sőt a $\mathbf{d}(-\pi)$ határpontot a belsejében.



Minthogy r ugyanott és ugyanolyan szélsőértékekkel rendelkezik, mint s , az r függvény grafikonja ugyanolyan rajzolatú mint az s grafikonja, amiért az $r_0 = r(\varphi)$ egyenletnek minden $r_0 \in (r_{\min}, r_{\max})$ értékre pontosan két megoldása van. Jelölje ezeket $\alpha_\rho < \beta_\rho$. Ekkor $-\pi < \alpha_r < \alpha < \beta < \beta_r < \pi$. Világos, hogy az $r \mapsto \beta_r - \alpha_r$ függvény folytonos és szigorúan monoton fogyó, ezért létezik pontosan egy olyan $r_0 \in (r_{\min}, r_{\max})$, melyre $\beta_{r_0} = \alpha_{r_0} + \pi$.

Ez azt jelenti, hogy

$$r(\varphi) \leq \begin{cases} r(\varphi + \pi) & \text{ha } \varphi \in [0, \alpha_{r_0}, \\ r(\varphi - \pi) & \text{ha } \varphi \in [\beta_{r_0}, \pi], \end{cases}$$

vagyis a $\mathcal{D}$ tartományt úgy vágja ketté a $\mathbf{d}(\alpha)$ és $\mathbf{d}(\beta)$ pontok ℓ egyenese, hogy a felső félsíkba eső részének O pontra való tükörképe lefedi a $\mathcal{D}$ alsó félsíkba eső részét. Ez a tükörkép ráadásul a $\mathbf{d}(-\pi)$ határpontot a belsejében tartalmazza.

Eszerint minden esetben van olyan ℓ egyenes az O ponton át, mely úgy vágja ketté a $\mathcal{D}$ tartományt, hogy a felső félsíkba eső résznek az O pontra vett tükörképe tartalmazza az alsó félsíkba eső részt, sőt annak $\mathbf{d}(-\pi)$ határpontját a belsejében.

Ez ellentmond annak, hogy O a súlypont, tehát az s függvénynek több minimum-helye is van. ■

Három dimenzióban a *gömböc* [32] egy mono-mono-statikus test.

1.5.4. A kötélgörbe

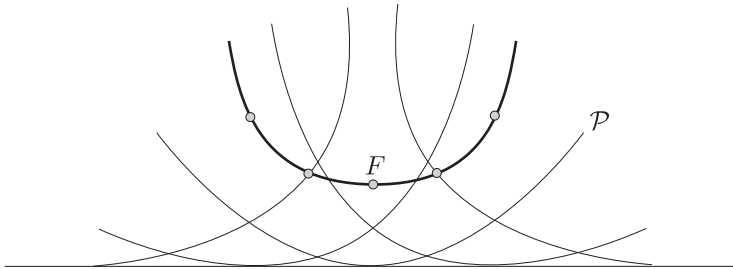
A *kötélgörbék* a két pontra függesztett kötelek alakját írják le. A felfüggesztett kötélben fellépő erők vizsgálatával kimutatható [15], hogy minden kötélgörbe valamely

$$f: \mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) = \frac{c}{\sigma} \cosh\left(\frac{\sigma}{c}(x - x_C)\right) + \left(y_C - \frac{c}{\sigma}\right) \in \mathbb{R}$$

függvény grafikonja szerint alakul.

Vegyük észre, hogy bármely két kötélgörbe hasonló, mert az y -tengellyel párhuzamos eltolással mind egy $f(x) = a \cosh((x - x_C)/a)$ alakú függvény grafikonjába vihető, ahonnan egy x -tengellyel párhuzamos x_C/a nagyságú eltolással egy $g_a(x) = a \cosh(x/a)$ alakú függvény grafikonjába kerülnek. Márpedig a $g_1(x) = \cosh(x)$ függvény grafikonjának az origóból a -szorosára nagyított/kicsinyített megfelelője éppen a g_a grafikonja.

Tétel. *Parabolát egyenesen görgetve a parabola fókusza egy kötélgörbén mozog.*



Bizonyítás. Mivel a parabolák (és persze az egyenesek is) hasonlók egymáshoz, elegendő egyetlen parabola-egyenes pár esetében igazolni az állítást. Legyen ez az $y = x^2$ egyenletű $\mathcal{P}$ parabola, és görgecsük ezt az x -tengelyen.

A $\mathcal{P}$ parabola fókuszja az $F = (0, 1/4)$ pont, vezéregyenes (direktrix) pedig az $y = -1/4$ egyenes, hiszen $\sqrt{x^2 + (y - 1/4)^2} = \sqrt{x^2 + (x^2 - 1/4)^2} = x^2 + 1/4 = y + 1/4$.

A $\mathcal{P}$ parabola e_x érintője az $E_x = (x, x^2)$ érintési pontban $2x$ meredekségű, amiért ezen érintő egységnyi irányvektora $\mathbf{i}_x = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}(1, 2x)$, egységnyi normális vektora pedig $\mathbf{n}_{x_0} = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}(-2x, 1)$.

Az e_x érintő és az $F = (0, 1/4)$ fókusz távolsága megegyezik a $(0, 1/4) - (x, x^2)$ vektornak az e_x érintő $\mathbf{n}_x$ normálisára eső

$$\psi(x) = \langle (-x, 1/4 - x^2), \mathbf{n}_x \rangle = \frac{\sqrt{1+4x^2}}{4}$$

vetületével.

Az F fókusz és az E_x érintési pont távolsága $\tau(x) = \sqrt{x^2 + (x^2 - 1/4)^2}$.

Az F fókusz e_x érintőre vett merőleges vetületének $\xi(x)$ távolsága az E_x érintési ponttól megegyezik a $(0, 1/4) - (x, x^2)$ vektornak az e_x érintő $\mathbf{i}_x$ irányvektorára vett vetületének hosszával, tehát

$$\xi(x) = \left\langle (-x, 1/4 - x^2), \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}}(1, 2x) \right\rangle = \frac{2x\sqrt{1+4x^2}}{4}.$$

A $\mathcal{P}$ parabola $O = (0, 0)$ és $E = (x, x^2)$ pontjai között

$$\sigma(x) = \int_0^x \sqrt{1 + (2t)^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{2x} \sqrt{1 + z^2} dz = \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh}(2x)} \cosh^2 t dt$$

a parabolaív hossza. Ezen integrál kiszámításához figyeljük meg, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^b \cosh^2 t dt + \frac{1}{2} \int_0^b \sinh^2 t dt &= \frac{1}{4} [\sinh(2t)]_0^b, \\ \frac{1}{2} \int_0^b \cosh^2 t dt - \frac{1}{2} \int_0^b \sinh^2 t dt &= \frac{1}{2} [t]_0^b, \end{aligned}$$

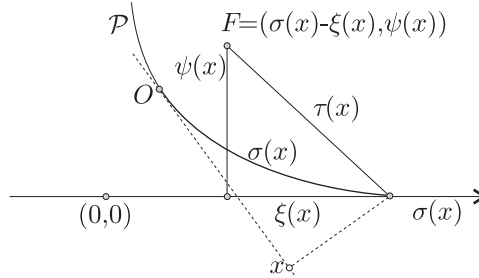
amiért

$$\int_0^b \cosh^2 t dt = \frac{1}{2} [t + \sinh t \cosh t]_0^b = \frac{b + \sinh b \cosh b}{2},$$

és így

$$\sigma(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh}(2x)} \cosh^2 t dt = \frac{\operatorname{arcsinh}(2x) + 2x\sqrt{1+4x^2}}{4}.$$

A $\mathcal{P}$ parabolát $\sigma(x)$ hosszan görgetve, az $E_x = (x, x^2)$ pont az x -tengelyre kerül, az x -tengely pedig az elgörgetett parabolának érintője lesz.



Az F fókusz ezért a görgetés közben úgy halad a görgetés irányába, hogy x -koordinátája $\sigma(x) - \xi(x)$ távolságot tesz meg, az x -tengelytől való távolsága pedig $\psi(x)$ lesz. Az F fókusz által súrolt görbe tehát annak az f függvénynek a grafikonja, melyre $\psi(x) = f(\sigma(x) - \xi(x))$, amiért

$$\frac{\sqrt{1+4x^2}}{4} = f\left(\frac{\operatorname{arcsinh}(2x)}{4}\right), \quad \text{vagyis} \quad f(x) = \frac{\cosh(4x)}{4}.$$

Ez bizonyítja az állítást. ■

1.5.5. Két feladat

Ebben a részben két érdekes feladat kapcsán megmutatjuk, hogyan lehet a görbékről szerzett ismereteinket problémák megoldásában hasznosítani.

Feladat. Igazoljuk, hogy egy $\mathbf{r}$ ívhossz-paraméterezésű görbe akkor és csak akkor van egy $R > 0$ sugarú gömbfelületen, ha $(\varrho')^2 = \tau^2(R^2 - \varrho^2)$ teljesül, ahol $\varrho(s)$ a görbületi sugár a görbe $\mathbf{r}(s)$ pontjában!

Megoldás. Ha a görbe az $R > 0$ sugarú origó középpontú gömbfelületen van, akkor $R^2 = \langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle$. Ennek deriváltja $0 = \langle \mathbf{t}, \mathbf{r} \rangle$, aminek $0 = \langle \kappa \mathbf{n}, \mathbf{r} \rangle + \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \kappa \langle \mathbf{n}, \mathbf{r} \rangle + 1$ a deriváltja. Kis átrendezéssel tehát $-\varrho = \langle \mathbf{n}, \mathbf{r} \rangle$ adódik. Mivel a $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ kísérő triéder ortonormált bázist alkot, és $\mathbf{r}$ merőleges $\mathbf{t}$, az $\mathbf{n}$ normálisra vetve vetülete alapján $\pm \sqrt{R^2 - \varrho^2} = \langle \mathbf{b}, \mathbf{r} \rangle$ adódik. Ezt deriválva a Frenet-formulák alapján

$$\mp \frac{\varrho \varrho'}{\sqrt{R^2 - \varrho^2}} = \langle -\tau \mathbf{n}, \mathbf{r} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle = \tau \varrho$$

következik. Átrendezés után azt kapjuk, hogy $\mp \varrho \varrho' = \tau \varrho \sqrt{R^2 - \varrho^2}$. Minthogy ϱ nem tűnhet el semmilyen intervallum egészén, ez igazolja az állítást.

Ha a görbe valamely $R > 0$ számra teljesíti az $\pm \varrho' = \tau \sqrt{R^2 - \varrho^2}$ egyenletet, akkor a $\mp \frac{-\varrho \varrho'}{\sqrt{R^2 - \varrho^2}} = \tau \varrho$, és így a $\mp (\sqrt{R^2 - \varrho^2})' = \tau \varrho$ egyenletet is. Defináljuk a $\mathbf{p}$ görbét azzal, hogy $\mathbf{p} = \pm \varrho \mathbf{n} + \sqrt{R^2 - \varrho^2} \mathbf{b}$. Világos, hogy ekkor $|\mathbf{p}| = R$, továbbá a Frenet-formulák alapján

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \pm \varrho' \mathbf{n} \pm \varrho (-\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}) + \sqrt{R^2 - \varrho^2}' \mathbf{b} + \sqrt{R^2 - \varrho^2} \tau \mathbf{n} \\ &= \tau \sqrt{R^2 - \varrho^2} \mathbf{n} \pm \varrho (-\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}) \mp \tau \varrho \mathbf{b} - \sqrt{R^2 - \varrho^2} \tau \mathbf{n} = \mp \varrho \kappa \mathbf{t} = \mp \mathbf{t} \end{aligned}$$

Eszerint $(\mathbf{r} \mp \mathbf{p})' = 0$ tehát van egy olyan konstans $\mathbf{v}$ vektor, melyre $\mathbf{r} = \pm \mathbf{p} + \mathbf{v}$. Minthogy $\mathbf{p}$ hossza R ez pont a bizonyítandót adja. ■

A gömbfelületen futó görbék között a hajózási útvonalak miatt nagyon fontosnak bizonyult az, amely az összes hosszúsági kört egyforma szögben metszi. Ezeket a görbéket *loxodromanak* nevezzük.

Feladat. Határozzuk meg az origó középpontú $R > 0$ sugarú gömbön azt a loxodromát, amely egy $\alpha \in (0, \pi/2)$ szögben metszi az összes hosszúsági kört, és átmegy az $(R, 0, 0)$ ponton! Mekkora a görbe hossza?

Megoldás. Legyen a loxodroma ívhossz szerinti paraméterezése $\mathbf{r}$.

Ahogy már sokszor, az $|\mathbf{r}| = R$ egyenletből a $\langle \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}} \rangle = 0$ azonosságra következünk. Másrészt $|\dot{\mathbf{r}}| = 1$, mert ívhossz szerinti a paraméterezés, és végül tudjuk még, hogy az $\mathbf{r}$ ponton áthaladó hosszúsági görbe érintője α szöget zár be a $\dot{\mathbf{r}}$ vektorral.

Az $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ ponton áthaladó hosszúsági kör paraméterezését

$$\mathbf{p}(\varphi) = \left(R \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \cos \varphi, R \frac{r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \cos \varphi, R \sin \varphi \right)$$

adja a $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ intervallumon. Ez akkor megy át az $\mathbf{r}$ ponton, amikor $\cos \varphi = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}/R$. A $\mathbf{p}$ hosszúsági kör

$$\dot{\mathbf{p}}(\varphi) = \left(-R \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \sin \varphi, -R \frac{r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \sin \varphi, R \cos \varphi \right)$$

érintőjét egyszerű deriválással kapjuk. Eszerint az $\mathbf{r}$ metszéspontban

$$\dot{\mathbf{p}}(\varphi) = \left(-\frac{r_3 r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}, -\frac{r_3 r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}, \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \right)$$

az érintő, mert $\cos \varphi = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}/R$ és $\sin \varphi = r_3/R$.

Mivel $|\dot{p}| = R$, a feltétel szerint

$$\begin{aligned} R \cos \alpha = \langle \dot{p}, \dot{r} \rangle &= -\frac{r_3 r_1 \dot{r}_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} - \frac{r_3 r_2 \dot{r}_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} + \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \dot{r}_3 \\ &= \frac{-r_3(r_1 \dot{r}_1 + r_2 \dot{r}_2)}{\sqrt{R^2 - r_3^2}} + \dot{r}_3 \sqrt{R^2 - r_3^2} = \frac{-r_3(r_1 \dot{r}_1 + r_2 \dot{r}_2 + r_3 \dot{r}_3) + \dot{r}_3 R^2}{\sqrt{R^2 - r_3^2}} \\ &= \frac{-r_3 \frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)' + \dot{r}_3 R^2}{\sqrt{R^2 - r_3^2}} = \frac{\dot{r}_3 R^2}{\sqrt{R^2 - r_3^2}} = R^2 (\arcsin(r_3/R))'. \end{aligned}$$

Ezt integrálva az $r_3(s) = R \sin(sR^{-1} \cos \alpha + c)$ megoldást kapjuk, ahol c konstans. Világos, hogy mivel $\dot{r}_3 > 0$, az r_3 szigorúan monoton növvő. Másfelől, $-R < r_3 < R$, így a görbe hossza nem lehet nagyobb, mint a $-R$ és R értékekhez tartozó $\frac{-R\pi}{2 \cos \alpha}$ és $\frac{R\pi}{2 \cos \alpha}$ argumentumok $\frac{R\pi}{\cos \alpha}$ különbsége.

A kérdés már csak az, hogy mi az r_3 infimuma és szupréuma.

A másik két r_1 és r_2 koordináta meghatározásához használjuk fel, hogy

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = R^2, \quad \text{és} \quad \dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2 + \dot{r}_3^2 = 1,$$

továbbá válasszuk az ívhossz szerinti paraméterezés kezdőpontját úgy, hogy $r_3(0) = 0$ legyen, így $c = 0$, és forgassuk a z tengely körül el a görbét úgy, hogy $r_2(0) = 0$ legyen. (Vagyis a görbe átmegy az $(1, 0, 0)$ ponton, és ott éppen $s = 0$.)

Behelyettesítve r_3 ismert értékét a fentiekbe,

$$r_1^2 + r_2^2 = R^2 \cos^2(sR^{-1} \cos \alpha) \quad \text{és} \quad \dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2 = 1 - \cos^2(sR^{-1} \cos \alpha) \cos^2 \alpha$$

adódik. Az első alapján arra következtetünk, hogy létezik olyan φ függvény, melyre $r_1 = R \cos(sR^{-1} \cos \alpha) \cos \varphi(s)$, és $r_2 = R \cos(sR^{-1} \cos \alpha) \sin \varphi(s)$. Ezeket deriválva, és az eredményt a második egyenletbe írva a

$$\dot{\varphi}(s) = \frac{\sin \alpha}{R \cos(sR^{-1} \cos \alpha)}$$

differenciálegyenletet kapjuk, melynek integrálásából

$$\varphi(s) = \operatorname{tg} \alpha \cdot \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + s \frac{\cos \alpha}{2R} \right),$$

ahol azért nincs konstans tag, mert $r_2(0) = 0$.

Ezzel a keresett görbét teljesen meghatároztuk, és látjuk, hogy a $\frac{-R\pi}{2 \cos \alpha}$ és $\frac{R\pi}{2 \cos \alpha}$ ívhossz paraméterű pontok éppen a $(-R, 0, 0)$ és $(R, 0, 0)$ pontokba esnek, amiért a görbe hossza $\frac{R\pi}{\cos \alpha}$. ■

1.6. Kitekintés magasabb dimenzióra

Az eddigiekben a három vagy a kettő dimenziós térbe ágyazottan tanulmányoztuk a görbéket. Szerencsére szemléletváltásra akkor sincs szükség, ha magasabb dimenziós terekbe helyezett görbéket kívánunk vizsgálni.

A görbe definíciója, az ívhossz meghatározása a leírtaknak megfelelően történik. A görbület meghatározása már érdekesebb, mert ugyan most is a paraméterezés ívhossz szerinti deriváltjaiból ered, de magasabb dimenzióban nem csak a görbület és a torzió, hanem magasabb rendű deriváltak is szerepelnek. Az n dimenzióba beágyazott görbe esetén az első n derivált fogja adni az $n - 1$ görbületi vektort. Az így definiált görbületi vektorok deriváltjaira léteznek Frenet-formulák és ugyanúgy be lehet bizonyítani a görbék alaptételét is.

Differenciálható felületek

2.1. Paraméterezés, érintősík és atlasz

Definíció. Az $r: T(\subset \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés $\mathcal{F}$ értékkészletét *elemi felületnek* hívjuk, ha T összefüggő nyitott tartomány, r injektív, végtelenszer differenciálható, inverze folytonos és a $\partial_1 r$ és $\partial_2 r$ vektorok minden pontban függetlenek.

Az r leképezést az *elemi felület paraméterezésének*, az $r(\cdot, y)$, illetve $r(x, \cdot)$ görbéket a felület *paramétervonalainak* nevezzük.

Definíció. *Felületnek* nevezünk egy olyan összefüggő térbeli ponthalmazt, melynek minden pontja rendelkezik olyan gömbkörnyezettel, melyben a ponthalmaz elemi felület. Ezt a környezetet és a hozzá tartozó paraméterezést a felület e pont körüli *koordináta-környezetének* vagy *térképének* nevezzük. A felület koordináta-környezeteinek halmazát a felület *atlaszának* nevezzük.

Definíció. A $\psi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ leképezést *m-szer differenciálhatónak* mondjuk, ha az $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ felületek bármely $r_{\mathcal{F}}$ és $r_{\mathcal{G}}$ paraméterezésére az

$$r_{\mathcal{G}}^{-1} \circ \psi \circ r_{\mathcal{F}}: r_{\mathcal{F}}^{-1}(U_{\mathcal{F}} \cap \psi^{-1}(U_{\mathcal{G}})) \rightarrow r_{\mathcal{G}}^{-1}(\psi(U_{\mathcal{F}}) \cap U_{\mathcal{G}})$$

leképezés *m-szer folytonosan differenciálható*, ahol $U_{\mathcal{F}}$ és $U_{\mathcal{G}}$ rendre az $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ felület egy-egy koordináta-környezete.

Ha ψ bijektív és inverzével együtt végtelenszer differenciálható, akkor *diffeomorfizmusnak* nevezzük.

Definíció. A $\varphi: T' \rightarrow T$ ($T', T \subset \mathbb{R}^2$) diffeomorfizmust, melyre $\dot{\varphi}$ sehol sem elfajuló, az $r: T \rightarrow \mathbb{R}^3$ elemi felület *átparaméterezésének* nevezzük. Az új paraméterezés $p = r \circ \varphi: T' \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Megjegyzés. A $\partial_1 r$ és $\partial_2 r$ vektorok valójában az $r(\cdot, y)$ és $r(x, \cdot)$ paramétervonalaknak, mint térbeli görbéknek az érintői.

A $p = r \circ \varphi$ tényleg paraméterezés, hiszen $\partial_i p = \partial_i(r \circ \varphi) = \dot{r}(\varphi) \cdot \partial_i \varphi$ bármely $i = 1, 2$ esetében, vagyis az érintővektorok függetlensége megmarad.

Ugyanez mutatja, hogy az átparaméterezés nem változtatja meg a paramétervonalak érintőinek síkját, hiszen az új érintők a régiak lineáris kombinációjaként adódnak, vagyis az $\mathcal{F}$ felület P pontjában a paramétervonalak érintői az átparaméterezés után is ugyanazt a síkot feszítik.

Definíció. Az $\mathcal{F}$ elemi felület P pontjában a paramétervonalak érintői által feszített síkot az $\mathcal{F}$ felület *érintősíkjának* nevezzük, és $T_P\mathcal{F}$ -fel jelöljük. Ennek elemeit *érintővektoroknak*, $T\mathcal{F}$ unióját pedig *érintőnyalábnak* nevezzük.

Lemma. Legyen $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ a $T_P\mathcal{F}$ érintősíkján két független vektora. Ekkor létezik a P egy környezetének olyan paraméterezése, hogy a P ponton átmenő két paramétervonal érintője $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ legyen.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1\partial_1 r + \mathbf{u}_2\partial_2 r$, és $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1\partial_1 r + \mathbf{v}_2\partial_2 r$. Vegyük a $\varphi(x, y) = (x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{v}_1, x\mathbf{u}_2 + y\mathbf{v}_2)$ átparaméterezést. Ekkor a $p(x, y) = r \circ \varphi(x, y)$ paraméterezés éppen megfelel a kívánalmaknak. ■

Definíció. Az $\mathcal{F}$ felületen értelmezett $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *differenciálhatónak* nevezzük, ha bármely koordináta-környezetben $f \circ r: T(\subset \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható, ahol r a koordináta-környezet paraméterezése. Az ilyen függvényeket *skalármezőnek* is nevezzük.

Az $\mathbf{X}: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^3$ függvény differenciálhatóságát a komponens függvények deriválhatóságával definiáljuk. Ezeket a függvényeket *vektormezőnek* nevezzük. Ha $\mathbf{X}(P) \in T_P\mathcal{F}$ minden $P \in \mathcal{F}$ pontban, akkor *érintővektor-mezőről* beszélünk. Ezek vektortérét $\tilde{T}_P\mathcal{F}$ jelöli.

Tétel. Legyen $\varphi: \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ két elemi felület közti differenciálható leképezés. Bármely $\mathbf{v} \in T_P\mathcal{F}_1$ érintővektorhoz több olyan G görbe is létezik az $\mathcal{F}_1$ felületen, melyre $\mathbf{v} = \dot{G}(0)$ a G görbe érintője, és $P = G(0)$. Ekkor az $\mathcal{F}_2$ felületen lévő $\varphi \circ G$ görbe $\mathbf{w} \in T_{\varphi(P)}\mathcal{F}_2$ érintője nem függ a feltételeknek megfelelő G görbe megválasztásától.

Bizonyítás. Legyen g olyan síkbeli görbe, melyre $G = r \circ g$. Ebből egyrészt $P = r(g(0))$, másrészt $\mathbf{v} = \dot{G}(0) = (r \circ g)'(0) = \dot{r}(g(0)) \cdot \dot{g}(0)$ következik.

A $\varphi \circ G$ görbe érintője $\mathbf{w} = (\varphi \circ G)'(0) = (\varphi \circ r \circ g)'(0) = (\varphi \circ r)'(g(0)) \cdot \dot{g}(0)$ a láncszabály szerint.

Összehasonlítva a két formulát $\mathbf{w} = (\varphi \circ r)'(r^{-1}(P)) (\dot{r}(r^{-1}(P)))^{-1} \mathbf{v}$ adódik, ami mutatja a $\mathbf{w}$ vektor függetlenségét a görbe megválasztásától. ■

Definíció. A tételben szereplő $(\varphi \circ r)'(r^{-1}(P)) (\dot{r}(r^{-1}(P)))^{-1} : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{w}$ hozzárendelést *indukált leképezésnek* nevezzük, és φ_* -gal jelöljük.

Kiolvasható a tétel bizonyításából, hogy a φ_* indukált leképezés voltaképpen lineáris leképezés $T_P\mathcal{F}_1$ és $T_{\varphi(P)}\mathcal{F}_2$ között, melynek mátrixa éppen a $\varphi \circ r$ leképezés $(\varphi \circ r)'$ Jacobi-mátrixa, vagyis deriváltja.

Inverzfüggvény-tétel. *Ha a $\varphi_*: T_P\mathcal{F}_1 \rightarrow T_{\varphi(P)}\mathcal{F}_2$ indukált leképezés nem elfajuló, akkor a $\varphi: \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ leképezés a $P \in \mathcal{F}_1$ egy környezetét diffeomorf módon képezi le $\varphi(P) \in \mathcal{F}_2$ egy környezetére.*

Az előző tétel fényében az állítás nyilvánvalóan az ugyanilyen nevű analízisbeli tétel átfogalmazása. Ezért, és mert nem fogjuk sokat használni, most nem bizonyítjuk ezt az állítást, de az olvasó rendelkezésére áll [22, 9.24. Tétel 230. oldal].

Definíció. Egy felület *irányítható*, ha kitüntethető rajta egy $\mathbf{m}$ folytonos egységvektor-mező, mely a felület minden pontjában merőleges az érintősíkra.

Általában *lokális tulajdonságnak* mondunk egy jellemzőt, ha az minden pont minden elegendően kicsiny környezetben teljesül. Ebben az értelemben minden felület lokálisan irányítható, mert egy pont kis környezetében elemi felület, ott pedig az

$$\frac{\partial_1 r \times \partial_2 r}{|\partial_1 r \times \partial_2 r|} = \mathbf{m}$$

a kívánt egységvektor-mező. Globálisan, vagyis a felület egészére kiterjedően például a Möbius-szalag nem irányítható.

2.2. Differenciálás felületeken

Definíció. Legyen r az $\mathcal{F}$ elemi felület paraméterezése, $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$, $P \in \mathcal{F}$, $\mathbf{v} \in T_P\mathcal{F}$, g olyan görbe a síkon, melyre a $G = r \circ g$ görbe az $\mathcal{F}$ felületen teljesíti, hogy $G(0) = P$, és $\dot{G}(0) = \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \partial_1 r + \mathbf{v}_2 \partial_2 r$. Ekkor azt mondjuk, hogy

$$d_{\mathbf{v}}f := (f \circ G)'(0)$$

az f függvény $\mathbf{v}$ szerinti deriváltja, $d_{\mathbf{v}}$ pedig az *iránymenti deriválás*.

Megjegyzés. A $d_{\mathbf{v}}f$ iránymenti derivált definíciója helyes, mert a feltételeknek megfelelő G görbe választásától $d_{\mathbf{v}}f$ értéke nem függ.

Bizonyítás. Ennek belátásához két megfigyelésre van szükség. Egyrészt

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \partial_1 r + \mathbf{v}_2 \partial_2 r = \dot{G}(0) = (r \circ g)'(0) = \dot{r}(g(0)) \cdot \dot{g}(0)$$

szerint $\mathbf{v}_i = \dot{g}_i(0)$ mindkét lehetséges $i = 1, 2$ indexre.

Másrészt $d_v f = (f \circ r \circ g)'(0) = (f \circ r)'(g(0)) \cdot \dot{g}(0) = (f \circ r)'(r^{-1}(P)) \cdot \dot{g}(0)$, ami az előbbi megfigyelés alapján azt jelenti, hogy

$$d_v f(P) = \mathbf{v}_1 \partial_1 (f \circ r)(r^{-1}(P)) + \mathbf{v}_2 \partial_2 (f \circ r)(r^{-1}(P)),$$

és ebből látszik, hogy az iránymenti deriválás valóban független a megfelelő görbe választásától. ■

Fontos felismerni, hogy a $d_v f$ jelölésben a $\mathbf{v}$ felületi érintővektor érintősíkjának érintési pontja adja a deriválás helyét.

Definíció. Az f skalármező $\mathbf{X}$ érintővektor-mező szerinti $d_{\mathbf{X}} f$ deriváltján, ami szintén skalármező, a $d_{\mathbf{X}} f(P) := d_{\mathbf{X}(P)} f$ kifejezést értjük.

Tétel. Az f , f_1 és f_2 skalármezőkre, $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ érintővektorokra, $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ érintővektor-mezőkre, valamint α és β konstansokra

- (1) $d_v(f_1 + f_2) = d_v f_1 + d_v f_2$, $d_v(f_1 \cdot f_2) = d_v f_1 \cdot f_2 + f_1 \cdot d_v f_2$, $d_{\alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}} f = \alpha d_v f + \beta d_w f$ és $d_v(\text{konst.}) = 0$,
- (2) $d_{\mathbf{X}}(f_1 + f_2) = d_{\mathbf{X}} f_1 + d_{\mathbf{X}} f_2$, $d_{\mathbf{X}}(f_1 \cdot f_2) = d_{\mathbf{X}} f_1 \cdot f_2 + f_1 \cdot d_{\mathbf{X}} f_2$, $d_{f_1 \mathbf{X} + f_2 \mathbf{Y}} f = f_1 d_{\mathbf{X}} f + f_2 d_{\mathbf{Y}} f$ és $d_{\mathbf{X}}(\text{konst.}) = 0$.

Elég hivatkoznunk a fentebb már bizonyított

$$d_v f(P) = \mathbf{v}_1 \partial_1 (f \circ r)(r^{-1}(P)) + \mathbf{v}_2 \partial_2 (f \circ r)(r^{-1}(P))$$

összefüggésre.

Megjegyzés. Fontos megjegyezni, hogy ahogy az a definícióból is kiolvasható, az i -edik paramétervonal érintője szerinti iránymenti deriválás megegyezik az i -edik paraméter szerinti parciális deriválással. Ilyen értelemben néha megengedjük magunknak a némileg pontatlan $\partial_i f$ jelölést is, ahol f skalármező.

Definíció. Az $\mathbf{X} = (x^1, x^2, x^3)$ vektormező $\mathbf{v} \in T_P \mathcal{F}$ szerinti *iránymenti deriváltja* $d_v \mathbf{X} := (d_v x^1, d_v x^2, d_v x^3)$. Az $\mathbf{X}$ vektormező $\mathbf{Y}$ érintővektor-mező szerinti $d_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}$ deriváltja minden $P \in \mathcal{F}$ pontra $d_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}(P) := d_{\mathbf{Y}(P)} \mathbf{X}$.

Ahogy a skalármezők deriválásánál, most is könnyen igazolható az alábbi.

Tétel. Az f skalármezőre, $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ vektormezőkre, $\mathbf{v}$ és $\mathbf{u}$ vektorokra, valamint α és β konstansokra

- (1) $d_v(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = d_v \mathbf{X} + d_v \mathbf{Y}$, $d_v(f \cdot \mathbf{X}) = d_v f \cdot \mathbf{X} + f d_v \mathbf{X}$,
 $d_{\alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{u}} \mathbf{X} = \alpha d_v \mathbf{X} + \beta d_{\mathbf{u}} \mathbf{X}$, $d_v \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \langle d_v \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle + \langle \mathbf{X}, d_v \mathbf{Y} \rangle$,
- továbbá $\mathbf{Z}$ és $\mathbf{T}$ érintővektor-mezőkre, valamint a és h skalármezőkre

$$(2) \quad d_{\mathbf{Z}}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = d_{\mathbf{Z}}\mathbf{X} + d_{\mathbf{Z}}\mathbf{Y}, \quad d_{\mathbf{Z}}(f \cdot \mathbf{X}) = d_{\mathbf{Z}}f \cdot \mathbf{X} + f d_{\mathbf{Z}}\mathbf{X}, \\ d_{g\mathbf{Z}+h\mathbf{T}}\mathbf{X} = g d_{\mathbf{Z}}\mathbf{X} + h d_{\mathbf{T}}\mathbf{X}, \quad d_{\mathbf{Z}}\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \langle d_{\mathbf{Z}}\mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle + \langle \mathbf{X}, d_{\mathbf{Z}}\mathbf{Y} \rangle.$$

Mindkét pont utolsó összefüggésének érintő vektormezőkön való vizsgálata motiválja az alábbi definíciót.

Definíció. Az $\mathbf{X}$ érintővektor-mező $d_{\mathbf{v}}\mathbf{X}$ deriváltjának a $T_P\mathcal{F}$ érintősíkra vett $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X}$ merőleges vetületét az $\mathbf{X}$ vektormező $\mathbf{v}$ szerinti *kovariáns deriváltjának* nevezzük.

Az $\mathbf{X}$ érintővektor-mező $\mathbf{Y}$ érintővektor-mező szerinti $\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}$ kovariáns deriváltja minden $P \in \mathcal{F}$ pontra $\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}(P) := \nabla_{\mathbf{Y}(P)}\mathbf{X}$.

Tétel. Az f skalármezőre, $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ érintővektor-mezőkre, $\mathbf{v}$ és $\mathbf{u}$ vektorokra és α és β konstansokra

$$(1) \quad \nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X} + \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{Y}, \quad \nabla_{\mathbf{v}}(f\mathbf{X}) = d_{\mathbf{v}}f\mathbf{X} + f\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X}, \\ \nabla_{\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{u}}\mathbf{X} = \alpha\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X} + \beta\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{X}, \quad d_{\mathbf{v}}\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \langle \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle + \langle \mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{Y} \rangle.$$

Ugyanígy a $\mathbf{Z}$ és $\mathbf{T}$ érintővektor-mezőkre és g és h skalármezőkre

$$(2) \quad \nabla_{\mathbf{Z}}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{X} + \nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{Y}, \quad \nabla_{\mathbf{Z}}(f\mathbf{X}) = d_{\mathbf{Z}}f\mathbf{X} + f\nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{X}, \\ \nabla_{g\mathbf{Z}+h\mathbf{T}}\mathbf{X} = g\nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{X} + h\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X}, \quad d_{\mathbf{Z}}\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \langle \nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle + \langle \mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{Y} \rangle.$$

A bizonyítás az előző tételből a definíció felhasználásával azonnal következik.

Mivel $\partial_1 r$ és $\partial_2 r$ a $T_P\mathcal{F}$ érintősík egy bázisa, a $\nabla_{\partial_1 r}\partial_2 r$ kovariáns derivált kifejezhető a $\partial_1 r$ és $\partial_2 r$ lineáris kombinációjaként.

Definíció. Azt a nyolc darab $\Gamma_{i,j}^k$ skalármezőt ($i, j, k = 1, 2$), mely persze koordináta-környezetenként változhat, és teljesíti a négy darab $\nabla_{\partial_i r}\partial_j r = \Gamma_{i,j}^1\partial_1 r + \Gamma_{i,j}^2\partial_2 r$ vektor-egyenletet ($i, j = 1, 2$), *Christoffel-szimbólumnak* nevezzük.

A Christoffel-szimbólumok teljesen meghatározzák a kovariáns deriválást, mely lehetőséget teremt a kovariáns deriválás tulajdonságaival rendelkező más operátorok definiálására is. Fontos ugyanakkor látni, hogy a Christoffel szimbólumok nem a felületre jellemzők, hanem a koordináta-környezet paraméterezéséhez rendelt függvények.

Tétel. A Christoffel-szimbólum az alsó indexekben szimmetrikus, vagyis $\Gamma_{i,j}^k = \Gamma_{j,i}^k$.

Bizonyítás. Jelölje $^\perp$ egy vektor merőleges vetületét az érintősíkra. Ezzel már könnyű leírni a bizonyítást adó képletet:

$$\nabla_{\partial_i r}\partial_j r = (d_{\partial_i r}\partial_j r)^\perp = (\partial_i\partial_j r)^\perp = (\partial_j\partial_i r)^\perp = (d_{\partial_j r}\partial_i r)^\perp = \nabla_{\partial_j r}\partial_i r. \quad \blacksquare$$

2.3. Felületi görbék és párhuzamosság

Definíció. Ha G felületi görbe, akkor a $\kappa_g \mathbf{n}_g = \nabla_t \mathbf{t}$ vektort, ahol $\mathbf{t}$ a G görbe egységnyi érintővektora, a G görbe *felületi görbületi vektorának* nevezzük. Az egységnyi $\mathbf{n}_g$ vektort a görbe geodetikus vagy *felületi normálisának*, a nemnegatív κ_g skalárt a görbe felületi vagy *geodetikus görbületének* nevezzük.

Érdeemes megfigyelni, hogy $d_t \mathbf{t}$ a görbe görbületi vektora, és $\nabla_t \mathbf{t}$ ennek merőleges vetülete az érintősíkra, ami ezért nyilván merőleges az érintővektorra.

Tétel. A felületi görbületi vektor merőleges az érintővektorra.

Formálisabb úton ezt igazolja a $0 = d_t \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = 2 \langle \nabla_t \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle$ összefüggés is.

Frenet-formula felületen. $\nabla_t \mathbf{n}_g = -\kappa_g \mathbf{t}$.

Bizonyítás. Mivel $\mathbf{t}$ és $\mathbf{n}_g$ ortonormált bázist alkot az érintősíkban, az alábbiak igazolják a tételt:

$$\begin{aligned} 1 = \langle \mathbf{n}_g, \mathbf{n}_g \rangle &\Rightarrow 0 = d_t \langle \mathbf{n}_g, \mathbf{n}_g \rangle = 2 \langle \nabla_t \mathbf{n}_g, \mathbf{n}_g \rangle \Rightarrow \nabla_t \mathbf{n}_g \perp \mathbf{n}_g, \\ 0 = \langle \mathbf{n}_g, \mathbf{t} \rangle &\Rightarrow 0 = d_t \langle \mathbf{n}_g, \mathbf{t} \rangle = \langle \nabla_t \mathbf{n}_g, \mathbf{t} \rangle + \langle \mathbf{n}_g, \nabla_t \mathbf{t} \rangle \Rightarrow \langle \nabla_t \mathbf{n}_g, \mathbf{t} \rangle + \kappa_g = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Definíció. A G felületi görbe által meghatározott κ_m skalárt, melyre $\kappa_m \mathbf{m} = d_t \mathbf{t} - \nabla_t \mathbf{t}$, ahol $\mathbf{m}$ a felületi normális, a G görbe *normálgörbületének* nevezzük.

Vegyük észre, hogy $\kappa \mathbf{n} = \kappa_m \mathbf{m} + \kappa_g \mathbf{n}_g$, ahol κ a görbe (térbeli) görbülete, és $\mathbf{n}$ a görbe normális. Mivel $(\mathbf{t}, \mathbf{n}_g, \mathbf{m})$ egy ortonormált bázis a térben, ebből $\kappa^2 = \kappa_m^2 + \kappa_g^2$ mellett az alábbi tétel is következik.

Meusnier-tétel. A felületi görbe normálgörbületét a $\kappa_m = \kappa \cos \varphi$ képlet adja, ahol φ a felület és a görbe normálisai közti szög.

Figyeljük meg, hogy ha a felületet merőlegesen metsszük el egy síkkal, a kialakuló metszetgörbe normális görbülete és térbeli görbülete azonos, és egy felületi görbe és az annak simulósíkja által kimetszett újabb görbe minden görbülete megegyezik.

Definíció. A G felületi görbe mentén az $\mathbf{X}$ érintővektor-mezőt *párhuzamosnak* nevezzük, ha $\nabla_G \mathbf{X} = 0$.

Jegyezzük meg, hogy a párhuzamosság fogalmát csak érintővektor-mezőkre értelmeltük!

Tétel. Ha $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ egyazon görbe mentén párhuzamosak, akkor bezárt szögük és hosszuk is konstans.

Bizonyítás. Minthogy $d_{\dot{G}}\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle = 2\langle \nabla_{\dot{G}}\mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle = 0$, az $\mathbf{X}$ hossza állandó. Ebből következik, hogy ha az $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ közti szög α , akkor

$$|\mathbf{X}| \cdot |\mathbf{Y}| d_{\dot{G}}(\cos \alpha) = d_{\dot{G}}\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \langle \nabla_{\dot{G}}\mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle + \langle \mathbf{X}, \nabla_{\dot{G}}\mathbf{Y} \rangle = 0,$$

vagyis $\cos \alpha$ konstans, ahogy azt állítottuk. ■

Definíció. Irányítható felületen

$$\kappa_g^e = \left\{ \begin{array}{ll} \kappa_g, & \text{ha } (\mathbf{t}, \mathbf{n}_g, \mathbf{m}) \text{ jobbsodrású,} \\ -\kappa_g, & \text{ha } (\mathbf{t}, \mathbf{n}_g, \mathbf{m}) \text{ balsodrású} \end{array} \right\} = (\mathbf{t}, \nabla_{\mathbf{t}}\mathbf{t}, \mathbf{m}).$$

az *előjeles geodetikus görbület*.

Most a síkon már bizonyított állítás analógját bizonyítjuk.

Tétel. Legyen $\mathcal{F}$ irányítható felület, és legyen $\mathbf{X}$ párhuzamos vektormező a G felületi görbe mentén. Ha α az $\mathbf{X}$ és a $\mathbf{t}$ érintő előjeles szöge, akkor $\alpha' = \kappa_g^e$.

Bizonyítás. Feltehető, hogy $\mathbf{X}$ egységvektor-mező, vagyis $\mathbf{X} = \mathbf{t} \cos \alpha - \mathbf{n}_g \sin \alpha$. Ekkor

$$\sin \alpha = \langle \mathbf{X}, \mathbf{t}, \mathbf{m} \rangle = \langle \mathbf{X} \times \mathbf{t}, \mathbf{m} \rangle,$$

amit deriválva G mentén ($d_{\mathbf{t}}$) az alábbi adódik:

$$\alpha' \cos \alpha = \langle \nabla_{\mathbf{t}}\mathbf{X} \times \mathbf{t}, \mathbf{m} \rangle + \langle \mathbf{X} \times \nabla_{\mathbf{t}}\mathbf{t}, \mathbf{m} \rangle + \langle \mathbf{X} \times \mathbf{t}, d_{\mathbf{t}}\mathbf{m} \rangle.$$

Mivel $\mathbf{X}$ párhuzamos, és $d_{\mathbf{t}}\mathbf{m}$ az érintősíkba esik, ebből $\alpha' \cos \alpha = \langle \mathbf{X} \times \nabla_{\mathbf{t}}\mathbf{t}, \mathbf{m} \rangle$ következik. Ebbe helyettesítve $\mathbf{X}$ bázisbontását, $\alpha' = \langle \mathbf{t} \times (\kappa_g \mathbf{n}_g), \mathbf{m} \rangle$ adódik, ami bizonyítja az állítást. ■

Következmény. Ha $\mathbf{X}_0$ a G görbe $G(0)$ pontjában érintővektor, akkor pontosan egy olyan $\mathbf{X}$ párhuzamos vektormező létezik, amely a $G(0)$ pontban az $\mathbf{X}_0$ értéket veszi fel.

Bizonyítás. Az előző tétel szerint $\mathbf{X}$ egyértelműen megszerkeszthető a $\mathbf{t}$ érintő $|\mathbf{X}_0|$ -szoros nyújtásával és olyan α szögű elforgatásával, melyre $\cos \alpha(0)|\mathbf{X}_0||\dot{G}(0)| = \langle \mathbf{X}_0, \dot{G}(0) \rangle$, és $\alpha' = \kappa_g^e$. Ez a kezdetiértékes elsőrendű közönséges differenciálegyenlet viszont egyetlen, integrálással meghatározható megoldással rendelkezik. ■

A görbe menti párhuzamos vektormezők eszerint kétdimenziós vektorteret alkotnak. Az alábbiakban belátjuk, hogy a párhuzamos eltolásból visszafelé előálítható a kovariáns deriválás.

Tétel. Legyen $\tau_{t_0}^t$ a párhuzamos eltolás a G mentén $G(t)$ pontból a $G(t_0)$ pontba, és

$$\tilde{\nabla}_{\dot{G}} \mathbf{X}(G(t_0)) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\tau_{t_0}^t(\mathbf{X}(G(t))) - \mathbf{X}(G(t_0))}{t - t_0}$$

minden $\mathbf{X}$ érintővektor-mező esetén. Ekkor $\tilde{\nabla}_{\dot{G}} = \nabla_{\dot{G}}$.

Bizonyítás. Legyen $F(\dot{G}, \mathbf{X}) = \nabla_{\dot{G}} \mathbf{X} - \tilde{\nabla}_{\dot{G}} \mathbf{X}$. Legelső megfigyelésünk az, hogy $F(\dot{G}, \mathbf{X}) \equiv 0$, ha az $\mathbf{X}$ vektormező párhuzamos a G görbe mentén.

Az is világos, hogy F lineáris a második változójában, és ha f skalármező, akkor

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\dot{G}}(f\mathbf{X})(G(t_0)) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\tau_{t_0}^t(f(G(t))\mathbf{X}(G(t))) - f(G(t_0))\mathbf{X}(G(t_0))}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(G(t))\tau_{t_0}^t(\mathbf{X}(G(t))) - f(G(t_0))\mathbf{X}(G(t_0))}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(f(G(t)) - f(G(t_0)))\tau_{t_0}^t(\mathbf{X}(G(t)))}{t - t_0} + \\ &\quad + \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(G(t_0))(\tau_{t_0}^t(\mathbf{X}(G(t))) - \mathbf{X}(G(t_0)))}{t - t_0} \\ &= d_{\dot{G}}f(G(t_0))\mathbf{X}(G(t_0)) + f(G(t_0))\tilde{\nabla}_{\dot{G}}\mathbf{X}(G(t_0)), \end{aligned}$$

amiért

$$F(\dot{G}, f\mathbf{X}) = \nabla_{\dot{G}}(f\mathbf{X}) - \tilde{\nabla}_{\dot{G}}(f\mathbf{X}) = \mathbf{X}d_{\dot{G}}f + f\nabla_{\dot{G}}\mathbf{X} - \mathbf{X}d_{\dot{G}}f - f\tilde{\nabla}_{\dot{G}}\mathbf{X} = fF(\dot{G}, \mathbf{X}).$$

Legyen $\mathbf{P}$ és $\mathbf{R}$ két független és párhuzamos vektormező a G görbe mentén. Ekkor bármely $\mathbf{X}$ vektormező a G görbe mentén előáll a $\mathbf{P}$ és $\mathbf{R}$

$$\mathbf{X}(G(t)) = f(G(t))\mathbf{P}(G(t)) + h(G(t))\mathbf{R}(G(t))$$

lineáris kombinációjaként, amiből a fentiek szerint $F(\dot{G}, \mathbf{X}) \equiv 0$ következik. ■

Ez az eredmény lehetővé teszi a kovariáns deriválás egy újabb meghatározását.

Definíció. Az $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ érintővektor-mezőkre a

$$\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}(P) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\tau_{t_0}^t(\mathbf{Y}(G(t))) - \mathbf{Y}(G(t_0))}{t - t_0},$$

formulával adott ∇ operátort, ahol G olyan görbe, melyre $P = G(t_0)$ és $\mathbf{X}(P) = \dot{G}(t_0)$, valamint $\tau_{t_0}^t$ a párhuzamos eltolás a G mentén a $G(t)$ pontból a $G(t_0)$ pontba, kovariáns deriválásnak nevezzük.

2.4. Geodetikuskok

Definíció. Egy G görbét *geodetikusknak* nevezünk, ha $\nabla_{\dot{G}}\dot{G} \equiv 0$.

Egy ilyen geodetikus mindig ívhosszarányosan van paraméterezve, mert $d_{\dot{G}}\langle\dot{G}, \dot{G}\rangle = \langle\nabla_{\dot{G}}\dot{G}, \dot{G}\rangle = 0$.

Geodetikuskok differenciálegyenlete. Az r koordináta-környezetben a $G = r \circ g$ geodetikus $g: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ síkgörbéje eleget tesz a

$$\ddot{g}_k + \sum_{i,j=1}^2 \dot{g}_i \dot{g}_j \Gamma_{i,j}^k(r(g_1, g_2)) = 0 \quad k = 1, 2 \quad (2.4.1)$$

differenciálegyenlet-rendszernek.

Bizonyítás. Definíció szerint a G geodetikus érintőjére $\nabla_{\mathbf{t}}\mathbf{t} = \kappa_g \mathbf{n}_g = 0$, ahol $\mathbf{t} = \sum_{i=1}^2 \dot{g}_i \partial_i r$. Előbbibe utóbbit helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\mathbf{t}} \left(\sum_{j=1}^2 \dot{g}_j \partial_j r \right) = \sum_{j=1}^2 \ddot{g}_j \partial_j r + \sum_{j=1}^2 \dot{g}_j \nabla_{\sum_{i=1}^2 \dot{g}_i \partial_i r} \partial_j r \\ &= \sum_{j=1}^2 \ddot{g}_j \partial_j r + \sum_{j=1}^2 \dot{g}_j \sum_{i=1}^2 \dot{g}_i \nabla_{\partial_i r} \partial_j r = \sum_{k=1}^2 \ddot{g}_k \partial_k r + \sum_{j=1}^2 \dot{g}_j \sum_{i=1}^2 \dot{g}_i \sum_{k=1}^2 \Gamma_{i,j}^k \partial_k r \\ &= \sum_{k=1}^2 \left(\ddot{g}_k + \sum_{j=1}^2 \dot{g}_j \sum_{i=1}^2 \dot{g}_i \Gamma_{i,j}^k \right) \partial_k r. \end{aligned}$$

Ezzel az állítást igazoltuk. ■

Megjegyzés. A Picard–Lindelöf-tételből következik, hogy minden $\mathbf{v} \in T_P \mathcal{F}$ érintővektorra a fenti differenciálegyenlet-rendszernek pontosan egy megoldása létezik (legalábbis a P pont egy környezetében) úgy, hogy a $G = r \circ g$ geodetikus átmegy a P ponton, és éppen $\mathbf{v}$ irányába halad, vagyis $\dot{G}(0) = \mathbf{v}$.

Tétel. Az általános paraméterezésű geodetikuskok differenciálegyenlet-rendszere

$$\ddot{g}_k \dot{g}_l - \dot{g}_l \dot{g}_k + \sum_{i,j=1}^2 \dot{g}_i \dot{g}_j \left(\dot{g}_l \Gamma_{i,j}^k(r(g_1, g_2)) - \dot{g}_k \Gamma_{i,j}^l(r(g_1, g_2)) \right) = 0,$$

ahol $k, l = 1, 2$.

Bizonyítás. Az (2.4.1) egyenlet egy ψ átparaméterezéssel a

$$\ddot{g}_k(\psi)(\dot{\psi})^2 + \dot{g}_k(\psi)\ddot{\psi} + \sum_{i,j=1}^2 \dot{g}_i(\psi)\dot{g}_j(\psi)(\dot{\psi})^2 \Gamma_{i,j}^k(r(g_i(\psi), g_j(\psi))) = 0$$

egyenletre vezet. Ezt megszorozva $\dot{g}_l$ -el, majd abból kivonva ugyanazt, de a k és l indexek felcserélése után, éppen a tétel állítását kapjuk $(\dot{\psi})^2$ szorzóval. Mivel ez a szorzó nem lehet nulla, az állítást igazoltuk. ■

Definíció. Az $\nu: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, d] \rightarrow \mathcal{F}$ differenciálható függvényt a $G: [0, d] \rightarrow \mathcal{F}$ *felületi görbe variálásának* nevezzük, ha $\nu(t, 0) = G(0)$, $\nu(t, d) = G(d)$ és $\nu(0, s) = G(s)$ minden lehetséges t és s paraméterre.

Az $X: [0, d] \rightarrow \mathcal{F}$ görbék halmazán értelmezett $X \mapsto \mu(X)$ funkcionált *mérésnek* nevezzük.

A G görbét a μ mérésre nézve *extremális görbének* nevezzük, ha bármely ν variálására az $m(t) = \mu(\nu(t, \cdot))$ függvény a 0-ban extremális, vagyis $m'(0) = 0$.

Lemma. *Bármely $G: [0, d] \rightarrow \mathcal{F}$ felületi görbéhez és azon adott $\mathbf{X}$ érintővektor-mezőhöz, ha $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(d) = 0$, akkor létezik olyan ν variálás, melyre $\partial_1 \nu(0, \cdot) = \mathbf{X}$.*

Bizonyítás. Legyen a $g: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ görbe olyan, hogy $G = r \circ g$, valamint legyen $\mathbf{X} = x^1 \partial_1 r + x^2 \partial_2 r$ az $\mathbf{X}$ bázisbontása.

Legyen $h(t, s) = g(s) + t(x^1(s), x^2(s))$. Állítjuk, hogy a $\nu = r \circ h$ a G egy olyan variálása, melyre $\partial_1 \nu(0, \cdot) = \mathbf{X}$ teljesül.

Először igazoljuk, hogy ν tényleg variálás. Az világos, hogy $\nu(t, 0) = G(0)$, $\nu(t, d) = G(d)$ és $\nu(0, s) = G(s)$ minden lehetséges t és s paraméterre. Nyilvánvaló az is, hogy ν minden parciális deriváltja folytonos, hiszen az r paraméterezés és a g görbe is legalább kétszer (persze e jegyzetben végtelenszer is!) differenciálható. Ebből viszont következik ν differenciálhatósága [22, 9.21 tétel].

A következő számolás igazolja a tételt:

$$\begin{aligned} \partial_1 \nu(0, s) &= \partial_1 (r \circ h)(0, s) = \left. \frac{\partial (r(g(s) + t(x^1, x^2)))}{\partial t} \right|_{t=0} \\ &= (\partial_1 r(g(s) + t(x^1, x^2))x^1 + \partial_2 r(g(s) + t(x^1, x^2))x^2) \Big|_{t=0} \\ &= \partial_1 r(g(s))x^1 + \partial_2 r(g(s))x^2 = \mathbf{X}, \end{aligned}$$

■

Tétel. *Pontosan a geodetikuskok extremálisak az ívhosszmérésre nézve.*

Bizonyítás. Legyen a G ívhossz szerint paraméterezett görbe, ν ennek variálása, és az ebben előforduló görbék hossza $m(t) = \int_0^d \sqrt{\langle \partial_2 \nu(t, s), \partial_2 \nu(t, s) \rangle} ds$.

Ekkor

$$m'(t) = \int_0^d \frac{\langle \partial_1 \partial_2 \nu(t, s), \partial_2 \nu(t, s) \rangle}{\sqrt{\langle \partial_2 \nu(t, s), \partial_2 \nu(t, s) \rangle}} ds,$$

amit a $t = 0$ helyen kell megvizsgálnunk. A G görbe ívhossz szerinti paraméterezése miatt a $t = 0$ helyen az integrandus nevezője éppen 1, ezért a parciális deriválások sorrendjének felcserélésével

$$\begin{aligned} m'(0) &= \int_0^d \langle \partial_2 \partial_1 \nu(0, s), \partial_2 \nu(0, s) \rangle ds \\ &= \int_0^d (\partial_2 \langle \partial_1 \nu(0, s), \partial_2 \nu(0, s) \rangle - \langle \partial_1 \nu(0, s), \partial_2^2 \nu(0, s) \rangle) ds \\ &= [\langle \partial_1 \nu(0, s), \partial_2 \nu(0, s) \rangle]_0^d - \int_0^d \langle \partial_1 \nu(0, s), \partial_2^2 \nu(0, s) \rangle ds. \end{aligned}$$

Mivel a variálás végpontjai fixek, $\partial_1 \nu(0, 0) = \partial_1 \nu(0, d) = 0$, vagyis az összeg első tagja eltűnik. Az integrandust vizsgálva azt látjuk, hogy $\partial_2^2 \nu(0, s) = \ddot{G}(s) = d_{\dot{G}} \dot{G}$, és ez egy érintővektorral van skalárszorzatban, tehát végül

$$m'(0) = - \int_0^d \langle \partial_1 \nu(0, s), \nabla_{\dot{G}} \dot{G} \rangle ds,$$

ahol $\partial_1 \nu(0, s)$ a $G(s)$ ponton átmenő $\nu(\cdot, s)$ transzverzális görbe érintője.

Ha G geodetikus, akkor $\nabla_{\dot{G}} \dot{G} = 0$, és ezért $m'(0) = 0$ minden variálásra.

Ha $m'(0) = 0$ minden variálásra, akkor tekintsünk egy olyan variálást, melyre $\partial_1 \nu(0, s) = (d - s) s \kappa_g(s) \mathbf{n}_g(s)$. Ekkor a fenti képlet a $0 = \int_0^d (d - s) s \kappa_g^2(s) ds$ eredményt adja, amiből $\kappa_g = 0$ következik. ■

Megjegyzés. Tételünk szerint a geodetikus belsőgeometriai fogalom, vagyis a felületen élő „lapos” matematikus is meg tudja határozni a geodetikusokat, hiszen a görbék hossza belülről is mérhető, és akkor az extrémálisok kikereshetőek.

A geodetikusok mentén való párhuzamos eltolás is belsőleg definiálható, hiszen a geodetikusok érintővektorai párhuzamosak, így a párhuzamosság szögtartása miatt a geodetikus pontjaiban bármely vektor párhuzamosan eltolt képe megrajzolható, egyszerűen az érintővel bezárt szög alapján. Korábbi tételünk szerint a $\nabla_{\mathbf{v}}$ kovariáns deriváltat meghatározza egy $\mathbf{v}$ irányba induló görbén való párhuzamos eltolás, hiszen annak deriváltja. Mivel geodetikus minden irányba, minden sebességgel indul, a $\mathbf{v}$ irányba induló geodetikus választásával a $\nabla_{\mathbf{v}}$ kovariáns derivált belsőgeometriai mennyiségekből számítható, hiszen a geodetikus és azon a párhuzamos eltolás is belsőgeometriai mennyiség. Immár ∇ ismeretében, a párhuzamos eltolás általános görbéken a párhuzamosság definíciójából következik.

2.5. Alapmennyiségek és görbületek

Az egyik legfontosabb jellemzője egy felület valamilyen tulajdonságának az, hogy azt képes-e egy a felületben élő „lapos” matematikus meghatározni, aki a felületen kívüli világról semmit sem tud. A fontosság érthető, hiszen egyrészt magunk is be vagyunk zárva saját terünkbe, másrészt, ha valamely tulajdonság belülről is meghatározható, akkor az a felület szerkezetéből fakadó közvetlen ismeret.

Azokat a tulajdonságokat, amelyeket belülről is meg lehet határozni, belsőgeometriai mennyiségnek nevezzük, míg ha egy tulajdonságot lehetetlen belülről megismerni, akkor azt külsőgeometriai mennyiségnek hívjuk.

Definíció. A $g_P: T_P\mathcal{F} \times T_P\mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcionált, ahol $g_P\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, első alaplammennyiségnek vagy belsőgeometriai főmennyiségnek nevezzük.

Figyeljük meg, hogy a definíció képletben a jobb oldalon a bal oldalon szereplő vektorok térbeli reprezentációi szerepelnek. A g minden pontban egy szimmetrikus, pozitív definit bilineáris funkcionál, melynek a paramétervonalak érintői által alkotott bázisban megfelelő 2×2 szimmetrikus mátrixának elemeit általában $g_{i,j}$ ($i, j = 1, 2$) jelöli.

Tétel. Jelölje a g mátrixa inverzének elemeit $g^{l,k}$ ($l, k = 1, 2$). Ekkor a Christoffel-szimbólumokra minden $i, j, l = 1, 2$ esetén

$$\Gamma_{i,j}^l = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 g^{l,k} (\partial_j g_{i,k} + \partial_i g_{j,k} - \partial_k g_{i,j}). \quad (2.5.1)$$

Bizonyítás. A Christoffel-szimbólumok definícióját helyettesítve a

$$g\langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_m \rangle + g\langle \partial_j, \nabla_{\partial_i} \partial_m \rangle = \partial_i g\langle \partial_j, \partial_m \rangle$$

egyenletbe az adódik, hogy $g\langle \sum_{k=1}^2 \Gamma_{i,j}^k \partial_k, \partial_m \rangle + g\langle \partial_j, \sum_{k=1}^2 \Gamma_{i,m}^k \partial_k \rangle = \partial_i g_{j,m}$. Ebből $\sum_{k=1}^2 (\Gamma_{i,j}^k g_{k,m} + \Gamma_{i,m}^k g_{j,k}) = \partial_i g_{j,m}$ következik, melyben az (i, j, m) indexek ciklikus permutációjával kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^2 (\Gamma_{j,i}^k g_{k,m} + \Gamma_{j,m}^k g_{i,k}) = \partial_j g_{i,m} \quad \text{és} \quad - \sum_{k=1}^2 (\Gamma_{m,i}^k g_{k,j} + \Gamma_{m,j}^k g_{i,k}) = -\partial_m g_{i,j}.$$

E három képlet $2 \sum_{k=1}^2 \Gamma_{i,j}^k g_{k,m} = \partial_i g_{j,m} + \partial_j g_{i,m} - \partial_m g_{i,j}$ összegét megszorozva a $(g_{k,m})$ mátrix $(g^{l,k})$ inverzével, éppen a bizonyítandó egyenlőséget kapjuk. ■

Jelölje az $\mathcal{F}$ felület egyik egységnyi normális vektormezőjét $\mathbf{m}$. A nyilvánvaló $\langle \mathbf{m}, \mathbf{m} \rangle = 1$ egyenlet $\mathbf{v} \in T_P\mathcal{F}$ szerinti deriválásából $\langle d_{\mathbf{v}}\mathbf{m}, \mathbf{m} \rangle = 0$ adódik, amiért $d_{\mathbf{v}}\mathbf{m} \in T_P\mathcal{F}$.

Definíció. A $B_P: T_P\mathcal{F} \rightarrow T_P\mathcal{F}$ leképezést, melyre $B_P(\mathbf{v}) = d_{\mathbf{v}}\mathbf{m}$ Weingarten-leképezésnek, vagy *külsőgeometriai főmennyiségnek* nevezzük.

Definíció. Az $M_P: T_P\mathcal{F} \times T_P\mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcionált, ahol $M_P(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -g_P\langle \mathbf{u}, B_P(\mathbf{v}) \rangle$, a P -beli *második alapmennyiségnek* nevezzük.

Tétel. A Weingarten-leképezés lineáris transzformáció, a második alapmennyiség pedig szimmetrikus és bilineáris funkcionál.

Bizonyítás. A B_P Weingarten-leképezés linearitása közvetlenül következik az iránymenti deriválás alsó indexbeli linearitásából.

Az M_P második alapmennyiség a skaláris szorzás, és a Weingarten-leképezés linearitása miatt bilineáris. A bilinearitás miatt a szimmetriát elegendő az érintősík bázisára igazolni, márpedig

$$\begin{aligned} M_P(\partial_i r, \partial_j r) &= -\langle \partial_i r, B_P(\partial_j r) \rangle = -\langle \partial_i r, d_{\partial_j r} \mathbf{m} \rangle \\ &= -d_{\partial_j r} \langle \partial_i r, \mathbf{m} \rangle + \langle d_{\partial_j r} \partial_i r, \mathbf{m} \rangle = \langle \partial_j \partial_i r, \mathbf{m} \rangle, \end{aligned}$$

és a legutolsó kifejezés már szimmetrikus az i és j indexben. ■

Tétel. Egy r paraméterezésben az M második alapmennyiséget, a g első alapmennyiséget, és a B Weingarten-leképezést a $\{\partial_1 r, \partial_2 r\}$ bázisban reprezentáló rendre $(m_{i,j})$, $(g_{i,j})$, és $(b_{i,j})$ mátrixokra

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} \\ g_{2,1} & g_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{2,1} \\ b_{1,2} & b_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Bizonyítás. Legyen $B(\partial_i r) = b_{i,1} \partial_1 r + b_{i,2} \partial_2 r$. Ekkor

$$-m_{j,i} = -M(\partial_j r, \partial_i r) = g\langle \partial_j r, B(\partial_i r) \rangle = g\langle \partial_j r, b_{i,1} \partial_1 r + b_{i,2} \partial_2 r \rangle = g_{j,1} b_{i,1} + g_{j,2} b_{i,2}$$

ahogy állítottuk. ■

Tétel. Az $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ érintővektor-mezőkre $d_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + M(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{m}$.

Bizonyítás. Mivel a $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ vektor a $d_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ vektor merőleges vetülete az érintősíkra, csak a felületi normálisra való vetületet kell kiszámolni:

$$\langle d_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{m} \rangle = d_{\mathbf{X}}\langle \mathbf{Y}, \mathbf{m} \rangle - \langle \mathbf{Y}, d_{\mathbf{X}}\mathbf{m} \rangle = M(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = M(\mathbf{X}, \mathbf{Y}).$$

■

Megfigyelés. Egy G felületi görbe κ_m normálgörbülete tehát $M(\dot{G}, \dot{G})$, ami eszerint nem függ a görbe egészétől, csak a görbe adott pontbeli érintőjétől.

Megjegyzésünknek megfelelően a κ_m normálgörbületre inentől mint az érintősík egységkörén meghatározott függvényre tekintünk, és az egységkör szögmértéke szerint paraméterezzük.

Euler-tétel. Legyen $\kappa_{\min}$ és $\kappa_{\max}$ az érintősík egységkörén értelmezett κ_m normálgörbület-függvény minimuma és maximuma. Ekkor a κ_m függvény

$$\kappa_m(\varphi) = \kappa_{\min} \cos^2 \varphi + \kappa_{\max} \sin^2 \varphi$$

alakú, ahol φ a $\kappa_{\min}$ értékhez tartozó iránytól mért szög.

Bizonyítás. Ha κ_m konstans, akkor bármely két merőleges irányt választhatunk $\kappa_{\min}$ és $\kappa_{\max}$ helyéül.

Ha κ_m nem konstans, akkor a $\kappa_{\min}$ helyéhez tartozó egységvektor legyen $\mathbf{t}_{\min}$, és legyen $\mathbf{t}_{\max}$ erre merőleges. Ekkor minden $\mathbf{t}$ egységvektor felírható a $\mathbf{t} = \mathbf{t}_{\min} \cos \varphi + \mathbf{t}_{\max} \sin \varphi$ alakban, ahol φ a $\mathbf{t}$ és a $\mathbf{t}_{\min}$ közti szög. Ezzel számolva

$$\kappa_m(\varphi) = M(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = \kappa_{\min} \cos^2 \varphi + \kappa_{\max} \sin^2 \varphi + 2M(\mathbf{t}_{\min}, \mathbf{t}_{\max}) \sin \varphi \cos \varphi,$$

ahol $\kappa_{\min} = M(\mathbf{t}_{\min}, \mathbf{t}_{\min})$ és $\kappa_{\max} = M(\mathbf{t}_{\max}, \mathbf{t}_{\max})$. Mivel $\varphi = 0$ a κ_m minimum helye, $\kappa'_m(0) = 0$, amiből $M(\mathbf{t}_{\min}, \mathbf{t}_{\max}) = 0$ következik, vagyis

$$\kappa_m(\varphi) = M(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = \kappa_{\min} \cos^2 \varphi + \kappa_{\max} \sin^2 \varphi.$$

Ennek maximuma $\kappa_{\max}$ éppen a $\mathbf{t}_{\max}$ helyen van, ami igazolja Euler tételét. ■

Jegyezzük meg, hogy a maximum és minimum helyéhez tartozó egységvektorok merőlegesek egymásra.

Definíció. A $\kappa_{\min}$ és $\kappa_{\max}$ görbületeket a felület *főgörbületeinek*, az ezekhez tartozó egységvektorokat *főgörbületi irányoknak* nevezzük.

Tétel. A $(\mathbf{t}_{\min}, \mathbf{t}_{\max})$ bázisban a Weingarten-leképezés mátrixa

$$\begin{pmatrix} -\kappa_{\min} & 0 \\ 0 & -\kappa_{\max} \end{pmatrix}.$$

Bizonyítás. Minthogy a $(\mathbf{t}_{\min}, \mathbf{t}_{\max})$ páros ortonormált bázist alkot, a második alaplennyeség erre vonatkozó mátrixa az egységmátrix. Eszerint a mátrixok között már kimutatott $\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{2,1} \\ b_{1,2} & b_{2,2} \end{pmatrix}$ képlet, és az Euler-tételben bizonyított

$$M(\mathbf{t}_{\min}, \mathbf{t}_{\min}) = \kappa_{\min}$$

$$M(\mathbf{t}_{\min}, \mathbf{t}_{\max}) = 0$$

$$M(\mathbf{t}_{\max}, \mathbf{t}_{\min}) = 0$$

$$M(\mathbf{t}_{\max}, \mathbf{t}_{\max}) = \kappa_{\max}$$

összefüggések igazolják az állítást. ■

Definíció. A Weingarten-leképezés $\kappa(P) = \det B_P = \kappa_{\min} \cdot \kappa_{\max}$ determinánsát *Gauss-féle szorzatgörbületnek* nevezzük. A Weingarten-leképezés $-\frac{1}{2}\text{Spur}B_P = (\kappa_{\min} + \kappa_{\max})/2$ nyomát *Minkowski-féle összeggörbületnek* hívjuk.

Figyeljük meg, hogy mindkét görbület invariáns az érintősík lineáris transzformációval szemben, és ezért a paraméterezéstől is független, hiszen egy átparaméterezés az érintősíkon lineáris transzformációt indukál. Ez azt jelenti, hogy a görbületek a felületre jellemző mennyiségek.

Felületek alaptétele. Az $r: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ és a $\hat{r}: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméterezésű $\mathcal{F}$ és $\hat{\mathcal{F}}$ felületekhez a $\phi = \hat{r} \circ r^{-1}$ leképezés akkor és csak akkor egy mozgás megszorítottja,

$$\begin{aligned} &\text{ha a } \{\partial_1 r, \partial_2 r\} \text{ és } \{\partial_1 \hat{r}, \partial_2 \hat{r}\} \text{ bázisokban a } g \text{ és } \hat{g} \text{ első, valamint} \\ &\text{az } M \text{ és } \hat{M} \text{ második alapmennyiségek mátrixai is egybeesnek.} \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy ϕ a Φ térbeli mozgás megszorítottja.

Ha Φ egy eltolás, akkor a felület érintői és normálisai sem változnak, ezért

$$\begin{aligned} g_{r(x,y)}(\partial_i r, \partial_j r) &= \langle \partial_i r(x, y), \partial_j r(x, y) \rangle = \langle \partial_i(\Phi(r(x, y))), \partial_j(\Phi(r(x, y))) \rangle \\ &= \hat{g}_{\Phi(r(x,y))}(\partial_i(\Phi(r)), \partial_j(\Phi(r))) = \hat{g}_{\hat{r}(x,y)}(\partial_i \hat{r}, \partial_j \hat{r}) \end{aligned}$$

továbbá

$$\begin{aligned} M_{r(x,y)}(\partial_i r, \partial_j r) &= \langle \partial_i r(x, y), B_{r(x,y)}(\partial_j r) \rangle = \langle \partial_i r(x, y), \partial_j(\mathbf{m}(r(x, y))) \rangle \\ &= \langle \partial_i(\Phi(r(x, y))), \partial_j(\hat{\mathbf{m}}(\Phi(r(x, y)))) \rangle = \langle \partial_i \hat{r}(x, y), \partial_j(\hat{\mathbf{m}}(\hat{r}(x, y))) \rangle \\ &= \hat{M}_{\hat{r}(x,y)}(\partial_i \hat{r}, \partial_j \hat{r}) \end{aligned}$$

Ha Φ lineáris, akkor pozitív determinánsú ortogonális (vagyis távolságtartó) transzformáció, így

$$\begin{aligned} g_{r(x,y)}(\partial_i r, \partial_j r) &= \langle \partial_i r(x, y), \partial_j r(x, y) \rangle \\ &= \langle \Phi(\partial_i r(x, y)), \Phi(\partial_j r(x, y)) \rangle = \langle \partial_i(\Phi(r(x, y))), \partial_j(\Phi(r(x, y))) \rangle \\ &= \hat{g}_{\Phi(r(x,y))}(\partial_i(\Phi(r)), \partial_j(\Phi(r))) = \hat{g}_{\hat{r}(x,y)}(\partial_i \hat{r}, \partial_j \hat{r}) \end{aligned}$$

továbbá

$$\begin{aligned} M_{r(x,y)}(\partial_i r, \partial_j r) &= \langle \partial_i r(x, y), \partial_j(\mathbf{m}(r(x, y))) \rangle = \langle \Phi(\partial_i r(x, y)), \Phi(\partial_j(\mathbf{m}(r(x, y)))) \rangle \\ &= \langle \partial_i(\Phi(r(x, y))), \partial_j(\Phi(\mathbf{m}(r(x, y)))) \rangle = \langle \partial_i \hat{r}(x, y), \partial_j(\hat{\mathbf{m}}(\Phi(r(x, y)))) \rangle \\ &= \hat{M}_{\hat{r}(x,y)}(\partial_i \hat{r}, \partial_j \hat{r}) \end{aligned}$$

ami igazolja az állítás „csak akkor” részét.

Most azt kell igazolnunk, hogy ϕ egy Φ térbeli mozgás megszorítottja, ha a (2.5.2) feltétel teljesül. Vegyük észre, hogy ez a feltétel a „csak akkor” állítás értelmében akkor is érvényben marad, ha az $\mathcal{F}$ felület helyett annak egy elmozgatottját vizsgáljuk.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $(0, 0) \in \mathcal{U}$. Legyen Ψ_0 egy olyan mozgás, melyre $\hat{r}(0, 0) = \Psi_0(r(0, 0))$ és $\hat{\mathbf{m}}(\hat{r}(0, 0)) = \Psi_0(\mathbf{m}(r(0, 0)))$. A feltétel szerint az $\hat{r}$ és a $\Psi \circ r$ paraméterezésű felületekre érvényes a (2.5.2) feltétel, ezért létezik egy olyan, az $\hat{r}(0, 0)$ ponton $\hat{\mathbf{m}}(\hat{r}(0, 0))$ irányban átmenő egyenes körüli Ψ_1 forgatás, melyre az $\hat{r}(0, 0) = \Psi_0(r(0, 0))$ pontban $\Psi_1(\partial_i(\Psi_0 \circ r)) = \partial_i \hat{r}$ ($i = 1, 2$).

Állítjuk, hogy ϕ a $\Phi = \Psi_1 \circ \Psi_0$ mozgás megszorítottja, vagyis $\hat{r} = \Phi \circ r$. Legyen $\check{r} = \Phi \circ r$. Világos, hogy $\hat{r}(0, 0) = \check{r}(0, 0)$, $\hat{\mathbf{m}}(\hat{r}(0, 0)) = \check{\mathbf{m}}(\check{r}(0, 0))$ és $\partial_i \hat{r} = \partial_i \check{r}$ ($i = 1, 2$). Továbbá, a már bizonyított „csak akkor” állítás értelmében

$$\begin{aligned} & \text{a } \{\partial_1 \check{r}, \partial_2 \check{r}\} \text{ és } \{\partial_1 \hat{r}, \partial_2 \hat{r}\} \text{ bázisokban a } \check{g} \text{ és } \hat{g} \text{ első, valamint} \\ & \text{az } \check{M} \text{ és } \hat{M} \text{ második alaplmenyiségek mátrixai is egybeesnek.} \end{aligned} \quad (*)$$

Legyenek a 3×3 -as $\check{V}(x, y)$ és $\hat{V}(x, y)$ mátrixok sorai rendre a $\partial_1 \check{r}, \partial_2 \check{r}, \check{\mathbf{m}}$ illetve $\partial_1 \hat{r}, \partial_2 \hat{r}, \hat{\mathbf{m}}$ vektorok.

Világos, hogy minden $i \in \{1, 2\}$ esetén

$$\langle \partial_i \check{r}, \check{\mathbf{m}} \rangle = 0 = \langle \partial_i \hat{r}, \hat{\mathbf{m}} \rangle \quad \text{és} \quad \langle \check{\mathbf{m}}, \check{\mathbf{m}} \rangle = 1 = \langle \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{m}} \rangle,$$

valamint $(*)$ miatt minden $(i, j) \in \{1, 2\} \times \{1, 2\}$ esetén

$$\langle \partial_i \check{r}, \partial_j \check{r} \rangle = \check{g}_{\check{r}(x, y)} \langle \partial_i \check{r}, \partial_j \check{r} \rangle = g_{i, j}(x, y) = \hat{g}_{\hat{r}(x, y)} \langle \partial_i \hat{r}, \partial_j \hat{r} \rangle = \langle \partial_i \hat{r}, \partial_j \hat{r} \rangle,$$

amelyekből következik, hogy az invertálható $G(x, y) = \begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} & 0 \\ g_{2,1} & g_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixra

$$\check{V}(x, y) \check{V}^T(x, y) = G(x, y) = \hat{V}(x, y) \hat{V}^T(x, y). \quad (\dagger)$$

A $(*)$ feltétel miatt a $\check{V}$ és $\hat{V}$ deriváltjait vizsgálva is azonos együtthatókhoz jutunk. Először is a Weingarten-leképezés

$$\partial_i \check{\mathbf{m}} = \check{b}_{i,1} \partial_1 \check{r} + \check{b}_{i,2} \partial_2 \check{r} \quad \text{és} \quad \partial_i \hat{\mathbf{m}} = \hat{b}_{i,1} \partial_1 \hat{r} + \hat{b}_{i,2} \partial_2 \hat{r}$$

formulában a $(\check{b}_{i,j})$ és $(\hat{b}_{i,j})$ mátrixok megegyeznek, mert kiszámíthatók a megfelelő első és második alaplmenyiségek mátrixaiból. Másodszor pedig az iránymenti deriválás

$$\begin{aligned} \partial_i \partial_j \check{r} &= \check{\Gamma}_{i,j}^1 \partial_1 \check{r} + \check{\Gamma}_{i,j}^2 \partial_2 \check{r} + \check{M}(\partial_i \check{r}, \partial_j \check{r}) \check{\mathbf{m}}, \\ \partial_i \partial_j \hat{r} &= \hat{\Gamma}_{i,j}^1 \partial_1 \hat{r} + \hat{\Gamma}_{i,j}^2 \partial_2 \hat{r} + \hat{M}(\partial_i \hat{r}, \partial_j \hat{r}) \hat{\mathbf{m}}. \end{aligned}$$

formuláiban is megegyeznek az együtthatók, hiszen a Christoffel-szimbólumok kiszámíthatók az első alapmennyiség mátrixából. Összességében tehát minden $i = 1, 2$ esetén létezik olyan 3×3 -as $Q_i(x, y)$ mátrixmező, hogy

$$\partial_i \check{V}(x, y) = Q_i(x, y) \check{V}(x, y) \quad \text{és} \quad \partial_i \hat{V}'(x, y) = Q_i(x, y) \hat{V}'(x, y). \quad (\ddagger)$$

Legyen $e: [0, 1] \ni t \mapsto (e_1(t), e_2(t)) \mathbb{R}^2$ tetszőleges olyan görbe, melyre $e(0) = (0, 0)$ és $e(1) = (x_0, y_0)$ és definiáljuk a $\check{E}(t) = \check{r}(e(t))$ és $\hat{E}(t) = \hat{r}(e(t))$ felületi görbéket.

Legyen $G(t) = G(e_1(t), e_2(t))$, $Q_i(t) = Q_i(e_1(t), e_2(t))$, $\check{V}(t) = \check{V}(e_1(t), e_2(t))$, és $\hat{V}(t) = \hat{V}(e_1(t), e_2(t))$.

Az $(\ddagger)$ első egyenlete alapján

$$\check{V}' = \partial_1 \check{V}(e_1, e_2) \dot{e}_1 + \partial_2 \check{V}(e_1, e_2) \dot{e}_2 = Q_1 \check{V} \dot{e}_1 + Q_2 \check{V} \dot{e}_2 = (Q_1 \dot{e}_1 + Q_2 \dot{e}_2) \check{V}.$$

A formulák egyszerűbb megjelenése értelmében bevezetjük a $Q'(t) = Q_1(t) \dot{e}_1(t) + Q_2(t) \dot{e}_2(t)$ függvényt. Ezekkel az $(\ddagger)$ első egyenletének deriváltja

$$\begin{aligned} G' &= \check{V}' \check{V}^T + \check{V} (\partial_1 \check{V}^T(e_1, e_2) \dot{e}_1 + \partial_2 \check{V}^T(e_1, e_2) \dot{e}_2) \\ &= Q' G + G(Q_1^T(e_1, e_2) \dot{e}_1 + Q_2^T(e_1, e_2) \dot{e}_2) = Q' G + G(Q')^T. \end{aligned}$$

Figyelembe véve, hogy ezek persze a $\hat{V}$ mátrixra is érvényesek, ezekkel és az egységmátrixra teljesülő $I = G(t)G^{-1}(t)$ egyenlet $(G^{-1})' = -G^{-1}G'G^{-1}$ deriváltjával számolva

$$\begin{aligned} (\check{V}^T G^{-1} \hat{V})' &= (\check{V}^T)' G^{-1} \hat{V}^T + \check{V}^T (G^{-1})' \hat{V} + \check{V} G^{-1} \hat{V}' \\ &= \check{V}^T (Q')^T G^{-1} \hat{V}^T - \check{V}^T G^{-1} G' G^{-1} \hat{V} + \check{V}^T G^{-1} Q' \hat{V} \\ &= \check{V}^T (Q')^T G^{-1} \hat{V}^T - \check{V}^T G^{-1} (Q' G + G(Q')^T) G^{-1} \hat{V} + \check{V}^T G^{-1} Q' \hat{V} \\ &= \check{V}^T (Q')^T G^{-1} \hat{V}^T - \check{V}^T G^{-1} Q' \hat{V} - \check{V}^T (Q')^T G^{-1} \hat{V} + \check{V}^T G^{-1} Q' \hat{V} \\ &= 0 \cdot I. \end{aligned}$$

Eszerint $\check{V}^T G^{-1} \hat{V}$ egy konstans mátrix, vagyis $(\ddagger)$ szerint egyenlő a

$$\check{V}^T(0)G^{-1}(0)\hat{V}(0) = \check{V}^T(0)(\check{V}^T)^{-1}(0)\check{V}^{-1}(0)\hat{V}(0) = \check{V}^{-1}(0)\hat{V}(0)$$

mátrixszal, amely az előzetes mozgatus miatt éppen az egységmátrix. Tehát $\check{V}^T(t)G^{-1}(t)\hat{V}(t) \equiv I$, amiből $(\ddagger)$ szerint $I = \check{V}^{-1}(t)\hat{V}(t)$, vagyis $\check{V}(t) \equiv \hat{V}(t)$ következik.

Mivel $\check{V}(t) \equiv \hat{V}(t)$, $\partial_i \check{r}(e(t)) = \partial_i \hat{r}(e(t))$ is következik, amiért az $\check{E}$ és $\hat{E}$ görbék érintőire

$$\dot{\check{E}}(t) = \dot{e}_1(t) \partial_1 \check{r}(e(t)) + \dot{e}_2(t) \partial_2 \check{r}(e(t)) = \dot{e}_1(t) \partial_1 \hat{r}(e(t)) + \dot{e}_2(t) \partial_2 \hat{r}(e(t)) = \dot{\hat{E}}(t)$$

teljesül, vagyis $\dot{\tilde{E}} \equiv \dot{\hat{E}}(t)$. Ezt integrálva és figyelembe véve, hogy az előzetes mozgás miatt $\dot{\tilde{E}}(0) = \dot{\hat{E}}(0)$, azt kapjuk, hogy a két görbe egybeesik.

Eszerint tetszőleges (x_0, y_0) paraméter esetén $\tilde{r}(x_0, y_0) = \hat{r}(x_0, y_0)$, vagyis a két felület egybeesik. Ezzel a tétel bizonyítása teljes. ■

Fontos felhívni a figyelmet, hogy tételünkéből nem következik, hogy bármely g és M függvényekhez létezne olyan felület, melyen g és M az első és második alapmenyiség. Ez így nem is igaz, de ha g és M teljesíti a Gauss- és Codazzi–Mainardi-egyenleteket, akkor már következik a megfelelő felület létezése.

2.6. Lie-zárójel

Definíció. A $[\cdot, \cdot]: \tilde{T}\mathcal{F} \times \tilde{T}\mathcal{F} \rightarrow \tilde{T}\mathcal{F}$ leképezést, ahol $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}$, Lie-zárójelnek hívjuk.

Tétel. A Lie-zárójel mindkét változójában lineáris, antiszimmetrikus leképezés, és ha $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ érintővektor-mezők és f skalármező, akkor

- (1) $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = d_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - d_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}$,
- (2) $[\mathbf{X}, f\mathbf{Y}] = (d_{\mathbf{X}}f)\mathbf{Y} + f[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$.

Bizonyítás. Az antiszimmetria és a linearitás a definíció alapján nyilvánvaló.

Az (1) formulát a

$$\left. \begin{aligned} d_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} &= \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + M(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{m}, \\ d_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} &= \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} + M(\mathbf{Y}, \mathbf{X})\mathbf{m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow d_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - d_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}$$

következtetés igazolja.

A (2) formula a

$$[\mathbf{X}, f\mathbf{Y}] = d_{\mathbf{X}}(f\mathbf{Y}) - d_{f\mathbf{Y}}\mathbf{X} = (d_{\mathbf{X}}f)\mathbf{Y} + fd_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - fd_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} = (d_{\mathbf{X}}f)\mathbf{Y} + f[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$$

számítás eredménye. ■

Tétel. Legyen $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^2 x^i \partial_{i,r}$ és $\mathbf{Y} = \sum_{j=1}^2 y^j \partial_{j,r}$ két érintővektor-mező bázisbontása. Ekkor:

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \sum_{i,j=1}^2 (x^i d_{\partial_{i,r}} y^j - y^j d_{\partial_{j,r}} x^i) \partial_{j,r}.$$

Bizonyítás. Előző tételünk (1) pontja miatt elegendő kifejtenuk két kovariáns deriváltat

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} &= \nabla_{\sum_{i=1}^2 x^i \partial_i r} \left(\sum_{j=1}^2 y^j \partial_j r \right) = \sum_{i,j=1}^2 (x^i \cdot d_{\partial_i r} y^j \partial_j r + x^i y^j \nabla_{\partial_i r} \partial_j r) \\
 &= \sum_{i,j=1}^2 \left(x^i \cdot d_{\partial_i r} y^j \partial_j r + x^i y^j \sum_{k=1}^2 \Gamma_{i,j}^k \partial_k r \right) \\
 &= \sum_{i,j=1}^2 x^i \cdot d_{\partial_i r} y^j \partial_j r + \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{i,j=1}^2 x^i y^j \Gamma_{i,j}^k \right) \partial_k r \\
 \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} &= \sum_{i,j=1}^2 y^j \cdot d_{\partial_j r} x^i \partial_i r + \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{i,j=1}^2 y^j x^i \Gamma_{j,i}^k \right) \partial_k r.
 \end{aligned}$$

Ezek különbsége a Christoffel-szimbólumok szimmetriája miatt adja az állítást. ■

Később sokszor fogjuk használni e tétel azon triviális következményét, hogy $[\partial_i r, \partial_j r] = 0$, amit persze közvetlenül a definícióból is könnyű bizonyítani.

Vezessük be az iránymenti deriválásokra is a Lie-zárójelet a $[d_1, d_2] = d_1 d_2 - d_2 d_1$ formulával.

Tétel. Bármely $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ érintővektor-mező és f skalármező esetén

$$d_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}f = d_{\mathbf{X}}d_{\mathbf{Y}}f - d_{\mathbf{Y}}d_{\mathbf{X}}f = [d_{\mathbf{X}}, d_{\mathbf{Y}}]f.$$

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^2 x^i \partial_i r$, $\mathbf{Y} = \sum_{j=1}^2 y^j \partial_j r$. Ekkor az előző tétel formulája szerint

$$d_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}f = \sum_{i,j=1}^2 (x^i d_{\partial_i r} y^j - y^j d_{\partial_j r} x^i) d_{\partial_j r} f.$$

Közvetlen számolással viszont azt nyerjük, hogy

$$d_{\mathbf{Y}}d_{\mathbf{X}}f = d_{\mathbf{Y}} \left(\sum_{i=1}^2 x^i d_{\partial_i r} f \right) = \sum_{j,i=1}^2 (y^j d_{\partial_j r} x^i d_{\partial_i r} f + y^j x^i d_{\partial_j r} d_{\partial_i r} f),$$

amiből kivonva az ugyanígy kiszámolt $d_{\mathbf{X}}d_{\mathbf{Y}}f$ formulát, és felhasználva, hogy $d_{\partial_i r} d_{\partial_j r} f = \partial_i \partial_j (f \circ r) = \partial_j \partial_i (f \circ r) = d_{\partial_j r} d_{\partial_i r} f$, éppen a legelső formula jobb oldala adódik. Ezzel az állítást beláttuk. ■

Tételünk következtében $d_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}Z = d_{\mathbf{X}}d_{\mathbf{Y}}Z - d_{\mathbf{Y}}d_{\mathbf{X}}Z$, ahol Z vektormező.

Jacobi-azonosság. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

Bizonyítás. A definícióból és előző tételünk alapján

$$\begin{aligned} [X, [Y, Z]] &= d_X[Y, Z] - d_{[Y, Z]}X = d_X d_Y Z - d_X d_Z Y - d_{[Y, Z]}X \\ &= d_X d_Y Z - d_X d_Z Y - d_Y d_Z X + d_Z d_Y X. \end{aligned}$$

Hasonlóan

$$\begin{aligned} [Z, [X, Y]] &= d_Z d_X Y - d_Z d_Y X - d_X d_Y Z + d_Y d_X Z, \\ [Y, [Z, X]] &= d_Y d_Z X - d_Y d_X Z - d_Z d_X Y + d_X d_Z Y. \end{aligned}$$

A három végeredményt összeadva az állítás következik. ■

Tétel. Ha $\varphi: \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ diffeomorfizmus, f skalármező az $\mathcal{F}_2$ felületen, és X, Y érintővektor-mezők az $\mathcal{F}_1$ felületen, akkor

$$d_{\varphi_* X} f = d_X(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}, \quad \text{és} \quad \varphi_*[X, Y] = [\varphi_* X, \varphi_* Y].$$

Bizonyítás. Legyen $Q = \varphi(P)$. Ekkor

$$\begin{aligned} d_{\varphi_* X} f(Q) &= d_{\varphi_* X(Q)} f \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(G(t)) - f(G(0))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f \circ \varphi(\varphi^{-1} \circ G(t)) - f \circ \varphi(\varphi^{-1} \circ G(0))}{t} \\ &= d_{X(P)}(f \circ \varphi) = d_X(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}(Q), \end{aligned}$$

ahol G olyan görbe, melyre $G(0) = Q$ és $\dot{G}(0) = \varphi_* X(Q)$ az $\mathcal{F}_2$ felületen. A másik azonosság adódik a következő számolásból

$$\begin{aligned} d_{\varphi_*[X, Y]} f &= d_{[X, Y]}(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = (d_X d_Y - d_Y d_X)(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} \\ &= (d_X d_Y(f \circ \varphi)) \circ \varphi^{-1} - (d_Y d_X(f \circ \varphi)) \circ \varphi^{-1} \\ &= (d_X(d_Y(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} \circ \varphi)) \circ \varphi^{-1} - (d_Y(d_X(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} \circ \varphi)) \circ \varphi^{-1} \\ &= d_{\varphi_* X} d_{\varphi_* Y} f - d_{\varphi_* Y} d_{\varphi_* X} f = d_{[\varphi_* X, \varphi_* Y]} f \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Legyen X érintővektor-mező. A Picard–Lindelöf-tétel szerint minden $P \in \mathcal{F}$ pont elegendően kicsiny környezetében pontosan egy olyan G görbe létezik — még a paraméterezése is meghatározott! —, melyre $G(0) = P$, $\dot{G}(0) = X(P)$, és minden lehetséges t paraméterre $\dot{G}(t) = X(G(t))$.

Definíció. A $\dot{G}(t) = X(G(t))$ egyenletet teljesítő görbéket az X vektormező *integrálgörbéinek* nevezzük.

Az X érintővektor-mező *folymának* nevezzük azt a $\xi: [-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ leképezést, melyre $((t, P) \mapsto G(t))$, ahol az X vektormező G integrálgörbéjére $P = G(0)$, és $\varepsilon > 0$ elég kicsi ahhoz, hogy $\xi(t, \cdot)$ diffeomorfizmus legyen.

Általában a folyam első paraméterét alsó indexben szokás jelezni, és mi is ezt a konvenciót fogjuk követni. Ezt az indexparamétert gyakran időparaméternek is hívjuk a folyam szemléletes jelentését követve.

A fenti definíció elfogadásához be kell látnunk, hogy létezik a megkövetelt $\varepsilon > 0$ szám. A Pickard–Lindelöf-tétel szerint a megoldások a peremértékektől folytonosan függenek, ezért az egyes pontokhoz talált görbék $\epsilon(P)$ hossza is folytonosan függ a P választásától. Ha az $\mathcal{F}$ felület kompakt, akkor ez máris adja a szükséges $\varepsilon = \min \epsilon$ értéket. Ha a felület nem kompakt, akkor ilyen ε nem feltétlen létezik, de ilyenkor mindig csak a felület egy kisebb, kompakt részén fogunk dolgozni. Az, hogy a megfelelő intervallumban a $\mathcal{F}$ felület ξ_t transzformációi diffeomorfizmusok, azt éppen az inverzfüggvény-tétel mutatja, hiszen ξ_0 nem más, mint az identikus leképezés, így egy kellően kicsiny $[-\varepsilon, \varepsilon]$ környezetben ξ_t is diffeomorfizmus. Lényegében ugyanezt, de pontosabb bizonyítást mutat a [11, 13. oldal].

Világos, hogy egy folyam esetén $\xi_0 = id$, $\xi_{t+s} = \xi_t \circ \xi_s$, és $\xi_t^{-1} = \xi_{-t}$. Az ilyen tulajdonságú elemek egy halmazát lokális csoportnak is szokás nevezni. Azért nem csoportról beszélünk, mert a művelet esetleg kivezet a halmazból.

Tétel. Legyen ξ az $\mathbf{X} \in \tilde{T}\mathcal{F}$ folyama, $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ pedig egy felületek közötti diffeomorfizmus. Ekkor a $\varphi_*\mathbf{X}$ folyama $\varphi \circ \xi_t \circ \varphi^{-1}$.

Bizonyítás. A $\mathcal{G}$ minden f skalármezőjére és P pontjára

$$d_{\varphi_*\mathbf{X}}f(P) = d_{\mathbf{Z}}(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}(P) = d_{\mathbf{Z}(\varphi^{-1}(P))}(f \circ \varphi) = \left. \frac{d(f \circ \varphi \circ \xi_t(\varphi^{-1}(P)))}{dt} \right|_{t=0},$$

ami igazolja az első állítást. Ugyanakkor eszerint $\xi_{s*}\mathbf{X}$ folyama $\xi_s \circ \xi_t \circ \xi_{-s} = \xi_{s+t-s} = \xi_t$, ami a második állítást igazolja. ■

A folyam fogalma lehetővé teszi a Lie-zárójel geometriai tartalmának megfejtését, ami arra is rámutat, hogy miért szokás a Lie-zárójelet *Lie-deriválnak* is nevezni.

Tétel. Legyen ξ_t az $\mathbf{X}$ érintővektor-mező folyama az $\mathcal{F}$ felületen. Ekkor

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Y} - \xi_{t*}\mathbf{Y}}{t},$$

ahol a $*$ az indukált leképezésre utal.

Bizonyítás. Mivel két vektor pontosan akkor egyenlő, ha a megfelelő iránymenti deriváltak egybe esnek, a tétel egyenlősége helyett elég minden f skalármezőre igazolni, hogy

$$d_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d_{\mathbf{Y}}f - d_{\xi_{t*}\mathbf{Y}}f}{t}.$$

Ennek jobboldalát a minden f skalármezőre érvényes $d_{\xi_{t*}\mathbf{Y}}f = d_{\mathbf{Y}}(f \circ \xi_t) \circ \xi_t^{-1}$, kifejezéssel úgy alakítjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d_{\mathbf{Y}}f - d_{\mathbf{Y}}(f \circ \xi_t) \circ \xi_t^{-1}}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(d_{\mathbf{Y}}f \circ \xi_t - d_{\mathbf{Y}}(f \circ \xi_t)) \circ \xi_t^{-1}}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(d_{\mathbf{Y}}f \circ \xi_t - d_{\mathbf{Y}}f \circ \xi_0 + d_{\mathbf{Y}}(f \circ \xi_0) - d_{\mathbf{Y}}(f \circ \xi_t)) \circ \xi_t^{-1}}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{d_{\mathbf{Y}}f \circ \xi_t - d_{\mathbf{Y}}f \circ \xi_0}{t} \circ \xi_t^{-1} \right) - \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{d_{\mathbf{Y}}(f \circ \xi_t) - d_{\mathbf{Y}}(f \circ \xi_0)}{t} \circ \xi_t^{-1} \right) \\
 &= d_{\mathbf{X}}d_{\mathbf{Y}}f - d_{\mathbf{Y}}d_{\mathbf{X}}f
 \end{aligned}$$

■

E tétel értelmében a Lie-zárójel belsőgeometriai mennyiség, hiszen a folyamat a vektormező alapján könnyű megkonstruálni „belülről” is.

Tétel. Az $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \tilde{T}\mathcal{F}$ érintővektor-mezők ξ és ψ folyamaira akkor és csak akkor teljesül $\xi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \xi_t$ minden lehetséges s, t esetén, ha $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = 0$.

Bizonyítás. Ha $\xi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \xi_t$ minden lehetséges t és s esetén, akkor $\psi_{s*}\mathbf{X} = \mathbf{X}$, amiből viszont előző tételünk szerint $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = 0$ következik.

Ha $0 = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$, akkor

$$\begin{aligned}
 0 &= \xi_{s*}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = [\xi_{s*}\mathbf{X}, \xi_{s*}\mathbf{Y}] = [\mathbf{X}, \xi_{s*}\mathbf{Y}] \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\xi_{s*}\mathbf{Y} - \xi_{t*}\xi_{s*}\mathbf{Y}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\xi_{s*}\mathbf{Y} - \xi_{(s+t)*}\mathbf{Y}}{t} = \frac{d}{ds}\xi_{s*}\mathbf{Y},
 \end{aligned}$$

vagyis $\xi_{s*}\mathbf{Y}$ egy s -től független vektormező, amely $s = 0$ esetben éppen $\mathbf{Y}$. Eszerint $\xi_{s*}\mathbf{Y} \equiv \mathbf{Y}$, amiért $\xi_s \circ \psi_t \circ \xi_s^{-1} = \psi_t$, ami igazolja az állítást. ■

Tételünk szerint ha az $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ vektormezők Lie-zárójelt eltűnik az $\mathcal{F}$ felület egy O pontjának valamely $\mathcal{U}$ környezetében, akkor az $\mathcal{U}$ környezeten bevezetve az $r: \mathbb{R}^2 \ni (s, t) \mapsto \xi_t \circ \psi_s(O) \in \mathcal{F}$ paraméterezést, a paramétervonalakból összeálló „téglalap” szemben lévő oldalai „egyformák” lesznek, mert $\xi_t \circ \psi_s(O) = \psi_s \circ \xi_t(O)$. Ennek még jelentősége lesz a következő szakaszban.

2.7. A Riemann-görbület

Definíció. Riemann-görbületnek nevezzük az $\mathcal{F}$ felület minden P pontjában az

$$R(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{w} := M(\mathbf{u}, \mathbf{w})B(\mathbf{v}) - M(\mathbf{w}, \mathbf{v})B(\mathbf{u})$$

formulával definiált $R: T_P\mathcal{F} \times T_P\mathcal{F} \times T_P\mathcal{F} \rightarrow T_P\mathcal{F}$ leképezést.

Bianchi-azonosságok. Az u , v , w érintővektorokra

$$R(u, v)w = -R(v, u)w, \quad \text{és} \quad R(u, v)w + R(v, w)u + R(w, u)v = 0.$$

Ha y is érintővektor és $\tilde{R}(u, v, w, y) := \langle R(u, v)w, y \rangle$, akkor

$$\tilde{R}(u, v, w, y) = -\tilde{R}(u, v, y, w), \quad \text{és} \quad \tilde{R}(u, v, w, y) = \tilde{R}(w, y, u, v)$$

Bizonyítás. Az első formula a definíció alapján azonnal világos. A másodikat a definíció és a második alaplennnyiség szimmetriája igazolja.

A harmadik és negyedik a definícióból azonnal következik. ■

A most bebizonyított második képletet *Jacobi-azonosságnak* is nevezik.

Jelölés. X , Y és Z érintővektor-mezőkre

$$(\nabla_X M)(Y, Z) \stackrel{\text{def}}{=} d_X M(Y, Z) - M(\nabla_X Y, Z) - M(Y, \nabla_X Z).$$

Érdemes észrevenni, hogy a $(\nabla_X B)(Z) = \nabla_X B(Z) - B(\nabla_X Z)$ jelöléssel $(\nabla_X M)(Y, Z) = -\langle Y, (\nabla_X B)(Z) \rangle$.

Tétel. Ha X , Y és Z érintővektor-mezők, akkor

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

amit Gauss-egyenletnek nevezünk, és

$$(\nabla_X M)(Y, Z) = (\nabla_Y M)(X, Z)$$

amit Codazzi–Mainardi-egyenletnek nevezünk.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $d_X d_Y Z - d_Y d_X Z - d_{[X, Y]} Z = 0$, valamint

$$\begin{aligned} d_Y Z &= \nabla_Y Z + M(Y, Z)m, \\ d_X d_Y Z &= \nabla_X \nabla_Y Z + M(X, \nabla_Y Z)m + m d_X M(Y, Z) + M(Y, Z)B(X), \\ d_{[X, Y]} Z &= \nabla_{[X, Y]} Z + M([X, Y], Z)m, \end{aligned}$$

ahol m a felületi normális. Összevetve ezeket adódik, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_X \nabla_Y Z + M(X, \nabla_Y Z)m + m d_X M(Y, Z) + M(Y, Z)B(X) - \\ &\quad - \nabla_Y \nabla_X Z - M(Y, \nabla_X Z)m - m d_Y M(X, Z) - M(X, Z)B(Y) - \\ &\quad - \nabla_{[X, Y]} Z - M([X, Y], Z)m. \end{aligned}$$

Mivel m merőleges az érintősíkra, így együtthatója 0, ami éppen a Codazzi–Mainardi-egyenletet igazolja. Az érintősíkban lévő vektorok összege is 0, ami viszont a Gauss-egyenletet bizonyítja. ■

A Gauss-egyenlet jelentősége az, hogy a Riemann-görbületet a Weingarten-leképezés közvetlen ismerete nélkül képes előállítani, és mivel a kovariáns deriválás belsőgeometriai mennyiség, igazolja, hogy a Riemann-görbület belsőgeometriai mennyiség.

A Gauss által elnevezett következő tétel azt fejezi ki, hogy a Gauss-féle szorzatgörbület belsőgeometriai mennyiség.

Theorema Egregium. *Ha $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ a $T_P\mathcal{F}$ érintősíkj egy ortonormált bázisa, akkor $\kappa(P) = -\tilde{R}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$.*

Bizonyítás. A definíciók alapján

$$\begin{aligned} -\tilde{R}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \langle R(\mathbf{w}, \mathbf{v})\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle M(\mathbf{w}, \mathbf{v})B(\mathbf{v}) - M(\mathbf{v}, \mathbf{v})B(\mathbf{w}), \mathbf{w} \rangle \\ &= -M(\mathbf{w}, \mathbf{v})M(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + M(\mathbf{v}, \mathbf{v})M(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \det B_P = \kappa(P), \end{aligned}$$

ahogy állítottuk. ■

A következő tétel részletesebb képet mutat a Riemann-görbület és a szorzatgörbület kapcsolatáról. Ebben a $(\partial_1 r, \partial_2 r, \mathbf{m})$ infinitezimális felszínelem is szerepel.

Tétel. *Ha $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ a $T_P\mathcal{F}$ érintősíkj egy ortonormált bázisa, akkor*

$$R(\partial_1 r, \partial_2 r)\mathbf{w} = \kappa(P)(\partial_1 r, \partial_2 r, \mathbf{m})\mathbf{v},$$

ahol $\mathbf{m} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ a felület normálisa.

Bizonyítás. Legyen $\partial_1 r = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$ és $\partial_2 r = c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$. Ekkor

$$\begin{aligned} R(\partial_1 r, \partial_2 r)\mathbf{w} &= M(\partial_1 r, \mathbf{w})B(\partial_2 r) - M(\partial_2 r, \mathbf{w})B(\partial_1 r) = (ad - bc)R(\mathbf{v}, \mathbf{w})\mathbf{w} \\ &= \langle \partial_1 r \times \partial_2 r, \mathbf{m} \rangle (\tilde{R}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{v})\mathbf{v} + \tilde{R}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w})\mathbf{w}) \\ &= (\partial_1 r, \partial_2 r, \mathbf{m})\kappa(P)\mathbf{v}, \end{aligned}$$

ami éppen az állításunk. ■

Most a Riemann-görbület geometriai jelentését mutatjuk meg. A tételben szereplő paraméter-téglalap az előző szakasz utolsó eredménye miatt záródik.

Tétel. *Legyen $\tau_P^{s,t,s,t}: T_P\mathcal{F} \rightarrow T_P\mathcal{F}$ az a transzformáció, melynek $\tau_P^{s,t,s,t}\mathbf{w}$ eredményét úgy kapjuk, hogy az $s \times t$ „oldalhosszúságú” paramétervonal-téglalap élein a $\mathbf{w}$ vektort párhuzamosan körbetoljuk $\partial_1 \mathbf{r}$ irányába kezdve. Ekkor*

$$-R(\partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{r})\mathbf{w} = \lim_{s \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau_P^{s,t,s,t}(\mathbf{w}) - \mathbf{w}}{s \cdot t} = \lim_{t \rightarrow 0} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tau_P^{s,t,s,t}(\mathbf{w}) - \mathbf{w}}{s \cdot t}.$$

Bizonyítás. Terjesszük ki a $\mathbf{w}$ vektort egy $\mathbf{W}$ érintővektor-mezővé oly' módon, hogy előbb a $\partial_1 \mathbf{r}$ irányú paramétervonalon legyen párhuzamos, aztán az annak minden pontján áthaladó, a $\partial_2 \mathbf{r}$ irányhoz tartozó paramétervonalakon legyen párhuzamos. Tegyük fel, hogy a paraméterezésben $P = r(0, 0)$, és az első paraméter s , a második t . Ekkor a Gauss-egyenlet szerint

$$\begin{aligned} R(\partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{r})\mathbf{w} &= R(\mathbf{U}, \mathbf{V})\mathbf{W} = \nabla_{\partial_1 \mathbf{r}} \nabla_{\partial_2 \mathbf{r}} \mathbf{W} - \nabla_{\partial_2 \mathbf{r}} \nabla_{\partial_1 \mathbf{r}} \mathbf{W} - \nabla_{[\partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{r}]} \mathbf{W} \\ &= -\nabla_{\partial_2 \mathbf{r}} \nabla_{\partial_1 \mathbf{r}} \mathbf{W}, \end{aligned}$$

mivel $\nabla_{\partial_2 \mathbf{r}} \mathbf{W} \equiv 0$, hiszen $\mathbf{W}$ párhuzamos minden $\partial_1 \mathbf{r}$ irányú paramétervonalon, továbbá $[\partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{r}] = 0$, mert paramétervonalak érintőinek Lie-zárójele eltűnik.

Vezessük be a $\tau_{s,t}^{s+\Delta s, t+\Delta t}$ jelölést arra a párhuzamos eltolásra, mely az $r(s + \Delta s, t + \Delta t)$ pontból az $r(s, t)$ pontba mindig az éppen nem nulla Δs vagy Δt paraméterhez tartozó paramétervonal mentén tolja el párhuzamosan az adott vektort. Felhasználva a kovariáns deriválás párhuzamos eltolásból való előállításáról szóló formulát, azt nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} -R(\partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{r})\mathbf{w} &= \nabla_{\mathbf{V}} \left(\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tau_{0,t}^{s,t} \mathbf{W} - \mathbf{W}}{s} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau_{0,0}^{0,t} \left(\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tau_{0,t}^{s,t} \mathbf{W} - \mathbf{W}}{s} \right) - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tau_{0,0}^{s,0} \mathbf{W} - \mathbf{W}}{s}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tau_{0,0}^{0,t} \tau_{0,t}^{s,t} \mathbf{W} - \tau_{0,0}^{0,t} \mathbf{W}}{s} - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tau_{0,0}^{s,0} \mathbf{W} - \mathbf{W}}{s}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tau_{0,0}^{0,t} \tau_{0,t}^{s,t} \mathbf{W} - \tau_{0,0}^{0,t} \mathbf{W} - \tau_{0,0}^{s,0} \mathbf{W} + \mathbf{W}}{st} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tau_{0,0}^{0,t} \tau_{0,t}^{s,t} \tau_{s,0}^{s,0} \tau_{s,0}^{0,0} \mathbf{W} - \mathbf{W}}{st}, \end{aligned}$$

ahol kihasználtuk, hogy a párhuzamos eltolás lineáris művelet, és hogy a $\mathbf{W}$ vektormező invariáns a $\tau_{s,0}^{0,0}$ és a $\tau_{s,t}^{s,0}$ típusú párhuzamos eltolásokkal szemben. Ha $\mathbf{w}$ kiterjesztését előbb a $\partial_2 \mathbf{r}$, aztán az $\partial_1 \mathbf{r}$ irányú paramétervonalak mentén végezzük el, akkor ugyancsak a fenti formulát kapjuk eredményül, de a határérték-operátorokat fordított sorrendben kapjuk, ami végül igazolja az állítást. ■

Aszimptotikus egyenlőség formájában leírva

$$-stR(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{w} \sim \tau_P^{s,t,s,t}(\mathbf{w}) - \mathbf{w},$$

ahol $s \rightarrow 0$, és $t \rightarrow 0$. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy a Riemann-görbület a „végtelenül kicsi”, vagyis infinitezimális paraméter-téglalap körüli elfordulást méri.

2.8. Integrálás felületen, Stokes-tétel

Definíció. Egy felület $\mathcal{D}$ részhalmazát *elemi megengedett tartománynak* nevezzük, ha annak $\partial\mathcal{D}$ határa szakaszonként folytonosan differenciálható zárt, önmagát nem metsző görbe és a tartományt egy koordináta-környezet lefedi.

Az elemi megengedett $\mathcal{D}$ tartomány *felszínmértékén* a

$$\mu(\mathcal{D}) = \int_D |\partial_1 r(x, y) \times \partial_2 r(x, y)| dx dy$$

integrált értjük, ahol $D = r^{-1}(\mathcal{D})$ a $\mathcal{D}$ ösképe az r paraméterezés mellett.

Egy felület egyszeresen összefüggő $\mathcal{D}$ részhalmazát *megengedett tartománynak* nevezzük, ha annak $\partial\mathcal{D}$ határa szakaszonként folytonosan differenciálható zárt, önmagát nem metsző görbe. Ennek felszínmértékét diszjunkt elemi megengedett tartományokra való bontással határozzuk meg.

A felszínmértéknek ez a definíciója független a paraméterezéstől, hiszen ha $(t, s) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)) = \varphi(x, y)$ egy átparaméterezés, és $p = r \circ \varphi$, akkor

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{D}) &= \int_{p^{-1}(\mathcal{D})} |\partial_1 p(x, y) \times \partial_2 p(x, y)| dx dy \\ &= \int_{p^{-1}(\mathcal{D})} |(\dot{r}(\varphi(x, y))\partial_1 \varphi(x, y)) \times (\dot{r}(\varphi(x, y))\partial_2 \varphi(x, y))| dx dy \\ &= \int_{\varphi^{-1}(r^{-1}(\mathcal{D}))} |(\partial_1 r(\varphi)\partial_1 \varphi_1 + \partial_2 r(\varphi)\partial_1 \varphi_2)(\partial_1 r(\varphi)\partial_2 \varphi_1 + \partial_2 r(\varphi)\partial_2 \varphi_2)| dx dy \\ &= \int_{\varphi^{-1}(r^{-1}(\mathcal{D}))} |\partial_1 r(\varphi) \times \partial_2 r(\varphi)| \cdot |\partial_1 \varphi_1 \partial_2 \varphi_2 - \partial_2 \varphi_1 \partial_1 \varphi_2| dx dy \\ &= \int_{\varphi^{-1}(r^{-1}(\mathcal{D}))} |\partial_1 r(\varphi) \times \partial_2 r(\varphi)| \cdot |\det \dot{\varphi}| dx dy \\ &= \int_{r^{-1}(\mathcal{D})} |\partial_1 r \times \partial_2 r| \cdot |\det \dot{\varphi}(\bar{\varphi})| \cdot |\det \dot{\varphi}| dt ds \\ &= \int_{r^{-1}(\mathcal{D})} |\partial_1 r(t, s) \times \partial_2 r(t, s)| dt ds, \end{aligned}$$

ahol $\bar{\varphi} = \varphi^{-1}$ a φ inverze.

Sík esetén ez a felszínmérték éppen a szokásos területmértékkel, hiszen az $r: (x, y) \mapsto (x, y, 0)$ paraméterezésre

$$|\partial_1 r(x, y) \times \partial_2 r(x, y)| = |(1, 0, 0) \times (0, 1, 0)| = |(0, 0, 1)| = 1.$$

Eszerint a felszínmérték nem függ a felbontástól sem, hiszen a síkon sem függ.

Definíció. Az f skalármező $\mathcal{D}$ elemi megengedett tartományon vett *integrálján* az

$$\int_{\mathcal{D}} f dF := \int_{\mathcal{D}} f(r(x, y)) \cdot |\partial_1 r(x, y) \times \partial_2 r(x, y)| dx dy$$

felszínmérték szerinti integrált értjük, ahol $\mathcal{D} = r(D)$.

Egy megengedett $\mathcal{D}$ tartományon az integrált diszjunkt elemi megengedett tartományokra való bontással határozzuk meg.

Jegyezzük meg, hogy némileg formálisan, de annál szemléletesebben, azt írhatjuk, hogy $dF = |\partial_1 r(x, y) \times \partial_2 r(x, y)| dx dy$, ahol dF a felszínmérték sűrűsége.

Green-formula. Ha f_1 és f_2 skalármező a síkon, és $\mathcal{D}$ megengedett tartomány, melynek határa $\partial\mathcal{D}$, akkor

$$\int_{\mathcal{D}} (\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2) dF = \oint_{\partial\mathcal{D}} (-f_2 dx + f_1 dy),$$

ahol $\partial\mathcal{D}$ pozitív körüljárású.

A bizonyítás előtt érdemes felhívni a figyelmet, hogy az $\oint_{\partial\mathcal{D}} f_1 dx$ jelentése nem más, mint az $f_1 \dot{g}_1$ függvény $\partial\mathcal{D}$ görbe mentén való integrálása, vagyis $\int_0^1 f_1(g_1(t), g_2(t)) \dot{g}_1(t) dt$, ahol g a $\partial\mathcal{D}$ görbe paraméterezése a $[0, 1]$ intervallumon.

Bizonyítás. Elég belátnunk, hogy egy $\mathcal{D}$ megengedett tartományon bármely f skalármezőre

$$\int_{\mathcal{D}} \partial_1 f dx dy = \oint_{\partial\mathcal{D}} f dy, \quad \text{és} \quad \int_{\mathcal{D}} \partial_2 f dx dy = - \oint_{\partial\mathcal{D}} f dx.$$

Ezeket is elég olyan $\mathcal{D}$ tartományokra bizonyítani, melyek határa függvények grafikonja, hiszen $\mathcal{D}$ ilyenekre mindig felbontható.

Legyen tehát $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b \text{ és } g(y) \leq x \leq h(y)\}$. Ekkor a Fubini-tétel felhasználásával

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} \partial_1 f(x, y) dx dy &= \int_a^b \int_{g(y)}^{h(y)} \partial_1 f(x, y) dx dy = \int_a^b (f(h(y), y) - f(g(y), y)) dy \\ &= \oint_{\partial\mathcal{D}} f dy, \end{aligned}$$

hiszen az integrandusban $(h(y), y)$ és $(g(y), y)$ az óra járásával ellentétes, illetve megegyező irányban fut végig a $\partial\mathcal{D}$ határoló görbén, amint y végigfut az a és b között.

A másik összefüggés ugyanígy igazolható. Legyen most $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ és } g(x) \leq y \leq h(x)\}$. Ekkor szintén Fubini tétele alapján

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} \partial_2 f(x, y) dx dy &= \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \partial_2 f(x, y) dy dx = \int_a^b (f(x, h(x)) - f(x, g(x))) dx \\ &= - \oint_{\partial \mathcal{D}} f dx, \end{aligned}$$

mivel ezúttal az integranduszban szereplő $(x, h(x))$ és $(x, g(x))$ az óra járásával megegyező, illetve ellentétes irányban fut végig a $\partial \mathcal{D}$ határoló görbén, amint x végigfut az a és b között. ■

A Green-formula tulajdonképpen a Newton–Leibnitz-formula általánosítása a sík tartományaira. A most következő Stokes-tétel ezt általánosítja tovább felületek tartományaira.

Definíció. Az $\mathbf{X} \in \tilde{T}\mathcal{F}$ érintővektor-mező $\operatorname{div} \mathbf{X}$ *divergenciájának* nevezzük az $\hat{\mathbf{X}}: \tilde{T}\mathcal{F} \rightarrow \tilde{T}\mathcal{F}$ lineáris leképezés nyomát, ahol $\hat{\mathbf{X}}: \mathbf{u} \mapsto \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{X}$.

Vagyis $\mathbf{X}$ divergenciájára $\operatorname{div} \mathbf{X}(P) = \operatorname{Spur} \hat{\mathbf{X}}(P)$. Fontos megjegyezni, hogy a síkbeli $\mathbf{X} = (x^1, x^2)$ vektormezőre $\operatorname{div} \mathbf{X} = \partial_1 x^1 + \partial_2 x^2$, hiszen

$$\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} = d_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} = y^1 \partial_1 \mathbf{X} + y^2 \partial_2 \mathbf{X} = (y^1, y^2) \begin{pmatrix} \partial_1 x^1 & \partial_1 x^2 \\ \partial_2 x^1 & \partial_2 x^2 \end{pmatrix}.$$

Stokes-tétel. Legyen $\mathcal{D}$ az $\mathcal{F}$ felületen megengedett tartomány, és legyen a $\partial \mathcal{D}$ határoló görbe mentén $\mathbf{n} = \mathbf{t} \times \mathbf{m}$, ahol $\mathbf{m} = \partial_1 r \times \partial_2 r / |\partial_1 r \times \partial_2 r|$ a felületi normális, és $\mathbf{t}$ a $\partial \mathcal{D}$ érintője. Ekkor

$$\int_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \mathbf{X} dF = \oint_{\partial \mathcal{D}} \langle \mathbf{X}, \mathbf{n} \rangle ds$$

ahol ds az ívhossz szerinti integrálásra utal.

Bizonyítás. Felbontás után feltehető, hogy $\mathcal{D}$ benne van egy $r(x, y)$ koordináta-környezetben. Legyen $f_i = (\mathbf{X}, \partial_i r, \mathbf{m})$ skalármező az $\mathcal{F}$ felületen, ahol $i = 1, 2$. Ekkor

$$\begin{aligned} d_{\partial_2 r} f_1 &= (\nabla_{\partial_2 r} \mathbf{X}, \partial_1 r, \mathbf{m}) + (\mathbf{X}, \nabla_{\partial_2 r} \partial_1 r, \mathbf{m}), \\ d_{\partial_1 r} f_2 &= (\nabla_{\partial_1 r} \mathbf{X}, \partial_2 r, \mathbf{m}) + (\mathbf{X}, \nabla_{\partial_1 r} \partial_2 r, \mathbf{m}), \end{aligned}$$

amiért

$$\begin{aligned} d_{\partial_2 r} f_1 - d_{\partial_1 r} f_2 &= (\nabla_{\partial_2 r} \mathbf{X}, \partial_1 r, \mathbf{m}) - (\nabla_{\partial_1 r} \mathbf{X}, \partial_2 r, \mathbf{m}) \\ &= (\nabla_{\partial_2 r} \mathbf{X}, \partial_1 r, \mathbf{m}) + (\partial_2 r, \nabla_{\partial_1 r} \mathbf{X}, \mathbf{m}) = \operatorname{div} \mathbf{X} \cdot (\partial_2 r, \partial_1 r, \mathbf{m}) \\ &= -\operatorname{div} \mathbf{X} \cdot |\partial_1 r \times \partial_2 r|. \end{aligned}$$

Eszerint, ha a $\partial\mathcal{D}$ ívhossz szerinti paraméterezése $G(s) = r(g_1(s), g_2(s))$ a I_D intervallumon, akkor

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \mathbf{X} dF &= \int_D (\partial_1(f_2 \circ r) - \partial_2(f_1 \circ r)) dx dy \\
 &= \oint_{\partial D} (f_2(r(x, y)) dy + f_1(r(x, y)) dx) \\
 &= \int_{I_D} (f_2(r(g_1(s), g_2(s))) \dot{g}_2(s) + f_1(r(g_1(s), g_2(s))) \dot{g}_1(s)) ds \\
 &= \oint_{\partial D} (\mathbf{X} \circ r, \dot{g}_1 \partial_1 r + \dot{g}_2 \partial_2 r, \mathbf{m} \circ r) ds = \oint_{\partial \mathcal{D}} (\mathbf{X}, \mathbf{t}, \mathbf{m}) ds \\
 &= \oint_{\partial \mathcal{D}} \langle \mathbf{X}, \mathbf{n} \rangle ds,
 \end{aligned}$$

ahogy a tétel állítja. ■

Figyeljük még meg, hogy a Stokes-tételt alkalmazva a síkon az $\mathbf{F} = (f_1, f_2)$ vektormezőre, éppen a Green-formulát kapjuk vissza.

Következmény. Kompakt, irányítható, határ nélküli $\mathcal{F}$ felületen bármely $\mathbf{X} \in \tilde{T}\mathcal{F}$ érintővektor-mező esetén $\int_{\mathcal{F}} \operatorname{div} \mathbf{X} dF = 0$.

Bizonyítás. Mivel a felület kompakt, véges sok koordináta-környezete is lefedi, tehát fel tudjuk bontani a felületet véges sok elemi megengedett tartományra. Ezekre véve az integrált és alkalmazva Stokes tételét, minden határon való integrálás éppen kétszer, de ellenkező körüljárási irányban történik, így kapjuk az állítás szerinti 0 eredményt. ■

Definíció. Az $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező *gradiense* az a $\operatorname{grad} f \in \tilde{T}\mathcal{F}$ érintővektor-mező, amelyre $d_{\mathbf{X}}f = \langle \operatorname{grad} f, \mathbf{X} \rangle$ minden $\mathbf{X}: \tilde{T}\mathcal{F} \rightarrow \tilde{T}\mathcal{F}$ érintővektor-mező esetén.

Mivel $d.f$ lineáris funkcionál az alsó indexében, a gradiens létezik és egyértelműen meghatározott. A síkon az f skalármező gradiense nyilván $\operatorname{grad} f = (\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f)$.

Definíció. Az $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ skalármezőkön ható $\Delta: f \mapsto \operatorname{div} \operatorname{grad} f$ operátort *Laplace-transzformációnak* nevezzük.

Figyeljük meg, hogy a Δ Laplace-operátor a síkban $\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \operatorname{div}(\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f) = \partial_1^2 f + \partial_2^2 f + \partial_3^2 f$ alakú. Fontos észrevenni, hogy ez felcserélhető az izometriákkal, ugyanis tekintve a szokásos metrika szerint izometrikus

$\iota: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (p_1, p_2) + (x, y) \begin{pmatrix} \iota_{11}^{11} & \iota_{12}^{12} \\ \iota_{11}^{12} & \iota_{12}^{12} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ transzformációt,

$$\begin{aligned} \Delta(f \circ \iota) &= \sum_i \partial_i^2 (f \circ \iota) = \sum_i \partial_i \left(\sum_j \iota_{ij} \partial_j f \circ \iota \right) = \sum_i \left(\sum_j \iota_{ij} \partial_i (\partial_j f \circ \iota) \right) \\ &= \sum_i \left(\sum_j \iota_{ij} \sum_k \iota_{ik} \partial_k \partial_j f \circ \iota \right) = \sum_j \sum_k \left(\sum_i \iota_{ij} \iota_{ik} \right) \partial_k \partial_j f \circ \iota \\ &= \sum_j \sum_k \delta_{jk} \partial_k \partial_j f \circ \iota = \sum_j \partial_j^2 f \circ \iota = \Delta f \circ \iota \end{aligned}$$

teljesül.

Green-formula a Laplace-operátorra. Ha f és g skalármezők, $\mathcal{D}$ pedig megengedett tartomány az $\mathcal{F}$ felületen, melynek határa $\partial\mathcal{D}$, akkor

$$\int_{\mathcal{D}} f \Delta g dF = \oint_{\partial\mathcal{D}} f d_{\mathbf{n}} g ds,$$

ahol az $\mathbf{n} = \mathbf{t} \times \mathbf{m}$ vektormező a $\partial\mathcal{D}$ határoló görbének az a normálisa, melyre $\mathbf{m} = \partial_1 r \times \partial_2 r / |\partial_1 r \times \partial_2 r|$ a felület normálisa, $\mathbf{t}$ pedig a $\partial\mathcal{D}$ érintője.

Bizonyítás. Stokes tételének ismeretében a következő bizonyítja az állítást:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} f \Delta g dF &= \int_{\mathcal{D}} f \operatorname{div} \operatorname{grad} g dF = \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div}(f \operatorname{grad} g) dF = \oint_{\partial\mathcal{D}} \langle f \operatorname{grad} g, \mathbf{n} \rangle ds \\ &= \oint_{\partial\mathcal{D}} f \langle \operatorname{grad} g, \mathbf{n} \rangle ds = \oint_{\partial\mathcal{D}} f d_{\mathbf{n}} g ds \end{aligned} \quad \blacksquare$$

2.9. Gauss–Bonnet-tétel

A Gauss–Bonnet-tétel a felületek elméletének legfontosabb eredménye. Tulajdonképpen a síkgörbék körülfordulási tételének általánosítása általános felületekre, de nagyon sok más jellegű, például topológiai következménye is van.

Először a Riemann-görbület vizsgálatánál, a 2.7 szakaszban utolsóként megismert lemmát pontosítjuk.

Lemma. Ha a $\mathbf{v} \in T_P \mathcal{F}$ vektort párhuzamosan körbetoljuk az $P = r(0, 0)$, $r(1, 0)$, $r(1, 1)$ és $r(0, 1)$ pontok által meghatározott $\mathcal{N}$ paramétervonal-négyzet határán, akkor az eltolt és az eredeti $\mathbf{v}$ vektor közti szög

$$\alpha = \int_{\mathcal{N}} \kappa dF.$$

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ a $T_{r(x,y)}\mathcal{F}$ érintősíknak a $\partial_1 r, \partial_2 r$ bázisával ellenkező sodrású ortonormált bázisa, és $\tau_{r(x,y)}^{s,t,s,t}$ az a párhuzamos eltolás, mely a $T_{r(x,y)}\mathcal{F}$ elemeit előbb az első paramétervonal mentén tolja el s távolságra, aztán a második paramétervonal mentén t távolságra, majd az első paramétervonal mentén $-s$ távolságra, végül a második paramétervonal mentén $-t$ távolságra.

A 2.7. szakasz végén bizonyítottuk, hogy

$$\tau_{r(x,y)}^{1/n,1/n,1/n,1/n}(\mathbf{v}) - \mathbf{v} \sim \frac{-1}{n^2} R(\partial_1 r(x, y), \partial_2 r(x, y)) \mathbf{v},$$

ha $n \rightarrow \infty$, és $R(\partial_1 r, \partial_2 r) \mathbf{v} = \kappa(P)(\partial_1 r, \partial_2 r, \mathbf{m}) \mathbf{w}$, ahol $\mathbf{m} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Ezekből

$$\tau_{r(x,y)}^{1/n,1/n,1/n,1/n}(\mathbf{v}) - \mathbf{v} \sim \frac{-1}{n^2} \kappa(r(x, y)) (\partial_1 r(x, y), \partial_2 r(x, y), \mathbf{m} \circ r(x, y)) \mathbf{w},$$

ahol $\mathbf{m} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

Ha most $\tau_{r(x,y)}^{s,t,s,t}(\mathbf{v}) = \mathbf{w} \sin \alpha_{s,t}(r(x, y)) + \mathbf{v} \cos \alpha_{s,t}(r(x, y))$, akkor azt látjuk, hogy

$$\sin \alpha_{1/n,1/n}(r(x, y)) \sim \frac{1}{n^2} \kappa(r(x, y)) |\partial_1 r(x, y) \times \partial_2 r(x, y)|.$$

Nyilván $\sin \alpha_{1/n,1/n}(r(x, y)) \sim \alpha_{1/n,1/n}(r(x, y))$ amint $\alpha_{1/n,1/n} \rightarrow 0$, vagyis $n \rightarrow \infty$. Eszerint

$$\sum_{i,j=0}^{n-1} \alpha_{1/n,1/n} \left(r \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \right) \sim \sum_{i,j=0}^{n-1} \frac{1}{n^2} \kappa \left(r \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \right) \left| \partial_1 r \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \times \partial_2 r \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \right|,$$

hiszen az előbbi aszimptotikus egyenlőség egyhez tartó arányossági tényezője a $(0, 0) \leq (x, y) \leq (1, 1)$ kompakt tartományon felveszi maximumát.

Könnyű látni, hogy ahogyan $n \rightarrow \infty$, úgy

$$\sum_{i,j=0}^{n-1} \frac{1}{n^2} \kappa \left(r \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \right) \left| \partial_1 r \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \times \partial_2 r \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \right| \rightarrow \int_{\mathcal{N}} \kappa dF,$$

hiszen itt az integrál egy közelítő összegéről van szó.

Másrészt belátjuk, hogy

$$\alpha_{1,1}(r(0, 0)) = \sum_{i,j=0}^{n-1} \alpha_{1/n,1/n} \left(r \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \right),$$

amivel bizonyításunk teljes lesz. Ehhez elég látni, hogy

$$\begin{aligned} \alpha_{p,t}(r(x, y)) + \alpha_{s,t}(r(x + p, y)) &= \alpha_{p+s,t}(r(x, y)), \\ \alpha_{p,s}(r(x, y)) + \alpha_{p,t}(r(x, y + s)) &= \alpha_{p,s+t}(r(x, y)), \end{aligned}$$

mert a kettős szumma indexekre való bontásával ebből már következik előbbi állításunk.

Csak az első egyenlőséget bizonyítjuk, mert a másik azzal teljesen analóg módon látható. Figyeljük meg, hogy párhuzamos eltolás közben a vektorok bezárt szöge nem változik, ezért elfordulás csak a töréspontoknál adódhat. Vizsgáljuk meg a párhuzamos eltolás útvonalát! Az összegben szereplő két

$$(x, y) \rightarrow (x + p, y) \rightarrow (x + p, y + t) \rightarrow (x, y + t) \rightarrow (x, y),$$

$$(x + p, y) \rightarrow (x + p + s, y) \rightarrow (x + p + s, y + t) \rightarrow (x + p, y + t) \rightarrow (x + p, y)$$

eltolás megfigyelésünk értelmében összesen ugyanakkora elfordulást okoz, mintha az első kör második eltolása előtt végrehajtanánk a második kör eltolásait is, vagyis

$$(x, y) \rightarrow (x + p, y) \rightarrow (x + p + s, y) \rightarrow (x + p + s, y + t) \rightarrow (x + p, y + t) \rightarrow$$

$$\rightarrow (x + p, y) \rightarrow (x + p, y + t) \rightarrow (x, y + t) \rightarrow (x, y).$$

Viszont ez a párhuzamos eltolás éppen

$$(x, y) \rightarrow (x + p + s, y) \rightarrow (x + p + s, y + t) \rightarrow (x, y + t) \rightarrow (x, y),$$

ami igazolja állításunkat. ■

Lemma. *Elemi felület egy rögzített pontján áthaladó zárt felületi görbéken a párhuzamos eltolás elfordulása a görbék egyenletesen folytonos formálása mellett folytonosan változik.*

Bizonyítás. (Varjú Péter bizonyítása alapján.) Legyen az L hosszúságú, ívhossz szerint paraméterezett G görbét egyenletesen folytonos módon közelítő görbesereg C_n minden tagja szintén a $[0, L]$ intervallumon paraméterezve, és tegyük fel, hogy $C_n(0) = G(0) = G(L) = C_n(L)$.

Legyen $\mathbf{X}$ egy párhuzamos vektormező a G mentén, $\mathbf{X}_n$ pedig olyan párhuzamos vektormező a C_n görbe mentén, melyre $\mathbf{X}_n(C_n(0)) = \mathbf{X}(G(0))$.

Vizsgáljuk az $\mathbf{Y}_n(G(t)) := \mathbf{X}_n(C_n(t)) - \mathbf{m}(G(t))\langle \mathbf{m}(G(t)), \mathbf{X}_n(C_n(t)) \rangle$ érintő vektormezőket a G görbe mentén. Világos, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{Y}_n(G(0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{X}_n(C_n(0)) - \mathbf{m}(G(0))\langle \mathbf{m}(G(0)), \mathbf{X}_n(C_n(0)) \rangle) = \mathbf{X}(G(0)),$$

hiszen $\mathbf{X}(G(0)) \perp \mathbf{m}(G(0))$. Ugyanakkor

$$d_G \mathbf{Y}_n = d_{C_n} \mathbf{X}_n - d_G \mathbf{m} \langle \mathbf{m}(G(t)), \mathbf{X}_n(C_n(t)) \rangle -$$

$$- \mathbf{m}(G(t)) (\langle d_G \mathbf{m}, \mathbf{X}_n(C_n(t)) \rangle + \langle \mathbf{m}(G(t)), d_{C_n} \mathbf{X}_n \rangle),$$

amiért

$$\begin{aligned}
\nabla_{\dot{G}} \mathbf{Y}_n &= (d_{\dot{C}_n} \mathbf{X}_n)^\perp - d_{\dot{G}} \mathbf{m} \langle \mathbf{m}_G, \mathbf{X}_n(C_n(t)) \rangle \\
&= d_{\dot{C}_n} \mathbf{X}_n - \mathbf{m}_G \langle \mathbf{m}_G, d_{\dot{C}_n} \mathbf{X}_n \rangle - d_{\dot{G}} \mathbf{m} \langle \mathbf{m}_G, \mathbf{X}_n(C_n(t)) \rangle \\
&= \nabla_{\dot{C}_n} \mathbf{X}_n + \mathbf{m}_{C_n} \langle \mathbf{m}_{C_n}, d_{\dot{C}_n} \mathbf{X}_n \rangle - \\
&\quad - \mathbf{m}_G \langle \mathbf{m}_G, d_{\dot{C}_n} \mathbf{X}_n \rangle - B(\dot{G}) \langle \mathbf{m}_G, \mathbf{X}_n(C_n(t)) \rangle \\
&= (\mathbf{m}_{C_n} - \mathbf{m}_G) \langle \mathbf{m}_{C_n}, d_{\dot{C}_n} \mathbf{X}_n \rangle + \mathbf{m}_G \langle \mathbf{m}_{C_n} - \mathbf{m}_G, d_{\dot{C}_n} \mathbf{X}_n \rangle + \\
&\quad + B(\dot{G}) \langle \mathbf{m}_{C_n} - \mathbf{m}_G, \mathbf{X}_n(C_n(t)) \rangle,
\end{aligned}$$

ahol $\mathbf{m}_G = \mathbf{m}(G(t))$ és $\mathbf{m}_{C_n} = \mathbf{m}(C_n(t))$.

Mivel a $[0, L]$ zárt intervallumon folytonos függvények egyenletesen is folytonosak, $\mathbf{m}_{C_n} - \mathbf{m}_G \rightarrow \mathbf{0}$ egyenletesen a $[0, L]$ zárt intervallumon. Ebből a $\nabla_{\dot{G}} \mathbf{Y}_n \rightarrow \mathbf{0}$ egyenletes konvergencia következik a $[0, L]$ zárt intervallumon.

Legyenek az $\mathbf{Y}_n^i$ ($i = 1, 2$) olyan függvények a G görbe mentén, melyekre $\mathbf{Y}_n = \mathbf{Y}_n^1 \partial_1 r + \mathbf{Y}_n^2 \partial_2 r$. Ekkor a szokásos $G = r \circ g$ felbontás mellett

$$\begin{aligned}
\nabla_{\dot{G}} \mathbf{Y}_n &= \nabla_{\dot{G}} \sum_{i=1}^2 \mathbf{Y}_n^i \partial_i r = \sum_{i=1}^2 (d_{\dot{G}} \mathbf{Y}_n^i \partial_i r + \mathbf{Y}_n^i \nabla_{\dot{G}} \partial_i r) \\
&= \sum_{i=1}^2 \left(d_{\dot{G}} \mathbf{Y}_n^i \partial_i r + \mathbf{Y}_n^i \sum_{j=1}^2 \dot{g}_j \sum_{k=1}^2 \Gamma_{j,i}^k \partial_k r \right) \\
&= \sum_{k=1}^2 \left(d_{\dot{G}} \mathbf{Y}_n^k + \sum_{i=1}^2 \mathbf{Y}_n^i \sum_{j=1}^2 \dot{g}_j \Gamma_{j,i}^k \right) \partial_k r
\end{aligned}$$

és a $\nabla_{\dot{G}} \mathbf{Y}_n$ konvergenciája miatt $n \rightarrow \infty$ esetén $d_{\dot{G}} \mathbf{Y}_n^k + \sum_{i,j=1}^2 \mathbf{Y}_n^i \dot{g}_j \Gamma_{j,i}^k \rightarrow 0$ egyenletesen a $[0, L]$ zárt intervallumon. A Pickard–Lindelöf-tétel értelmében egy differenciálegyenlet megoldása folytonosan függ a peremérték feltételek egyenletesen folytonos változásától, így a $\mathbf{Z}_n$ érintő vektormezőre vonatkozó

$$d_{\dot{G}} \mathbf{Y}_n^k + \sum_{i,j=1}^2 \mathbf{Y}_n^i \dot{g}_j \Gamma_{j,i}^k = d_{\dot{G}} \mathbf{Z}_n^k + \sum_{i,j=1}^2 \mathbf{Z}_n^i \dot{g}_j \Gamma_{j,i}^k, \quad (k = 1, 2),$$

differenciálegyenlet-rendszer egyértelmű $\mathbf{Y}_n$ megoldásai (zárt intervallumon egyenletesen) konvergálnak a $\mathbf{Z}$ érintő vektormezőre vonatkozó

$$0 = d_{\dot{G}} \mathbf{Z}^k + \sum_{i,j=1}^2 \mathbf{Z}^i \dot{g}_j \Gamma_{j,i}^k, \quad (k = 1, 2),$$

egyenlet egyértelmű megoldásához.

Eszerint $\mathbf{Z} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{Y}_n$, és éppen a $\mathbf{Z}$ vektormezőt meghatározó differenciálegyenlet-rendszer értelmében $\mathbf{Z}$ párhuzamos vektormező a G görbe mentén. Minthogy $\mathbf{X}$ is párhuzamos és $\mathbf{Z}(G(0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{Y}_n(G(0)) = \mathbf{X}(G(0))$, ebből $\mathbf{X} = \mathbf{Z}$ következik, ami igazolja az állítást, hiszen eszerint

$$\begin{aligned} \angle(\mathbf{X}(G(L)), \mathbf{X}(G(0))) &= \angle\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{Y}_n(G(L)), \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{Y}_n(G(0))\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \angle(\mathbf{Y}_n(G(L)), \mathbf{Y}_n(G(0))). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

A következő tételt Gauss a „*Theorema elegantissimum*” néven emlegette.

Gauss–Bonnet-tétel. Legyen $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$ megengedett tartomány az $\mathcal{F}$ irányítható felületen. Ekkor

$$\int_{\mathcal{D}} \kappa dF + \oint_{\partial \mathcal{D}} \kappa_g^e ds + \sum_i \alpha_i = 2\pi,$$

ahol κ a Gauss-féle szorzatgörbület, dF a felszínmérték az $\mathcal{F}$ felületen, κ_g^e a tartomány $\partial \mathcal{D}$ határának előjeles geodetikus görbülete, és α_i a $\partial \mathcal{D}$ görbe i -edik töréspontjánál lévő $\partial \mathcal{D}$ körüljárásának megfelelő külső szög.

Bizonyítás. Bontsuk fel a $\mathcal{D}$ tartományt diszjunkt elemi megengedett $\mathcal{D}_k$ tartományokra úgy, hogy $\mathcal{D}_k$ határai paramétervonalakra vagy a $\mathcal{D}$ határára essenek, és bármely határpont pontosan egy, vagy pontosan kettő, vagy pontosan négy $\mathcal{D}_k$ közös pontja.

Írjuk fel mindegyikre a bizonyítandónak megfelelő

$$\int_{\mathcal{D}_k} \kappa dF + \oint_{\partial \mathcal{D}_k} \kappa_g^e ds + \sum_i \alpha_i^k = 2\pi,$$

formulát. Figyeljük meg, hogy

- minden nem a $\mathcal{D}$ határával egybeeső határ mentén kétszer integráljuk a κ_g^e előjeles geodetikus görbületet, egymással ellentétes irányban, melyek összegzéskor kiejtik egymást,
- azokban a pontokban, ahol négy $\mathcal{D}_k$ tartomány találkozik, ott a törésszögek összege 2π , ahol csak kettő $\mathcal{D}_k$ tartomány találkozik — és ez kizárólag $\mathcal{D}$ határán lehetséges — ott a törésszögek összege π , és ezeken kívül törésszög csak a $\mathcal{D}$ határán lehetséges. Legyen c_4 azon töréspontok száma, ahol négy $\mathcal{D}_k$ találkozik, és legyen c_2 azok száma, ahol kettő $\mathcal{D}_k$ találkozik. Ekkor Euler poliédertétele szerint az összes $\mathcal{D}_k$ tartomány száma éppen $2 + e - c - 1 = 1 + (4c_4 + 3c_2)/2 - (c_4 + c_2) = 1 + c_4 + c_2/2$, ahol e az élek és c a csúcsok száma.

Ezek alapján formuláink összegzésének eredménye

$$\int_{\mathcal{D}} \kappa dF + \oint_{\partial\mathcal{D}} \kappa_g^e ds + \sum_i \alpha_i + c_4 2\pi + c_2 \pi = (1 + c_4 + c_2/2) 2\pi,$$

éppen a teljes tartományra bizonyítandó összefüggés, amiért a továbbiakban feltehetjük, hogy $\mathcal{D}$ elemi megengedett tartomány.

Fedjük le a $\mathcal{D}$ tartományt az $r(s_i, t_j)$, $r(s_{i+1}, t_j)$, $r(s_{i+1}, t_{j+1})$ és $r(s_i, t_{j+1})$ csúcsokkal megadott $\mathcal{N}_{i,j}$ paramétervonal-négyszögekkel, ahol $s_{i+1} - s_i = t_{i+1} - t_i = 1/n$ és $n \rightarrow \infty$.

Világos, hogy

$$\sum_{i,j: \mathcal{N}_{i,j} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset} \int_{\mathcal{N}_{i,j}} \kappa dF \rightarrow \int_{\mathcal{D}} \kappa dF \quad \text{és} \quad \sum_{i,j: \mathcal{N}_{i,j} \subset \mathcal{D}} \int_{\mathcal{N}_{i,j}} \kappa dF \rightarrow \int_{\mathcal{D}} \kappa dF,$$

ahogy $n \rightarrow \infty$. Ugyanakkor a bal oldalakon a korábbi lemma szerint, — mivel a párhuzamos eltolások az $\mathcal{N}_{i,j}$ paramétervonal-négyszögek belső határain itt is kiesnek — nem más, mint a $\partial\mathcal{D}$ határt közelítő paramétervonal-polygon menti $\Delta\alpha_n$ elfordulás.

Mivel ez a két polygon „közrefogja” és n növekedtével egyenletesen közelíti a $\partial\mathcal{D}$ görbét, előbbi lemmánk szerint az ezeken való integrálás határértéke éppen a párhuzamosan eltolt vektor $\Delta\alpha$ elfordulása a $\partial\mathcal{D}$ görbe mentén, vagyis

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \alpha(\partial\mathcal{D}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta\alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha\left(\partial\left(\bigcup_{\mathcal{N}_{i,j} \subset \mathcal{D}} \mathcal{N}_{i,j}\right)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mathcal{N}_{i,j} \subset \mathcal{D}} \int_{\mathcal{N}_{i,j}} \kappa dF = \int_{\mathcal{D}} \kappa dF. \end{aligned}$$

Másrészt a $\partial\mathcal{D}$ görbe menti párhuzamos körbetolás esetén a párhuzamosan körbetolt vektor és a $\mathbf{t}$ érintő α bezárt szögére $\alpha' = \kappa_g^e$, ezért

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} \kappa_g^e ds = \oint_{\partial\mathcal{D}} \alpha' ds = \sum_{i=1}^{k+1} (\alpha^-(i) - \alpha^+(i-1)) = +\alpha^-(k+1) - \alpha^+(0) - \sum_{i=1}^k \alpha_i,$$

ahol $\alpha^-(k+1)$ és $\alpha^+(0)$ a körüljárás szerinti első és második érintő szöge az integrál nem töréspont kezdőpontjában, $\alpha^-(i)$ és $\alpha^+(i)$ pedig az i -edik ($1 \leq i \leq k$) töréspont körüljárás szerinti első és második érintőjének szöge. Mivel a szöget a $\mathbf{t}$ érintőhöz mértük, amely a körülfordulási tétel miatt a körbetolás közben 2π szöggel elfordul, valamint a párhuzamos eltolással kapott referencia irány is elfordul $\Delta\alpha$ szöggel, azt kapjuk, hogy $\alpha^+(0) + 2\pi - \Delta\alpha = \alpha^-(k+1)$, ami teljessé teszi a bizonyítást. ■

Egyik triviális, de fontos következménye a Gauss–Bonnet-tételnek az alábbi.

Szögdefektus-tétel. *A $p \in \mathbb{N}$ oldalú $\mathcal{D}$ geodetikus sokszögre*

$$\sum_{i=1}^p \beta_i = (p-2)\pi + \int_{\mathcal{D}} \kappa dF,$$

ahol β_i az i -edik belső szög.

A bizonyításhoz elég a $\kappa_g^e = 0$ feltétel mellett vizsgálni előbbi tételünk. Mivel gömbön a κ görbület állandó, ott azt kapjuk, hogy

$$\sum_i \beta_i = (p-2)\pi + \kappa \cdot \text{felszín}.$$

A fenti állításból adódó geodetikus háromszögekre vonatkozó szögdefektus alapján Gauss megpróbálta a mi háromdimenziós terünk görbülségét megmérni. Kiindulásul egy távoli csillag fényét választotta egy pontból induló geodetikusok gyanánt, így elég lett volna két földi pontról megmérni a csillag fényének szögeltérését. Sajnos az akkori műszerek nem voltak elegendően pontosak, de a gondolat, hogy a fény pályája a geodetikus szerepét tölti be, később Einstein relativitáselméletében alapvető fontosságot nyert.

Definíció. Egy felület körlappal homeomorf tartományokra való felbontását *poliéder-felbontásnak* nevezzük, ha bármely határoló görbéhez, amelyet élnek hívunk, két tartomány tartozik, és bármely csúcsból, amelyen az élék metszetét értjük, bármely csúcsba el lehet jutni élék mentén. A felbontásban szereplő megengedett tartományokat lapoknak nevezzük.

Tétel. *Minden $\mathcal{F}$ kompakt, irányítható felületre és annak bármely poliéder-felbontására*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{F}} \kappa dF = \ell - e + c = \chi(\mathcal{F}),$$

ahol ℓ a felbontásban szereplő lapok száma, e az élék száma és c a csúcsok száma.

Definíció. A felületre jellemző $\chi(\mathcal{F})$ számot a felület *Euler-karakterisztikájának* nevezzük.

Tételünk szerint az Euler-karakterisztika invariáns a diffeomorfizmusokra nézve. Ahhoz azonban, hogy a Gauss–Bonnet-tételt használhassuk a bizonyításhoz, előbb meg kell szüntetni a bizonyításban az Euler-tétel alkalmazását. Ez nagyon egyszerű, hiszen a vizsgált felbontásban csak 3-, 4- vagy 5-élű tartományok szerepelnek.

Bizonyítás. Adják a $\mathcal{D}_k$ megengedett tartományok a poliéder-felbontást, és írjuk fel mindegyikre a Gauss–Bonnet-tételt.

$$\int_{\mathcal{D}_k} \kappa dF + \oint_{\partial \mathcal{D}_k} \kappa_g^e + \sum_{i=1}^{c_k} (\pi - \beta_\rho^i) = 2\pi,$$

ahol β_k^i a $\mathcal{D}_k$ tartomány i -edik csúcsában lévő belső szög.

Ezt összegezve k -ra

$$\sum_k \int_{\mathcal{D}_k} \kappa dF = \int_{\mathcal{F}} \kappa dF, \quad \text{és} \quad \sum_k \oint_{\partial \mathcal{D}_k} \kappa_g^e = 0$$

miatt

$$\int_{\mathcal{F}} \kappa dF + \sum_k \sum_{i=1}^{c_k} (\pi - \beta_k^i) = 2\ell\pi$$

adódik, amiből a könnyű

$$\sum_k \sum_{i=1}^{c_k} (\pi - \beta_k^i) = 2e\pi - c2\pi$$

egyenlőség alapján az állítás következik. ■

Ezt a szakaszt a Gauss–Bonnet-tétel egy különösen fontos, habár könnyen bizonyítható következményével zárjuk.

Tétel. *A párhuzamos eltolás akkor és csak akkor független az úttól a $\mathcal{D}$ megengedett tartományban, ha a κ görbület mindenütt eltűnik.*

Bizonyítás gyanánt elég megfigyelni, hogy egy zárt úton $0 = \Delta\alpha = \int_{\mathcal{D}} \kappa dF$ a körbezárt $\mathcal{D}$ tartományra, ami viszont akkor és csak akkor 0 minden $\mathcal{D}$ tartományra, ha κ eltűnik.

2.10. Speciális felületek

Az alábbiakban néhány speciális és ezért érdekes felület esetét vizsgáljuk meg, majd aprólékosan kiszámolunk minden eddig bevezetett fontosabb mennyiséget a kétváltozós függvények grafikonjaként előálló felületek esetében.

2.10.1. Konstans görbületű forgásfelületek

Bár lehetséges, mi nem fogjuk az összes ilyen felületet felsorolni, ugyanakkor megmutatjuk a legfontosabb példákat.

Tétel. Legyen a $c(s) = (f(s), g(s))$ egy ívhossz-paraméterezésű görbe. Az ennek az x -tengely körüli forgatásával súrolt $\mathcal{F}$ forgásfelület paraméterezése ekkor $r(s, \alpha) = (f(s), g(s) \cos \alpha, g(s) \sin \alpha)$. Ekkor az $\mathcal{F}$ görbülete $\kappa(r(s, \alpha)) = -g''(s)/g(s)$.

Bizonyítás. Az $r(\cdot, \alpha)$ paramétervonalak a görbe elforgatottjai, ezért ívhossz szerint paraméterezettek, vagyis $|\partial_1 r| = 1$, ahol $\partial_1 r(s, \alpha) = (f'(s), g'(s) \cos \alpha, g'(s) \sin \alpha)$. Minden $r(s, \cdot)$ paramétervonal olyan kör, melynek síkja az (y, z) síkkal párhuzamos, így ennek $\partial_2 r(s, \alpha) = (0, -g(s) \sin \alpha, g(s) \cos \alpha)$ érintővektorai nyilván merőlegesek a megfelelő $\partial_1 r$ érintővektorra, és $|\partial_2 r| = g$.

Ebből

$$\mathbf{m} = \frac{1}{g}(\partial_1 r \times \partial_2 r) = \frac{1}{g}(gg', -f'g \cos \alpha, -f'g \sin \alpha) = (g', -f' \cos \alpha, -f' \sin \alpha)$$

a felületi normális. Ennek iránymenti deriváltjaira

$$B(\partial_1 r) = d_{\partial_1 r} \mathbf{m} = (g'', -f'' \cos \alpha, -f'' \sin \alpha) = \frac{g''}{f'}(f', g' \cos \alpha, g' \sin \alpha) = \frac{g''}{f'} \partial_1 r,$$

hiszen c ívhossz szerint paraméterezett, amiért $g'g'' = -f'f''$, és

$$B(\partial_2 r) = d_{\partial_2 r} \mathbf{m} = (0, f' \sin \alpha, -f' \cos \alpha) = \frac{f'}{g}(0, g \sin \alpha, -g \cos \alpha) = \frac{-f'}{g} \partial_2 r$$

adódik.

Ennek megfelelően a Weingarten-leképezés mátrixa a $(\partial_1 r, \partial_2 r)$ bázisban

$$B = \begin{pmatrix} g''/f' & 0 \\ 0 & -f'/g \end{pmatrix},$$

és így a felület görbülete $\kappa = \det B = -g''/g$. ■

Figyeljük meg, hogy g ismeretében f egyszerűen kiszámítható az $f = \pm \int \sqrt{1 - (g')^2}$ képlet alapján.

Tételünk értelmében az összes konstans görbületű forgásfelület felsorolása egyenértékű a $g'' + \kappa g = 0$ differenciálegyenlet összes megoldásának megkeresésével. Ez a látszólag egyszerű feladat igen bonyolulttá válik, ha a keresett felülettől elvárjuk a topológiai teljességet, de mi nem támasztunk további feltételeket a megoldások tekintetében.

Ha g a $g'' + \operatorname{sgn} \kappa |\kappa| g = 0$ egyenlet megoldása, akkor nyilván a $\bar{g}(t) = \sqrt{|\kappa|} g(t/\sqrt{|\kappa|})$ a $\bar{g}'' + \operatorname{sgn} \kappa \bar{g} = 0$ egyenlet megoldása lesz, miközben $\bar{g}'(t) = g'(t/\sqrt{|\kappa|})$, és így az $(f, \bar{g})$ görbe is ívhossz szerint paraméterezett.

Ennek az egyszerű kapcsolatnak köszönhetően a továbbiakban elég a $\kappa = 0$ és $\kappa = \pm 1$ eseteket vizsgálnunk.

A $\kappa = 0$ eset. Ekkor $g'' = 0$, vagyis $g(s) = as + b$ valamely $a, b \in \mathbb{R}$ konstansokra, és $f = \pm \int \sqrt{1 - (g')^2}$, amiből $f(s) = s\sqrt{1 - a^2} + d$, ahol $d \in \mathbb{R}$, és persze $0 < |a| < 1$, tehát a megforgatott görbe egyenes. Ha ez az egyenes párhuzamos az x -tengellyel, akkor a felület henger, ha párhuzamos az y -tengellyel, akkor sík és, ha metszi a tengelyeket, akkor forgáskúp.

Eszerint mindössze három darab 0 görbületű forgásfelület van.

A $\kappa = 1$ eset. A $g'' + g = 0$ általános megoldása $g(s) = a \cos(s) + b \sin(s)$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$. Figyeljük meg, hogy g' maximuma $\sqrt{a^2 + b^2}$, ezért $a^2 + b^2 > 1$ esetben sem g , sem f nem lehet értelmezve a teljes egyenesen.

Legyen s_0 olyan szög, melyre $(a, b) = (\cos s_0, \sin s_0)\sqrt{a^2 + b^2}$. Ekkor

$$\begin{aligned} g(s) &= a \cos(s) + b \sin(s) = \cos(s - s_0)\sqrt{a^2 + b^2}, \\ f(s) &= \pm \int \sqrt{1 - (g')^2} = \pm \int \sqrt{1 - (a^2 + b^2) \sin^2(s - s_0)}. \end{aligned}$$

Ez utóbbi egy másodfajú elliptikus integrál, mely általában nem fejezhető ki elemi függvényekkel, ezért a továbbiakban csak felvázoljuk a legfontosabb eseteket.

Ha $a^2 + b^2 < 1$, akkor az úgynevezett *dudor-típusú felületet* kapjuk. Ez a felület az $f' = 1$ által meghatározott legszűkebb részeinél persze nem differenciálható, csak folytonos.

Ha $a^2 + b^2 = 1$, akkor az integrálásból $f(s) = \sin(s - s_0)$, és ezért a $c = (f, g) = (\sin(s - s_0), \cos(s - s_0))$ görbe az egységsugarú kör egy darabja, amiért a felület egy gömbdarab.

Ha $a^2 + b^2 > 1$, akkor az úgynevezett *orsó-típusú felületet* kapjuk. Ez a felület az $f' = 0$ által meghatározott csúcsainál persze nem differenciálható.

A $\kappa = -1$ eset. A $g'' - g = 0$ egyenlet általános megoldása $g(s) = a \cosh s + b \sinh s$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$. Mivel a c görbe x -tengelyre való tükrözése nem befolyásolja a forgatás eredményét, feltehető, hogy $a > 0$. Jegyezzük meg már most, hogy ezek a felületek a Bolyai–Lobacsevszkij-féle hiperbolikus síknak vagy egy részének modelljei. Ennek jelentését később tárgyaljuk.

Ha $a = b$, akkor

$$\begin{aligned} f &= \pm \int \sqrt{1 - (g')^2} = \pm \int \sqrt{1 - a^2 e^{2s}} \\ &= \mp 2 \ln |a| \mp s \pm \sqrt{1 - a^2 e^{2s}} \pm \ln(1 - \sqrt{1 - a^2 e^{2s}}), \end{aligned}$$

és így a c görbe a *traktrix*, mely a fizikában úgy ismert, mint a $(0, \operatorname{sgn} a)$ pontból indított, az x -tengelyről vontatott test pályája. A traktrix a végtelenben az x -tengelyhez simul, de nem tartalmazza az x -tengely végtelen távoli pontját. A traktrixot az x -tengely körül megforgatva a *pszeudofoknak* nevezett felületet kapjuk. Gauss a nemeuklideszi geometriának ezt a Beltrami-féle modelljét ismerte.

Ha $a = -b$, akkor ugyancsak pszeudofokot kapunk, csak éppen az (y, z) -síkra tükrözve.

Ha $a^2 \neq b^2$, akkor létezik olyan s_0 szám, melyre

$$(a, b) = \sqrt{|a^2 - b^2|} \begin{cases} (\cosh s_0, \sinh s_0), & \text{ha } a^2 > b^2, \\ (\sinh s_0, \operatorname{sgn} b \cosh s_0), & \text{ha } a^2 < b^2, \end{cases}$$

és így

$$g(s) = a \cosh s + b \sinh s = \sqrt{|a^2 - b^2|} \begin{cases} \cosh(s + s_0), & \text{ha } a^2 > b^2, \\ \sinh(s_0 + s \operatorname{sgn} b), & \text{ha } a^2 < b^2. \end{cases}$$

Mint fentebb, az

$$f = \pm \int \sqrt{1 - (g')^2} = \pm \begin{cases} \int \sqrt{1 - (a^2 - b^2) \sinh^2(s + s_0)}, & \text{ha } a^2 > b^2, \\ \int \sqrt{1 - (b^2 - a^2) \cosh^2(s_0 + s \operatorname{sgn} b)}, & \text{ha } a^2 < b^2 \end{cases}$$

integrál most is első illetve másodfajú elliptikus integrál, mely általában nem fejezhető ki elemi függvényekkel, ezért a továbbiakban csak felvázoljuk a két legfontosabb esetet.

Ha $a^2 < b^2$, akkor $b^2 - a^2 < 1$ is fenn kell álljon, és egy olyan felületet kapunk, mely átmettszi önmagát a $g = 0$ meghatározta pontban. Ebből úgy kapunk egy kompakt és *gömb-típusú*nak nevezett felületet, hogy szétvágjuk a $g = 0$ által megadott sík mentén, aztán a két $f' = 0$ által meghatározott szélső kör mentén összeragasztjuk. Ez a kompakt felület nem differenciálható a forgástengelyre merőleges szimmetriasíkban lévő kör mentén és a két szélső csúcspontban.

Ha $a^2 > b^2$, akkor az úgynevezett *gége-típusú felületet* kapjuk, melynek az $f' = 0$ által meghatározott pontjaiban a felület nem differenciálható és amely szimmetrikus az $f' = 1$ által meghatározott és a forgástengelyre merőleges síkra.

2.10.2. Minimálfelületek

Szemléletesen minimálfelületnek nevezünk egy adott „peremmel” rendelkező felületet, ha az adott peremmel a legkisebb felszínű. A legjobb példát a különféle drótkeretekre feszülő szappan hárták szolgáltatják, mert azok a felületi feszültség miatt „igyekeznek a legkisebbre összehúzni magát”.

Definíció. Az $r: T(\subset \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméterezésű $\mathcal{F}$ felület variálásának nevezzük az olyan $\Psi: (-\varepsilon, \varepsilon) \times T \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható függvényt, melyre $\varepsilon > 0$ és $\Psi(0, \cdot) = r(\cdot)$. A variálást *normális variálásnak* nevezzük, ha $\Psi(t, \cdot) = r(\cdot) + tf(\cdot)\mathbf{m}(r(\cdot))$, ahol $\mathbf{m}$ az $\mathcal{F}$ felület normálisa és $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható.

Az $\mathcal{F}$ felületek halmazán értelmezett $\mathcal{F} \mapsto \mu(\mathcal{F})$ funkcionált *mérésnek* nevezzük. Az $\mathcal{F}$ felületet a μ mérésre nézve *extremális felületnek* nevezzük, ha bármely Ψ variálására az $m(t) = \mu(\Psi(t, \cdot))$ függvény a 0-ban extremális, vagyis $m'(0) = 0$.

Tétel. Az $\mathcal{F}$ felület akkor és csak akkor extremális a felszín mérésre nézve, ha a Minkowski-féle összegöbület mindenütt nulla.

Bizonyítás. Csak normális variálásokat fogunk használni. Legyen $\Psi_t(\cdot) = \Psi(t, \cdot)$, hogy egyszerűsítsük a képletek írását (persze így $\Psi_0 = r$), és vezessük be a $\partial_{t=0}$ jelölést a t szerinti deriválás $t = 0$ pontban felvett értékére.

A Ψ_t által paraméterezett felület felszíne

$$F(t) = \int_T |\partial_1 \Psi_t \times \partial_2 \Psi_t| dx dy,$$

ahol $\partial_i \Psi_t = \partial_i r + t \partial_i f \mathbf{m} + t f \partial_i \mathbf{m} = \partial_i r + t(\partial_i f \mathbf{m} + f B(\partial_i r))$ ($i = 1, 2$). Ezek t szerinti deriváltja a $t = 0$ pontban $\partial_{t=0} \partial_i \Psi_t = \partial_i f \mathbf{m} + f B(\partial_i r)$, ezért

$$\begin{aligned} \partial_{t=0}(\partial_1 \Psi_t \times \partial_2 \Psi_t) &= (\partial_1 f \mathbf{m} + f B(\partial_1 r)) \times \partial_2 r + \partial_1 r \times (\partial_2 f \mathbf{m} + f B(\partial_2 r)) \\ &= \mathbf{m} \times (\partial_1 f \partial_2 r - \partial_2 f \partial_1 r) + f(B(\partial_1 r) \times \partial_2 r + \partial_1 r \times B(\partial_2 r)). \end{aligned}$$

Az extremális vizsgálatához F deriváltját kell képeznünk a $t = 0$ pontban:

$$\begin{aligned} F'(0) &= \int_T \partial_{t=0}(\sqrt{\langle \partial_1 \Psi_t \times \partial_2 \Psi_t, \partial_1 \Psi_t \times \partial_2 \Psi_t \rangle}) dx dy \\ &= \int_T \frac{\langle \partial_{t=0}(\partial_1 \Psi_t \times \partial_2 \Psi_t), \partial_1 \Psi_0 \times \partial_2 \Psi_0 \rangle}{|\partial_1 \Psi_0 \times \partial_2 \Psi_0|} dx dy \\ &= \int_T \frac{\langle f(B(\partial_1 r) \times \partial_2 r + \partial_1 r \times B(\partial_2 r)), \partial_1 r \times \partial_2 r \rangle}{|\partial_1 r \times \partial_2 r|} dx dy. \end{aligned}$$

Behelyettesítve ebbe a B Weingarten-leképezés $(b_{i,j})_{i,j=1}^2$ mátrixa szerinti $B(\partial_i r) = b_{i,1}\partial_1 r + b_{i,2}\partial_2 r$ kifejtést, azt kapjuk, hogy

$$F'(0) = \int_T \underbrace{f(b_{11} + b_{22})}_{\text{Spur } B} \cdot |\partial_1 r \times \partial_2 r| dx dy.$$

Ez akkor és csak akkor tűnik el minden f függvény esetén, ha $\text{Spur } B \equiv 0$, vagyis a Minkowski-féle összeggörbület eltűnik! ■

Egy felületet *minimálfelületnek* nevezünk, ha a felszín mérésre nézve minimális. Tételünk szerint ez azt jelenti, hogy a Minkowski-féle összeggörbület nulla.

Tétel. *Egy forgásfelület akkor és csak akkor minimálfelület, ha az egy kötélgörbének a síkjában lévő, a szimmetriatengelyére merőleges, a kötélgörbét nem metsző egyenes körüli forgatásával keletkezik.*

Bizonyítás. Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek a $z = 0$ síkban vett $\mathbb{R} \ni x \mapsto (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$ grafikonját az x -tengely körül megforgatva az $r: [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \ni (\varphi, x) \mapsto (x, f(x) \cos \varphi, f(x) \sin \varphi)$ paraméterezésű $\mathcal{F}$ forgásfelülethez jutunk. Mivel a $-f$ függvényből kiindulva is ugyanezt a felületet kapjuk, feltesszük, hogy $f > 0$.

Mivel $\mathcal{F}$ forgásfelület, elegendő a $z = 0$ síkba eső pontjaiban kiszámolni a Minkowski-féle összeggörbületét. Euler tétele szerint ha két egymásra merőleges irányban kiszámítjuk a normál-görbületet, azok összege éppen a Minkowski-féle összeggörbület.

Forgásfelületen a paramétervonalak érintő az adott pont érintő síkjában ortogonális bázist alkotnak, így az $(x, f(x), 0)$ pontban $\partial_1 r(0, x) = (0, 0, f(x))$ és $\partial_2 r(0, x) = (1, f'(x), 0)$ is ortogonálisak, tehát $\mathcal{F}$ normálisa az $(x, f(x), 0)$ pontban

$$\mathbf{m} = \frac{\partial_1 r \times \partial_2 r}{|\partial_1 r \times \partial_2 r|} = \frac{(-f'(x), 1, 0)}{\sqrt{(f'(x))^2 + 1}}.$$

A $p: x \mapsto (x, f(x), 0)$ síkgörbe érintője $\dot{p}(x) = (1, f'(x), 0)$, amiért normálisa a $p(0)$ pontban $\pm \mathbf{m}$ irányú, ráadásul Meusnier tétele szerint a p felületi normális görbülete a p görbületi vektorának az $\mathbf{m}$ normálisra eső vetülete, tehát

$$\kappa_m \left(\frac{\dot{p}}{|\dot{p}|} \right) = \langle \mathbf{m}, \ddot{p} \rangle = \frac{\langle (-f'(x), 1, 0), (0, f''(x), 0) \rangle}{\sqrt{(f'(x))^2 + 1}} = \frac{f''(x)}{\sqrt{(f'(x))^2 + 1}^3}.$$

A $q: \varphi \mapsto (x, f(x) \cos \varphi, f(x) \sin \varphi)$ kör érintője $f(x)(0, -\sin \varphi, \cos \varphi)$, amiért normálisa a $q(0)$ pontban $\mathbf{n}_q(\varphi) = (0, -\cos \varphi, \sin \varphi)$. Meusnier tétele szerint a $q(0)$ pontban a q felületi normális görbülete

$$\kappa_m \left(\frac{\dot{q}}{|\dot{q}|} \right) = \langle \kappa_q \mathbf{n}_q(0), \mathbf{m} \rangle = \left\langle \frac{(0, -1, 0)}{f(x)}, \frac{(-f'(x), 1, 0)}{\sqrt{(f'(x))^2 + 1}} \right\rangle = \frac{-1}{f(x) \sqrt{(f'(x))^2 + 1}}.$$

Tehát a Minkowski-féle összeggörbület az $r(x, 0)$ pontban

$$\kappa_\Sigma = \frac{f''(x)}{\sqrt{(f'(x))^2 + 1}^3} + \frac{-1}{f(x)\sqrt{(f'(x))^2 + 1}} = \frac{f(x)f''(x) - ((f'(x))^2 + 1)}{f(x)\sqrt{(f'(x))^2 + 1}^3}, \quad (2.10.1)$$

vagyis $\mathcal{F}$ akkor és csak akkor minimálfelület, ha

$$1 + (f'(x))^2 = f(x)f''(x) \quad \text{és } f > 0 \text{ miatt } f'' > 0 \text{ is.}$$

Ennek deriválása a $2f'(x)f''(x) = f'(x)f''(x) + f(x)f'''(x)$, vagyis az $f'(x)f''(x) = f(x)f'''(x)$ egyenletre vezet. Mivel $f, f'' > 0$, egyenletünk ekvivalens az $f'(x)/f(x) = f'''(x)/f''(x)$ egyenlettel, melynek integrálása az $\ln f(x) = c_0 + \ln f''(x)$ egyenletre vezet, ahol c_0 konstans. Eszerint valamely c_1 konstansra $f(x) = c_1 f''(x)$. Ezt beillesztve a kiindulási egyenletbe azt kapjuk, hogy $1 + (f'(x))^2 = c_1 f^2(x)$. A $g(x) = f(x\sqrt{c_1})/\sqrt{c_1}$ függvényre tehát $1 + (g'(x))^2 = g^2(x)$. Legyen $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $g(x) = \cosh(h(x))$. Ekkor

$$1 + \sinh^2(h(x))(h'(x))^2 = 1 + (g'(x))^2 = g^2(x) = \cosh^2(h(x)),$$

amiért $\sinh^2(h(x))((h'(x))^2 - 1) = 0$, vagyis $h(x) = c_2 \pm x$ valamely c_2 konstansra. Tehát $f(x) = \sqrt{c_1}g(x/\sqrt{c_1}) = \sqrt{c_1} \cosh(h(x/\sqrt{c_1})) = \sqrt{c_1} \cosh(c_2 \pm x/\sqrt{c_1})$, ami éppen egy kötélgörbe függvénye. Ez igazolja az állítást. ■

Arra a kérdésre, hogy milyenek azok a felületek, melyeknek konstans a Minkowski-féle összeggörbülete, a fizikában a nyomás által egyensúlyban tartott felületek, például a felfújt szappanhártyák mutatnak jó példákat. Az ilyen felületeket *konstans Minkowski-görbületűeknek* nevezzük.

Előbbi tételünk általánosítható konstans Minkowski-görbületű forgásfelületekre. Ehhez a (2.10.1) egyenletet kell megoldani κ_σ konstans esetén. Érdekes eredmény adódik:

Delanuay-tétel. *A térben pontosan azok a forgásfelületek konstans Minkowski-görbületűek, amelyek egy egyenesen gördülő kúpszelet fókusza által súrolt görbének az egyenes körüli forgatásaként állnak elő.*

Tehát egy konstans Minkowski-görbületű forgásfelület konkrétan egy sík, egy henger, egy gömb, egy unduloid, egy *katenuoid*, vagy egy *nodoid*.

2.10.3. Umbilikus felületek, nem umbilikus pontok

Ahogy fentebb is, ismét egy lokális tulajdonságról igazoljuk, hogy az egybeesik egy globális tulajdonsággal, ezúttal azonban az egyik irányú meghatározottság nyilvánvaló.

Definíció. Az $\mathcal{F}$ felület egy P pontját *umbilikusnak* nevezzük, ha a P pontban a P ponton átmenő minden görbe normálgörbülete ugyanannyi. Egy felületet umbilikusnak mondunk ha minden pontja umbilikus.

Világos, hogy a sík és a gömb minden pontja umbilikus, és a következő tétel szerint nincs is más példa.

Tétel. *Egy umbilikus felület egy sík vagy egy gömb egy darabja.*

Bizonyítás. Egy umbilikus $\mathcal{F}$ felületen az $M(\mathbf{t}, \mathbf{t})$ nem függ a $\mathbf{t}$ választásától, vagyis $\lambda = M(\mathbf{t}, \mathbf{t})$ egy jól definiált skalármező a felületen.

A $\lambda = -\langle \mathbf{t}, B(\mathbf{t}) \rangle$ kifejezést az Euler-bázisban vizsgálva, azonnal látjuk, hogy abban $B = -\lambda I$, ahol I az identikus leképezés, tehát B a $-\lambda$ arányú homotécia.

Legyenek $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \tilde{T}_P \mathcal{F}$ tetszőleges ortonormált vektormezők.

A Codazzi–Mainardi-egyenlet két oldalára

$$\begin{aligned} -(\nabla_{\mathbf{t}_1} M)(\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_2) &= d_{\mathbf{t}_1} \langle \mathbf{t}_2, B(\mathbf{t}_2) \rangle - \langle \nabla_{\mathbf{t}_1} \mathbf{t}_2, B(\mathbf{t}_2) \rangle - \langle \mathbf{t}_2, B(\nabla_{\mathbf{t}_1} \mathbf{t}_2) \rangle \\ &= \langle \mathbf{t}_2, \nabla_{\mathbf{t}_1} B(\mathbf{t}_2) - B(\nabla_{\mathbf{t}_1} \mathbf{t}_2) \rangle = \langle \mathbf{t}_2, \nabla_{\mathbf{t}_1} (-\lambda \mathbf{t}_2) + \lambda (\nabla_{\mathbf{t}_1} \mathbf{t}_2) \rangle \\ &= -d_{\mathbf{t}_1} \lambda, \end{aligned}$$

és

$$-(\nabla_{\mathbf{t}_2} M)(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = \langle \mathbf{t}_1, \nabla_{\mathbf{t}_2} B(\mathbf{t}_2) - B(\nabla_{\mathbf{t}_2} \mathbf{t}_2) \rangle = -\langle \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \rangle d_{\mathbf{t}_2} \lambda = 0$$

adódik, így a P pontban $d_{\mathbf{t}_1} \lambda = 0$ bármely $\mathbf{t}_1$ vektorra, vagyis λ konstans a felületen.

Ha $\lambda = 0$, akkor a Weingarten-leképezés triviális, tehát a felület $\mathbf{m}$ normálisa konstans, amiért a felület egy sík darabja. Innentől feltesszük, hogy λ nem nulla.

Legyen $\mathbf{m}$ a felület normálisa, és toljuk el a tér koordinátázását úgy, hogy a $\lambda r(x_0, y_0) - \mathbf{m}(r(x_0, y_0))$ pont éppen az origóba essék. Az r ehhez tartozó alkalmas φ átparaméterezésével létrejövő $p = r \circ \varphi$ paraméterezésre fennáll, hogy $\lambda p(0, 0) - \mathbf{m}(p(0, 0)) = 0$.

Legyen az $\mathbf{Y} \in \tilde{T}\mathcal{F}$ felületi vektormező az, amelyre $\mathbf{Y}(p) := p$. Ekkor tetszőleges $\mathbf{X} = x^1 \partial_1 p + x^2 \partial_2 p \in \tilde{T}\mathcal{F}$ érintővektor-mezőre $d_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} = x^1 d_{\partial_1 p} p + x^2 d_{\partial_2 p} p = x^1 \partial_1 p + x^2 \partial_2 p = \mathbf{X}$, és így $d_{\mathbf{X}}(\mathbf{m} + \lambda \mathbf{Y}) = B(\mathbf{X}) + \lambda d_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} = -\lambda \mathbf{X} + \lambda \mathbf{X} = 0$, vagyis $\mathbf{m} + \lambda \mathbf{Y}$ konstans vektor, mert minden deriváltja eltűnik.

Eszerint a $\mathbf{v} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{m} + \mathbf{Y}$ vektor konstans, és $\mathbf{v}(p(0, 0)) = 0$. Akkor $\mathbf{v} = 0$, vagyis $p = \mathbf{Y} = \frac{-1}{\lambda} \mathbf{m}$, amiért $|p| = 1/|\lambda|$, és így a felület az origó középpontú $1/|\lambda|$ sugarú gömb egy darabja. ■

Hilbert-lemma. *Ha egy nem umbilikus pontban a nagyobbik főgörbület maximális, a kisebb főgörbület pedig minimális, akkor abban a pontban a felület görbülete negatív.*

Bizonyítás. Tekintsük egy $\mathcal{F}$ felület egy nem umbilikus Q pontját. Ekkor ennek egy $\mathcal{U}$ környezetében $\mathcal{F}$ egyetlen pontja sem umbilikus. Ebben a környezetben ezért választhatunk olyan r paraméterezést, hogy $Q = r(0, 0)$, r paramétervonalain az érintők éppen főgörbületi irányúak, és a Q ponton átmenő paramétervonalak ívhossz szerinti paraméterezések. Tegyük fel, hogy a Q pontban a főgörbületek $\kappa_{\min}(Q) < \kappa_{\max}(Q)$ rendre az első és a második paramétervonalra esnek. Ebből következik, hogy az $\mathcal{U}$ elemi felületen az i -edik ($i = 1, 2$) paramétervonal κ_i görbülete rendre éppen $\kappa_{\min}$ és $\kappa_{\max}$.

Ekkor a Codazzi–Mainardi egyenlet szerint $(\nabla_{\mathbf{X}} M)(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = (\nabla_{\mathbf{Y}} M)(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$, amiből kihasználva M szimmetriáját is

$$\begin{aligned} & \langle \nabla_{\partial_i r} \partial_j r, -\kappa_k \partial_k r \rangle + \langle \partial_j r, \nabla_{\partial_i r} (-\kappa_k \partial_k r) \rangle - \langle -\kappa_j \partial_j r, \nabla_{\partial_i r} \partial_k r \rangle \\ &= \langle \nabla_{\partial_i r} \partial_j r, B(\partial_k r) \rangle + \langle \partial_j r, \nabla_{\partial_i r} (B(\partial_k r)) \rangle - \langle \partial_j r, B(\nabla_{\partial_i r} \partial_k r) \rangle \\ &= d_{\partial_i r} M(\partial_j r, \partial_k r) - M(\partial_j r, \nabla_{\partial_i r} \partial_k r) \\ &= d_{\partial_j r} M(\partial_i r, \partial_k r) - M(\partial_i r, \nabla_{\partial_j r} \partial_k r) \\ &= \langle \nabla_{\partial_j r} \partial_i r, -\kappa_k \partial_k r \rangle + \langle \partial_i r, \nabla_{\partial_j r} (-\kappa_k \partial_k r) \rangle - \langle -\kappa_i \partial_i r, \nabla_{\partial_j r} \partial_k r \rangle \end{aligned}$$

adódik, amiből

$$\langle \kappa_j \partial_j r, \nabla_{\partial_i r} \partial_k r \rangle - \langle \partial_j r, \nabla_{\partial_i r} (\kappa_k \partial_k r) \rangle = \langle \kappa_i \partial_i r, \nabla_{\partial_j r} \partial_k r \rangle - \langle \partial_i r, \nabla_{\partial_j r} (\kappa_k \partial_k r) \rangle$$

és így

$$\begin{aligned} & \kappa_j \langle \partial_j r, \nabla_{\partial_i r} \partial_k r \rangle - \kappa_i \langle \partial_i r, \nabla_{\partial_j r} \partial_k r \rangle \\ &= \langle \partial_j r, \nabla_{\partial_i r} (\kappa_k \partial_k r) \rangle - \langle \partial_i r, \nabla_{\partial_j r} (\kappa_k \partial_k r) \rangle \\ &= \langle \partial_j r, \partial_i \kappa_k \partial_k r + \kappa_k \nabla_{\partial_i r} \partial_k r \rangle - \langle \partial_i r, \partial_j \kappa_k \partial_k r + \kappa_k \nabla_{\partial_j r} \partial_k r \rangle \\ &= \partial_i \kappa_k \langle \partial_j r, \partial_k r \rangle + \kappa_k \langle \partial_j r, \nabla_{\partial_i r} \partial_k r \rangle - \partial_j \kappa_k \langle \partial_i r, \partial_k r \rangle - \kappa_k \langle \partial_i r, \nabla_{\partial_j r} \partial_k r \rangle \end{aligned}$$

következik. Ha itt $i = k \neq j$, akkor az Euler-tétel szerint $\partial_j r \perp \partial_i r$, amiért

$$\begin{aligned} & \partial_j \kappa_i |\partial_i r|^2 \\ &= \kappa_i \langle \partial_j r, \nabla_{\partial_i r} \partial_i r \rangle - \kappa_i \langle \partial_i r, \nabla_{\partial_j r} \partial_i r \rangle - \kappa_j \langle \partial_j r, \nabla_{\partial_i r} \partial_i r \rangle + \kappa_i \langle \partial_i r, \nabla_{\partial_j r} \partial_i r \rangle \\ &= (\kappa_i - \kappa_j) \langle \partial_j r, \nabla_{\partial_i r} \partial_i r \rangle \end{aligned}$$

Ennek deriváltja a j -edik változó szerint

$$\begin{aligned} & \partial_j^2 \kappa_i |\partial_i r|^2 + 2 \partial_j \kappa_i \langle \partial_i r, \nabla_{\partial_j r} \partial_i r \rangle \\ &= (\partial_j \kappa_i - \partial_j \kappa_j) \langle \partial_j r, \nabla_{\partial_i r} \partial_i r \rangle + \\ & \quad + (\kappa_i - \kappa_j) (\langle \nabla_{\partial_j r} \partial_j r, \nabla_{\partial_i r} \partial_i r \rangle + \langle \partial_j r, \nabla_{\partial_j r} \nabla_{\partial_i r} \partial_i r \rangle). \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy az $\mathcal{U}$ elemi felületen a $\kappa_1 = \kappa_{\min}$ és $\kappa_2 = \kappa_{\max}$ főgörbületi függvények a Q pontban rendre minimális és maximális értékűek. Ekkor a Q pontban $\partial_i \kappa_{\min} = 0 = \partial_i \kappa_{\max}$ ($i = 1, 2$), $|\partial_i r| = 1$ és $\langle \nabla_{\partial_2 r} \partial_2 r, \nabla_{\partial_1 r} \partial_1 r \rangle = 0$ (mivel a Q ponton át mindkét paramétervonal ívhossz szerinti paraméterezésű és geodetikus görbületeik is merőlegesek egymásra), amiért a Q pontban

$$\partial_j^2 \kappa_i = (\kappa_i - \kappa_j) \langle \partial_j r, \nabla_{\partial_j r} \nabla_{\partial_i r} \partial_i r \rangle$$

érvényes, aminek következtében

$$\partial_2^2 \kappa_1 - \partial_1^2 \kappa_2 = (\kappa_1 - \kappa_2) (\langle \partial_2 r, \nabla_{\partial_2 r} \nabla_{\partial_1 r} \partial_1 r \rangle + \langle \partial_1 r, \nabla_{\partial_1 r} \nabla_{\partial_2 r} \partial_2 r \rangle).$$

Ugyanakkor

$$\begin{aligned} \langle \partial_1 r, \nabla_{\partial_1 r} \nabla_{\partial_2 r} \partial_2 r \rangle &= \langle \partial_1 r, \nabla_{\partial_1 r} \nabla_{\partial_2 r} \partial_2 r \rangle + \langle \nabla_{\partial_1 r} \partial_1 r, \nabla_{\partial_2 r} \partial_2 r \rangle \\ &= d_{\partial_1 r} \langle \partial_1 r, \nabla_{\partial_2 r} \partial_2 r \rangle = -d_{\partial_1 r} \langle \nabla_{\partial_2 r} \partial_1 r, \partial_2 r \rangle \\ &= -\langle \nabla_{\partial_1 r} \nabla_{\partial_2 r} \partial_1 r, \partial_2 r \rangle - \langle \nabla_{\partial_2 r} \partial_1 r, \nabla_{\partial_1 r} \partial_2 r \rangle \\ &= -\langle \nabla_{\partial_1 r} \nabla_{\partial_2 r} \partial_1 r, \partial_2 r \rangle - |\nabla_{\partial_2 r} \partial_1 r|^2, \end{aligned}$$

amiben $|\nabla_{\partial_2 r} \partial_1 r|$ eltűnik a Q pontban, mert $\partial_j \kappa_i |\partial_i r|^2 = (\kappa_i - \kappa_j) \langle \partial_j r, \nabla_{\partial_i r} \partial_i r \rangle$ ($i \neq j$) és így

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\partial_2 r} \partial_1 r, \partial_2 r \rangle &= -\langle \partial_1 r, \nabla_{\partial_2 r} \partial_2 r \rangle = 0, \\ \langle \nabla_{\partial_2 r} \partial_1 r, \partial_1 r \rangle &= \langle \nabla_{\partial_1 r} \partial_2 r, \partial_1 r \rangle = -\langle \partial_2 r, \nabla_{\partial_1 r} \partial_1 r \rangle = 0. \end{aligned}$$

Ennek és a Gauss-egyenletnek az alkalmazásával

$$\partial_2^2 \kappa_1 - \partial_1^2 \kappa_2 = (\kappa_1 - \kappa_2) (\langle \partial_2 r, \nabla_{\partial_2 r} \nabla_{\partial_1 r} \partial_1 r \rangle - \langle \nabla_{\partial_1 r} \nabla_{\partial_2 r} \partial_1 r, \partial_2 r \rangle) = (\kappa_1 - \kappa_2) \kappa$$

adódik, ami azonnal igazolja a lemma állítását. ■

Liebmman-tétel. *Konstans görbületű kompakt felület gömbfelület.*

Bizonyítás. Legyen az $\mathcal{F}$ felület kompakt, és tekintsük rajta az $f: \mathcal{F} \ni P \mapsto |P| \in \mathbb{R}$ skalármezőt. A kompaktság miatt f felveszi maximumát. Legyen ez a maximum R . Ez azt jelenti, hogy az $\mathcal{F}$ felület teljesen az R sugarú $\mathcal{B}_R$ zárt gömbön belül van, és a P pontban érinti e gömb $\mathcal{S}_r$ felületét. A simulókörekre gondolva, ebből következik, hogy az $\mathcal{F}$ felületnek minden a gömb középpontját és a P pontot tartalmazó síkkal vett metszete olyan görbe, melynek a P pontban legalább $1/R$ a görbülete. Eszerint az $\mathcal{F}$ görbülete a P pontban legalább $1/R^2$.

Legyen az $\mathcal{F}$ felület kompakt és konstans κ görbületű. Előbbi megfigyelésünk szerint ekkor $\kappa > 0$, a Hilbert-lemma szerint viszont emiatt nem lehet nem umbilikus pontja. Korábbi tételünk szerint így csak egy gömbfelület valamely része lehet, azonban nyílt és zárt egyszerre, tehát csakis teljes gömbfelület lehet. ■

2.10.4. Síkba hajlítható, torz- és 0 görbületű felületek

A fejezet célja az, hogy ezeket a legegyszerűbb felületeket megismerve kimutassuk, hogy valójában ezek a kategóriák megegyeznek.

Definíció. Egy paraméterezést *síkba hajlítható paraméterezésnek* nevezünk, ha a koordináta-környezetben minden görbének a hossza pontosan akkora, mint a neki a paraméter-tartományban megfelelő görbe hossza.

Egy felületet *síkba hajlítható felületnek* nevezünk, ha minden pontjának létezik síkba hajlítható paraméterezésű koordináta-környezete.

Definíció. Egy paraméterezést *normális bázisú paraméterezésnek* nevezünk, ha $\partial_1 r$ és $\partial_2 r$ az érintősík ortonormált bázisa.

Egy felületet *normális bázisú felületnek* nevezünk, ha minden pontjának létezik koordináta-környezete normális bázisú paraméterezéssel.

Tétel. Egy paraméterezés akkor és csak akkor síkba hajlítható, ha normális bázisú.

Bizonyítás. Legyen a $G = r \circ g$ felületi görbe az $r: T(\subset \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméterezés paramétertartományában lévő $g: [a, b] \rightarrow T$ görbének megfelelő.

Ha r normális bázisú, akkor

$$\begin{aligned} \int_a^b |\dot{G}(s)| ds &= \int_a^b \left| \frac{d(r(g(s)))}{ds} \right| ds = \int_a^b |\dot{r}(g(s)) \dot{g}(s)| ds \\ &= \int_a^b |\partial_1 r(g(s)) \dot{g}_1(s) + \partial_2 r(g(s)) \dot{g}_2(s)| ds = \int_a^b \sqrt{\dot{g}_1^2(s) + \dot{g}_2^2(s)} ds \\ &= \int_a^b |\dot{g}(s)| ds, \end{aligned}$$

vagyis r síkbahajlítható.

Ha r síkbahajlítható, akkor a fenti számolásnak megfelelően

$$\begin{aligned} \int_a^b |\partial_1 r(g(s)) \dot{g}_1(s) + \partial_2 r(g(s)) \dot{g}_2(s)| ds &= \int_a^b |\dot{G}(s)| ds = \int_a^b |\dot{g}(s)| ds \\ &= \int_a^b \sqrt{\dot{g}_1^2(s) + \dot{g}_2^2(s)} ds \end{aligned}$$

bármely g görbére. Ha olyan g görbét választunk, melyre g_1 konstans, és $\dot{g}_2 = 1$, akkor ebből $\int_a^b |\partial_2 r(g(s))| ds = b - a$ adódik, ami igazolja, hogy $|\partial_2 r| = 1$. Hasonlóan igazoljuk, hogy $|\partial_1 r| = 1$. Eszerint a fenti képletből, azt kapjuk, hogy

$$\int_a^b \sqrt{\dot{g}_1^2(s) + \dot{g}_2^2(s) + 2\langle \partial_1 r(g(s)), \partial_2 r(g(s)) \rangle \dot{g}_1(s) \dot{g}_2(s)} ds = \int_a^b \sqrt{\dot{g}_1^2(s) + \dot{g}_2^2(s)} ds.$$

Ebből a b szerinti deriválással és egyszerű átalakítással jutunk a $\langle \partial_1 r, \partial_2 r \rangle = 0$ egyenlőséghez, mely így már igazolja, hogy r normális bázisú. ■

Következmény. *Egy felület akkor és csak akkor síkba hajlítható, ha normális bázisú.*

Tétel. *Egy felület akkor és csak akkor normális bázisú, ha görbülete eltűnik.*

Bizonyítás. Ha $\mathcal{F}$ normális bázisú, legyen $r: T(\subset \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ egy normális bázisú paraméterezése. Ekkor $\partial_1 r$ és $\partial_2 r$ ortonormált bázist alkot az érintősíkban, ezért a Gauss-féle Theorema Egregium miatt

$$\kappa = \langle R(\partial_2 r, \partial_1 r) \partial_1 r, \partial_2 r \rangle = \langle \nabla_{\partial_2 r} \nabla_{\partial_1 r} \partial_1 r - \nabla_{\partial_1 r} \nabla_{\partial_2 r} \partial_1 r - \nabla_{[\partial_2 r, \partial_1 r]} \partial_1 r, \partial_2 r \rangle.$$

Figyeljük meg, hogy $[\partial_1 r, \partial_2 r] = 0$ és $\nabla_{\partial_2 r} \partial_1 r = 0$, mert $\partial_1 r \perp \nabla_{\partial_2 r} \partial_1 r = \nabla_{\partial_1 r} \partial_2 r \perp \partial_2 r$, hiszen $\partial_1 r$ és $\partial_2 r$ ortonormált. Ezzel folytatva a számolást

$$\begin{aligned} \kappa &= \langle \nabla_{\partial_2 r} \nabla_{\partial_1 r} \partial_1 r, \partial_2 r \rangle = d_{\partial_2 r} \langle \nabla_{\partial_1 r} \partial_1 r, \partial_2 r \rangle - \underbrace{\langle \nabla_{\partial_1 r} \partial_1 r, \nabla_{\partial_2 r} \partial_2 r \rangle}_{=0} \\ &= d_{\partial_2 r} d_{\partial_1 r} \underbrace{\langle \partial_1 r, \partial_2 r \rangle}_{=0} - d_{\partial_2 r} \underbrace{\langle \partial_1 r, \nabla_{\partial_1 r} \partial_2 r \rangle}_{=0} = 0, \end{aligned}$$

amit bizonyítani akartunk.

Ha a görbület eltűnik, mutatnunk kell egy normális bázisú paraméterezést. Mivel $\kappa = 0$, a párhuzamos eltolás nem függ az úttól egyetlen koordináta-környezeten belül sem. Legyen $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ ortonormált bázis a $P \in \mathcal{F}$ pontban lévő $T_P \mathcal{F}$ érintősíkban. Párhuzamos eltolással az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorokat minden pontba elmozgatva olyan $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ vektormezőkhöz jutunk, melyek ortonormált bázist alkotnak minden érintősíkban.

Mivel $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ ugyanakkor minden görbén párhuzamos vektormező, fennáll a $\nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{Y} = 0$ azonosság minden $\mathbf{Z}$ vektormezőre, amiért $\operatorname{div} \mathbf{X} = \operatorname{div} \mathbf{Y} = 0$. A Stokes-tétel szerint tehát

$$\oint_{\partial \mathcal{D}} \langle \mathbf{X}, \mathbf{n} \rangle = \oint_{\partial \mathcal{D}} \langle \mathbf{Y}, \mathbf{n} \rangle = 0.$$

Mivel bármely görbe mentén a $\mathbf{t}$ érintő és az $\mathbf{n}$ felületi normális vektor is ortonormált bázist alkot, nyilván $\langle \mathbf{X}, \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{Y}, \mathbf{n} \rangle$, és $\langle \mathbf{Y}, \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{X}, \mathbf{n} \rangle$. Eszerint

$$\oint_{\partial \mathcal{D}} \langle \mathbf{X}, \mathbf{t} \rangle = \oint_{\partial \mathcal{D}} \langle \mathbf{Y}, \mathbf{t} \rangle = 0.$$

Minden $Q \in \mathcal{F}$ ponthoz vegyünk egy olyan G görbét, mely összeköti a P ponttal, és vegyük az

$$x(Q) = \int_G \langle \mathbf{X}, \mathbf{t} \rangle ds \quad \text{és} \quad y(Q) = \int_G \langle \mathbf{Y}, \mathbf{t} \rangle ds,$$

értékeket. Az x és y skalár nem függ a görbe választásától, hiszen az integrandusz integrálja minden zárt görbén nulla, tehát x és y jól definiált skalármezők az $\mathcal{F}$ felületen.

Állítjuk, hogy a P egy kis környezetében a

$$\bar{p}: \mathcal{F} \ni Q \mapsto \bar{p}(Q) = (x(Q), y(Q)) \in \mathbb{R}^2$$

leképezés injektív.

Az inverzfüggvény-tétel értelmében elegendő belátnunk, hogy a $\bar{p}$ által indukált $\bar{p}_*: T_P \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezés nem elfajuló. Azt már láttuk, hogy $\bar{p}_* = \dot{\bar{p}}(P)$, ezért $\bar{p}$ deriváltját kell meghatároznunk. Bármely $\mathbf{v} \in T_P \mathcal{F}$ érintővektorhoz létezik olyan G görbe a felületen, melyre $P = G(0)$ és $\dot{G}(0) = \mathbf{v}$. Ekkor

$$\bar{p}_1(G(t)) = \int_0^t \langle \mathbf{X}(G(s)), \dot{G}(s) \rangle ds, \quad \text{és} \quad \bar{p}_2(G(t)) = \int_0^t \langle \mathbf{Y}(G(s)), \dot{G}(s) \rangle ds,$$

amiből t szerinti deriválással a $t = 0$ pontban

$$d_{\mathbf{v}} \bar{p}_1(P) = \langle \mathbf{X}(P), \mathbf{v} \rangle, \quad \text{és} \quad d_{\mathbf{v}} \bar{p}_2(P) = \langle \mathbf{Y}(P), \mathbf{v} \rangle. \quad (2.10.2)$$

Mivel ez minden $\mathbf{v}$ vektorra érvényes, a

$$\dot{\bar{p}}(P) = \begin{pmatrix} d_{\partial_1 r} \bar{p}_1(P) & d_{\partial_2 r} \bar{p}_1(P) \\ d_{\partial_1 r} \bar{p}_2(P) & d_{\partial_2 r} \bar{p}_2(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{X}(P), \partial_1 r \rangle & \langle \mathbf{X}(P), \partial_2 r \rangle \\ \langle \mathbf{Y}(P), \partial_1 r \rangle & \langle \mathbf{Y}(P), \partial_2 r \rangle \end{pmatrix}$$

egyenlőségekhez jutunk, ahol a mátrix nem elfajuló, mert $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ ortonormált bázist alkot. Tehát $\bar{p}$ a P pont körül invertálható.

Legyen p a $\bar{p}$ inverze, melyre tehát $p(x(Q), y(Q)) = Q$. Az inverzfüggvény-tétel értelmében p deriválható, így a $\bar{p}(p(x, y)) = (x, y)$ azonosságot deriválva és a (2.10.2) felhasználásával arra jutunk, hogy

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= (\bar{p}(p(x, y)))' = \begin{pmatrix} \partial_1(\bar{p}_1(p(x, y))) & \partial_2(\bar{p}_1(p(x, y))) \\ \partial_1(\bar{p}_2(p(x, y))) & \partial_2(\bar{p}_2(p(x, y))) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_{\partial_1 p(x, y)} \bar{p}_1 & d_{\partial_2 p(x, y)} \bar{p}_1 \\ d_{\partial_1 p(x, y)} \bar{p}_2 & d_{\partial_2 p(x, y)} \bar{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{X}(p(x, y)), \partial_1 p \rangle & \langle \mathbf{X}(p(x, y)), \partial_2 p \rangle \\ \langle \mathbf{Y}(p(x, y)), \partial_1 p \rangle & \langle \mathbf{Y}(p(x, y)), \partial_2 p \rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Eszerint $\mathbf{X} = \partial_1 p$ és $\mathbf{Y} = \partial_2 p$, vagyis $\partial_1 p$ és $\partial_2 p$ ortonormált bázis a felület érintősíkjaiban, tehát $\mathcal{F}$ normális bázisú. Ezzel a tétel bizonyítása teljes. ■

Definíció. Ha egy felület minden pontján áthalad egy felületi egyenes, akkor azt *vonalfelületnek* nevezzük. *Torzfelületnek* nevezünk egy vonalfelületet, ha az egyenesek mentén az érintősíkok párhuzamosak.

Torzfelületre a legegyszerűbb példa a kúp és a henger, míg az egyköpenyű hiperboloid (nyeregfelület) olyan vonalfelület, mely nem torz.

Tétel. *Egy felület akkor és csak akkor torz, ha görbülete eltűnik.*

Bizonyítás. Ha az $\mathcal{F}$ felület torz, akkor bármely P pontján átmenő egyenes $\mathbf{X}$ irányvektorára $B_P(\mathbf{X}) = d_{\mathbf{X}}\mathbf{m} = 0$, ahol $\mathbf{m}$ a felületi normális, hiszen ha az érintősíkok párhuzamosak, akkor a normális vektorok is párhuzamosak. Eszerint a Weingarten-leképezés elfajuló, tehát $\kappa = \det B_P = 0$, ahogy állítottuk.

Ha $\kappa = 0$, akkor $\det B = 0$ minden pontban, és így létezik olyan normált $\mathbf{X}$ vektormező, melyre $B(\mathbf{X}) = d_{\mathbf{X}}\mathbf{m} = 0$.

Mivel $\langle d_{\mathbf{X}}\mathbf{X}, \mathbf{m} \rangle = -\langle \mathbf{X}, d_{\mathbf{X}}\mathbf{m} \rangle = 0$, az $\mathbf{Y} = d_{\mathbf{X}}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{X}$ egy felületérintő vektormező.

Ha $\mathbf{Y} \equiv \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{X}$ integrálgörbéinek görbülete eltűnik, tehát ezek egyenesek, tehát az $\mathcal{F}$ felület torz, hiszen $d_{\mathbf{X}}\mathbf{m} = 0$ is teljesül.

Ha $\mathbf{Y} \neq \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ ortogonális bázist alkot az érintősíkban, hiszen $\mathbf{X}$ normált, vagyis $|\mathbf{X}| = 1$, amiért $d_{\mathbf{X}}\mathbf{X} \perp \mathbf{X}$. A Codazzi–Mainardi-egyenlet kifejtéséből

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{X}}(M(\mathbf{Y}, \mathbf{X})) - M(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{X}) - M(\mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{X}) \\ = (\nabla_{\mathbf{X}}M)(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = (\nabla_{\mathbf{Y}}M)(\mathbf{X}, \mathbf{X}) \\ = d_{\mathbf{Y}}(M(\mathbf{X}, \mathbf{X})) - M(\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}, \mathbf{X}) - M(\mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}) \end{aligned}$$

következik. Mivel $B(\mathbf{X}) = 0$, ebből $M(\mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{X}) = 0$, vagyis $\langle \mathbf{Y}, B(\mathbf{Y}) \rangle = 0$ adódik. Mivel $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ ortogonális bázist alkot, ebből $B(\mathbf{Y}) = k \cdot \mathbf{X}$ következik valamely k skalármezőre. Eszerint $k = \langle \mathbf{X}, B(\mathbf{Y}) \rangle = M(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = M(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = \langle \mathbf{Y}, B(\mathbf{X}) \rangle = 0$, vagyis $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \ker B$. Ez azt jelenti, hogy a Weingarten-leképezés nulla, tehát az $\mathbf{m}$ felületi normális konstans, vagyis $\mathcal{F}$ egy síkdarab. ■

Összefoglalva e szakasz eredményeit, kimondhatjuk a következőt.

Tétel. *Egy felület alábbi tulajdonságai ekvivalensek:*

- (1) *síkba hajlítható,*
- (2) *normális bázisú,*
- (3) *torz,*
- (4) *0 görbületű.*

2.10.5. Aszimptotikus görbék

A geodetikusokat a geodetikus görbület eltűnésével definiáltuk. Felvetődik, hogy miféle görbékhez jutunk, ha a normális görbület eltűnését tételezzük fel.

Definíció. Az $\mathcal{F}$ felületen a G görbét *aszimptotikus görbének* nevezzük, ha $\kappa_m = M(\dot{G}, \dot{G}) = 0$.

Bár e meghatározás rendkívül hasonló a geodetikuskéhoz, az aszimptotikus görbék viselkedése jelentősen eltér, hiszen Meusnier tétele szerint ezen görbék simulósíkjá minden pontban megegyezik a felület érintősíkjával.

Tétel. *Egy nem sík felület valamely pontján át pontosan egy, illetve kettő aszimptotikus görbe megy át, ha abban a pontban $\kappa = 0$, illetve $\kappa < 0$. Ha $\kappa > 0$, akkor aszimptotikus görbe nem megy át a ponton.*

Bizonyítás. Válasszunk olyan r paraméterezést, hogy a $\partial_1 r(0, 0)$, $\partial_2 r(0, 0)$ ortonormált bázison a B Weingarten-leképezés $\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$ mátrixában $b_{1,1} \neq 0 \neq b_{2,2}$ teljesüljön. Ha $G = r \circ g$, akkor $0 = -M(\dot{G}, \dot{G}) = b_{1,1}\dot{g}_1^2 + 2b_{1,2}\dot{g}_1\dot{g}_2 + b_{2,2}\dot{g}_2^2$ egy másodfokú differenciálegyenlet a g_1 és g_2 függvényekre. Nyilván $\dot{g}_1$ vagy $\dot{g}_2$ nem nulla. Mondjuk, az utóbbi nem nulla, így a $0 = b_{1,1}(\dot{g}_1/\dot{g}_2)^2 + 2b_{1,2}(\dot{g}_1/\dot{g}_2) + b_{2,2}$ egyenletből a megoldóképlet azt adja, hogy

$$\frac{\dot{g}_1}{\dot{g}_2} = \frac{-b_{1,2} \pm \sqrt{b_{1,2}^2 - b_{1,1}b_{2,2}}}{b_{1,1}}.$$

Az egy pontból induló aszimptotikus görbék száma ezért az diszkrimináns előjelen múlik, amely a $b_{1,2}^2 - b_{1,1}b_{2,2} = -\det B = -\kappa$ egyenlőség alapján az adott pont görbületével ellenkező előjelű. Ez igazolja a tételt. ■

Figyeljük meg, hogy bármilyen paraméterezésre

$$\begin{aligned} \langle \partial_1 r \times \partial_2 r, \partial_1 r \times \partial_2 r \rangle &= \langle (\partial_1 r \times \partial_2 r) \times \partial_1 r, \partial_2 r \rangle \\ &= \langle -\langle \partial_1 r, \partial_2 r \rangle \partial_1 r + \langle \partial_1 r, \partial_1 r \rangle \partial_2 r, \partial_2 r \rangle = \det g, \end{aligned}$$

vagyis $\partial_1 r \times \partial_2 r = \sqrt{\det g} \cdot \mathbf{m}$, ahol g az első alapmennyiség. Ezt is fel fogjuk használni az alábbiakban.

Tétel. *A konstans $\kappa < 0$ görbületű felületen, ha az r paraméterezés minden paramétervonalra aszimptotikus, és $r(0, \cdot)$ és $r(\cdot, 0)$ egy-egy ívhossz szerint paraméterezett aszimptotikus görbe a $P = r(0, 0) \in \mathcal{F}$ ponton át, akkor r mindkét változójában ívhossz szerinti paraméterezésű.*

Bizonyítás. Felhasználva a tétel előtti észrevételt

$$\begin{aligned} d_{\partial_1 r}(\mathbf{m} \times d_{\partial_2 r} \mathbf{m}) - d_{\partial_2 r}(\mathbf{m} \times d_{\partial_1 r} \mathbf{m}) &= 2d_{\partial_1 r} \mathbf{m} \times d_{\partial_2 r} \mathbf{m} = 2B_P(\partial_1 r) \times B_P(\partial_2 r) \\ &= 2(b_{11}\partial_1 r + b_{12}\partial_2 r) \times (b_{21}\partial_1 r + b_{22}\partial_2 r) \\ &= 2\det B_P(\partial_1 r \times \partial_2 r) = 2\kappa\sqrt{\det g} \cdot \mathbf{m}, \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\sqrt{\det g} \mathbf{m} \times d_{\partial_1 r} \mathbf{m} &= (\partial_1 r \times \partial_2 r) \times d_{\partial_1 r} \mathbf{m} = \langle \partial_1 r, d_{\partial_1 r} \mathbf{m} \rangle \partial_2 r - \langle d_{\partial_1 r} \mathbf{m}, \partial_2 r \rangle \partial_1 r \\ &= (M \partial_1 r - L \partial_2 r),\end{aligned}$$

valamint ugyanígy

$$\mathbf{m} \times d_{\partial_2 r} \mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{\det g}} (N \partial_1 r - M \partial_2 r),$$

ahol $L = M(\partial_1 r, \partial_1 r)$, $M = M(\partial_1 r, \partial_2 r)$, és $N = M(\partial_2 r, \partial_2 r)$.

Beírva legelső formulánkba a két utóbbi nyertet,

$$2\kappa \sqrt{\det g} \cdot \mathbf{m} = d_{\partial_1 r} \left(\frac{N}{\sqrt{\det g}} \partial_1 r - \frac{M}{\sqrt{\det g}} \partial_2 r \right) - d_{\partial_2 r} \left(\frac{M}{\sqrt{\det g}} \partial_1 r - \frac{L}{\sqrt{\det g}} \partial_2 r \right)$$

adódik. Mivel $r(p, \cdot)$ és $r(\cdot, q)$ is aszimptotikus, az ilyen görbékre vonatkozó differenciálegyenlet szerint $L = N = 0$. Továbbá

$$\kappa = \det B = \det g^{-1} \det(gB) = \frac{1}{\det g} \cdot \det(M) = \frac{-M^2}{\det g}.$$

Ezzel egyszerűsítve, előző formulánk a

$$2\kappa \sqrt{\det g} \cdot \mathbf{m} = \pm \sqrt{-\kappa} \cdot (-d_{\partial_1 r} \partial_2 r - d_{\partial_2 r} \partial_1 r) = \pm 2\sqrt{-\kappa} d_{\partial_1 r} \partial_2 r = \pm 2\sqrt{-\kappa} \partial_1 \partial_2 r$$

formát veszi fel. Eszerint $\langle \partial_1 r, \partial_1 \partial_2 r \rangle = \langle \partial_2 r, \partial_1 \partial_2 r \rangle = 0$, vagyis $\partial_2 \langle \partial_1 r, \partial_1 r \rangle = \partial_1 \langle \partial_2 r, \partial_2 r \rangle = 0$, tehát $|\partial_1 r(p, q)|$ nem függ q -tól, vagyis $|\partial_1 r(p, q)| = |\partial_1 r(p, 0)| = 1$, és hasonlóan $|\partial_2 r(p, q)|$ sem függ p -tól, amiért $|\partial_2 r(p, q)| = |\partial_2 r(0, q)| = 1$.

Megállapíthatjuk tehát, hogy $|\partial_1 r| = |\partial_2 r| = 1$, vagyis minden paramétervonal ívhossz szerinti paraméterezését, ahogy állítottuk. ■

Tétel. *A konstans $\kappa < 0$ görbületű felületen egy aszimptotikus görbék által határolt $\mathcal{D}$ négyszög $F(\mathcal{D})$ felszíne $(2\pi - \sum_{i=1}^4 \alpha_i)/\kappa$, ahol α_i az i -edik metszéspontban a belső szög.*

Bizonyítás. Előző eredményünk szerint ezt a négy aszimptotikus görbét tekinthetjük egy ívhossz szerint paraméterezett aszimptotikus paramétervonalakkal rendelkező r paraméterezés négy paramétervonalának. Legyen a négy töréspont $r(0, 0)$, $r(a, 0)$, $r(a, b)$ és $r(0, b)$.

Az előbbi bizonyítás szerint egyrészt

$$\begin{aligned}F(\mathcal{D}) &= \int_{\mathcal{D}} dF = \int_0^a \int_0^b |\partial_1 r(x, y) \times \partial_2 r(x, y)| dx dy = \int_0^a \int_0^b \sqrt{\det g(x, y)} dx dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\kappa}} \int_0^a \int_0^b |\partial_1 \partial_2 r(x, y)| dx dy,\end{aligned}$$

másrészt $\pm \partial_1 \partial_2 r = \sqrt{-\kappa} \partial_1 r \times \partial_2 r$, amiből

$$\langle \partial_1 \partial_2 r, \partial_1 \partial_2 r \rangle = -\kappa \langle \partial_1 r \times \partial_2 r, \partial_1 r \times \partial_2 r \rangle = -\kappa(1 - \langle \partial_1 r, \partial_2 r \rangle^2)$$

a kifejtési szabály alapján. Az itt kapott második egyenlőséget deriválva az első és a második változó szerint,

$$\begin{aligned} 2\langle \partial_1 \partial_1 r \times \partial_2 r, \partial_1 r \times \partial_2 r \rangle &= -2\langle \partial_1 r, \partial_2 r \rangle \langle \partial_1 \partial_1 r, \partial_2 r \rangle, \\ 2\langle \partial_1 r \times \partial_2 \partial_2 r, \partial_1 r \times \partial_2 r \rangle &= -2\langle \partial_1 r, \partial_2 r \rangle \langle \partial_1 r, \partial_2 \partial_2 r \rangle. \end{aligned}$$

Ezeket összeszorozva, a bal oldali vektorok egyirányúságából

$$\begin{aligned} \langle \partial_1 \partial_1 r \times \partial_2 r, \partial_1 r \times \partial_2 r \rangle \langle \partial_1 r \times \partial_2 \partial_2 r, \partial_1 r \times \partial_2 r \rangle \\ = \langle \partial_1 \partial_1 r \times \partial_2 r, \partial_1 r \times \partial_2 \partial_2 r \rangle \langle \partial_1 r \times \partial_2 r, \partial_1 r \times \partial_2 r \rangle \\ = \langle \partial_1 r, \partial_2 r \rangle^2 \langle \partial_1 \partial_1 r, \partial_2 r \rangle \langle \partial_1 r, \partial_2 \partial_2 r \rangle, \end{aligned}$$

majd a kifejtési szabályt alkalmazva

$$-\langle \partial_1 \partial_1 r, \partial_2 \partial_2 r \rangle (1 - \langle \partial_1 r, \partial_2 r \rangle^2) = \langle \partial_1 r, \partial_2 r \rangle \langle \partial_1 \partial_1 r, \partial_2 r \rangle \langle \partial_1 r, \partial_2 \partial_2 r \rangle$$

adódik.

Legyen $\cos \omega = \langle \partial_1 r, \partial_2 r \rangle$, vagyis ω a két paramétervonal bezárt szöge. A fentieket alkalmazva

$$\begin{aligned} \partial_1 \partial_2 \omega &= -\partial_2 \left(\frac{\partial_1 \langle \partial_1 r, \partial_2 r \rangle}{\sqrt{1 - \langle \partial_1 r, \partial_2 r \rangle^2}} \right) = -\partial_2 \left(\frac{\langle \partial_1 \partial_1 r, \partial_2 r \rangle}{\sqrt{1 - \langle \partial_1 r, \partial_2 r \rangle^2}} \right) \\ &= \frac{-\langle \partial_2 \partial_1 \partial_1 r, \partial_2 r \rangle - \langle \partial_1 \partial_1 r, \partial_2 \partial_2 r \rangle}{\sqrt{1 - \langle \partial_1 r, \partial_2 r \rangle^2}} - \frac{\langle \partial_1 \partial_1 r, \partial_2 r \rangle \langle \partial_1 r, \partial_2 \partial_2 r \rangle \langle \partial_1 r, \partial_2 r \rangle}{\left(\sqrt{1 - \langle \partial_1 r, \partial_2 r \rangle^2} \right)^3}. \end{aligned}$$

Mivel r mindkét paramétervonalra ívhossz szerint paraméterezett, $\partial_1 \partial_1 r$ az első, $\partial_2 \partial_2 r$ a második paramétervonal görbületi vektora. Ugyanakkor a megfelelő paramétervonalak egységnyi $\partial_1 r$ és $\partial_2 r$ érintői ezekre merőlegesek, ezért $\kappa_1 \kappa_2 \cos \omega = \kappa_1 \kappa_2 \langle \partial_1 r, \partial_2 r \rangle = \pm \langle \partial_1 \partial_1 r, \partial_2 \partial_2 r \rangle$, és $\kappa_1 \kappa_2 \sin \omega = \pm \kappa_2 \langle \partial_1 \partial_1 r, \partial_2 r \rangle = \pm \kappa_1 \langle \partial_1 r, \partial_2 \partial_2 r \rangle$, ahol $\kappa_1 = |\partial_1 \partial_1 r|$, $\kappa_2 = |\partial_2 \partial_2 r|$, és mindig az irányításnak megfelelő előjelet kell választani. Figyelembe véve, hogy $\langle \partial_2 \partial_1 \partial_1 r, \partial_2 r \rangle = -\langle \partial_2 \partial_1 r, \partial_1 \partial_2 r \rangle$, ezekből

$$\begin{aligned} \partial_1 \partial_2 \omega &= \frac{\langle \partial_2 \partial_1 r, \partial_1 \partial_2 r \rangle}{\sqrt{1 - \langle \partial_1 r, \partial_2 r \rangle^2}} - \frac{\pm \kappa_1 \kappa_2 \cos \omega}{\sin \omega} + \frac{\pm \kappa_1 \sin \omega \kappa_2 \sin \omega \cos \omega}{\sin^3 \omega} \\ &= \frac{-\kappa(1 - \langle \partial_1 r, \partial_2 r \rangle^2)}{\sqrt{1 - \langle \partial_1 r, \partial_2 r \rangle^2}} = -\kappa \sqrt{1 - \langle \partial_1 r, \partial_2 r \rangle^2} = \sqrt{-\kappa} |\partial_1 \partial_2 r| \end{aligned}$$

adódik.

Tehát $\sqrt{-\kappa}|\partial_1\partial_2r| = \partial_1\partial_2\omega$, amit behelyettesítve a keresett integrálba:

$$\begin{aligned} F(\mathcal{D}) &= \frac{1}{-\kappa} \int_0^b \int_0^a \partial_1\partial_2\omega(x,y) dx dy = \frac{\omega(0,0) + \omega(a,b) - \omega(a,0) - \omega(0,b)}{-\kappa} \\ &= \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - 2\pi}{-\kappa}, \end{aligned}$$

ahogy állítottuk. ■

Fontos következménye tételünknek, hogy egy aszimptotikus négyszög felszíne nem lehet nagyobb, mint $2\pi/(-\kappa)$.

2.10.6. Az $(x, y, f(x, y))$ felület jellemzői

Ebben a szakaszban az a cél, hogy példát lássunk a kifejtett elmélet használatára, de ennél mégis többről van szó, mert lokálisan minden felület paraméterezhető egy függvény grafikonjaként, sőt a gyakorlatban legtöbbször ez fordul elő.

Vegyük tehát az (x, y) -síkon az origó közelében értelmezett f differenciálható függvényt, és nézzük a grafikonja által meghatározott $r(x, y) = (x, y, f(x, y))$ paraméterezésű felületet.

Az $r(x_0, y_0)$ ponton átmenő paramétervonalakat

$$r(x_0+t, y_0) = (x_0+t, y_0, f(x_0+t, y_0)) \quad \text{és} \quad r(x_0, y_0+t) = (x_0, y_0+t, f(x_0, y_0+t))$$

adja meg. Ezek érintői, vagyis deriváltjai

$$\partial_1 r(x_0, y_0) = (1, 0, \partial_1 f(x_0, y_0)) \quad \text{és} \quad \partial_2 r(x_0, y_0) = (0, 1, \partial_2 f(x_0, y_0))$$

az érintősík két bázisvektora. A felületi normálist ezek normált vektoriális szorzata adja:

$$\mathbf{m} = (-\partial_1 f(x_0, y_0), -\partial_2 f(x_0, y_0), 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \partial_1 f^2 + \partial_2 f^2}}.$$

Az érintősík elemeit a $\mathbf{v} = (\lambda, \mu) = (\lambda, \mu, \lambda\partial_1 f(x_0, y_0) + \mu\partial_2 f(x_0, y_0)) \in T_{r(x_0, y_0)}\mathcal{F}$ alakban írhatjuk fel, és nagyon könnyű olyan G felületi görbét is találni, melynek ez az érintője:

$$G(t) = r(x_0 + \lambda t, y_0 + \mu t) = (x_0 + \lambda t, y_0 + \mu t, f(x_0 + \lambda t, y_0 + \mu t)).$$

Ha most $g: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ egy differenciálható skalármező, akkor $\mathbf{v}$ iránymenti deriváltja

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{v}}g &= \frac{d}{dt} (g \circ r(x_0 + \lambda t, y_0 + \mu t)) = \lambda(\partial_1(g \circ r)(x_0, y_0)) + \mu(\partial_2(g \circ r)(x_0, y_0)) \\ &= \langle \mathbf{v}, \text{grad}(g \circ r) \rangle. \end{aligned}$$

Ha $\mathbf{X}$ egy vektormező, akkor a $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X}$ éppen a $d_{\mathbf{v}}\mathbf{X} = (d_{\mathbf{v}}x^1, d_{\mathbf{v}}x^2, d_{\mathbf{v}}x^3)$ vektor merőleges vetülete az érintősíkra, ami a felületi normálisra vett $\mathbf{m}\langle d_{\mathbf{v}}\mathbf{X}, \mathbf{m} \rangle$ vetület $d_{\mathbf{v}}\mathbf{X}$ vektorból való $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X} = d_{\mathbf{v}}\mathbf{X} - \mathbf{m}\langle d_{\mathbf{v}}\mathbf{X}, \mathbf{m} \rangle$ kivonásával számolható.

Ebből már ki tudjuk számítani a $\Gamma_{i,j}^k$ Christoffel-szimbólumokat, hiszen

$$\langle d_{\partial_1 r} \partial_2 r, \mathbf{m} \rangle = \langle \partial_1 \partial_2 r, \mathbf{m} \rangle = \frac{\partial_1 \partial_2 f}{\sqrt{1 + \partial_1 f^2 + \partial_2 f^2}},$$

amiből

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_1 r} \partial_2 r &= d_{\partial_1 r} \partial_2 r - \mathbf{m}\langle d_{\partial_1 r} \partial_2 r, \mathbf{m} \rangle \\ &= (0, 0, \partial_1 \partial_2 f) - \frac{\partial_1 \partial_2 f}{1 + \partial_1 f^2 + \partial_2 f^2} (-\partial_1 f, -\partial_2 f, 1) \\ &= \frac{\partial_1 \partial_2 f}{1 + \partial_1 f^2 + \partial_2 f^2} (\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_1 f^2 + \partial_2 f^2) \\ &= \frac{\partial_1 f \partial_1 \partial_2 f}{1 + \partial_1 f^2 + \partial_2 f^2} \partial_1 r + \frac{\partial_2 f \partial_1 \partial_2 f}{1 + \partial_1 f^2 + \partial_2 f^2} \partial_2 r, \end{aligned}$$

tehát

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{\partial_1 f \cdot \partial_1 \partial_2 f}{1 + \partial_1 f^2 + \partial_2 f^2}, \quad \text{és} \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{\partial_2 f \cdot \partial_1 \partial_2 f}{1 + \partial_1 f^2 + \partial_2 f^2},$$

és hasonlóan

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{\partial_1 f \partial_1^2 f}{1 + \partial_1 f^2 + \partial_2 f^2}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{\partial_2 f \partial_1^2 f}{1 + \partial_1 f^2 + \partial_2 f^2}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{\partial_1 f \partial_2^2 f}{1 + \partial_1 f^2 + \partial_2 f^2}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{\partial_2 f \partial_2^2 f}{1 + \partial_1 f^2 + \partial_2 f^2}. \end{aligned}$$

A Weingarten-leképezés mátrixát a $d_{\partial_1 r} \mathbf{m}$ bázisbontása határozza meg. Mint-hogy az $\mathbf{m}$ felületi normálist már kiszámoltuk, most egyszerűen alkalmaznunk kell az eddigieket. A $d_{\partial_1 r} \mathbf{m} = \partial_1 \mathbf{m}$ összefüggés alapján

$$\begin{aligned} d_{\partial_1 r} \mathbf{m} &= \partial_1 r \cdot \frac{-\partial_1^2 f + a \partial_2 f}{\sqrt{1 + \partial_1 f^2 + \partial_2 f^2}^3} + \partial_2 r \cdot \frac{-\partial_1 \partial_2 f - a \partial_1 f}{\sqrt{1 + \partial_1 f^2 + \partial_2 f^2}^3}, \\ d_{\partial_2 r} \mathbf{m} &= \partial_1 r \cdot \frac{-\partial_2 \partial_1 f + b \partial_2 f}{\sqrt{1 + \partial_1 f^2 + \partial_2 f^2}^3} + \partial_2 r \cdot \frac{-\partial_2^2 f - b \partial_1 f}{\sqrt{1 + \partial_1 f^2 + \partial_2 f^2}^3}, \end{aligned}$$

ahol $a = \partial_1 f \cdot \partial_1 \partial_2 f - \partial_2 f \cdot \partial_1^2 f$, és $b = \partial_1 f \cdot \partial_2^2 f - \partial_2 f \cdot \partial_2 \partial_1 f$. A $(\partial_1 r, \partial_2 r)$ bázisban tehát felírható a Weingarten-leképezés mátrixa.

A Weingarten-leképezés mátrixának determinánsa adja a Gauss-féle szorzat-görbületet, tehát

$$\kappa = \frac{\det \begin{pmatrix} -\partial_1^2 f + a\partial_2 f & -\partial_1 \partial_2 f - a\partial_1 f \\ -\partial_1 \partial_2 f + b\partial_2 f & -\partial_2^2 f - b\partial_1 f \end{pmatrix}}{(1 + \partial_1 f^2 + \partial_2 f^2)^3}.$$

Kicsit munkás, de mechanikus számolás adja ebből, hogy

$$\kappa = \frac{\partial_1^2 f \partial_2^2 f - \partial_1 \partial_2 f^2}{(1 + \partial_1 f^2 + \partial_2 f^2)^2}.$$

A Minkowski-féle összeggörbület a Weingarten-leképezés nyoma, vagyis venni kell a főátló két elemének összegét. Ez most az olvasóra marad.

Befejezésül kiszámoljuk, hogy az érintősíkon a térbeli skaláris szorzás milyen $g\langle \cdot, \cdot \rangle$ első alapmenyiséget generál az érintősík $(\partial_1 r, \partial_2 r)$ bázisbontásában:

$$\begin{aligned} g\langle \alpha \partial_1 r + \beta \partial_2 r, \lambda \partial_1 r + \mu \partial_2 r \rangle &= \alpha \lambda (1 + \partial_1 f^2) + \beta \mu (1 + \partial_2 f^2) + (\lambda \beta + \mu \alpha) \partial_1 f \cdot \partial_2 f \\ &= (\alpha, \beta) \begin{pmatrix} 1 + \partial_1 f^2 & \partial_1 f \partial_2 f \\ \partial_1 f \partial_2 f & 1 + \partial_2 f^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tehát az érintősíkon generált szimmetrikus bilineáris skaláris formához tartozó *metrikus alaptenzor* mátrixa és determinánsa a $\partial_1 r, \partial_2 r$ bázisban

$$g = \begin{pmatrix} 1 + \partial_1 f^2 & \partial_1 f \partial_2 f \\ \partial_1 f \partial_2 f & 1 + \partial_2 f^2 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \det g = 1 + \partial_1 f^2 + \partial_2 f^2.$$

Eszerint a felszínmérték sűrűségére itt is $|\partial_1 r \times \partial_2 r| = \sqrt{\det g}$ érvényes!

Differenciálható sokaságok

Ebben a fejezetben a felületeknél megismert elméletet igyekszünk absztrakt körülmények között magasabb dimenzióban tárgyalni. Mivel ezek az objektumok az emberi 3-dimenziós szemlélet számára már nem követhetők, azt fogjuk tenni, hogy a felületeknél tapasztaltakat a konkrét megjelenésüktől elvonatkoztatva alkalmazzuk.

Definíció. Az $\mathcal{M}^n$ halmazt $n \in \mathbb{N}$ dimenziós *topologikus sokaságnak* nevezzük, ha

- (1) megszámlálható bázisú Hausdorff-tér, és
- (2) minden pontjának egy környezete homeomorf a nyílt B^n gömbbel.

Definíció. Az $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}^n$ nyílt halmazból és $r: B^n \rightarrow \mathcal{U}$ homeomorfizmusból alkotott $(r, \mathcal{U})$ párt — ahol $B^n \subset \mathbb{R}^n$ a nyílt egységgömb — *koordináta-környezetnek* vagy *térképnek* nevezzük. Az r függvényt a koordináta-környezet, vagy egyszerűen az $\mathcal{U}$ környezet *paraméterezésének* hívjuk. Az r^{-1} inverz-függvényt a koordináta-környezet *koordinátázásának* mondjuk.

Definíció. Az $\mathcal{M}^n$ topologikus sokaságot *differenciálható sokaságnak* nevezzük, ha adott rajta $(r_i, \mathcal{U}_i)$ koordináta-környezetek olyan rendszere, egy *atlasz*, melyre

- (1) az $\mathcal{U}_i$ környezetek lefedik az $\mathcal{M}^n$ halmazt, és
- (2) ha két $\mathcal{U}_i$ és $\mathcal{U}_j$ környezet átmetszi egymást, akkor a

$$\varphi_{i,j} = r_i^{-1} \circ r_j: r_j^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \rightarrow r_i^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$$

átmenetfüggvény akárhányszor differenciálható, és Jacobi-determinánsa nem tűnik el.

Konvenció. Ha nincs külön másként jelezve, egy differenciálható $\mathcal{M}$ sokaság dimenziója $n \in \mathbb{N}$.

Figyeljük meg, hogy $r_j^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ és $r_i^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ is $\mathbb{R}^n$ nyílt részhalmaza, így $\varphi_{i,j}$ egy n -vektor- n -vektor-függvény. Minden atlasz része egy maximális atlasznak, amely már nem bővíthető további koordináta-környezetekkel úgy, hogy atlasz maradjon. Ezt úgy kapjuk, hogy egyszerűen az összes a differenciálhatóságot megőrző koordináta-környezetet hozzávesszük az eredeti atlaszhoz.

Definíció. A $\psi: \mathcal{M}^n \rightarrow \mathcal{N}^k$ leképezést m -szer differenciálhatónak mondjuk, ha az $\mathcal{M}^n$ és $\mathcal{N}^k$ differenciálható sokaságok bármely $r_{\mathcal{M}}$ és $r_{\mathcal{N}}$ paraméterezésére az

$$r_{\mathcal{N}}^{-1} \circ \psi \circ r_{\mathcal{M}}: r_{\mathcal{M}}^{-1}(\mathcal{U}_{\mathcal{M}} \cap \psi^{-1}(\mathcal{U}_{\mathcal{N}})) \rightarrow r_{\mathcal{N}}^{-1}(\psi(\mathcal{U}_{\mathcal{M}}) \cap \mathcal{U}_{\mathcal{N}})$$

leképezés m -szer folytonosan differenciálható.

Ha ψ bijektív, és inverzével együtt végtelenszer differenciálható, akkor *diffeomorfizmusnak* nevezzük.

Figyeljük meg, hogy $r_{\mathcal{M}}^{-1}(\mathcal{U}_{\mathcal{M}} \cap \psi^{-1}(\mathcal{U}_{\mathcal{N}})) \subset \mathbb{R}^n$ és $r_{\mathcal{N}}^{-1}(\psi(\mathcal{U}_{\mathcal{M}}) \cap \mathcal{U}_{\mathcal{N}}) \subset \mathbb{R}^k$ így $r_{\mathcal{N}}^{-1} \circ \psi \circ r_{\mathcal{M}}$ egy n -vektor- k -vektor-függvény.

Definíció. Ha két sokaság között létezik diffeomorfizmus, akkor azokat *diffeomorf sokaságoknak* nevezzük.

Világos, hogy két diffeomorf sokaság között az atlaszokból kiindulva nem lehet különbséget tenni, vagyis az ilyen sokaságok a differenciálgeometria szempontjából ekvivalensnek tekinthetők, hacsak valami további más struktúra nem különbözteti meg őket.

Egy topologikus sokaságot ugyanakkor különböző atlaszok különböző differenciálható sokasággá tehetnek. Milnor bizonyította be, hogy a szokásos távolság szerinti topologikus 7 dimenziós S^7 gömbfelületet, ami $B^8 \subset \mathbb{R}^8$ határa, *pontosan* 28 nem ekvivalens módon lehet differenciálható sokasággá tenni. A szokásos gömböt kanonikusnak, a többi *egzotikus gömbnek* hívjuk.

Whitney nehéz tétele szerint n -dimenziós kompakt sokaságokat mindig beágyazhatunk a $(2n+1)$ -dimenziós euklideszi térbe. Ennél most egy gyengébb, de azért a beágyazhatóság lehetőségét mutató állítást itt is bizonyítunk.

Tétel. *Kompakt differenciálható sokaság beágyazható egy megfelelő dimenziójú euklideszi térbe.*

Bizonyítás. Minden $P \in \mathcal{M}^n$ pontnak létezik $(r_P, \mathcal{U}_P)$ koordináta-környezete, melyre $r_P(\mathbf{0}) = P$ és $r_P(B^n) = \mathcal{U}_P$.

Vegyünk a B^n gömbön egy olyan differenciálható $\bar{f}$ függvényt, melynek értéke 1 a $B^n(1/3)$ gömbön, 0 és 1 közötti a $B^n(2/3) \setminus B^n(1/3)$ gyűrűn, és 0 a $B^n \setminus B^n(2/3)$ gyűrűn. Legyen $f_P = \bar{f} \circ r_P^{-1}$ az $\mathcal{U}_P$ környezeten, és $f_P = 0$ azon kívül. Ezzel az f_P az egész sokaságon megadott jól definiált függvény. Defináljuk most az $\bar{r}_P: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvényt úgy, hogy teljesüljön az $\bar{r}_P(R) = r_P^{-1}(R) \cdot f_P(R)$ az $\mathcal{U}_P$ környezeten, és $\bar{r}_P(R) = 0$ azon kívül. Ekkor $\bar{r}_P$ is az egész sokaságon értelmezett és a P „közelében” az R pont paraméterét adja meg.

Legyen $\mathcal{V}_P = r_P(B^n(1/3))$. Nyilván a $\mathcal{V}_P$ környezetek is lefedik az $\mathcal{M}$ sokaságot, mely kompakt, így létezik ezek közül véges sok olyan $\mathcal{V}_{P_1}, \dots, \mathcal{V}_{P_d}$ környezet, melyek együtt ugyancsak lefedik az $\mathcal{M}$ sokaságot.

Legyen az $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^{d(n+1)}$ függvény olyan, hogy

$$F(Q) = (f_{P_1}(Q), \dots, f_{P_d}(Q), \bar{r}_{P_1}(Q), \dots, \bar{r}_{P_d}(Q)).$$

Ekkor F az egész $\mathcal{M}$ sokaságon jól definiált, hiszen f_{P_i} és $\bar{r}_{P_i}$ is az egész sokaságon definiált.

Most belátjuk, hogy az F diffeomorf beágyazás, ami teljessé teszi bizonyításunkat.

F injektív. Ha $F(R) = F(Q)$, és $R \in \mathcal{V}_{P_j}$, akkor $1 = f_{P_j}(R) = f_{P_j}(Q)$ miatt $Q \in \mathcal{V}_{P_j}$ is teljesül. Ekkor viszont az $\bar{r}_{P_j}(R) = \bar{r}_{P_j}(Q)$ egyenlőségből következik, hogy $r_{P_j}^{-1}(R) = r_{P_j}^{-1}(Q)$, amiből R és Q egybeesése adódik.

F végtelenszer differenciálható. Azt kell ellenőriznünk, hogy $F \circ r_{P_j}$ minden j esetén végtelenszer differenciálható. Ez nyilvánvaló, mivel F minden koordináta-függvénye a végtelenszer differenciálható $\varphi_{i,j} = r_{P_i}^{-1} \circ r_{P_j}$ átmenetfüggvényekből és az általunk konstruált szintén végtelenszer differenciálható $\bar{f}_P$ függvényből épül fel.

F^{-1} végtelenszer differenciálható. Azt kell belátnunk, hogy $r_{P_j}^{-1} \circ F^{-1}$ végtelenszer differenciálható az $F(\mathcal{V}_{P_j})$ nyílt halmazon minden j esetén. Nyilván $(F_{d+(j-1)n+1}(Q), \dots, F_{d+jn}(Q)) = \bar{r}_{P_j}(Q)$, ezért az $F(\mathcal{V}_{P_j})$ nyílt halmazon $r_{P_j}^{-1} \circ F^{-1} = r_{P_j}^{-1} \circ \bar{r}_{P_j}^{-1} = id_{d+(j-1)n+1, \dots, d+jn}: \mathbb{R}^{d(n+1)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ az a leképezés, melyre $id_{d+(j-1)n+1, \dots, d+jn}(x_1, \dots, x_{d(n+1)}) = (x_{d+(j-1)n+1}, \dots, x_{d+jn})$, ami nyilván végtelenszer differenciálható. ■

A további jelölések egyszerűsítése érdekében jegyezzük meg a következőt.

Konvenció. Egy adott $(r, \mathcal{U})$ koordináta-környezeten belül az $x_j: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ *koordináta-függvény* az adott pontnak az r paraméterezés szerinti j -edik koordinátája, vagyis

$$P = r(x_1(P), \dots, x_j(P), \dots, x_n(P)).$$

A most következő definícióval kissé nehézkes igazolni, hogy például a Möbiusz-szalag nem irányítható, de később a differenciálformáknál az irányíthatóság egy egyszerűbben ellenőrizhető megfogalmazását is megismerjük.

Definíció. Az $\mathcal{M}$ differenciálható sokaság *irányított*, ha atlasza bármely két r_i és r_j paraméterezésére a $\varphi_{i,j} = r_i^{-1} \circ r_j$ átmenetfüggvény az $r_j^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ metszetkörnyezeten pozitív Jacobi-determinánsú!

Az $\mathcal{M}$ differenciálható sokaságot *irányíthatónak* mondjuk, ha létezik vele diffeomorf irányított sokaság!

Mielőtt egy fontos irányíthatósági észrevételt bizonyítanánk, szükségünk van a határ fogalmára.

Definíció. A $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$ részhalmaz *reguláris tartomány*, ha minden $P \in \bar{\mathcal{D}}$ pont vagy a $\mathcal{D}$ belsejébe esik, vagy létezik a P pontnak olyan $(r_P, \mathcal{U}_P)$ koordináta-környezete, melyre $\mathcal{U}_P \cap \bar{\mathcal{D}} = r_P(B^n \cap \{x : x_1 \leq 0\})$, és $P = r_P(0)$, ahol $\bar{\mathcal{D}}$ a $\mathcal{D}$ részhalmaz topologikus lezártja.

A reguláris $\mathcal{D}$ tartomány $\partial\mathcal{D}$ határán azon $P \in \mathcal{M}$ pontok halmazát értjük, melyeknek létezik olyan $(r_P, \mathcal{U}_P)$ koordináta-környezete, melyre $\mathcal{U}_P \cap \bar{\mathcal{D}} = r_P(B^n \cap \{x : x_1 \leq 0\})$ és $P = r_P(0)$.

Megjegyzendő, hogy a definícióban megkerülhető a speciális koordináta-környezet igénye, ha így fogalmazunk: „... bármely $(r_P, \mathcal{U}_P)$ koordináta-környezethez létezik olyan $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény, melynek deriváltja sehol nem tűnik el, $\mathcal{U}_P \cap \bar{\mathcal{D}} = r_P(B^n \cap \{x : \varphi(x) \leq 0\})$, és $P = r_P(0)$.”

Fontos látni, hogy a határ nem feltétlenül része a $\mathcal{D}$ tartománynak. Zárt tartomány határa azonban mindig része a tartománynak, és az alábbiak szerint, ha a reguláris tartomány egy környezete irányítható, akkor a tartomány határa is irányítható.

Tétel. *Irányított sokaság reguláris tartományának határa irányított differenciálható részsokaság.*

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy a határ differenciálható sokaság, vagyis létezik rajta egy atlasz. Ha $P \in \partial\mathcal{D}$, akkor a definícióbeli jelöléseket használva tekintsük a $\mathcal{V}_P = \mathcal{U}_P \cap \partial\mathcal{D}$ környezetet és hozzá a $p_P = r_P|_{x_1=0}$ paraméterezést. A $(p_P, \mathcal{V}_P)$ pár egy koordináta-környezetet definiál a $\partial\mathcal{D}$ határon, mert a definíció szerint $\mathcal{V}_P = p_P(B^{n-1})$. Ha $\mathcal{V}_P$ és $\mathcal{V}_Q$ átmetszi egymást, akkor a p_P és p_Q paraméterezések $\psi_{P,Q}$ átmenetfüggvénye az r_P és r_Q paraméterezések $\phi_{P,Q}$ átmeneti függvényének megszorítása az $x_1 = 0$ hipersíkra és így ugyancsak differenciálható. Tehát a $(p_P, \mathcal{V}_P)$ koordináta-környezetek atlaszt alkotnak.

Az irányítottág bizonyítása most már csak az átmeneti függvények Jacobi-mátrixának vizsgálatán múlik. A $\psi_{P,Q}$ Jacobi-mátrixát a $\phi_{P,Q}$ Jacobi-mátrixából úgy kapjuk, hogy elhagyjuk belőle az első oszlopot és sort, hiszen $(y_2, \dots, y_n) = \psi_{P,Q}(x_2, \dots, x_n)$ ekvivalens a $(0, y_2, \dots, y_n) = \phi_{P,Q}(0, x_2, \dots, x_n)$ egyenlettel.

Az $(y_1, y_2, \dots, y_n) = \phi_{P,Q}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ formulát vizsgálva a határpontokban azt látjuk, hogy egyfelől $\partial_1 y_1 > 0$, hiszen ha x_1 túlnő a nullán, akkor y_1 is, másfelől $\partial_j y_1 = 0$, mert $x_1 = 0$ a többi változótól függetlenül implikálja, hogy $y_1 = 0$. Következésképpen $\det \phi'_{P,Q} = \partial_1 y_1 \det \psi'_{P,Q}$, és ezért $\det \psi'_{P,Q}$ előjele is pozitív. ■

3.1. Differenciálás, érintőtér, Lie-zárójel és Hesse-forma

Mivel $\mathbb{R}^n$ is egy differenciálható sokaság, a differenciálható sokaságokon értelmezett skalár- és vektormezők differenciálhatóságát lényegében már az előző szakasz meghatározta. Az egyszerűbb követhetőség érdekében most itt konkretizáljuk a definíciót.

Definíció. Az $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ skalármezőt m -szer differenciálhatónak mondjuk, ha minden r_i paraméterezésre az $f \circ r_i: B^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény m -szer differenciálható.

Az érintőtér bevezetéséhez a sokaságnál nem állnak rendelkezésre a környező tér elemei, ezért az iránymenti deriválások irányából közelítjük meg.

Definíció. Az $\mathcal{M}$ sokaságon értelmezett differenciálható f és g skalármezők *azonosan csíráznak* a sokaság P pontja körül, vagyis $f \sim_P g$, ha létezik P egy olyan környezete, ahol $f = g$.

Az azonosan csírázás nyilvánvalóan ekvivalencia-reláció, ezért a skalármezők e szerint osztályozhatóak. Ezen osztályokat *skalármezőcsíráknak* vagy *függvénycsíráknak* nevezzük. Egy f skalármező $P \in \mathcal{M}$ pont körüli csíráját $\tilde{f}_P$, az ilyen csírák halmazát $C_P\mathcal{M}$ jelöli. Az összeadás és skalárral való szorzás műveletét a függvényekről értelemszerűen átmentve a $C_P\mathcal{M}$ halmazra, a $C_P\mathcal{M}$ e műveletekkel egy vektortér.

Definíció. A $\mathbf{t}: C_P\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcionált *derivációnak* nevezzük, ha

- (1) $\mathbf{t}(\alpha\tilde{f}_P + \beta\tilde{g}_P) = \alpha\mathbf{t}(\tilde{f}_P) + \beta\mathbf{t}(\tilde{g}_P)$, és
- (2) $\mathbf{t}(f\tilde{g}_P) = \mathbf{t}(\tilde{f}_P) \cdot g(P) + f(P) \cdot \mathbf{t}(\tilde{g}_P)$.

Egy c konstans függvény csírájának derivációja mindig nulla, mert a (2) feltétel szerint $\mathbf{t}(\tilde{1}) = \mathbf{t}(\widetilde{1 \cdot 1}) = 2\mathbf{t}(\tilde{1})$, amiért $\mathbf{t}(\tilde{1}) = 0$, és így $\mathbf{t}(\tilde{c}) = c \cdot \mathbf{t}(\tilde{1}) = 0$.

Definíció. A $P \in \mathcal{M}$ pont körüli derivációk $T_P\mathcal{M}$ terét *érintőtérnek*, vagy *tangentstérnek* nevezzük. Az érintőtér elemeit *érintővektoroknak*, a P pontot pedig az érintővektor *tartópontjának* hívjuk.

A most definiált elnevezések valós helyzetet fednek, hiszen az összeadást és a skalárral való szorzást a leképezések szokásos szabályai szerint alkalmazva a $T_P\mathcal{M}$ érintőtér nyilván vektorterré válik.

Tétel. A $T_P\mathcal{M}$ vektortér dimenziója megegyezik az $\mathcal{M}$ sokaság dimenziójával.

Bizonyítás. Defináljuk a $\mathbf{t}_i$ derivációt úgy, hogy ha f a $C_P\mathcal{M}$ tér egy $\tilde{f}$ elemének reprezentánsa, akkor legyen $\mathbf{t}_i(\tilde{f}) = \partial_i(f \circ r_P)(0)$, ahol $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ez jó definíció, mert nem függ a reprezentáns választásától, és nyilván teljesíti a derivációkat meghatározó két tulajdonságot.

Állítjuk, hogy a $\mathbf{t}_i$ derivációk a $T_P\mathcal{M}$ érintőtér egy bázisát alkotják. Legyen

$$f \circ r_P(x) = f(P) + \sum_{j=1}^n x_j \partial_j (f \circ r_P)(0) + \sum_{j,k=1}^n x_j x_k g_{j,k}(x)$$

az $f \circ r_P$ függvény $g_{j,k}$ maradéktagos Taylor-sora a 0 körül, és tekintsünk egy $\mathbf{t} \in T_P\mathcal{M}$ derivációt. Ekkor

$$\mathbf{t}(\tilde{f}) = \mathbf{t}(f(P)) + \sum_{j=1}^n \mathbf{t}(\tilde{x}_j) \partial_j (f \circ r_P)(0),$$

hiszen a maradéktagban szereplő $x_j x_k$ tényezői nullák, és a konstans derivációja is nulla. Így

$$\mathbf{t}(\tilde{f}) = \sum_{j=1}^n \mathbf{t}(\tilde{x}_j) \mathbf{t}_j(\tilde{f}),$$

vagyis a $\mathbf{t}_i$ derivációk tényleg bázist alkotnak. ■

Konvenció. Mivel a függvénycsírákon a $\mathbf{t}_i$ deriváció éppen úgy hat, mint a reprezentánsokon a ∂_i deriválás, a továbbiakban ezt a kettőt azonosítjuk, és mindkettőre a ∂_i jelölést alkalmazzuk.

A felületeknél a görbék érintői adják ki az érintősíkokat. Ez a sokaságoknál is így van.

Definíció. A $G: (a, b) \rightarrow \mathcal{M}$ differenciálható leképezést, sokaságbeli *görbének* nevezzük. Azt a $\mathbf{t}$ derivációt, melyre $\mathbf{t}(f) = \frac{df(G)}{dt}(t_0)$ bármely f skalármező esetén, a G görbe t_0 -beli *érintőjének* nevezzük, és $\dot{G}(t_0)$ -val jelöljük.

Tétel. Az r paraméterezésben $G(t) = r(g(t))$ alakú görbe $\dot{G}$ érintőjének ∂_i szerinti bázisbontása $\dot{G} = \sum_{i=1}^n \dot{g}_i \partial_i$.

Bizonyítás. Legyen f tetszőleges skalármező. Ekkor a $G(t_0) = r(g(t_0))$ pontban

$$\dot{G}(t_0)(f) = \frac{d(f(G))}{dt}(t_0) = \frac{d(f(r(g)))}{dt}(t_0) = \sum_{i=1}^n \partial_i (f \circ r)(g(t_0)) \dot{g}_i(t_0),$$

ahogy állítottuk. ■

Eszerint az $r_i: t \mapsto r(0, \dots, 0, \underset{i\text{-edik}}{t}, 0, \dots, 0)$ paramétervonal érintője éppen a ∂_i érintővektor, teljes analógiában a felületeknél tapasztalttal. További analógia,

hogy tetszőleges $\mathbf{t}$ érintővektorhoz létezik olyan G görbe, melyre $\mathbf{t} = \dot{G}(0)$. Ehhez elég olyan g_i függvényeket találnunk a fenti előállításban, melyre $\mathbf{t}_i = \dot{g}_i(0)$.

Bár az eddigiek értelmében az indukált leképezéseket definiálhatnánk a felületeknél már látott módon is, most egy gyorsabb utat követünk, amely azonban ugyanúgy őrzi a geometriai tartalmat.

Definíció. A $\varphi_*: T_P\mathcal{M} \rightarrow T_{\varphi(P)}\mathcal{N}$ lineáris leképezést a $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ leképezés *indukált leképezésének* nevezzük, ha $\varphi_*(\mathbf{v})(f) \circ \varphi = \mathbf{v}(f \circ \varphi)$, bármely az $\mathcal{N}$ sokaságon értelmezett f skalármező esetén.

Inverzfüggvény-tétel. Ha az $\mathcal{M}$ és $\mathcal{N}$ sokaságok dimenziója megegyezik, és a $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ leképezés φ_* indukált leképezése egy érintőtéren nem elfajuló, akkor φ diffeomorfizmus az érintőtér tartópontjának egy környezetében.

A bizonyítás a felületeknél már említett [22] könyvben található, mint ahogy a deriválásnál megszokott láncszabály is, amit azért esetünkben gyorsan bizonyíthatunk a definíció alapján.

Tétel. Ha $\varphi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$, és $\psi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, akkor $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \cdot \varphi_*$.

Bizonyítás. Bármely $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ skalármezőre, és $\mathbf{v} \in T_P\mathcal{L}$ vektorra

$$(\psi \circ \varphi)_*(\mathbf{v})(f) \circ \psi \circ \varphi = \mathbf{v}(f \circ \psi \circ \varphi) = \varphi_*(\mathbf{v})(f \circ \psi) \circ \varphi = \psi_*\varphi_*(\mathbf{v})(f) \circ \psi \circ \varphi. \quad \blacksquare$$

A vektormezők deriválhatóságának értelmezéséhez szükségünk van az ezeket befogadó térre és ennek differenciálhatósági struktúrájára.

Definíció. Az érintőterek $T\mathcal{M} = \bigcup_{P \in \mathcal{M}} T_P\mathcal{M}$ unióját *érintőnyalábnak* nevezzük.

Tétel. A $T\mathcal{M}$ érintőnyaláb kanonikusan differenciálható sokasággá tehető.

Bizonyítás. Azt kell belátni, hogy létezik egy megfelelő atlasz az érintőnyalábon.

A $T\mathcal{M}$ érintőnyaláb minden $\mathbf{t}$ pontja egy adott koordináta-környezetben egyértelműen jellemezhető a $2n$ -komponensű $\bar{\mathbf{r}}(\mathbf{t}) = (x_1(P), \dots, x_n(P); \mathbf{t}x_1, \dots, \mathbf{t}x_n)$ vektorral, ahol $P \in \mathcal{M}$ a $\mathbf{t}$ érintővektor tartópontja és x_i koordináta-függvény. Ezen leképezések értelmezési tartománya lesz a koordináta-környezet, a leképezés inverze pedig a paraméterezése. Nyilvánvaló, hogy ezek lefedik a teljes érintőnyalábot, ezért csak az átmenetfüggvények differenciálhatóságát kell megvizsgálnunk.

Tekintsük a $\mathbf{t} = \sum_{j=1}^n t^j \partial_j$ bázisbontást, és legyen P a $\mathbf{t}$ tartója. Ekkor

$$\bar{\mathbf{r}}_x(\mathbf{t}) = (x_1(P), \dots, x_n(P); t^1, \dots, t^n),$$

illetve egy másik koordináta-környezetben

$$\bar{\mathbf{r}}_y(\mathbf{t}) = (y_1(P), \dots, y_n(P); v^1, \dots, v^n).$$

A ψ átmenetfüggvényre tehát

$$(y_1, \dots, y_n; v^1, \dots, v^n) = \psi(x_1, \dots, x_n; t^1, \dots, t^n).$$

Nyilvánvaló, hogy y_j nem függ a t_i változóktól, ezért a ψ átmenetfüggvény $J\psi$ Jacobi-mátrixának négy darab $n \times n$ -es almátrixa közül a jobb felső egyszerűen nulla.

A bal felső almátrix az eredeti $\mathcal{M}$ sokaság x_j és y_j közti φ átmenetfüggvényének $J\varphi$ Jacobi-mátrixa, mely nyilván nem elfajuló.

A jobb alsó $n \times n$ -es almátrix a v^k és t_j közti átmenet Jacobi-mátrixa, ami a

$$\sum_{k=1}^n v^k \frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{j=1}^n t^j \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^n t^j \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n t^j \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial y_k}$$

formulából következő

$$v^k = \sum_{j=1}^n t^j \frac{\partial y_k}{\partial x_j}$$

összefüggés szerint nem más, mint a bázisváltás nemelfajuló mátrixa.

Összefoglalva tehát, a ψ átmenetfüggvény nyilván végtelenszer differenciálható, és $J\psi$ Jacobi-mátrixa nemelfajuló, ezért az érintőnyaláb $2n$ -dimenziós differenciálható sokaság. ■

Bár a bizonyításhoz nem kellett, azért figyeljük meg, hogy $J\psi$ bal alsó $n \times n$ -es almátrixa a v^k és x_j közti függés Jacobi-mátrixa, melynek elemei a fenti formula szerint

$$\frac{\partial v^k}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n t^j \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Megfigyelés. Az érintőnyaláb mindig irányított, mert $\det J\psi = (\det J\varphi)^2$! Eszerint egy nem irányítható 2-dimenziós sokaság biztosan nem valamely 1-dimenziós sokaság érintőnyalábja.

Definíció. Az $\mathbf{X}(P) \in T_P\mathcal{M}$ összefüggést teljesítő $\mathbf{X}: \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$ differenciálható leképezést *vektormezőnek* nevezzük. Ezek terét $\tilde{T}\mathcal{M}$ jelöli.

Legyen $\mathbf{X}$ egy vektormező. A Picard–Lindelöf-tétel szerint minden $P \in \mathcal{M}$ ponthoz pontosan egy olyan G görbe létezik — még a paraméterezése is meghatározott! —, melyre $G(0) = P$, $\dot{G}(0) = \mathbf{X}(P)$, és minden lehetséges t paraméterre $\dot{G}(t) = \mathbf{X}(G(t))$.

Definíció. A $\dot{G}(t) = \mathbf{X}(G(t))$ egyenletet teljesítő görbéket az $\mathbf{X}$ vektormező *integrálgörbéinek* nevezzük.

Az $\mathbf{X}$ vektormező *folyamának* nevezzük azt a $\varphi: [-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ $((t, P) \mapsto G(t))$ leképezést, ahol G az $\mathbf{X}$ vektormező P ponton átmenő integrálgörbéje, $G(0) = P$, és $\varepsilon > 0$ elég kicsi ahhoz, hogy $\varphi(t, \cdot)$ diffeomorfizmus legyen.

Ahogy a felületek tanulmányozásakor is, most is az alsó indexben jelezzük az első paramétert, és most is a sokaság egy kisebb, kompakt részén fogunk dolgozni, hogy a pozitív ε létezését garantáljuk.

Most is a folyam fogalmán át vezet az út a Lie-zárójel bevezetéséhez.

Tétel. Legyen φ_t az $\mathbf{X}$ vektormező folyama az $\mathcal{M}$ sokaságon. Ekkor tetszőleges $\mathbf{Y}$ vektormező és f skalármező esetén

$$\mathbf{X}\mathbf{Y}f - \mathbf{Y}\mathbf{X}f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Y}f - \varphi_{t*}\mathbf{Y}f}{t},$$

ahol a $*$ az indukált leképezésre utal.

Bizonyítás. Legyen a $g: [-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy $f \circ \varphi_t - f = tg_t$ minden $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ esetén. Ekkor nyilván $g_0 = \mathbf{X}f$.

Behelyettesítéssel

$$\varphi_{t*}\mathbf{Y}f = \mathbf{Y}(f \circ \varphi_t) \circ \varphi_{-t} = \mathbf{Y}(f + tg_t) \circ \varphi_{-t} = \mathbf{Y}f \circ \varphi_{-t} + t\mathbf{Y}g_t \circ \varphi_{-t}$$

adódik, amiből

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Y}f - \varphi_{t*}\mathbf{Y}f}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Y}f - \mathbf{Y}f \circ \varphi_{-t}}{t} - \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{Y}g_t \circ \varphi_{-t} = \mathbf{X}\mathbf{Y}f - \mathbf{Y}\mathbf{X}f$$

következik. ■

Definíció. Az $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{X}$ kifejezést az $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ vektormezők *Lie-deriváltjának* vagy *Lie-zárójelének* nevezzük.

Figyeljük meg, hogy a definícióban nem az $\mathbf{X}$ deriváció hat az $\mathbf{Y}$ derivációra és fordítva, hanem ezek egymás utáni végrehajtásáról van szó, vagyis a Lie-zárójel valójában két deriváció kommutátora.

Konvenció. Az operátorok, így a derivációk, deriválások és lineáris transzformációk, minden más műveletnél előbb hajtandók végre, ezért nem mindig szükséges zárójel használata, vagyis $\mathbf{X}(f)$ ugyanazt jelenti, mint $\mathbf{X}f$.

Tétel. Az $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ Lie-zárójel vektormező, és bázisbontása

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \sum_{j=1}^n (\mathbf{X}y^j - \mathbf{Y}x^j)\partial_j,$$

ahol $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n x^i \partial_i$, és $\mathbf{Y} = \sum_{j=1}^n y^j \partial_j$.

Bizonyítás. Először azt kell látnunk, hogy a Lie-zárójel egy deriváció, vagyis teljesíti a derivációk definíciójában szereplő kettő feltételt. Legyen f és g tetszőleges skalármező, α és β pedig tetszőleges konstansok.

Az első feltételt az

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}, \mathbf{Y}](\alpha f + \beta g) &= \mathbf{X}(\mathbf{Y}(\alpha f + \beta g)) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}(\alpha f + \beta g)) \\ &= \mathbf{X}(\alpha \mathbf{Y}f + \beta \mathbf{Y}g) - \mathbf{Y}(\alpha \mathbf{X}f + \beta \mathbf{X}g) \\ &= \alpha [\mathbf{X}, \mathbf{Y}](f) + \beta [\mathbf{X}, \mathbf{Y}](g) \end{aligned}$$

formula igazolja, a másodikat az

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}](fg) = \mathbf{X}(f\mathbf{Y}g + g\mathbf{Y}f) - \mathbf{Y}(f\mathbf{X}g + g\mathbf{X}f) = f[\mathbf{X}, \mathbf{Y}](g) + g[\mathbf{X}, \mathbf{Y}](f).$$

A bázisbontás meghatározásához beírjuk a definícióba az $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ bázisfelbontását. Tehát

$$\mathbf{X}(\mathbf{Y}(f)) = \sum_{i=1}^n x^i \partial_i \left(\sum_{j=1}^n y^j \partial_j f \right) = \sum_{i,j=1}^n x^i (\partial_i y^j \partial_j f + y^j \partial_i (\partial_j f)),$$

és ugyanígy

$$\mathbf{Y}(\mathbf{X}(f)) = \sum_{j,i=1}^n y^j (\partial_j x^i \partial_i f + x^i \partial_j (\partial_i f)),$$

melyek különbségéből

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}](f) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (x^i \partial_i y^j - y^j \partial_j x^i) \partial_j f,$$

ahogy állítottuk. ■

Tétel. A Lie-zárójel a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- (1) $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = -[\mathbf{Y}, \mathbf{X}]$, vagyis antiszimmetrikus,
- (2) bilineáris,
- (3) tetszőleges f skalármező esetén $[\mathbf{X}, f\mathbf{Y}] = \mathbf{X}f \cdot \mathbf{Y} + f[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$, és
- (4) $[\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]] + [\mathbf{Y}, [\mathbf{Z}, \mathbf{X}]] + [\mathbf{Z}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]] = 0$ (Jacobi-azonosság).

A bizonyítás az olvasóra marad, hiszen csak a definíciót kell alkalmazni.

Tétel. Ha φ diffeomorfizmus, akkor $\varphi_*[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = [\varphi_*\mathbf{X}, \varphi_*\mathbf{Y}]$.

Bizonyítás. Bármely f skalármező esetén

$$\begin{aligned}\varphi_*[\mathbf{X}, \mathbf{Y}](f) \circ \varphi &= [\mathbf{X}, \mathbf{Y}](f \circ \varphi) = \mathbf{X}(\mathbf{Y}(f \circ \varphi)) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}(f \circ \varphi)) \\ &= \mathbf{X}(\varphi_*\mathbf{Y}(f) \circ \varphi) - \mathbf{Y}(\varphi_*\mathbf{X}(f) \circ \varphi) = [\varphi_*\mathbf{X}, \varphi_*\mathbf{Y}](f) \circ \varphi,\end{aligned}$$

ahogy állítottuk. ■

Akár a felületen, most is igaz — és ugyanúgy bizonyítható —, hogy két útvonallirány és hossza akkor és csak akkor cserélhető fel, vagyis csakis akkor vezet ugyanabba a célpontba, ha az útvonalakhoz tartozó vektormezők Lie-zárójele eltűnik.

Tétel. Legyenek ξ és ψ az $\mathbf{X}$ és az $\mathbf{Y}$ vektormezők folyamai. $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = 0$ akkor és csak akkor, ha $\xi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \xi_t$ minden s, t esetén.

Az eddig létrehozott eszközeink közvetlenül hasznosíthatóak a differenciálható sokaság topológiájának vizsgálatában. A *Morse-elmélet* éppen ezt teszi a skalármezők kritikus pontjainak vizsgálatával.

Definíció. Egy $P \in \mathcal{M}$ pont az f skalármező *kritikus pontja*, ha ott $\mathbf{v}f = 0$ minden $\mathbf{v} \in T_P\mathcal{M}$ esetén.

Ha r a kritikus P pont egy koordináta-környezete, akkor a Hess $f: T_P\mathcal{M} \times T_P\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris formát, melyre

$$\text{Hess } f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (f \circ r)''_{r^{-1}(P)}(r_*^{-1}\mathbf{v}, r_*^{-1}\mathbf{w}),$$

az f Hesse-formájának nevezzük.

Euklideszi téren az identikus paraméterezést tekintve a Hess f Hesse-forma éppen a $(\partial_i \partial_j f)_{i,j}$ mátrix által meghatározott bilineáris forma.

Tétel. Hess f jól definiált, vagyis független a paraméterezés választásától, és valóban szimmetrikus.

Bizonyítás. Legyen $r = p \circ \varphi$ egy átparaméterezés, ahol $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és φ_* az $r^{-1}(P)$ pontban nemelfajuló. Ekkor

$$\begin{aligned}\text{Hess } f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= (f \circ r)''_{r^{-1}(P)}(r_*^{-1}\mathbf{v}, r_*^{-1}\mathbf{w}) = (f \circ p \circ \varphi)''_{\varphi^{-1}(p^{-1}(P))}(\varphi_*^{-1}p_*^{-1}\mathbf{v}, \varphi_*^{-1}p_*^{-1}\mathbf{w}) \\ &= (((f \circ p)'_{\varphi})'_{\varphi^{-1}(p^{-1}(P))})(\varphi_*^{-1}p_*^{-1}\mathbf{v}, \varphi_*^{-1}p_*^{-1}\mathbf{w}) \\ &= ((f \circ p)''_{p^{-1}(P)}(\varphi_*)^2 + \underbrace{(f \circ p)'_{p^{-1}(P)} \varphi''}_{0})(\varphi_*^{-1}p_*^{-1}\mathbf{v}, \varphi_*^{-1}p_*^{-1}\mathbf{w}) \\ &= (f \circ p)''_{p^{-1}(P)}(\varphi_*)^2(\varphi_*^{-1}p_*^{-1}\mathbf{v}, \varphi_*^{-1}p_*^{-1}\mathbf{w}) = (f \circ p)''_{p^{-1}(P)}(p_*^{-1}\mathbf{v}, p_*^{-1}\mathbf{w}),\end{aligned}$$

ahol alsó indexben jelöltük a kijelölt deriválások helyét, igazolja első állításunkat.

Az f egy kritikus pontjában $0 = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f = \mathbf{X}(\mathbf{Y}(f)) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}(f))$ miatt

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\mathbf{Y}(f)) &= \mathbf{Y}(\mathbf{X}(f)) = \sum_{j=1}^n y^j \partial_j \left(\sum_{i=1}^n x^i \partial_i(f) \right) = \sum_{j,i=1}^n (y^j \partial_j x^i \partial_i f + y^j x^i \partial_j \partial_i f) \\ &= \sum_{j,i=1}^n y^j x^i \partial_j \partial_i f = \text{Hess } f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \end{aligned}$$

bármely $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ vektormezőre, ami igazolja a szimmetriát. ■

A bizonyításból az is következik, hogy $\text{Hess } f(\dot{G}, \dot{G}) = (f \circ G)''$, ahol G egy görbe a sokaságban. Az is látszik, hogy a $\text{Hess } f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{V}(\mathbf{W}(f))$ formulával is definiálhattuk volna a Hesse-formát, ahol a $\mathbf{V}$ és $\mathbf{W}$ vektormezők a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok tetszőleges kiterjesztései a sokaságra.

Definíció. Az f skalármező egy P kritikus pontjára azt mondjuk, hogy *elfajult kritikus pont*, ha $\text{Hess } f$ elfajul a $T_P \mathcal{M}$ érintő téren.

Egy nemelfajuló *kritikus pont indexén* a $\text{Hess } f$ indexét — vagyis negatív sajátértékeinek számát — értjük, amit $\text{ind } f$ jelöl.

Morse-lemma. Ha P az f egy nemelfajult kritikus pontja, melynek indexe i , akkor létezik a P pontnak olyan r koordináta-környezete, melyben

$$f(r(x_1, \dots, x_n)) = -x_1^2 - \dots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2 + f(P).$$

Bizonyítás. Legyen r olyan paraméterezés, melyre $P = r(0, \dots, 0)$. Ekkor az $F(y_1, \dots, y_n) = f(r(y_1, \dots, y_n)) - f(P)$ függvényről tudjuk, hogy $F(0, \dots, 0) = 0$ és $\dot{F}(0, \dots, 0) = 0$.

Világos, hogy az $F_i(y_1, \dots, y_n) = \int_0^1 \partial_i F(ty_1, \dots, ty_n) dt$ függvényekre egyrészt $F(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n y_i F_i(y_1, \dots, y_n)$ másrészt $F_i(0, \dots, 0) = \partial_i F(0, \dots, 0) = 0$ is érvényes. Az $F_{i,j}(y_1, \dots, y_n) = \int_0^1 \partial_j F_i(ty_1, \dots, ty_n) dt$ függvényekre ugyanakkor $F_i(y_1, \dots, y_n) = \sum_{j=1}^n y_j F_{i,j}(y_1, \dots, y_n)$ teljesül, vagyis

$$F(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i,j=1}^n y_i y_j F_{i,j}(y_1, \dots, y_n),$$

ahol $F_{i,j}(0, \dots, 0) = \partial_j \partial_i F(0, \dots, 0)$.

Mivel $\text{Hess } f$ nemelfajuló, $\text{Hess } F$ sem elfajuló, tehát $\det(F_{i,j}(0, \dots, 0))_{i,j=1}^n \neq 0$, így van az origónak olyan környezete, ahol a $\Phi_y = (F_{i,j}(y_1, \dots, y_n))_{i,j=1}^n$ mátrixok nem elfajulók. A kvadratikus alakok alaptétele szerint léteznek olyan nemelfajuló

$\Psi_y = (q_{i,j}(y_1, \dots, y_n))_{i,j=1}^n$ mátrixok, melyekre a $\Psi_y^T \Phi \Psi_y$ mátrix diagonális, a főátló elején csak -1 , aztán pedig csak $+1$ elemek találhatóak, és éppen annyiszor van -1 , hiszen ez a definíciója, amekkora a Hess $F(0)$ mátrix indexe [12, 37.§].

Végrehajtva az $(y_1, \dots, y_n) = \Psi_y(x_1, \dots, x_n)$ nemelfajuló helyettesítést, az

$$\begin{aligned} F(\Psi_y(x_1, \dots, x_n)) &= F(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_n)^T \Phi(y_1, \dots, y_n) \\ &= (x_1, \dots, x_n)^T \Psi_y^T \Phi \Psi_y(x_1, \dots, x_n) \\ &= -x_1^2 - \dots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2 \end{aligned}$$

alakhoz jutunk, ahogy állítottuk. ■

Következmény. *A kritikus pontok halmazában a nemelfajulók halmaza izolált.*

Bizonyítás. Előbbi tétel miatt, ha P nem elfajuló kritikus pontja f -nek, akkor egy koordináta-környezetben

$$f \circ r(x_1 \dots x_n) = -x_1^2 - \dots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2 + f(P),$$

amiért $(f \circ r)'(x_1, \dots, x_n) = 2(-x_1, \dots, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Ez csak úgy lehet 0, ha minden koordinátája nulla, az viszont éppen a P pont paramétere. ■

A felületekre gondolva, előbb bizonyított tételünk azt állítja, hogy egy nemelfajuló kritikus pont környezetében a felület gömbszerű, ha az index 0, illetve 2, és nyeregfelületszerű, ha az index 1.

Ezen lokális megfigyeléseknek globális következményei vannak. Az alábbiakban részben bizonyítjuk, hogy egy sokaság homotópia típusa csak a skalármező kritikus pontjában változhat, és a változást a kritikus pont környezete meghatározza.

Legyen $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező, és vezessük be az $\mathcal{M}_f^a = \{P \in \mathcal{M} : f(P) < a\}$ és $\mathcal{M}_f^{[a,b]} = \{P \in \mathcal{M} : a \leq f(P) \leq b\}$ jelöléseket.

Tétel. *Legyen $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező, $a < b$, és tegyük fel, hogy $\mathcal{M}_f^{[a,b]}$ kompakt, és nem tartalmazza f egyetlen kritikus pontját sem. Ekkor $\mathcal{M}_f^a$ diffeomorf az $\mathcal{M}_f^b$ nyílt halmazzal.*

Bizonyítás. Minthogy az f skalármezőnek nincsen kritikus pontja a $\mathcal{M}_f^{[a,b]}$ halmazon, létezik az $\mathcal{M}_f^{[a,b]}$ halmaznak olyan kompakt lezárású nyílt $\mathcal{U}$ környezete, amelyben nincs kritikus pontja az f skalármezőnek.

Ezt véges sok $(r_i, \mathcal{U}_i)$ kompakt lezárású koordináta-környezet is lefedi. Legyen a kompakt tartójú nemnegatív f_i skalármező az $\mathcal{U}_i$ nyílt halmazon konstans 1. Defináljuk minden $P \in \mathcal{U}$ pontra a $g_P \langle \cdot, \cdot \rangle: T_P \mathcal{U} \times T_P \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ bilineáris funkcionált a

$$g_P \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \sum_i f_i(P) \langle r_{i*}^{-1} \mathbf{v}, r_{i*}^{-1} \mathbf{w} \rangle$$

formulával. Ez minden $P \in \mathcal{U}$ pontban pozitív definit. Definiáljuk most a $\text{grad } f \in \tilde{T}\mathcal{U}$ vektormezőt a $g\langle \mathbf{X}, \text{grad } f \rangle = \mathbf{X}f$ azonossággal.

Az f skalármezőnek nincsen kritikus pontja az $\mathcal{U}$ halmazon, ezért definiálhatjuk az $\mathbf{F}$ vektormezőt az $\mathcal{U}$ környezeten úgy, hogy ott $\mathbf{F} = \text{grad } f / g\langle \text{grad } f, \text{grad } f \rangle$, de az $\mathcal{U}$ lezártjának egy kompakt lezárású $\mathcal{V}$ környezetén kívül eltűnik.

Mivel $\mathcal{M}_f^{[a,b]}$ kompakt, létezik az $\mathbf{F}$ vektormező $\varphi: [0, b-a] \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ folyama. Ekkor minden $P \in \mathcal{U}$ pontban

$$\frac{d(f(\varphi_t(P)))}{dt} = \mathbf{F}f(\varphi_t(P)) = g_{\varphi_t(P)}\langle \mathbf{F}(\varphi_t(P)), \text{grad } f(\varphi_t(P)) \rangle \equiv 1,$$

ahol $\varphi_t = \varphi(t, \cdot): \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$. Eszerint $f(\varphi_t(P)) = t + k$ valamely k konstansra. A k konstanst a $t = 0$ eset alapján meghatározva, $f(\varphi_t(P)) = t + f(P)$ adódik.

Tehát a φ_{b-a} diffeomorfizmus az $\mathcal{M}_f^a$ sokaságot az $\mathcal{M}_f^b$ sokaságra képezi, mégpedig bijektív módon, hiszen az integrálgörbék nem metszik egymást. ■

A bizonyításban tulajdonképpen az $\mathcal{U} \cap \mathcal{M}_f^a$ nyílt halmazt „húzzuk rá” az $\mathcal{U} \cap \mathcal{M}_f^b$ nyílt halmazra, miközben a folyam többi mozgása az $\mathcal{M}_f^a$ halmazon belül történik úgy, hogy a $\mathcal{M}_f^a \setminus \bar{\mathcal{V}}$ pontjai fixek maradnak. Hasonló, de jóval bonyolultabb eljárásokkal bizonyítható a következő.

Tétel. Legyen $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező, $a < b$, $\mathcal{M}_f^{[a,b]}$ kompakt, és az egyetlen kritikus pont ennek belsejében a P nemelfajult λ indexű kritikus pont. Ekkor $\mathcal{M}^b$ homotopikusan ekvivalens az $\mathcal{M}^a$ és λ darab fogantyú összeragasztásával.

Ennek és előző tételünknek közvetlen következménye Morse szép eredménye.

Morse-tétel. Legyen f olyan skalármező a kompakt $\mathcal{M}$ sokaságon, melynek csak nemelfajuló kritikus pontjai vannak, és jelölje $c_k(f)$ a k indexű kritikus pontok számát. Ekkor a χ Euler-karakterisztikára $\chi(\mathcal{M}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k c_k(f)$.

3.2. Kotangenstér, tenzorok, differenciálformák és kohomológia

Az érintőtérnek és duálisának bázisa fontos szerepet kap ebben a fejezetben, ezért az előbbi ∂_i bázisának megfelelő duális bázisra bevezetjük a δ^j jelölést, melyre $\partial_i \delta^j = \delta^j \partial_i = \delta_{i,j}$, ahol $\delta_{i,j}$ a Kronecker-delta.

Definíció. $T_P^* \mathcal{M}$ jelöli a $T_P \mathcal{M}$ duális terét, amit *kotangenstérnek* nevezünk. Ezek egyesítése a $T^* \mathcal{M} = \bigcup_{P \in \mathcal{M}} T_P^* \mathcal{M}$ *kotangensnyaláb*.

Tétel. A $T_P^* \mathcal{M}$ kotangenstér kanonikusan azonosítható a $C_P \mathcal{M}$ térben az x_j koordináta függvények csírái által kifeszített altérrel. A kotangensnyaláb differenciálható sokasággá tehető.

Bizonyítás. Figyeljük meg, hogy $\partial_i x_j = \delta_{i,j}$. Ez azt mutatja, hogy az x_j skalármező által reprezentált függvénycsíra éppen úgy viselkedik, mint a duális tér δ^j konjugált bázisa.

A második állítás belátása érdekében a $T\mathcal{M}$ érintőnyaláb koordinátázását visszük át a $T^*\mathcal{M}$ kotangensnyalábra az

$$\bar{r}(\delta) = (x_1(P), \dots, x_n(P); \delta(\partial_1), \dots, \delta(\partial_n))$$

paraméterezéssel, ahol δ a kotangensnyaláb tetszőleges eleme, P a δ tartópontja és ∂_i a $T_P\mathcal{M}$ bázisa.

Ez a paraméterezés nyilvánvalóan injektív, és belátjuk, hogy differenciálható is. Ehhez tekintsük egy másik koordináta-környezetben az

$$\bar{r}'(\delta) = (x'_1(P), \dots, x'_n(P); \delta(\partial'_1), \dots, \delta(\partial'_n))$$

paraméterezést. Elvégezve mindkét esetben a $\delta = \sum_{j=1}^n \delta_j \delta^j$ típusú bázisbontást, a ψ átmenetfüggvényre azt kapjuk, hogy

$$(x'_1, \dots, x'_n; \delta'_1, \dots, \delta'_n) = \psi(x_1, \dots, x_n; \delta_1, \dots, \delta_n).$$

Nyilvánvaló, hogy x'_j nem függ a δ_i változótól, ezért a $J\psi$ Jacobi-mátrix négy darab $n \times n$ -es almatríxa közül a jobb felső egyszerűen a null-mátrix.

A $J\psi$ bal felső almatríxa az eredeti $\mathcal{M}$ sokaság x_j és x'_j közti φ átmenetfüggvényének $J\varphi$ Jacobi-mátrixa, mely nyilván nemelfajuló.

A $J\psi$ jobb alsó $n \times n$ -es almatríxa a δ'_j és δ_j közti átmenet Jacobi-mátrixa, amely a

$$\delta_k = \delta(\partial_k) = \delta\left(\sum_{j=1}^n \partial_k x'_j \partial'_j\right) = \sum_{j=1}^n \partial_k x'_j \delta'_j$$

összefüggés szerint a bázisváltás nemelfajuló $(\partial_k x'_j)_{k=1, j=1}^{k=n, j=n}$ mátrixának inverze.

Összefoglalva tehát a ψ differenciálható átmenetfüggvény $J\psi$ Jacobi-mátrixa létezik és nemelfajuló, ezért ψ^{-1} is differenciálható, tehát a kotangensnyaláb valóban $2n$ -dimenziós differenciálható sokaság. ■

A bizonyítás mellékterméke, hogy a kotangensnyaláb is irányított sokaság.

Definíció. Jelölje a $T_P\mathcal{M}$ érintőtér feletti (r, s) típusú valósértékű tenzorok terét $T_P^{r,s}\mathcal{M}$. Ezek $T^{r,s}\mathcal{M} = \bigcup_{P \in \mathcal{M}} T_P^{r,s}\mathcal{M}$ egyesítését az $\mathcal{M}$ sokaság (r, s) típusú *tenzornyalábjának* nevezzük.

Tétel. A $T^{r,s}\mathcal{M}$ tenzornyaláb kanonikusan differenciálható sokassággá tehető, melynek dimenziója $n + n^{r+s}$.

Bizonyítás. Tekintsük az

$$\bar{r}: T^{r,s}\mathcal{M} \ni T \mapsto (x_1(P), \dots, x_n(P); T(\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_r}; \delta^{j_1}, \dots, \delta^{j_s}), \dots) \in \mathbb{R}^{n+n^{r+s}},$$

leképezést, ahol a felsorolásban az összes lehetséges $0 < i_k < n+1$ és $0 < j_k < n+1$ indexvariáció előfordul. Ez a leképezés injektív és differenciálható, ami akár az érintő-, akár a kotangensnyalábnál látott módon bizonyítható, tehát paraméterezés, amiből a tétel következik. ■

Definíció. Egy differenciálható $T: \mathcal{M} \rightarrow T^{r,s}\mathcal{M}$ leképezést (r, s) típusú *tenzormezőnek* nevezzük, ha $T(P) \in T_P^{r,s}\mathcal{M}$. Ezek terét $\tilde{T}^{r,s}\mathcal{M}$ jelöli.

Tétel. Az $(1, 1)$ típusú $h: T\mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$ tenzormezőre és $\mathbf{X}$ vektormezőre

$$\mathbf{X} \det h = \det h \sum_{i,j=1}^n h^{j,i} \mathbf{X} h_{i,j},$$

ahol $(h_{i,j})$ a h mátrixa a ∂_i bázisban, $(h^{i,j})$ pedig a $(h_{i,j})$ inverze.

Bizonyítás. Ismert mátrixinverz-képzési szabály, hogy $\det[h]_{i,j} = \det h \cdot h^{j,i}$, ahol $\det[h]_{i,j}$ jelöli a $h_{i,j}$ elemhez tartozó adjungált aldeterminánst [12, 5.§]. A kifejtési szabály szerint ugyanakkor $\frac{d \det h}{dh_{i,j}} = \det[h]_{i,j}$. Ezt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{X} \det h = \sum_{i,j=1}^n \frac{d \det h}{dh_{i,j}} \mathbf{X} h_{i,j} = \sum_{i,j=1}^n \det[h]_{i,j} \mathbf{X} h_{i,j} = \det h \sum_{i,j=1}^n h^{j,i} \mathbf{X} h_{i,j}. \quad \blacksquare$$

Definíció. A $T_P\mathcal{M}^n$ érintőterek feletti k -adrendű külsőformák $\wedge^k T_P^*\mathcal{M}$ tereinek $\wedge^k T^*\mathcal{M} = \bigcup_{P \in \mathcal{M}} \wedge^k T_P^*\mathcal{M}$ egyesítését k -rendű *külsőformanyalábnak* nevezzük.

Az $\alpha: \mathcal{M} \rightarrow \wedge^k T^*\mathcal{M}$ differenciálható külsőforma-mezőt, melyre $\alpha(P) \in \wedge^k T_P^*\mathcal{M}$, k -ad rendű *differenciálformának* nevezzük. Ezek terét $\tilde{\wedge}^k T^*\mathcal{M}$ jelöli.

Jegyezzük meg, hogy $\tilde{\wedge}^0 T^*\mathcal{M}$ éppen a skalármezők tere, az $\wedge^k T^*\mathcal{M}$ külsőformanyaláb pedig $n + \binom{n}{k}$ -dimenziós differenciálható sokasággá tehető.

Tétel. Egyetlen olyan $d: \bigcup_{k=0}^{\infty} \tilde{\wedge}^k T^*\mathcal{M} \rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{\wedge}^k T^*\mathcal{M}$ leképezés létezik, melyre

- (1) ha $\alpha \in \tilde{\wedge}^k T^*\mathcal{M}$, akkor $d\alpha \in \tilde{\wedge}^{k+1} T^*\mathcal{M}$,
- (2) $d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$,
- (3) ha $\alpha \in \tilde{\wedge}^k T^*\mathcal{M}$, akkor $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$,
- (4) ha $f \in \tilde{\wedge}^0 T^*\mathcal{M}$, akkor $df(\mathbf{X}) = \mathbf{X}f$,
- (5) ha $f \in \tilde{\wedge}^0 T^*\mathcal{M}$, akkor $d(df) = 0$.

Bizonyítás. *Unicitás.* Legyen a $\tilde{\wedge}^k T^* \mathcal{M}$ bázisa $B_{i_1, \dots, i_k} = \delta^{i_1} \wedge \delta^{i_2} \wedge \dots \wedge \delta^{i_k}$, és bontsuk fel az $\alpha \in \tilde{\wedge}^k T^* \mathcal{M}$ differenciálformát ebben a bázisban!

Az

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_k} B_{i_1, \dots, i_k}$$

felbontást és az öt feltételünket alkalmazva (az éppen alkalmazottat mindig az egyenlőségjel fölé írva), azt kapjuk, hogy

$$d\alpha \stackrel{(2)}{=} \sum d(\alpha_{i_1, \dots, i_k} B_{i_1, \dots, i_k}) \stackrel{(3)}{=} \sum d\alpha_{i_1, \dots, i_k} B_{i_1, \dots, i_k} + \sum \alpha_{i_1, \dots, i_k} dB_{i_1, \dots, i_k},$$

ahol az index nélküli $\sum$ jel az összes lehetséges indexre való összeadást jelenti.

Figyelembe véve, hogy $\delta^i(\mathbf{X}) = x^i \stackrel{(4)}{=} dx_i(\mathbf{X})$ és így $\delta^i = dx_i$ azt kapjuk, hogy $dB_{i_1, \dots, i_k} \stackrel{(3)(5)}{=} 0$, mely szerint a fenti összeg második tagja eltűnik. Ugyanakkor bármely f skalármezőre

$$df(\mathbf{X}) \stackrel{(4)}{=} \mathbf{X}(f) \stackrel{(\text{def})}{=} \sum_{i=1}^n x^i \partial_i f \stackrel{(\text{előbbi})}{=} \sum_{i=1}^n \partial_i f \delta^i(\mathbf{X}),$$

amiért $d\alpha_{i_1, \dots, i_k} = \sum_{i=1}^n \partial_i \alpha_{i_1, \dots, i_k} \delta^i$.

Mindent összevetve, a szabályok a

$$d\alpha = \sum_{1 \leq i \leq n; 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \partial_i \alpha_{i_1, \dots, i_k} \delta^i \wedge \delta^{i_1} \wedge \dots \wedge \delta^{i_k} \quad (3.2.1)$$

egyértelmű formulára vezetnek, amelynek a jobb oldalán már nincs „ d ” operátor.

Egzisztencia. Most azt kell megmutatnunk, hogy az éppen megkapott formulával definiált „ d ” operátor teljesíti a tétel feltételeit. Az azonnal látszik, hogy (1), (2) és (4) teljesül. (5) is teljesül, hiszen

$$d(df) = d\left(\sum_{i=1}^n \partial_i f \delta^i\right) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\partial_i \partial_j f - \partial_j \partial_i f) \delta^i \wedge \delta^j = 0.$$

A (3) feltétel teljesülését (2) miatt elég az $\alpha = aB_{j_1, \dots, j_k}$ és $\beta = bB_{i_1, \dots, i_r}$ alakú differenciálformákra ellenőrizni. Ezekre

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d[(ab)\delta^{j_1} \wedge \dots \wedge \delta^{j_k} \wedge \delta^{i_1} \wedge \dots \wedge \delta^{i_r}] \\ &\stackrel{(\text{def})}{=} \sum_{i=1}^n (\partial_i ab + a\partial_i b) \delta^i \wedge \delta^{j_1} \wedge \dots \wedge \delta^{j_k} \wedge \delta^{i_1} \wedge \dots \wedge \delta^{i_r} \\ &\stackrel{(\text{def})}{=} d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta \end{aligned}$$

igazolja az állítást. ■

Definíció. A tétel által meghatározott „ d ” operátort a differenciálformák *külsőderiválásának* nevezzük.

A (3.2.1) formula szerint a d külsőderiválás az

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_k} \delta^{i_1} \wedge \dots \wedge \delta^{i_k}$$

differenciálformához a

$$d\alpha = \sum_{1 \leq i \leq n; 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \partial_i \alpha_{i_1, \dots, i_k} \delta^i \wedge \delta^{i_1} \wedge \dots \wedge \delta^{i_k}$$

differenciálformát rendeli, vagyis $dx_j = \sum_i \partial_i x_j \delta^i = \delta^j$, hiszen x_j bázisfelbontása $x_j \cdot 1$. Ennek segítségével a differenciálformák a gyakran alkalmazott

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

alakban is írhatóak. A dx_i egybeesése a kotangensnyaláb δ^i elemével lehetővé teszi az (5) feltétel szigorítását.

Tétel. *Tetszőleges α differenciálformára $d(d\alpha) = 0$.*

Bizonyítás. Az additivitás miatt elég $\alpha = adx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$ alakú differenciálformákra ellenőrizni az állítást.

$$\begin{aligned} d(d\alpha) &= d\left(\sum_{i=1}^n \partial_i adx_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k\right) \\ &= \underbrace{\left(\sum_{i,j=1}^n \partial_j \partial_i adx_j \wedge dx_i\right)}_{i,j \text{ szimmetria miatt } 0} \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k + \sum_{i=1}^n \underbrace{\partial_i ad(dx_i \wedge \dots \wedge dx_k)}_{(3) \text{ és } (5) \text{ miatt } 0}. \end{aligned}$$

Ezzel az állítást igazoltuk. ■

Fontos megfigyelni, hogy amennyiben az r és p koordináta-környezetek metszik egymást, és $r(x_1, \dots, x_n) = p(y_1, \dots, y_n)$, akkor

$$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = J(r^{-1} \circ p) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n,$$

ahol $J(r^{-1} \circ p)$ jelöli az átmenetfüggvény Jacobi-determinánsát. Ez jól mutatja a differenciálformák szoros kapcsolatát a sokaság irányíthatóságával.

Definíció. Egy α differenciálformát *zártnak* mondunk, ha $d\alpha = 0$. A zárt differenciálformák vektortere $Z^k \mathcal{M} = \{\alpha \in \tilde{\Lambda}^k T^* \mathcal{M} : d\alpha = 0\}$.

A β differenciálforma az α differenciálforma *primitív formája*, ha $\alpha = d\beta$.

Ha az α differenciálforma rendelkezik primitív formával, akkor *egzakt differenciálformának* nevezzük. Az egzakt differenciálformák vektortere $B^k\mathcal{M} = \{\alpha \in \tilde{\Lambda}^k T^*\mathcal{M} : \exists \beta \in \tilde{\Lambda}^{k-1} T^*\mathcal{M}, \text{ melyre } \alpha = d\beta\}$.

Az egzakt formák nyilván zártak is, vagyis $B^k\mathcal{M}$ a $Z^k\mathcal{M}$ altere. Az $\alpha, \beta \in Z^k\mathcal{M}$ differenciálformákat *kohomológoknak* mondjuk, ha $\alpha - \beta \in B^k\mathcal{M}$. A kohomológia nyilván egy — az összeadással és skalárral való szorzással kompatibilis — ekvivalenciareláció.

Definíció. A zárt differenciálformák kohomológiaosztályainak $H^k\mathcal{M} = Z^k\mathcal{M}/B^k\mathcal{M}$ vektorteret *kohomológia-térnek*, vagy *de Rham-csoportnak* is szokás nevezni. A $b_k(\mathcal{M}) = \dim H^k\mathcal{M}$ számot az $\mathcal{M}$ sokaság k -adik *Betti-számának* nevezzük.

A kohomológiaosztályok és a sokaság topológiai tulajdonságai rendkívül erős kapcsolatát ebben a terjedelemben csak néhány példával lehet illusztrálni.

Tétel. Egy sokaság akkor és csak akkor összefüggő, ha nulladik kohomológia-tére 1-dimenziós.

Bizonyítás. Egy $\mathcal{M}$ sokaságot vizsgálva nyilván $B^0\mathcal{M} = \{0\}$, és

$$Z^0\mathcal{M} = \{f : df = 0\} = \{f : \partial_i f = 0 \text{ minden } i\text{-re}\},$$

tehát $H^0\mathcal{M} \simeq Z^0\mathcal{M} = \{\text{minden környezetben konstans skalármezők}\}$. Ha $\mathcal{M}$ több nem összefüggő részből állna, akkor $\mathcal{M}$ minden összefüggő részén lehetne más-más értéke az f skalármezőnek. ■

Kicsit továbbgondolva a fenti okoskodást, kimondhatjuk, hogy $\mathcal{M}$ akkor és csak akkor áll k összefüggő részből, ha $\dim H^0\mathcal{M} = k$. A kohomológiák egy másik szép alkalmazása vezet a következő, itt bizonyítás nélkül közölt eredményre.

Euler–Poincaré-tétel. A χ Euler-karakterisztikára $\chi(\mathcal{M}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k b_k(\mathcal{M})$.

A kohomológiák sem mindenhatóak, hiszen például az euklideszi téren nem adnak új információt. Ott ugyanis minden zárt formának van primitív formája is.

Poincaré-tétel. Euklideszi téren minden kohomológia-tér triviális, azaz a legalább egyfokú zárt formák egzaktak is.

Bizonyítás. Jelölje $\mathbb{R}^n$ a vizsgált euklideszi teret az x_i koordinátafüggvényekkel.

Definiáljuk az $I : \tilde{\Lambda}^{k+1} T^*\mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\Lambda}^k T^*\mathbb{R}^n$ leképezést úgy, hogy egy $\alpha = adx_{i_0} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ differenciálformához rendelje azt az $I\alpha$ differenciálformát, melyre

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto (I\alpha)_{\mathbf{x}} = \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^k (-1)^j x_{i_j}(\mathbf{x}) dx_{i_0} \wedge \dots \wedge \overset{j}{.} dx_{i_k} \right) a(t\mathbf{x}) t^k dt \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n$$

ahol $\overset{j}{.}$ azt jelenti, hogy a sorból egyedül az i_j indexű elem hiányzik.

3.2.1:
bizonyítani?

Azt fogjuk bizonyítani, hogy $d(I\alpha) + I(d\alpha) = \alpha$ teljesül minden $\alpha \in \tilde{\wedge}^{k+1} T^* \mathbb{R}^n$ differenciálformára. Mivel d additív, ez a zárt differenciálformákra azt jelenti, hogy $d(I\alpha) = \alpha$, ami igazolja a tételt.

Rendezve az integrált, az

$$(I\alpha)_{\mathbf{x}} = \sum_{j=0}^k \left((-1)^j x_{i_j}(\mathbf{x}) \int_0^1 a(t\mathbf{x}) t^k dt \right) dx_{i_0} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

egyenlőséghez jutunk. Az utóbbi képletsorban szereplő együttható külsőderiváltja

$$(-1)^j dx_{i_j} \int_0^1 a(t\mathbf{x}) t^k dt + (-1)^j x_{i_j}(\mathbf{x}) \left(\sum_{i=1}^n \int_0^1 \partial_i a(t\mathbf{x}) t^{k+1} dt dx_i \right),$$

ahol $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Eszerint

$$\begin{aligned} d(I\alpha)_{\mathbf{x}} &= \int_0^1 a(t\mathbf{x}) (k+1) t^k dt dx_{i_0} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} + \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_0^1 \partial_i a(t\mathbf{x}) t^{k+1} dt \sum_{j=0}^k (-1)^j x_{i_j}(\mathbf{x}) dx_i \wedge dx_{i_0} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \end{aligned}$$

Másfelől $d\alpha = \sum_{i=1}^n \partial_i a dx_i \wedge dx_{i_0} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ így

$$\begin{aligned} I(d\alpha)_{\mathbf{x}} &= \left(\sum_{i=1}^n \int_0^1 \partial_i a(t\mathbf{x}) t x_i(\mathbf{x}) t^k dt \right) dx_{i_0} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} - \\ &- \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^k (-1)^j \int_0^1 \partial_i a(t\mathbf{x}) t^k t x_{i_j}(\mathbf{x}) dt \cdot dx_i \wedge dx_{i_0} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \end{aligned}$$

A kapott formulákat összegezve

$$\begin{aligned} d(I\alpha)_{\mathbf{x}} + I(d\alpha)_{\mathbf{x}} &= \int_0^1 \left(a(t\mathbf{x}) (k+1) t^k + \left(\frac{d(a(t\mathbf{x}))}{dt} \right) t^{k+1} \right) dt \cdot dx_{i_0} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &= a(\mathbf{x}) dx_{i_0} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \alpha_{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

adódik, ahogy vártuk. ■

Figyeljük meg, hogy $(I\alpha)_{\mathbf{x}}$ definíciójában $\mathbf{x}$ kettős szerepben van, egyrészt mint az $\mathbb{R}^n$ alapsokaság pontja, másrészt mint a $T_{t\mathbf{x}} \mathbb{R}^n$ érintőtér egy vektora.

Fontos megjegyezni, hogy Poincaré tétele alapján, ha egy zárt differenciálformának a tartója egy koordináta-környezeten belül van, akkor az a differenciálforma egzakt is, hisz egy koordináta-környezet mindig diffeomorf az euklideszi térrel.

Poincaré tételének másik érdekessége, hogy akár egyetlen pontnak az euklideszi térből való eltávolításával érvényét veszti. Legyen ugyanis $\alpha_{x,y} = \frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{-x}{x^2+y^2}dy$ egy egyfokú differenciálforma az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ téren. Könnyű látni, hogy $d\alpha = 0$, vagyis α egy zárt differenciálforma. Tegyük fel, hogy valamely $\beta = b(x,y)$ skalármezőre $\alpha = d\beta$. Ekkor $\partial_1 b(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ és $\partial_2 b(x,y) = \frac{-x}{x^2+y^2}$ következményeként $b(x,y) = c + \arctg(x/y)$ adódik, ami nem lehet, mert az $y = 0$ egyenes mentén nem differenciálható.

3.3. Integrálás sokaságokon és Stokes-tétel

Sokaságokon az okozza az integrálás bevezetésében a problémát, hogy nincs nyilvánvaló globális mérték, mely az analízisben megszokott Riemann- vagy Lebesgue-definíció alkalmazását lehetővé tenné. Sőt, éppen az integrálástól várjuk el egy geometriailag használható felszínmérték meghatározásának lehetőségét.

Mivel csak lokális környezetek adóttak, természetesnek tűnik a probléma lebontása a már kezelhető környezetek szintjére.

Definíció. Differenciálható nem negatív függvények egy megszámlálható $\{f_j\}_{j \in J}$ halmazát *egységbontásnak* nevezzük, ha

- (1) mindegyik függvény tartója kompakt,
- (2) mindegyik függvény tartója egy koordináta-környezet valódi része,
- (3) minden $P \in \mathcal{M}$ pontnak van olyan környezete, amelybe csak véges sok f_j függvény tartója metsz bele, és
- (4) minden $P \in \mathcal{M}$ pontban $\sum_{j \in J} f_j(P) = 1$.

Figyeljük meg, hogy a (4) pontban szereplő összeg minden $P \in \mathcal{M}$ pontban csak véges sok tagot tartalmaz a (3) pont értelmében.

Ahogy szokás, mi is a $\overset{\circ}{\mathcal{H}}$ jelölést alkalmazzuk a $\mathcal{H}$ halmaz belsejére.

Tétel. *Differenciálható sokaságokon létezik egységbontás.*

Bizonnyítás. Definíció szerint egy $\mathcal{M}$ differenciálható sokaság lokálisan kompakt és megszámlálható bázisú, ezért létezik koordináta-környezetek olyan $\{\mathcal{U}_i\}_{i=1}^\infty$ megszámlálható halmaza, hogy azok lefedik az $\mathcal{M}$ sokaságot, és $\mathcal{U}_i^-$ lezártjuk kompakt. Legyen $\mathcal{V}_1 = \mathcal{U}_1^-$ és $\mathcal{V}_{i+1} = \mathcal{U}_1^- \cup \dots \cup \mathcal{U}_j^-$, ahol j az a legkisebb index, melyre $\mathcal{V}_i \subset \mathcal{U}_1 \cup \dots \cup \mathcal{U}_j$.

Nyilván $\mathcal{V}_i \subset \overset{\circ}{\mathcal{V}}_{i+1}$ minden i egész számra, és $\mathcal{M} \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty \mathcal{V}_i$. Továbbá az is megállapítható, hogy minden $P \in \mathcal{M}$ pontra pontosan egy olyan i index létezik, melyre $P \in \mathcal{V}_{i+1} \setminus \mathcal{V}_i$. Ha most $\hat{\mathcal{V}}_P$ a P pont egy koordináta-környezete, akkor a

$\bar{\mathcal{V}}_P = \hat{\mathcal{V}}_P \cap (\overset{\circ}{\mathcal{V}}_{i+2} \setminus \mathcal{V}_{i-1})$ nyílt halmazon létezik egy olyan injektív és differenciálható $\varphi_P: \bar{\mathcal{V}}_P \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés, melyre $\varphi_P(\bar{\mathcal{V}}_P) \supseteq 3 \cdot B^n$ és $\varphi_P(P) = 0$. Legyen $\mathcal{V}_P = \varphi_P^{-1}(2B^n)$. Ekkor nyilván $\bigcup_{P \in \mathcal{V}_{i+1} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{V}}_i} \mathcal{V}_P$ lefedi a $\mathcal{V}_{i+1} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{V}}_i$ halmazt, amely kompakt, ezért mindenképpen létezik véges sok olyan $P_j \in \mathcal{V}_{i+1} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{V}}_i$ pont, melyek $\mathcal{V}_{P_j}$ környezetei szintén lefedik a $\mathcal{V}_{i+1} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{V}}_i$ halmazt. Minden i esetén megkeresve az ilyen fedőrendszert, végül az $\mathcal{M}$ sokaság egy új $\{\mathcal{V}_{P_j}^i\}$ fedőrendszeréhez és ezzel párhuzamosan egy ennek megfelelő $\{\varphi_{P_j}^i\}$ leképezésrendszeréhez jutunk, ahol j minden egyes i esetén csak véges sok értéket vesz fel.

Legyen az f végtelenszer differenciálható, nemnegatív valós függvény az $\mathbb{R}^n$ téren olyan, hogy

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |x| < 1, \\ 0, & \text{ha } |x| > 2, \\ \text{tetszőleges,} & \text{egyébként,} \end{cases}$$

és legyen még $\bar{f}_j^i: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan, hogy

$$\bar{f}_j^i(P) = \begin{cases} f(\varphi_j^i(P)), & \text{ha } P \in \mathcal{V}_{P_j}^i, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor az

$$f_j^i = \frac{\bar{f}_j^i}{\sum_{i,j} \bar{f}_j^i}$$

függvényrendszer egységbontás.

Az egyetlen nem nyilvánvaló igazolandó az, hogy minden P pont valamely környezetébe csak véges sok $\bar{f}_j^i$ függvény tartója metsz bele. Bármely P ponthoz pontosan egy olyan i index létezik, melyre $P \in \mathcal{V}_{i+1} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{V}}_i$. Legyen $\mathcal{P} \subset \mathcal{V}_{i+1} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{V}}_i$ a P pont egy környezete. Ha $k > i + 2$, akkor

$$\mathcal{P} \cap \mathcal{V}_{P_j}^k \subseteq \mathcal{P} \cap (\overset{\circ}{\mathcal{V}}_{k+2} \setminus \mathcal{V}_{k-1}) \subseteq (\mathcal{V}_{i+1} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{V}}_i) \cap (\mathcal{V}_{k+2} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{V}}_{k-1}) = \emptyset,$$

vagyis a P pont $\mathcal{P}$ környezetébe csak véges sok $\mathcal{V}_{P_j}^k$ környezet metsz bele. Minthogy $\text{supp } \bar{f}_j^i \subseteq \mathcal{V}_{P_j}^k$, ezzel a bizonyítás kész. ■

Egyszerű, de az integrál definíciója szempontjából fontos észrevétel, hogy két egységfelbontás szorzata is egységfelbontás, vagyis ha $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ és $\{g_j\}_{j=1}^\infty$ is egységfelbontás, akkor $\{f_i g_j\}_{i,j=1}^\infty$ szintén egységfelbontás.

A differenciálformák integráljának bevezetésénél az irányíthatóság is fontos szerephez jut.

Tétel. Egy $\mathcal{M}^n$ sokaság akkor és csak akkor irányított, ha létezik egy olyan n -ed fokú μ differenciálforma, amely sehol nem nulla.

Bizonyítás. Ha létezik ilyen μ , akkor mivel az n -ed fokú külsőformák tere 1-dimenziós, minden ilyen μ differenciálforma egy koordináta-környezetben azonosítható egy skalármezővel. Ha tehát μ sehol sem nulla, akkor ez a skalármező ebben a koordináta-környezetben mindenütt pozitív, vagy mindenütt negatív. Átmenve egyik koordináta-környezetből a másikba, ez szorozódik az átmenetfüggvény Jacobi-mátrixának determinánsával, ami ezek szerint mindenütt csak pozitív lehet.

Ha a sokaság irányított, akkor vegyünk egy f_j egységfelbontást, és az f_j függvény tartójához tartozó koordináta-környezetben a $\mu_j = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ differenciálformát. Legyen $\mu = \sum_j f_j \mu_j$. Ez a differenciálforma globálisan jól definiált. Ha ez valamely P pontban eltűnne, akkor az ott nemeltűnő f_j függvényeket szorozva az átmenetfüggvények Jacobi-determinánsával, a szorzatok összege 0 kellene legyen. Csakhogy minden ilyen f_j függvény és Jacobi-determináns is pozitív, tehát ez lehetetlen, vagyis μ sehol sem tűnhet el! ■

E tétel birtokában könnyű látni, hogy a Möbius-szalag nem irányítható, mivel ha lenne a felületnek folytonos $\mathbf{m}$ normális vektormezeje, akkor az az $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mapsto \langle \mathbf{m} \times \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$ másodfokú differenciálformát definiálna az egész felületen, mely az $\mathbf{m}$ körbetolása után értékének a -1 -szeresét adná. A folytonosság miatt így ez a differenciálforma valahol 0 is kellene legyen. Az, hogy a differenciálforma felveszi a 0 értéket, miközben $|\mathbf{m}| = 1$, azt mutatja, hogy a felületi normális csak lokálisan értelmezhető.

Definíció. Irányított $\mathcal{M}^n$ sokaságon az $\alpha \in \tilde{\Lambda}^n T^* \mathcal{M}^n$ differenciálforma integrálját a

$$\int_{\mathcal{M}} \alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i(r_i(x)) a(r_i(x)) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

formulával definiáljuk, ahol $\alpha = a \cdot dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$, f_i egy egységbontás az $\mathcal{M}$ sokaságon, és r_i az f_i tartóját lefedő koordináta-környezet paraméterezése.

A definíció jó, mert

- ha egy másik g_j egységbontást választunk, akkor a jobb oldal mindkettőre megegyezik a $\{f_i g_j\}$ szorzat egységbontásra adódó jobb oldallal,
- ha a paraméterezést változtatjuk meg, akkor mind a két oldalon bejön az integrandusba az átmenetfüggvény Jacobi-determinánsa, hisz ez a helyettesítéses integrálás szabálya és α alternáló forma!

Észre kell ugyanakkor venni, hogy míg a jobb oldalon a Jacobi-determináns abszolút értéke jön be, addig a bal oldalon abszolút érték nélkül jelenik meg a Jacobi-determináns. Ez magyarázza, hogy miért szorítottuk meg az értelmezést az irányított sokaságokra. Érdemes észrevenni még, hogy a definíció jelöléseivel

$$\int_{\mathcal{M}} \alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathcal{M}} (f_i \alpha).$$

Definíció. A sokaság dimenziójával megegyező rendű differenciálformát *térfogat-normának* nevezzük.

Egy reguláris $\mathcal{D}$ tartomány Ω -mértékén az $\Omega(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} \omega = \int_{\mathcal{M}} (\chi_{\mathcal{D}} \omega)$ integrált értjük, ahol $\chi_{\mathcal{D}}$ a tartomány indikátorfüggvénye, és $\omega \in \tilde{\Lambda}^n T^* \mathcal{M}$ egy térfogatnorma. Egy f skalármező $\mathcal{D}$ tartományon vett Ω -mérték szerinti integrálján az $\int_{\mathcal{D}} f d\Omega = \int_{\mathcal{D}} (f\omega)$ integrált értjük.

E definíció nem más, mint a gyakran pikkelyezésként emlegetett felszínszámítási módszer általánosítása, hiszen $\omega_P(\partial_1, \dots, \partial_n)$ arányos a $T_P \mathcal{M}^n$ érintőtérbeli $\partial_1, \dots, \partial_n$ által feszített paralelep előjeles térfogatával.

Integrálásról lévén szó, felvetődik, hogy van-e közös általánosítása a Newton–Leibnitz-, a Green- és a felületeknél megismert Stokes-formuláknak.

Stokes-tétel. Ha $\mathcal{D}$ kompakt reguláris tartomány a pozitív irányítású $\mathcal{M}$ sokaságban, és α egy $(n-1)$ -ed fokú differenciálforma, akkor

$$\int_{\mathcal{D}} d\alpha = \int_{\partial \mathcal{D}} \alpha.$$

Bizonyítás. Mivel $\mathcal{D}$ reguláris, válasszunk olyan atlaszt, melyben minden $P \in \partial \mathcal{D}$ határponthoz van a P pontnak olyan $(r_P, \mathcal{U}_P)$ koordináta-környezete, melyre $\mathcal{U}_P \cap \overline{\mathcal{D}} = r_P(B^n \cap \{x : x_1 \leq 0\})$, és $P = r_P(0)$. Mivel $\mathcal{D}$ kompakt, az egységbontás létezésének bizonyításában szereplő $\mathring{\mathcal{V}}_i$ nyílt halmazokból már véges sok, mondjuk, $\mathring{\mathcal{V}}_1 \cup \dots \cup \mathring{\mathcal{V}}_k$ lefedi a $\mathcal{D}$ tartományt. Ebből az következik, hogy az ott konstruált f_j^i egységfelbontás elemei eltűnnek a $\mathcal{D}$ tartományon, ha $i > k$. Ennek következtében az $\{f_j^i\}_{i \leq k}$ egy egységbontás a $\mathcal{D}$ tartományon, vagyis a $\sum_{i,j} f_j^i$ véges tagú összeg éppen 1 a $\mathcal{D}$ minden pontjában, tehát $\alpha = \sum_{i,j} (f_j^i \alpha)$ a $\mathcal{D}$ tartományon. Ezt helyettesítve a bizonyítandó egyenlőségre, a kapott

$$\sum_{i,j} \int_{\mathcal{D}} (df_j^i \wedge \alpha + f_j^i d\alpha) = \sum_{i,j} \int_{\partial \mathcal{D}} (f_j^i \alpha)$$

formula mutatja, hogy elegendő a megfelelő tagok egyenlőségét kimutatni.

Mivel a külső deriválás és az integrálás is additív művelet, a bizonyítást elegendő az $\alpha = adx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ alakú differenciálformákra elvégezni. Egy ilyennek a deriváltja nyilván $d\alpha = \partial_1 adx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.

Ha f_j^i tartója nem metszi a $\mathcal{D}$ tartomány határát, akkor persze $0 = \int_{\partial\mathcal{D}} (f_j^i \alpha)$. Ha f_j^i tartója része egy koordináta-környezetnek r paraméterezéssel, akkor

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} d(f_j^i \alpha) &= \int_{\mathcal{D}} (df_j^i \wedge \alpha + f_j^i d\alpha) \\ &= \int_{\mathcal{D}} (a\partial_1 f_j^i + f_j^i \partial_1 a) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \int_{r^{-1}(\mathcal{D} \cap \text{supp } f_j^i)} \dots \int (a\partial_1 f_j^i + f_j^i \partial_1 a) \circ r(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \int_{r^{-1}(\mathcal{D} \cap \text{supp } f_j^i)} \dots \int \partial_1 (a(r) f_j^i(r))(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 0 \end{aligned}$$

hiszen az x_1 szerinti legbelső integrál $[af_j^i]_{r^{-1}(\mathcal{D} \cap \text{supp } f_j^i)}$ értéke már nulla az f_j^i függvénynek a $\partial\mathcal{D}$ határon való eltűnése miatt.

Tegyük most fel, hogy f_j^i tartója metszi a $\mathcal{D}$ határát, mégpedig a $\mathcal{V}_j^i$ környezet által meghatározott egyetlen, vagyis $\mathcal{D} \cap \mathcal{V}_j^i = r(B^n \cap \{x : x_1 \leq 0\})$ érvényesül! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\int_{\mathcal{D}} d(f_j^i \alpha) = \int_{r^{-1}(\text{supp } f_j^i \cap \partial\mathcal{D})} \dots \int a(r(0, x_2, \dots, x_n)) f_j^i(r(0, x_2, \dots, x_n)) dx_2 \dots dx_n,$$

ami éppen a bizonyítandó jobb oldalán szereplő

$$\int_{\partial\mathcal{D}} (f_j^i \alpha) = \int_{r^{-1}(\text{supp } f_j^i)} \dots \int_{x_1=0} a(r(x_1, \dots, x_n)) f_j^i(r(x_1, \dots, x_n)) dx_2 \dots dx_n.$$

Ezzel Stokes tételét beláttuk. ■

Egy $\mathcal{D}$ megengedett tartomány határának határa mindig üres, mert Stokes tétele szerint minden $\beta \in \tilde{\Lambda}^{n-2} T^* \mathcal{M}^n$ differenciálformára

$$\int_{\partial\partial\mathcal{D}} \beta = \int_{\partial\mathcal{D}} d\beta = \int_{\mathcal{D}} dd\beta = 0.$$

Éppen az magyarázza a külső deriválás definíciójában a $ddf = 0$ elvárását!

3.4. Kovariáns deriválás, Christoffel-szimbólum, torzió és Riemann-görbület

A következő három szakaszban azt vizsgáljuk, hogy mit lehet a sokaságok geometriájáról mondani. Ahogy felületeknél, most is az érintőtereken ható operátorokat fogunk vizsgálni.

Definíció. Az olyan $\nabla: \tilde{T}\mathcal{M} \times \tilde{T}\mathcal{M} \rightarrow \tilde{T}\mathcal{M}$ leképezéseket, melyek mindkét változójukban lineárisak, és bármely f skalármezőre teljesítik a

$$\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y \quad \text{és} \quad \nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$$

azonosságokat, *kovariáns deriválásnak* nevezünk.

Egy kovariáns deriválás egy koordináta-környezetben való $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{i,j}^k \partial_k$ bázisbontásában szereplő $\Gamma_{i,j}^k$ skalár együtthatókat *Christoffel-szimbólumoknak* szokás hívni.hungarian,

Figyelem, a Christoffel-szimbólumok nem a sokasághoz, hanem csak az adott koordináta-környezethez rendelt függvények!

Tétel. A Christoffel-szimbólumok teljesen meghatározzák a kovariáns deriválást.

Bizonyítás. Legyen $X = \sum_{i=1}^n x^i \partial_i$ és $Y = \sum_{j=1}^n y^j \partial_j$ két vektormező. Ekkor

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_{i=1}^n x^i \nabla_{\partial_i} \left(\sum_{j=1}^n y^j \partial_j \right) = \sum_{i,j=1}^n x^i \left(\partial_i y^j \partial_j + y^j \sum_{k=1}^n \Gamma_{i,j}^k \partial_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n x^i \partial_i Y_k + \sum_{i,j=1}^n x^i y^j \Gamma_{i,j}^k \right) \partial_k, \end{aligned}$$

ahogy állítottuk. ■

Eszerint kovariáns deriválást „könnyű” konstruálni, ha választunk n^3 skalármezőt, és a bizonyítás utolsó formulájával definiáljuk magát a kovariáns deriválást. Ez utóbbi formula ezen túl lehetővé teszi a rögzített vektor szerinti kovariáns deriválás bevezetését.

Definíció. Ha $v \in T_P \mathcal{M}$, és $v = \sum_{i=1}^n v^i \partial_i$, valamint $Y = \sum_{j=1}^n y^j \partial_j$, akkor az Y vektormező v vektor szerinti kovariáns deriváltja

$$\nabla_v Y = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n v^i \partial_i Y_k(P) + \sum_{i,j=1}^n v^i y^j(P) \Gamma_{i,j}^k(P) \right) \partial_k \in T_P \mathcal{M}.$$

Eszerint, ha a P pont a G görbén található, akkor $\nabla_{\dot{G}} Y(P) = \nabla_{\dot{G}(P)} Y$.

Definíció. A $T: \tilde{T}\mathcal{M} \times \tilde{T}\mathcal{M} \rightarrow \tilde{T}\mathcal{M}$ leképezést, a ∇ kovariáns deriválás *torziójának* nevezzük, ha $T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$.

Tétel. A torzió antiszimmetrikus, bilineáris, mindkét komponenséből kiemelhetőek a függvények, és egy $P \in \mathcal{M}$ pontbeli értéke csak változóinak ugyanezen pontbeli értékétől függ, vagyis T egy $(2, 1)$ típusú tenzormező.

Bizonyítás. Az antiszimmetria és a bilinearitás a definícióból azonnal következik.

A skalármezők kiemelhetőségét a

$$\begin{aligned} T(f\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \nabla_{f\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}(f\mathbf{X}) - [f\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \\ &= f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}f\mathbf{X} - f\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} - f[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] + \mathbf{Y}f\mathbf{X} \\ &= fT(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \end{aligned}$$

levezetés bizonyítja.

Bármilyen $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ vektormezőhöz léteznek olyan $f_1, \dots, f_n$ és $g_1, \dots, g_n$ skalármezők, melyekre $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n f_i \partial_i$ és $\mathbf{Y} = \sum_{j=1}^n g_j \partial_j$, és így

$$T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = T\left(\sum_{i=1}^n f_i \partial_i, \sum_{j=1}^n g_j \partial_j\right) = \sum_{i=1, j=1}^n f_i g_j T(\partial_i, \partial_j),$$

ahol $T(\partial_i, \partial_j)$ az adott pontban konstans minden i, j indexre. Tehát a torzió értékét az $f_1(P), \dots, f_n(P)$ és $g_1(P), \dots, g_n(P)$ értékek határozzák meg. ■

Definíció. Az $R: \tilde{T}\mathcal{M} \times \tilde{T}\mathcal{M} \times \tilde{T}\mathcal{M} \rightarrow \tilde{T}\mathcal{M}$ leképezést, melyre

$$R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = \nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} - \nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} \mathbf{Z}$$

a kovariáns deriválás *Riemann-görbületének* nevezzük.

Tétel. A Riemann-görbület antiszimmetrikus az első kettő és lineáris mind a három változójában. Bármely változójából tetszőleges skalármező kiemelhető, és egy $P \in \mathcal{M}$ pontbeli értéke csak változóinak ugyanezen pontbeli értékétől függ, vagyis R egy $(3, 1)$ típusú tenzormező.

Bizonyítás. Az antiszimmetria és a linearitás a definícióból azonnal következik.

Legyen f tetszőleges skalármező. Ekkor az

$$\begin{aligned} R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})(f\mathbf{Z}) &= \nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}}(f\mathbf{Z}) - \nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{X}}(f\mathbf{Z}) - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}(f\mathbf{Z}) \\ &= \nabla_{\mathbf{X}}(f\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} + \mathbf{Y}f\mathbf{Z}) - \nabla_{\mathbf{Y}}(f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} + \mathbf{X}f\mathbf{Z}) - f\nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} \mathbf{Z} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f\mathbf{Z} \\ &= fR(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} \end{aligned}$$

levezetés mutatja a skalármezők kiemelhetőségét a harmadik változóból.

Az antiszimetria miatt a skalármezők kiemelhetőségét elég megmutatnunk az első változóban:

$$\begin{aligned}
 R(f\mathbf{X}, \mathbf{Y})(\mathbf{Z}) &= \nabla_{f\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} - \nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{f\mathbf{X}}\mathbf{Z} - \nabla_{[f\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} \mathbf{Z} \\
 &= f\nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} - \nabla_{\mathbf{Y}}(f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}) - \nabla_{f[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] - \mathbf{Y}f\mathbf{X}} \mathbf{Z} \\
 &= f\nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} - f\nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} - \mathbf{Y}f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} - f\nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} \mathbf{Z} + \mathbf{Y}f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} \\
 &= fR(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z}.
 \end{aligned}$$

A tétel utolsó állítása egyszerűen következik a skalármezők kiemelhetőségéből, ahogyan a torzió esetében is. ■

Egy adott koordináta-környezetben a torzió és a Riemann-görbület is kiszámolható a Christoffel-szimbólumok segítségével.

Tétel. *Legyen a torzió, és a Riemann-görbület bázisbontása*

$$T(\partial_i, \partial_j) = \sum_{k=1}^n T_{i,j}^k \partial_k, \quad \text{és} \quad R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_{l=1}^n R_{i,j,k}^l \partial_l.$$

Ekkor

$$T_{i,j}^k = \Gamma_{i,j}^k - \Gamma_{j,i}^k, \quad \text{és} \quad R_{i,j,k}^l = \partial_i \Gamma_{j,k}^l - \partial_j \Gamma_{i,k}^l + \sum_{m=1}^n (\Gamma_{j,k}^m \Gamma_{i,m}^l - \Gamma_{i,k}^m \Gamma_{j,m}^l). \quad (3.4.1)$$

Bizonyítás. A torzió esetén

$$T(\partial_i, \partial_j) = \nabla_{\partial_i} \partial_j - \nabla_{\partial_j} \partial_i - [\partial_i, \partial_j] = \sum_{k=1}^n (\Gamma_{i,j}^k - \Gamma_{j,i}^k) \partial_k,$$

hiszen $[\partial_i, \partial_j] = 0$ és így a bázisbontás egyértelműsége igazolja az állítást.

A Riemann-görbület esetén

$$\begin{aligned}
 R(\partial_i, \partial_j)\partial_k &= \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_k - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} \partial_k - \nabla_{[\partial_i, \partial_j]} \partial_k \\
 &= \nabla_{\partial_i} \left(\sum_{l=1}^n \Gamma_{j,k}^l \partial_l \right) - \nabla_{\partial_j} \left(\sum_{l=1}^n \Gamma_{i,k}^l \partial_l \right) \\
 &= \sum_{l=1}^n \partial_i \Gamma_{j,k}^l \partial_l + \sum_{l=1}^n \Gamma_{j,k}^l \sum_{m=1}^n \Gamma_{i,l}^m \partial_m - \sum_{l=1}^n \partial_j \Gamma_{i,k}^l \partial_l - \sum_{l=1}^n \Gamma_{i,k}^l \sum_{m=1}^n \Gamma_{j,l}^m \partial_m \\
 &= \sum_{l=1}^n \left((\partial_i \Gamma_{j,k}^l - \partial_j \Gamma_{i,k}^l) + \sum_{m=1}^n (\Gamma_{j,k}^m \Gamma_{i,m}^l - \Gamma_{i,k}^m \Gamma_{j,m}^l) \right) \partial_l
 \end{aligned}$$

igazolja az állítást. ■

Következmény. *A torzió akkor és csak akkor tűnik el, ha a Christoffel-szimbólumok az alsó indexben szimmetrikusak.*

A Riemann-görbület együtthatóinak alsó indexeiben megjelenő szimmetria egy újabb azonossághoz vezet, melyet *Algebrai Bianchi-azonosságnak* is szokás nevezni.

Jacobi-azonosság. *Ha a torzió eltűnik, akkor*

$$R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} + R(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})\mathbf{X} + R(\mathbf{Z}, \mathbf{X})\mathbf{Y} = 0$$

tetszőleges $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ és $\mathbf{Z}$ vektormezőre.

Bizonyítás. Kihhasználva a torzió eltűnését, egyszerű helyettesítéssel nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} & R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} + R(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})\mathbf{X} + R(\mathbf{Z}, \mathbf{X})\mathbf{Y} \\ &= \nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} - \nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} \mathbf{Z} + \\ & \quad + \nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{X} - \nabla_{\mathbf{Z}}\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} - \nabla_{[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]} \mathbf{X} + \\ & \quad + \nabla_{\mathbf{Z}}\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{Y} - \nabla_{[\mathbf{Z}, \mathbf{X}]} \mathbf{Y} \\ &= \nabla_{\mathbf{X}}[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] + \nabla_{\mathbf{Y}}[\mathbf{Z}, \mathbf{X}] + \nabla_{\mathbf{Z}}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} \mathbf{Z} - \nabla_{[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]} \mathbf{X} - \nabla_{[\mathbf{Z}, \mathbf{X}]} \mathbf{Y} \\ &= [\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]] + [\mathbf{Y}, [\mathbf{Z}, \mathbf{X}]] + [\mathbf{Z}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]], \end{aligned}$$

ami a Jacobi-azonosság miatt nulla. ■

Az általánosított relativitás elmélet alábbi fontos eleme a Riemann-görbület kontrakciójával kapható.

Definíció. Az $\tilde{T}\mathcal{M} \ni \mathbf{X} \mapsto R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} \in \tilde{T}\mathcal{M}$ lineáris transzformáció $\text{Ric}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ nyomát *Ricci-görbületnek* nevezzük.

A Ricci-görbület egy $(2, 0)$ típusú tenzor, melynek együtthatói $\text{Ric}_{i,j} = \sum_{k=1}^n R_{i,k,j}^k$.

3.5. Párhuzamosság és geodetikusok

Ebben a részben megmutatjuk, hogy kovariáns deriválásokra is bevezethető a párhuzamos eltolás és a geodetikus görbe fogalma.

Definíció. Az $\mathbf{Y}$ vektormező a G görbe mentén *párhuzamos*, ha $\nabla_{\dot{G}}\mathbf{Y} \equiv 0$.

Tétel. Az $\mathbf{Y} = \sum_{j=1}^n y^j \partial_j$ akkor és csak akkor párhuzamos a $G(t) = r(g(t))$ görbe mentén, ha

$$\frac{d(y^j \circ G)}{dt} + \sum_{k,l=1}^n \dot{g}_k \mathbf{Y}_l(G) \Gamma_{k,l}^j(G) = 0$$

minden $j = 1, \dots, n$ esetén, ahol g_k a g görbe k -adik koordinátája.

Bizonyítás. Definíció alapján

$$0 = \nabla_{\dot{G}} \mathbf{Y} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \dot{G}_i \partial_i \mathbf{Y}_k + \sum_{i,j=1}^n \dot{G}_i y^j \Gamma_{i,j}^k \right) \partial_k, \quad \text{és} \quad \frac{d(\mathbf{Y}_k \circ G)}{dt} = \sum_{i=1}^n \dot{G}_i \partial_i \mathbf{Y}_k.$$

Mivel $\dot{G}_i = \dot{g}_i$, ezekből következik az állítás. ■

A Picard–Lindelöf-tétel szerint a megadott differenciálegyenlet-rendszernek minden $\mathbf{Y}(t_0)$ kezdeti értékhez tetszőleges G görbe esetén pontosan egy megoldása létezik, vagyis a párhuzamos vektormezőt egyetlen pontbeli „állása” meghatározza. Más szóval, egy adott vektort el tudunk tolni párhuzamosan, és egy adott görbe mentén a párhuzamos vektormezők n -dimenziós vektorteret alkotnak, ami kanonikusan izomorf bármely görbementi érintőtérrel.

Mivel a differenciálegyenlet homogén, az $\lambda \mathbf{Y}(t_0)$ kezdeti értékhez tartozó párhuzamos vektormező mindig éppen λ -szorosa lesz a $\mathbf{Y}(t_0)$ kezdeti értékhez tartozó párhuzamos vektormezőnek. Ezt felismerve a felületeknél megadott bizonyítást szóról-szóra felhasználhatjuk az alábbi bizonyítására.

Tétel. Legyen $\tau_{t_0}^t$ a párhuzamos eltolás a G görbe mentén a $G(t)$ pontból a $G(t_0)$ pontba. Ekkor

$$\nabla_{\dot{G}} \mathbf{Y}(G(t_0)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\tau_{t_0}^t(\mathbf{Y}(G(t))) - \mathbf{Y}(G(t_0))}{t - t_0}.$$

Ez a tétel lehetővé teszi a tenzormezők párhuzamosságának, illetve kovariáns deriválásának definiálását (hiszen a vektormezők is $(0, 1)$ típusú tenzormezők!), de elkerülve számunkra nem fontos esetek vizsgálatát, inkább közvetlenül megadjuk a definíciót, amelyben azért könnyű felismerni a szorzatok deriválásának szokásos szabályát.

Definíció. Egy $S: (\tilde{T}\mathcal{M})^k \rightarrow \tilde{T}\mathcal{M}$ $(k, 1)$ típusú tenzormező kovariáns deriválásán azt a $\nabla S: (\tilde{T}\mathcal{M})^{k+1} \rightarrow \tilde{T}\mathcal{M}$ $(k+1, 1)$ típusú tenzormezőt értjük, melyre

$$\begin{aligned} \nabla S(\mathbf{X}; \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_k) &= \nabla_{\mathbf{X}} S(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_k) \\ &= \nabla_{\mathbf{X}} (S(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_k)) - \sum_{i=1}^k S(\mathbf{X}_1, \dots, \nabla_{\mathbf{X}} x^i, \dots, \mathbf{X}_k). \end{aligned}$$

Párhuzamosnak nevezzük azokat a k -lineáris $S: (\tilde{T}\mathcal{M})^k \rightarrow \tilde{T}\mathcal{M}$ differenciálható leképezéseket, amelyek $\nabla_{\dot{G}} S$ kovariáns deriválása eltűnik.

Eszerint a Riemann-görbület kovariáns deriváltja

$$\begin{aligned}\nabla R(\mathbf{V}; \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) &= \nabla_{\mathbf{V}} R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mathbf{Z} \\ &= \nabla_{\mathbf{V}} (R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mathbf{Z}) - R(\nabla_{\mathbf{V}} \mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mathbf{Z} - R(\mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{V}} \mathbf{Y}) \mathbf{Z} - R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \nabla_{\mathbf{V}} \mathbf{Z},\end{aligned}$$

ami rögtön egy újabb azonossággal szolgál.

Vezessük be a $\sigma: S \mapsto \sigma S$ formális műveletet a háromváltozós S vektortérbe való leképezéseken a

$$\sigma S(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = S(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + S(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{X}) + S(\mathbf{Z}, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$$

formulával.

Másodfajú algebrai Bianchi-azonosságok. (Szakács Nóra felvetésére.)

Tetszőleges $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ és $\mathbf{Z}$ vektormezőkre

$$\begin{aligned}\sigma(\nabla_{\mathbf{X}} T(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})) &= \sigma(R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mathbf{Z}) = \mathbf{0}, \\ \sigma(\nabla_{\mathbf{X}} R(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})) &= \sigma(R(\mathbf{X}, T(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}))).\end{aligned}$$

Ha a torzió eltűnik, akkor $\nabla_{\mathbf{X}} R(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + \nabla_{\mathbf{Y}} R(\mathbf{Z}, \mathbf{X}) + \nabla_{\mathbf{Z}} R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{0}$.

Bizonyítás. Az első azonosság igazolásával kezdjük:

$$\begin{aligned}\sigma(R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mathbf{Z}) &= \nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z} - \nabla_{\mathbf{Y}} \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Z} - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} \mathbf{Z} + \nabla_{\mathbf{Y}} \nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{X} - \nabla_{\mathbf{Z}} \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} - \nabla_{[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]} \mathbf{X} + \\ &\quad + \nabla_{\mathbf{Z}} \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{Y} - \nabla_{[\mathbf{Z}, \mathbf{X}]} \mathbf{Y} \\ &= \sigma(\nabla_{\mathbf{X}} (T(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]) - \nabla_{[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]} \mathbf{X}) \\ &= \sigma(\nabla_{\mathbf{X}} (T(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})) + T(\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]) + [\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]]) \\ &= \sigma(\nabla_{\mathbf{X}} T(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + T(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + T(\mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Z}) + T(\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}])) \\ &= \sigma(\nabla_{\mathbf{X}} T(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + T(\nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{X}, \mathbf{Y}) + T(\mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Z}) + T(\mathbf{Y}, [\mathbf{Z}, \mathbf{X}])) \\ &= \sigma(\nabla_{\mathbf{X}} T(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + T(\mathbf{Y}, T(\mathbf{X}, \mathbf{Z}))) = \sigma(\nabla_{\mathbf{X}} T(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})).\end{aligned}$$

Ebben előbb az $[\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]]$, majd végül a $T(\mathbf{Y}, T(\mathbf{X}, \mathbf{Z}))$ esetén használtuk a Jacobi-azonosságot.

A második azonosság igazolásához hosszabb út vezet:

$$\begin{aligned}\sigma(\nabla_{\mathbf{X}} R(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})) T &= \sigma(\nabla_{\mathbf{X}} (R(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) T) - R(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) T - R(\mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Z}) T - R(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \nabla_{\mathbf{X}} T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma(\nabla_X \nabla_Y \nabla_Z T - \nabla_X \nabla_Z \nabla_Y T - \nabla_X \nabla_{[Y,Z]} T - \\
&\quad - \nabla_{\nabla_X Y} \nabla_Z T + \nabla_Z \nabla_{\nabla_X Y} T + \nabla_{[\nabla_X Y, Z]} T - \\
&\quad - \nabla_Y \nabla_{\nabla_X Z} T + \nabla_{\nabla_X Z} \nabla_Y T + \nabla_{[Y, \nabla_X Z]} T - \\
&\quad - \nabla_Y \nabla_Z \nabla_X T + \nabla_Z \nabla_Y \nabla_X T + \nabla_{[Y,Z]} \nabla_X T) \\
&= \sigma(-\nabla_X \nabla_{[Y,Z]} T - \nabla_{\nabla_X Y} \nabla_Z T + \nabla_Z \nabla_{\nabla_X Y} T + \nabla_{[\nabla_X Y, Z]} T - \\
&\quad - \nabla_Z \nabla_{\nabla_Y X} T + \nabla_{\nabla_Y X} \nabla_Z T + \nabla_{[Y, \nabla_X Z]} T + \nabla_{[Y,Z]} \nabla_X T) \\
&= \sigma(-\nabla_X \nabla_{[Y,Z]} T - \nabla_{T(X,Y)+[X,Y]} \nabla_Z T + \nabla_{[\nabla_X Y, Z]} T + \\
&\quad + \nabla_Z \nabla_{T(X,Y)+[X,Y]} T + \nabla_{[Z, \nabla_Y X]} T + \nabla_{[Y,Z]} \nabla_X T) \\
&= \sigma(-\nabla_{T(X,Y)} \nabla_Z T + \nabla_{[\nabla_X Y, Z]} T + \nabla_Z \nabla_{T(X,Y)} T + \nabla_{[Z, \nabla_Y X]} T) \\
&= \sigma(\nabla_Z \nabla_{T(X,Y)} T - \nabla_{T(X,Y)} \nabla_Z T - \nabla_{[Z, \nabla_X Y]} T + \nabla_{[Z, \nabla_Y X]} T) \\
&= \sigma(\nabla_Z \nabla_{T(X,Y)} T - \nabla_{T(X,Y)} \nabla_Z T - \nabla_{[Z, T(X,Y)]} T - \nabla_{[Z, [X,Y]]} T) \\
&= \sigma(R(Z, T(X, Y))).
\end{aligned}$$

Ezzel a tétel bizonyítása teljes. ■

A felületeknél adott bizonyításunk felhasználásával egyszerűen bizonyíthatjuk a Riemann-görbület alábbi geometriai jelentését is. Sőt, ezúttal nem kell a Gauss-egyenletre sem hivatkozni (ilyen a sokaságon nincs is), hanem elég a Riemann-görbület definícióját használni annak tudatában, hogy annak értéke csak argumentumainak az adott pontban felvett értékeitől függ. Jegyezzük meg, hogy az alábbi tételben szereplő paraméter-téglalap a Lie-zárójel eltűnése miatt záródik!

Tétel. Legyen $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ a $T_P \mathcal{M}$ érintőtér három vektora úgy, hogy $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ független. Paraméterezzük P egy környezetét úgy, hogy két, a P ponton átmenő paramétervonal érintője $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ legyen. Legyen $\tau_P^{s,t,s,t}: T_P \mathcal{M} \rightarrow T_P \mathcal{M}$ az a transzformáció, melynek $\tau_P^{s,t,s,t} \mathbf{w}$ eredményét úgy kapjuk, hogy a fentebb megadott paramétervonalak határolta $s \times t$ oldalhosszúságú téglalap élein a $\mathbf{w}$ vektort párhuzamosan körbetoljuk. Ekkor

$$R(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{w} = - \lim_{s,t \rightarrow 0} \frac{\tau_P^{s,t,s,t}(\mathbf{w}) - \mathbf{w}}{s \cdot t}.$$

Definíció. A G görbét *geodetikusnak* nevezzük, ha $\nabla_{\dot{G}} \dot{G} = 0$.

A felületeknél elvégzett levezetés analóg ismétlésével bizonyítható a következő.

Geodetikusok differenciálegyenlete. Az r koordináta-környezetben a $G = r \circ g$ geodetikus $g: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ térgörbéje eleget tesz a

$$\ddot{g}_k + \sum_{i,j=1}^n \dot{g}_i \dot{g}_j \Gamma_{i,j}^k(r(g_1, \dots, g_n)) = 0 \quad k = 1, \dots, n$$

differenciálegyenlet-rendszernek.

Az általános paraméterezésű geodetikus görbe a

$$\ddot{g}_k \dot{g}_l - \dot{g}_l \dot{g}_k + \sum_{i,j=1}^n \dot{g}_i \dot{g}_j (\dot{g}_l \Gamma_{i,j}^k(r(g_1, \dots, g_n)) - \dot{g}_k \Gamma_{i,j}^l(r(g_1, \dots, g_n))) = 0$$

differenciálegyenlet-rendszernek tesz eleget, ahol $k, l = 1, \dots, n$.

Megjegyzés. A Picard–Lindelöf-tételből itt is következik, hogy minden $\mathbf{v} \in T_P \mathcal{M}$ érintővektorra a fenti differenciálegyenlet-rendszernek pontosan egy megoldása létezik (legalábbis a P pont egy környezetében) úgy, hogy a $G = r \circ g$ geodetikus átmegy a P ponton, és éppen $\mathbf{v}$ irányába halad, vagyis $G(0) = P$ és $\dot{G}(0) = \mathbf{v}$.

Tétel. Legyen $0 \leq \lambda \leq 1$, és definiáljuk a $\tilde{\nabla}$ kovariáns deriválást a $\tilde{\Gamma}_{i,j}^k = \lambda \Gamma_{j,i}^k + (1-\lambda) \Gamma_{i,j}^k$ Christoffel-szimbólumokkal, ahol $\Gamma_{i,j}^k$ a ∇ kovariáns deriválás Christoffel-szimbóluma. Ekkor a két kovariáns deriválás geodetikusai megegyeznek.

Bizonyítás. Csak annyit kell bizonyítanunk, hogy a geodetikusok differenciálegyenlete ekvivalens módon változik. Ebben az esetben a Picard–Lindelöf-tétel egyértelműségi része bizonyítja állításunkat.

A geodetikusokra vonatkozó $\ddot{g}_k + \sum_{i,j=1}^n \dot{g}_i \dot{g}_j \tilde{\Gamma}_{i,j}^k = 0$ differenciálegyenletbe behelyettesítve a megadott kifejezést, az ekvivalens

$$\ddot{g}_k + \sum_{i,j=1}^n \dot{g}_i \dot{g}_j \Gamma_{i,j}^k + \lambda \sum_{i,j=1}^n \dot{g}_i \dot{g}_j (\Gamma_{j,i}^k - \Gamma_{i,j}^k) = 0$$

egyenlethez jutunk, de ebben az utolsó szumma a tagok antiszimmetriája miatt eltűnik, ami igazolja állításunkat. ■

A $\lambda = 1/2$ esetben a $\tilde{\nabla}$ kovariáns deriválás torziómentessé válik, ezért ha csak a geodetikusokra vagyunk kíváncsiak, általában feltehető, hogy a kovariáns deriválás torziómentes.

3.6. Exponenciális, affin és geodetikus leképezések

A geodetikusok differenciálegyenleténél a Picard–Lindelöf-tétel alkalmazásával már láttuk, hogy bármely $\mathbf{v} \in T_P \mathcal{M}$ vektor esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy az $\exp(t\mathbf{v}) = G(t)$ jobb oldala $|t| < \delta$ esetén létezik. Ez teszi értelmessé az exponenciális leképezés alábbi definícióját.

Definíció. Ha valamely nyílt $N_P \subseteq T_P\mathcal{M}$ halmazon értelmezhető az $\exp_P: N_P \rightarrow \mathcal{M}$ leképezés, mely minden $\mathbf{v} \in N_P$ vektorhoz az $\exp_P \mathbf{v} = G(1)$ pontot rendeli, ahol G a $P \in \mathcal{M}$ ponton $\mathbf{v}$ érintővel átmenő geodetikus, akkor az $\exp_P$ leképezést *exponenciális leképezésnek* nevezzük.

Ha a geodetikusokat paraméterezésükkel együtt tekintjük, és $\exp_P \mathbf{v} = G(1)$, akkor a már említett differenciálegyenlet homogenitása és egyértelmű megoldhatósága miatt nyilván $\exp_P(t\mathbf{v}) = G(t)$. Eszerint, ha $N_P \subseteq N'_P \subseteq T_P\mathcal{M}$, akkor a N'_P halmazon vett exponenciális leképezés a N_P halmazon vett exponenciális leképezés kiterjesztése. Ez indokolja, hogy csak a kiinduló pontot jelöljük az exponenciális leképezés indexében, de egyértelmű helyzetben még az is gyakran elmarad.

Tétel. Az exponenciális leképezés lokális diffeomorfizmus, melynek indukált leképezése az origóban az identitás.

Bizonyítás. Mindenekelőtt vegyük észre, hogy az exponenciális leképezés a Pickard–Lindelöf-tétel szerint differenciálható, és ha $(\exp_P)_*|_{T_0T_P\mathcal{M}}: T_0T_P\mathcal{M} \rightarrow T_P\mathcal{M}$ az identitás, tehát nemelfajuló leképezés, akkor az inverzfüggvény-tétel értelmében $\exp_P$ az 0 origó közelében diffeomorfizmus. Alább használjuk a kanonikus $T_0T_P\mathcal{M} = T_P\mathcal{M}$ azonosítást.

Elég tehát állításunk második részét bizonyítanunk. Bármely $\mathbf{v} \in T_P\mathcal{M}$ vektor a hozzá tartozó $G(t) = \exp(t\mathbf{v})$ geodetikus $\mathbf{v} = \dot{G}(0)$ érintője a P pontban, így a $\mathbf{v}$ vektorhoz tartozó $T_P\mathcal{M}$ térbeli görbe a $g(t) = t\mathbf{v}$ egyenes, amelyet az exponenciális leképezés az $\mathcal{M}$ sokaságbeli $G(t) = \exp(g(t)) = \exp(t\mathbf{v})$ görbébe visz. Alkalmazva az indukált leképezés definícióját, most már nyilvánvaló, hogy

$$(\exp_P)_* \mathbf{v} = (\exp_P)_* \left(\frac{dg(t)}{dt} \Big|_{t=0} \right) = \frac{d \exp(g(t))}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{dG(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \dot{G}(0) = \mathbf{v},$$

vagyis $(\exp_P)_*|_{T_0T_P\mathcal{M}} = \text{id}$, ahogy állítottuk. ■

Definíció. Egy $(r, \mathcal{U})$ koordináta-környezetet *normál koordináta-környezetnek* nevezzük, ha az $r(0)$ ponton átmenő minden geodetikus r^{-1} melletti képe egyenes és az $r(0)$ ponton átmenő paramétervonalak is geodetikusok.

Mivel az exponenciális leképezés diffeomorfizmus, minden pontnak van normál koordináta-környezete. Ez általában nagy segítség a részletes számolásoknál, hiszen például az ilyen koordináta-környezet $r(0,0)$ pontjában az ebben felírt Christoffel-szimbólumokra a geodetikusok differenciálegyenlete szerint $\sum_{i,j=1}^n \dot{g}_i(0) \dot{g}_j(0) \Gamma_{i,j}^k(r(0)) = 0$ tetszőleges $\dot{g}_i(0)$ skalárookra, amiből $\Gamma_{i,j}^k(r(0)) + \Gamma_{j,i}^k(r(0)) = 0$ következik.

A diffeomorfizmusok csak a sokaságok atlaszát őrzik meg, de van közöttük olyan is, amely a kovariáns deriválást is megtartja.

Definíció. Egy $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \bar{\mathcal{M}}$ diffeomorfizmust *affin diffeomorfizmusnak* nevezzük, ha $\varphi_* \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} = \bar{\nabla}_{\varphi_* \mathbf{X}} (\varphi_* \mathbf{Y})$ bármely $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \tilde{T}\mathcal{M}$ vektormezőre.

Struktúra-tétel. Legyen $(r, \mathcal{U})$ egy normál koordináta-környezete az $r(\mathbf{0}) \in \mathcal{M}$ pontnak, és legyen $\mathbf{X}_i$ az a vektormező, amely párhuzamos minden az $r(\mathbf{0})$ ponton átmenő geodetikuson és $\mathbf{X}_i(r(\mathbf{0})) = \partial_i \in T_{r(\mathbf{0})}\mathcal{M}$. Ezek mintájára legyen $(\bar{r}, \bar{\mathcal{U}})$ egy normál koordináta-környezete az $\bar{r}(\mathbf{0}) \in \bar{\mathcal{M}}$ pontnak, és legyen $\bar{\mathbf{X}}_i$ az a vektormező, amely párhuzamos minden az $\bar{r}(\mathbf{0})$ ponton átmenő geodetikuson és $\bar{\mathbf{X}}_i(\bar{r}(\mathbf{0})) = \bar{\partial}_i \in T_{\bar{r}(\mathbf{0})}\bar{\mathcal{M}}$. Ha a $\varphi: \mathcal{U} \rightarrow \bar{\mathcal{U}}$ diffeomorfizmus tartja a Riemann-görbületet és a torziót, valamint $\varphi(r(\mathbf{0})) = \bar{r}(\mathbf{0})$ és $\varphi_* \mathbf{X}_i = \bar{\mathbf{X}}_i$ minden $1 \leq i \leq n$ esetén, akkor φ affin.

Az itt most mellőzött bizonyítás [11, VI.7.1] érzékeltetéséhez figyeljük meg, hogy a Riemann-görbület és a torzió Christoffel-szimbólumokból való kifejezése ez utóbbira differenciálegyenlet-rendszert ad meg mindkét sokaságon. Ezek a differenciálegyenlet-rendszerek a Struktúra-tétel feltételei mellett, vagyis R, T és egy rögzített párhuzamos vektorbázis ismeretében a Picard–Lindelöf-tétel szerint egyértelműen oldhatók meg, amiért a $\varphi_*^{-1} \bar{\nabla}_{\varphi_* \mathbf{X}} (\varphi_* \mathbf{Y})$ „visszahúzott” kovariáns deriválás egybe kell essen az eredeti $\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}$ kovariáns deriválással. Ha R és T együtthatói konstansok, akkor a differenciálegyenlet konstans együtthatóssá válik, amiért a normál koordináta-környezetben a kovariáns deriválás, vagyis a Christoffel-szimbólumok analitikusak lesznek.

Tétel. Az affin diffeomorfizmusok kommutálnak az exponenciális leképezéssel, vagyis ha $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \bar{\mathcal{M}}$ affin diffeomorfizmus, akkor $\varphi \exp \mathbf{X} = \exp \varphi_* \mathbf{X}$ tetszőleges $\mathbf{X} \in T\mathcal{M}$ vektor esetén.

Bizonyítás. Legyen $\bar{\nabla}$ kovariáns deriválás az $\bar{\mathcal{M}}$ sokaságon, és tekintsük egy G geodetikus φ melletti $\bar{G} = \varphi G$ képét. Ez is geodetikus, hiszen $\varphi_* \dot{G} = (\varphi G)' = \dot{\bar{G}}$ alapján $0 = \varphi_* \nabla_{\dot{G}} \dot{G} = \bar{\nabla}_{\varphi_* \dot{G}} (\varphi_* \dot{G}) = \bar{\nabla}_{\dot{\bar{G}}} (\dot{\bar{G}})$. Eszerint $\exp_{\varphi G} \varphi_* \dot{G} = \exp_{\bar{G}} \dot{\bar{G}} = \bar{G} = \varphi G = \varphi \exp_G \dot{G}$, ami igazolja állításunkat. ■

Eredményünk lehetővé teszi a Struktúra-tétel egy, a geometriai tartalmat lényegesen jobban mutató megfogalmazását [35, 1.7.19].

Struktúra-tétel. Ha két kovariáns deriválás geodetikusai, Riemann-görbülete és torziója egybeesik az egész sokaságon, akkor a kovariáns deriválások megegyeznek.

Definíció. Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{M}$ sokaság *lokálisan szimmetrikus*, ha minden $P \in \mathcal{M}$ pontnak van olyan $\mathcal{U}_P$ környezete, amelyben a $\sigma_P: \mathcal{U}_P \rightarrow \mathcal{U}_P, \sigma_P(\exp_P \mathbf{v}) = \exp_P(-\mathbf{v})$ leképezés affin diffeomorfizmus.

Az ilyen σ_P leképezéseket *lokális szimmetriáknak*, nevezzük.

Világos, hogy egy lokális szimmetria indukált leképezése a kiindulási pontban középpontos tükrözés, vagyis $(\sigma_P)_* \mathbf{v} = -\mathbf{v}$.

Tétel. Egy sokaság akkor és csak akkor lokálisan szimmetrikus, ha torziója és Riemann-görbületének ∇R kovariáns deriváltja is eltűnik.

Bizonyítás. Amennyiben a lokális szimmetriák affin diffeomorfizmusok,

$$-T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sigma_* T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = T(\sigma_* \mathbf{X}, \sigma_* \mathbf{Y}) = T(-\mathbf{X}, -\mathbf{Y}) = T(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$$

igazolja az első,

$$\begin{aligned} -\nabla R(\mathbf{V}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) &= \sigma_* \nabla R(\mathbf{V}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \nabla R(\sigma_* \mathbf{V}, \sigma_* \mathbf{X}, \sigma_* \mathbf{Y}, \sigma_* \mathbf{Z}) \\ &= \nabla R(-\mathbf{V}, -\mathbf{X}, -\mathbf{Y}, -\mathbf{Z}) = \nabla R(\mathbf{V}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

pedig a második állításunk szükségességét.

Ha most T és ∇R is eltűnik, akkor csak azt kell igazolnunk, hogy a $P \in \mathcal{M}$ pont elegendően kicsiny $\mathcal{U}_P$ környezetén a $\sigma_P(\exp_P \mathbf{v}) = \exp_P(-\mathbf{v})$ összefüggéssel értelmezett $\sigma_P: \mathcal{U}_P \rightarrow \mathcal{U}_P$ leképezés affin diffeomorfizmus. Mivel az exponenciális leképezés diffeomorfizmus, a definiáló képlet azonnal mutatja, hogy a σ_P is diffeomorfizmus.

Az affinitás bizonyításához definiáljuk a $\bar{\nabla}: \tilde{T}\mathcal{U}_P \times \tilde{T}\mathcal{U}_P \rightarrow \tilde{T}\mathcal{U}_P$ leképezést a $\bar{\nabla}_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} = \sigma_{P*}^{-1} \nabla_{\sigma_{P*} \mathbf{X}} \sigma_{P*} \mathbf{Y}$ formulával. Ez nyilván egy kovariáns deriválás, és

$$\begin{aligned} \bar{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \bar{\nabla}_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - \bar{\nabla}_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \\ &= \sigma_{P*}^{-1} \nabla_{\sigma_{P*} \mathbf{X}} \sigma_{P*} \mathbf{Y} - \sigma_{P*}^{-1} \nabla_{\sigma_{P*} \mathbf{Y}} \sigma_{P*} \mathbf{X} - \sigma_{P*}^{-1} [\sigma_{P*} \mathbf{X}, \sigma_{P*} \mathbf{Y}] \\ &= \sigma_{P*}^{-1} T(\sigma_{P*} \mathbf{X}, \sigma_{P*} \mathbf{Y}), \end{aligned}$$

és ugyanígy $\bar{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = \sigma_{P*}^{-1} R(\sigma_{P*} \mathbf{X}, \sigma_{P*} \mathbf{Y})\sigma_{P*} \mathbf{Z}$, valamint ezt is felhasználva $\bar{\nabla} \bar{R}(\mathbf{V}; \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \sigma_{P*}^{-1} \nabla R(\sigma_{P*} \mathbf{V}; \sigma_{P*} \mathbf{X}, \sigma_{P*} \mathbf{Y}, \sigma_{P*} \mathbf{Z})$. Eszerint a $\bar{T}$ eltűnik a T eltűnése miatt, és $\bar{\nabla} \bar{R}$ is eltűnik a ∇R eltűnése miatt, a P pontban pedig $\bar{R}_P = R_P$ teljesül. Eszerint a $\bar{\nabla} \bar{R} = 0$ és $\nabla R = 0$ differenciálegyenleteknek ugyanaz az $\bar{R}_P = R_P$ peremértéke a P pontban, így a Pickard–Lindelöf-tétel miatt $\bar{R} = R$ is teljesül. Összefoglalva, $\bar{R} = R$ és $\bar{T} = T = 0$, valamint $\bar{\nabla} \bar{R} = \nabla R = 0$.

Legyenek az $\mathbf{X}_i$ és $\bar{\mathbf{X}}_i$ vektormezők minden a P ponton átmenő geodetikusan ∇ és $\bar{\nabla}$ szerint párhuzamosak a $\partial_i \in T_P \mathcal{M}$ és $-\partial_i \in T_P \mathcal{M}$ vektorral. Ekkor

tetszőleges, a P ponton átmenő G geodetikus esetén

$$0 = \sigma_{P*}0 = \sigma_{P*}\bar{\nabla}_{\dot{G}(-t)}\bar{\mathbf{X}}_i = \nabla_{\sigma_{P*}(\dot{G}(-t))}\sigma_{P*}\bar{\mathbf{X}}_i = \nabla_{-\dot{G}(t)}\sigma_{P*}\bar{\mathbf{X}}_i = \nabla_{\dot{G}(t)}\sigma_{P*}\bar{\mathbf{X}}_i,$$

az $\bar{\mathbf{X}}_i$ vektormező $\bar{\nabla}$ szerinti párhuzamossága miatt. Ebből viszont $\sigma_{P*}\bar{\mathbf{X}}_i$ vektormező ∇ szerinti párhuzamossága következik, amiből a párhuzamosság kezdőérték szerinti egyértelműsége miatt $\mathbf{X}_i = \sigma_{P*}\bar{\mathbf{X}}_i$ adódik, hiszen $\partial_i = \sigma_{P*}(-\partial_i)$.

A Struktúra tétel első verziója szerint ezekből σ_P affinitása következik. ■

A tétel első része általánosabban azt mutatja, hogy egy lokálisan szimmetrikus téren minden a lokális szimmetriával felcserélhető páros fokú tenzormező azonosan nulla.

Definíció. Két sokaság közti diffeomorfizmust *geodetikus kapcsolatnak* nevezzük, ha a geodetikusokat bijektív módon általános paraméterezésű geodetikusokba viszi.

Tétel. Legyen $\mathcal{M}$ és $\bar{\mathcal{M}}$ két sokaság nulla torzióval. A $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \bar{\mathcal{M}}$ diffeomorfizmus akkor és csak akkor geodetikus kapcsolat, ha a megfelelő Christoffel-szimbólumokra

$$(n+1)\Gamma_{i,j}^k - \sum_{m=1}^n (\delta_{i,k}\Gamma_{m,j}^m + \delta_{j,k}\Gamma_{m,i}^m) = (n+1)\bar{\Gamma}_{i,j}^k \circ \varphi - \sum_{m=1}^n (\delta_{i,k}\bar{\Gamma}_{m,j}^m \circ \varphi + \delta_{j,k}\bar{\Gamma}_{m,i}^m \circ \varphi)$$

teljesül minden $i, j, k = 1, \dots, n$ esetén, ahol $\delta_{i,k}$ a Kronecker-delta.

Bizonyítás. Legyen az $\mathcal{M}$ sokaság r koordináta-környezetében a $G = r \circ g$ geodetikus ($g: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$). Ekkor

$$\ddot{g}_k + \sum_{i,j=1}^n \dot{g}_i \dot{g}_j \Gamma_{i,j}^k(r(g_1, \dots, g_n)) = 0$$

minden $k = 1, \dots, n$ esetén.

Ha $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \bar{\mathcal{M}}$ geodetikus kapcsolat, akkor a $\varphi \circ G = \varphi \circ r \circ g$ egy általános paraméterezésű geodetikus görbe az $\bar{\mathcal{M}}$ sokaság $\varphi \circ r$ koordináta-környezetében, ezért

$$\ddot{g}_k \dot{g}_l - \dot{g}_l \dot{g}_k + \sum_{i,j=1}^n \dot{g}_i \dot{g}_j (\dot{g}_i \bar{\Gamma}_{i,j}^k(\varphi(r(g_1, \dots, g_n))) - \dot{g}_k \bar{\Gamma}_{i,j}^l(\varphi(r(g_1, \dots, g_n)))) = 0$$

minden $k, l = 1, \dots, n$ esetén, ahol $\bar{\Gamma}_{i,j}^k$ a $\varphi \circ r$ koordináta-környezet Christoffel-szimbóluma.

Az utóbbi differenciálegyenletbe behelyettesítve az előbbiből adódó $\ddot{g}_k$ és $\ddot{g}_l$ értékeket

$$\sum_{i,j=1}^n \dot{g}_i \dot{g}_j (\dot{g}_l \Delta_{i,j}^k (r(g_1, \dots, g_n)) - \dot{g}_k \Delta_{i,j}^l (r(g_1, \dots, g_n))) = 0$$

adódik, ahol $\Delta_{i,j}^k = \bar{\Gamma}_{i,j}^k \circ \varphi - \Gamma_{i,j}^k$. A Kronecker-delta bevezetésével a képletbe, a

$$\sum_{i,j,m=1}^n \dot{g}_i \dot{g}_j \dot{g}_m (\delta_{m,l} \Delta_{i,j}^k (r(g_1, \dots, g_n)) - \delta_{m,k} \Delta_{i,j}^l (r(g_1, \dots, g_n))) = 0$$

formulához, vagy röviden a $\sum_{i,j,m=1}^n \dot{g}_i \dot{g}_j \dot{g}_m (\delta_{m,l} \Delta_{i,j}^k - \delta_{m,k} \Delta_{i,j}^l) = 0$ képlethez jutunk. Ez ekvivalens a geodetikus kapcsolat léteével.

Ciklikusan permutálva az i, j és m indexeket, majd összegezve a három képletet, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i,j,m=1}^n \dot{g}_i \dot{g}_j \dot{g}_m (\delta_{m,l} \Delta_{i,j}^k - \delta_{m,k} \Delta_{i,j}^l + \delta_{i,l} \Delta_{j,m}^k - \delta_{i,k} \Delta_{j,m}^l + \delta_{j,l} \Delta_{m,i}^k - \delta_{j,k} \Delta_{m,i}^l) = 0,$$

amit úgy is írhatunk, hogy

$$\langle (\dot{g}_i \dot{g}_j \dot{g}_m), (\delta_{m,l} \Delta_{i,j}^k - \delta_{m,k} \Delta_{i,j}^l + \delta_{i,l} \Delta_{j,m}^k - \delta_{i,k} \Delta_{j,m}^l + \delta_{j,l} \Delta_{m,i}^k - \delta_{j,k} \Delta_{m,i}^l) \rangle = 0$$

az $\mathbb{R}^{n^3}$ térben. Mivel a $(\dot{g}_i \dot{g}_j \dot{g}_m)_{i,j,m=1}^n$ vektor a permutációs szimmetriájától eltekintve tetszőleges lehet, a szimmetriája pedig (hiszen $\Delta_{i,j}^k = \Delta_{j,i}^k$ a torzió eltűnése miatt) megegyezik a belsőszorzás másik tényezőjével, a másik vektor csak a nulla lehet:

$$\delta_{m,l} \Delta_{i,j}^k + \delta_{i,l} \Delta_{j,m}^k + \delta_{j,l} \Delta_{m,i}^k = \delta_{m,k} \Delta_{i,j}^l + \delta_{i,k} \Delta_{j,m}^l + \delta_{j,k} \Delta_{m,i}^l.$$

Legyen most $l = j$, és összegezzünk a j indexre. Ennek

$$\Delta_{i,m}^k + \Delta_{i,m}^k + n \Delta_{m,i}^k = \delta_{m,k} \sum_{j=1}^n \Delta_{i,j}^j + \delta_{i,k} \sum_{j=1}^n \Delta_{j,m}^j + \Delta_{m,i}^k$$

az eredménye. Mivel a torzió mindkét téren nulla, $\Delta_{m,i}^k = \delta_{m,k} \psi_i + \delta_{i,k} \psi_m$ adódik, ahol $\psi_i = (\sum_{j=1}^n \Delta_{j,i}^j) / (n+1)$. Ez éppen a tétel állításának szükségesség része.

Az elégségeséghez elég látni, hogy ha $\Delta_{m,i}^k = \delta_{m,k} \psi_i + \delta_{i,k} \psi_m$, akkor

$$\sum_{i,j,m=1}^n \dot{g}_i \dot{g}_j \dot{g}_m (\delta_{m,l} \Delta_{i,j}^k - \delta_{m,k} \Delta_{i,j}^l)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j,m=1}^n \dot{g}_i \dot{g}_j \dot{g}_m (\delta_{m,l} (\delta_{i,k} \psi_j + \delta_{j,k} \psi_i) - \delta_{m,k} (\delta_{i,l} \psi_j + \delta_{j,l} \psi_i)) \\
&= (\dot{g}_l (\dot{g}_k \sum_{j=1}^n \dot{g}_j \psi_j + \dot{g}_k \sum_{i=1}^n \dot{g}_i \psi_i) - \dot{g}_k (\dot{g}_l \sum_{j=1}^n \dot{g}_j \psi_j + \dot{g}_l \sum_{i=1}^n \dot{g}_i \psi_i)) = 0.
\end{aligned}$$

Jegyezzük itt meg, hogy amennyiben $\Delta_{m,i}^k$ előáll $\delta_{m,k} \xi_i + \delta_{i,k} \xi_m$ alakban valamely ξ_i függvényekre, akkor $\xi_i = (\sum_{j=1}^n \Delta_{j,i}^j)/(n+1)$ már következik.

Ezzel az állítást teljesen bebizonyítottuk. ■

Fontos megfigyelni, hogy az állításban szereplő $\bar{\Gamma}_{m,j}^m$ Christoffel-szimbólumok nem akármilyen, hanem csak a $\varphi \circ r$ koordináta-környezetben számolandók.

Riemann-sokaságok

Definíció. Egy $\mathcal{M}$ differenciálható sokaságot *Riemann-sokaságnak* nevezünk, ha adott rajta egy $(2, 0)$ típusú szimmetrikus valósértékű tenzormező, mely minden $P \in \mathcal{M}$ pontra egy pozitív definit belsőszorzatot definiál a $T_P\mathcal{M}$ érintőtéren.

Ezt az általában $g_P\langle \cdot, \cdot \rangle$ -vel jelölt tenzormezőt *Riemann-metrikának* nevezik. Az ennek a $T_P\mathcal{M}$ érintőtérbeli bázisbontásához tartozó mátrixegyütthatókat $g_{i,j}(P)$, az inverz mátrix elemeit $g^{k,l}(P)$ jelöli, de a P kiindulási pontot általában nem írjuk ki. Amikor fontos az $\mathcal{M}$ sokaságon adott Riemann-metrika megjelölése is, akkor élni fogunk az $(\mathcal{M}, g)$ jelöléssel.

Ne tévessze meg az olvasót a Riemann-metrika elnevezése, az valójában nem metrika, bár nyilván metrikát generál az alapsokaságon, amennyiben két pont távolságának tekintjük az őket összekötő görbék hosszainak infimumát.

Definíció. Egy G görbe t_1 és t_2 paraméterű pontjai közti *ívhossz* az

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{G(t)}\langle \dot{G}(t), \dot{G}(t) \rangle} dt$$

értéket értjük.

Ezúttal ugyan az olvasóra marad, de most is meg kell mutatni, hogy ez a hossz nem függ a paraméterezés változtatásától. Ezután az ívhossz szerinti paraméterezés és a többi ebből eredő fogalom éppen úgy bevezethető a Riemann-sokaságok görbéire, mint a felületek görbéire.

Ráadásul a sokaságoknál már említett *Whitney beágyazási tétele* a Riemann-metrikával együtt is érvényes marad: *Nash beágyazási tétele* szerint az n -dimenziós Riemann-sokaságok metrikusan beágyazhatóak a $(2n + 1)$ -dimenziós euklideszi térbe.

Definíció. A $\sqrt{\det g} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ térfogatformát az irányított Riemann-sokaság *felszínmértékének* nevezzük, ahol g a Riemann-metrika mátrixa.

Ez a definíció jó, mert a definiált mennyiség független a paraméterezéstől, hiszen átparaméterezés esetén az Riemann-metrika új $\bar{g} = A^T g A$ mátrixára

$\sqrt{\det \bar{g}} = \sqrt{\det g} \det A$, vagyis

$$\sqrt{\det \bar{g}} d\bar{x}_1 \wedge d\bar{x}_2 \wedge \dots \wedge d\bar{x}_n = \sqrt{\det g} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Azt is könnyű látni, hogy ez a definíció megfelel a görbénél meghatározott ívhossz és a felületeknél definiált felszín fogalmaknak.

4.1. Levi–Civita kovariáns deriválás

Ahogy a felületnél, a Riemann-sokaságnál is van egy természetes kovariáns deriválás, mely kompatibilis a Riemann-metrikával, és torziómentes. Ráadásul a felület esetén ez éppen a megszokott kovariáns deriválás.

Levi–Civita-tétel. *Minden Riemann-sokaságon pontosan egy olyan ∇ kovariáns deriválás létezik, amely torziómentes és tetszőleges $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ és $\mathbf{Z}$ vektormezőre teljesíti, hogy*

$$\mathbf{X}(g\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle) = g\langle \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle + g\langle \mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Z} \rangle.$$

Bizonyítás. *Unicitás.* A feltétel szerint

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(g\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle) &= g\langle \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle + g\langle \mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Z} \rangle, \\ \mathbf{Y}(g\langle \mathbf{Z}, \mathbf{X} \rangle) &= g\langle \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z}, \mathbf{X} \rangle + g\langle \mathbf{Z}, \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} \rangle, \\ \mathbf{Z}(g\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle) &= g\langle \nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle + g\langle \mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{Y} \rangle. \end{aligned}$$

A torziómentesség miatt

$$\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \quad \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z} - \nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{Y} = [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}], \quad \text{és} \quad \nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{X} - \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Z} = [\mathbf{Z}, \mathbf{X}].$$

Ezekből egyszerű számolással adódik, hogy

$$\begin{aligned} &\mathbf{X}(g\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle) + \mathbf{Y}(g\langle \mathbf{Z}, \mathbf{X} \rangle) - \mathbf{Z}(g\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle) \\ &= g\langle \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle + g\langle \mathbf{Y}, [\mathbf{X}, \mathbf{Z}] \rangle + g\langle \mathbf{Z}, \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} \rangle + g\langle \mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] \rangle \\ &= g\langle \mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] \rangle + g\langle \mathbf{Y}, [\mathbf{X}, \mathbf{Z}] \rangle + g\langle \mathbf{Z}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \rangle + 2g\langle \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}, \mathbf{Z} \rangle, \end{aligned}$$

ami bizonyítja a

$$\begin{aligned} 2g\langle \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}, \mathbf{Z} \rangle &= \mathbf{X}(g\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle) + \mathbf{Y}(g\langle \mathbf{Z}, \mathbf{X} \rangle) - \mathbf{Z}(g\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle) - \\ &\quad - g\langle \mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] \rangle + g\langle \mathbf{Y}, [\mathbf{Z}, \mathbf{X}] \rangle - g\langle \mathbf{Z}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \rangle. \end{aligned}$$

Koszul-formulát.

Eszerint $g\langle \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}, \mathbf{Z} \rangle$ egyértelműen meghatározott minden $\mathbf{Z}$ vektormező esetén, így ha $\mathbf{Z}$ végig fut egy a $g\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalárszorzásra nézve ortonormált bázison, akkor $\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}$ bázisbontása adódik, vagyis $\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}$ kiszámítható.

Egzisztencia. Tekintsük a Koszul-formula jobboldala által definiált

$$S: (\mathbf{Y}, \mathbf{X}, \mathbf{Z}) \mapsto \mathbf{X}(g\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle) + \mathbf{Y}(g\langle \mathbf{Z}, \mathbf{X} \rangle) - \mathbf{Z}(g\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle) - \\ - g\langle \mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] \rangle + g\langle \mathbf{Y}, [\mathbf{Z}, \mathbf{X}] \rangle - g\langle \mathbf{Z}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \rangle.$$

leképezést. Világos, hogy S minden változójában lineáris. Ugyanakkor bármely b, c skalármezőkre

$$\begin{aligned} S(b\mathbf{Y}, \mathbf{X}, c\mathbf{Z}) &= \mathbf{X}(bc \cdot g\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle) + b\mathbf{Y}(c \cdot g\langle \mathbf{Z}, \mathbf{X} \rangle) - c\mathbf{Z}(b \cdot g\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle) - \\ &\quad - g\langle \mathbf{X}, [b\mathbf{Y}, c\mathbf{Z}] \rangle - b \cdot g\langle \mathbf{Y}, [\mathbf{X}, c\mathbf{Z}] \rangle - c \cdot g\langle \mathbf{Z}, [\mathbf{X}, b\mathbf{Y}] \rangle \\ &= \mathbf{X}(bc)g\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle + bc\mathbf{X}(g\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle) + b\mathbf{Y}c \cdot g\langle \mathbf{Z}, \mathbf{X} \rangle + bc\mathbf{Y}(g\langle \mathbf{Z}, \mathbf{X} \rangle) - \\ &\quad - c\mathbf{Z}b \cdot g\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle - cb\mathbf{Z}(g\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle) - \\ &\quad - b\mathbf{Y}c \cdot g\langle \mathbf{X}, \mathbf{Z} \rangle + c\mathbf{Z}b \cdot g\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle + cb \cdot g\langle \mathbf{X}, [\mathbf{Z}, \mathbf{Y}] \rangle - \\ &\quad - b\mathbf{X}c \cdot g\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle - bc \cdot g\langle \mathbf{Y}, [\mathbf{X}, \mathbf{Z}] \rangle - c\mathbf{X}b \cdot g\langle \mathbf{Z}, \mathbf{Y} \rangle - cb \cdot g\langle \mathbf{Z}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \rangle \\ &= cbS(\mathbf{Y}, \mathbf{X}, \mathbf{Z}), \end{aligned}$$

vagyis S értéke az $\mathbf{Y}$ és $\mathbf{Z}$ változóktól csak az adott ponttól függ. Világos, hogy bármely a skalármezőre

$$\begin{aligned} S(\mathbf{Y}, a\mathbf{X}, \mathbf{Z}) &= a\mathbf{X}(g\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle) + \mathbf{Y}(a \cdot g\langle \mathbf{Z}, \mathbf{X} \rangle) - \mathbf{Z}(a \cdot g\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle) - \\ &\quad - a \cdot g\langle \mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] \rangle + g\langle \mathbf{Y}, [\mathbf{Z}, a\mathbf{X}] \rangle + g\langle \mathbf{Z}, [\mathbf{Y}, a\mathbf{X}] \rangle \\ &= a\mathbf{X}(g\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle) + \\ &\quad + \mathbf{Y}a \cdot g\langle \mathbf{Z}, \mathbf{X} \rangle + a\mathbf{Y}(g\langle \mathbf{Z}, \mathbf{X} \rangle) - \mathbf{Z}a \cdot g\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle - a\mathbf{Z}(g\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle) - \\ &\quad - a \cdot g\langle \mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] \rangle + \\ &\quad + \mathbf{Z}a \cdot g\langle \mathbf{Y}, \mathbf{X} \rangle + a \cdot g\langle \mathbf{Y}, [\mathbf{Z}, \mathbf{X}] \rangle + \mathbf{Y}a \cdot g\langle \mathbf{Z}, \mathbf{X} \rangle + a \cdot g\langle \mathbf{Z}, [\mathbf{Y}, \mathbf{X}] \rangle \\ &= aS(\mathbf{Y}, \mathbf{X}, \mathbf{Z}) + 2\mathbf{Y}a \cdot g\langle \mathbf{Z}, \mathbf{X} \rangle. \end{aligned}$$

Mivel S az utolsó változójában függvényekre nézve is lineáris, definiálhatjuk a $\nabla: \tilde{T}\mathcal{M} \times \tilde{T}\mathcal{M} \rightarrow \tilde{T}\mathcal{M}$ leképezést azzal, hogy adott $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \tilde{T}\mathcal{M}$ vektormezők esetén teljesítse minden $\mathbf{Z} \in \tilde{T}\mathcal{M}$ vektormezővel a $2g\langle \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}, \mathbf{Z} \rangle = S(\mathbf{Y}, \mathbf{X}, \mathbf{Z})$ egyenletet.

Mivel S az első változójában is lineáris a függvényekre nézve, azt látjuk, hogy bármely b skalármezőre és minden $\mathbf{Z} \in \tilde{T}\mathcal{M}$ vektormezőre

$$2g\langle \nabla_{b\mathbf{Y}} \mathbf{X}, \mathbf{Z} \rangle = S(b\mathbf{Y}, \mathbf{X}, \mathbf{Z}) = bS(\mathbf{Y}, \mathbf{X}, \mathbf{Z}) = 2bg\langle \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}, \mathbf{Z} \rangle = 2g\langle b\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}, \mathbf{Z} \rangle,$$

vagyis $\nabla_{b\mathbf{Y}} \mathbf{X} = b\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}$. Ugyanakkor bármely a skalármező és minden $\mathbf{Z} \in \tilde{T}\mathcal{M}$ vektormező esetén

$$\begin{aligned} 2g\langle \nabla_{\mathbf{Y}}(a\mathbf{X}), \mathbf{Z} \rangle &= S(\mathbf{Y}, a\mathbf{X}, \mathbf{Z}) = aS(\mathbf{Y}, \mathbf{X}, \mathbf{Z}) + 2\mathbf{Y}a \cdot g\langle \mathbf{X}, \mathbf{Z} \rangle \\ &= 2g\langle a\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} + 2\mathbf{Y}a \cdot \mathbf{X}, \mathbf{Z} \rangle, \end{aligned}$$

vagyis $\nabla_{\mathbf{Y}}(a\mathbf{X}) = a\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} + 2\mathbf{Y}a \cdot \mathbf{X}$. Tehát ∇ egy kovariáns deriválás. Ráadásul torziómentes is, hiszen

$$\begin{aligned} 2g\langle \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} - \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - [\mathbf{Y}, \mathbf{X}], \mathbf{Z} \rangle &= S(\mathbf{Y}, \mathbf{X}, \mathbf{Z}) - S(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) - 2g\langle [\mathbf{Y}, \mathbf{X}], \mathbf{Z} \rangle \\ &= \mathbf{X}(g\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle) + \mathbf{Y}(g\langle \mathbf{Z}, \mathbf{X} \rangle) - \mathbf{Z}(g\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle) - \\ &\quad - g\langle \mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] \rangle + g\langle \mathbf{Y}, [\mathbf{Z}, \mathbf{X}] \rangle - g\langle \mathbf{Z}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \rangle - \\ &\quad - \mathbf{Y}(g\langle \mathbf{X}, \mathbf{Z} \rangle) - \mathbf{X}(g\langle \mathbf{Z}, \mathbf{Y} \rangle) + \mathbf{Z}(g\langle \mathbf{Y}, \mathbf{X} \rangle) - \\ &\quad + g\langle \mathbf{Y}, [\mathbf{X}, \mathbf{Z}] \rangle - g\langle \mathbf{X}, [\mathbf{Z}, \mathbf{Y}] \rangle + g\langle \mathbf{Z}, [\mathbf{Y}, \mathbf{X}] \rangle - 2g\langle [\mathbf{Y}, \mathbf{X}], \mathbf{Z} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Végül a

$$\begin{aligned} 2g\langle \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle + 2g\langle \mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Z} \rangle &= S(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + S(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}) \\ &= \mathbf{Y}(g\langle \mathbf{X}, \mathbf{Z} \rangle) + \mathbf{X}(g\langle \mathbf{Z}, \mathbf{Y} \rangle) - \mathbf{Z}(g\langle \mathbf{Y}, \mathbf{X} \rangle) - \\ &\quad - g\langle \mathbf{Y}, [\mathbf{X}, \mathbf{Z}] \rangle + g\langle \mathbf{X}, [\mathbf{Z}, \mathbf{Y}] \rangle - g\langle \mathbf{Z}, [\mathbf{Y}, \mathbf{X}] \rangle + \\ &\quad + \mathbf{Z}(g\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle) + \mathbf{X}(g\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle) - \mathbf{Y}(g\langle \mathbf{Z}, \mathbf{X} \rangle) - \\ &\quad - g\langle \mathbf{Z}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \rangle + g\langle \mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] \rangle - g\langle \mathbf{Y}, [\mathbf{Z}, \mathbf{X}] \rangle \\ &= 2\mathbf{X}(g\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle), \end{aligned}$$

azonosság igazolja, hogy ∇ a Levi-Civita kovariáns deriválás. ■

Definíció. A fenti tétel alapján kiválasztott kovariáns deriválást Riemann vagy *Levi-Civita kovariáns deriválásnak* nevezzük.

A Levi-Civita kovariáns deriválás fenti kiemelt tulajdonsága pontosan azt jelenti, hogy erre a kovariáns deriválásra a Riemann-metrika eltolás invariáns, ugyanis könnyű igazolni, hogy ekkor a párhuzamos vektormezők konstans szöveget zárnak be egymással, és állandó hosszúságúak, hiszen a párhuzamos $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ vektormezőkre

$$\dot{G}(g\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle) = g\langle \nabla_{\dot{G}} \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle + g\langle \mathbf{X}, \nabla_{\dot{G}} \mathbf{Y} \rangle = 0.$$

Konvenció. A Riemann-sokaságokon, ha csak külön nincs jelezve más, akkor mindig a Levi-Civita kovariáns deriválásra gondolunk, vagyis a kovariáns deriválás torziómentes és a Riemann-metrika párhuzamos.

A következő formula a felületen látott összefüggés könnyű általánosítása, ezért itt nem igazoljuk.

Tétel. A Christoffel-szimbólumok akkor és csak akkor definiálnak Levi-Civita kovariáns deriválást, ha

$$\Gamma_{i,j}^l = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n g^{l,k} (\partial_j g_{i,k} + \partial_i g_{j,k} - \partial_k g_{i,j}).$$

Formulánk lehetővé teszi a Levi-Civita kovariáns deriválás létének igazolását azzal, hogy megadja annak Christoffel-szimbólumait. A formula szerint a Christoffel-szimbólumok az alsó indexükben szimmetrikusak — és ezért az általuk definiált kovariáns deriválás torziómentes —, és nyilván $2 \sum_{k=1}^n \Gamma_{i,j}^k g_{k,m} = \partial_i g_{j,m} + \partial_j g_{i,m} - \partial_m g_{i,j}$ is teljesül. Ehhez hozzáadva az ebből a j és m indexek felcserélésével kapott képletet, rögtön kapjuk, hogy $g \langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_m \rangle + g \langle \partial_j, \nabla_{\partial_i} \partial_m \rangle = \partial_i g \langle \partial_j, \partial_m \rangle$, ahol a kovariáns deriválást a Christoffel-szimbólumaink határozzák meg. Ebből a Levi-Civita-tétel formulája azonnal következik, hiszen az nyilván minden változójában lineáris.

Következmény. $\sum_{i=1}^n \Gamma_{i,j}^i = \partial_j \log \sqrt{\det g}$.

Bizonyítás. Behelyettesítve előbbi tételünk eredményét, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \Gamma_{i,j}^i &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n g^{i,k} (\partial_j g_{i,k} + \partial_i g_{j,k} - \partial_k g_{i,j}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,i=1}^n g^{i,k} \partial_j g_{i,k} + \frac{1}{2} \left(\sum_{k,i=1}^n g^{i,k} \partial_i g_{j,k} - \sum_{k,i=1}^n g^{i,k} \partial_k g_{i,j} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,i=1}^n g^{i,k} \partial_j g_{i,k} = \frac{1}{2} \frac{\partial_j \det g}{\det g} = \partial_j \log \sqrt{\det g}, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a g Riemann-metrika és inverzének szimmetriája miatt teljesülő

$$\sum_{k,i=1}^n g^{i,k} \partial_i g_{j,k} - \sum_{k,i=1}^n g^{i,k} \partial_k g_{i,j} = \sum_{k,i=1}^n g^{i,k} \partial_i g_{j,k} - \sum_{k,i=1}^n g^{k,i} \partial_k g_{j,i} = 0$$

azonosságot, és végül az $(1, 1)$ típusú tenzormezők determinánsának deriválásáról már bizonyított összefüggést. ■

A Levi–Civita kovariáns deriválás újabb Bianchi azonosságokat is ad.

Bianchi-azonosságok. *Tetszőleges $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ és $\mathbf{Z}$ vektormezőre*

$$g\langle R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z}, \mathbf{V} \rangle = -g\langle R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{V}, \mathbf{Z} \rangle, \text{ és } g\langle R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z}, \mathbf{V} \rangle = g\langle R(\mathbf{Z}, \mathbf{V})\mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle.$$

Bizonyítás. Elég az első állítást igazolni, mert abból a már ismert Bianchi-azonosságok alapján a függelékben leírt algebrai úton következik a második egyenlőség.

Mivel mindegyik változóban mindkét oldal additív, és mindkét oldalon mindegyik változóból kiemelhetők a skalármezők, elegendő csak báziselemekre bizonyítanunk az első formulát. Ekkor a nyilvánvaló $[\partial_j, \partial_k] = 0$ azonosságot hasznosítva,

$$\begin{aligned} g\langle R(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_l \rangle &= g\langle \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_k, \partial_l \rangle - g\langle \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} \partial_k, \partial_l \rangle \\ &= \partial_i g\langle \nabla_{\partial_j} \partial_k, \partial_l \rangle - g\langle \nabla_{\partial_j} \partial_k, \nabla_{\partial_i} \partial_l \rangle - \partial_j g\langle \nabla_{\partial_i} \partial_k, \partial_l \rangle + g\langle \nabla_{\partial_i} \partial_k, \nabla_{\partial_j} \partial_l \rangle \\ &= \partial_i \partial_j g\langle \partial_k, \partial_l \rangle - \partial_i g\langle \partial_k, \nabla_{\partial_j} \partial_l \rangle - g\langle \nabla_{\partial_j} \partial_k, \nabla_{\partial_i} \partial_l \rangle - \\ &\quad - \partial_j \partial_i g\langle \partial_k, \partial_l \rangle + \partial_j g\langle \partial_k, \nabla_{\partial_i} \partial_l \rangle + g\langle \nabla_{\partial_i} \partial_k, \nabla_{\partial_j} \partial_l \rangle \\ &= g\langle \partial_k, \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} \partial_l \rangle - g\langle \partial_k, \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_l \rangle = -g\langle R(\partial_i, \partial_j)\partial_l, \partial_k \rangle. \end{aligned}$$

Ezzel a tételt beláttuk. ■

4.2. Geodetikusok variációja és Jacobi-mezők

A sokaságoknál definiáltuk a geodetikus fogalmát, most megmutatjuk, hogy a felületi geodetikus szinte minden jó tulajdonsága — köztük a geodetikus extremalitása is — Riemann-sokaságon is bizonyítható. Vegyük ismét észre, hogy a geodetikus $\nabla_{\dot{C}} \dot{G} = 0$ definíciója alapján a geodetikusok ívhossz arányosan vannak paraméterezve.

Definíció. A $\nu: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, d] \rightarrow \mathcal{M}$ differenciálható függvényt a $G: [0, d] \rightarrow \mathcal{M}$ görbe variálásának nevezzük, ha $\nu(t, 0) = G(0)$, $\nu(t, d) = G(d)$, és $\nu(0, s) = G(s)$ minden lehetséges t és s paraméterre.

Az $X: [0, d] \rightarrow \mathcal{M}$ görbék halmazán értelmezett $X \mapsto \mu(X)$ funkcionált *mérésnek* nevezzük.

A G görbét a μ mérésre nézve *extremális görbének* nevezzük, ha bármely ν variálására az $m(t) = \mu(\nu(t, \cdot))$ függvény a 0-ban extremális, vagyis $m'(0) = 0$.

Könnyebbség kedvéért bevezetjük a formális $\nu_t(\cdot) = \nu(t, \cdot)$ és $\nu_s(\cdot) = \nu(\cdot, s)$ jelöléseket (vigyázat, itt a betű dönti el, hogy melyik indexet rögzítettük!), és mindjárt megállapítjuk, hogy $\nabla_{\dot{\nu}_s} \dot{\nu}_t = \nabla_{\dot{\nu}_t} \dot{\nu}_s$, mivel a torzió nulla, és nyilván $[\dot{\nu}_s, \dot{\nu}_t] = \dot{\nu}_s \dot{\nu}_t - \dot{\nu}_t \dot{\nu}_s = 0$.

Lemma. *Bármely $G: [0, d] \rightarrow \mathcal{M}$ felületi görbéhez és azon adott $\mathbf{X}$ vektormezőhöz, ha $\mathbf{X}(G(0)) = \mathbf{X}(G(d)) = 0$, létezik olyan ν variálás, melyre $\dot{\nu}_s(0) = \mathbf{X}$. Bármely ν variálásra*

$$[\dot{\nu}_s, \dot{\nu}_t] = 0, \quad \text{és} \quad \nabla_{\dot{\nu}_s} \dot{\nu}_t = \nabla_{\dot{\nu}_t} \dot{\nu}_s.$$

Az első állítás igazolása a felületeknél tárgyalt analóg tétel bizonyításával azonos módon történik, a többit meg éppen a lemma előtt láttuk be.

Tétel. *A Riemann-sokaságokban egy görbe az ívhosszmérésre nézve akkor és csak akkor extrémális, ha geodetikus.*

Bizonyítás. Legyen G ívhossz szerint paraméterezett görbe, ν ennek variálása, és az ebben előforduló görbék hossza $m(t) = \int_0^d \sqrt{g\langle \dot{\nu}_t(s), \dot{\nu}_t(s) \rangle} ds$. Ekkor

$$\begin{aligned} m'(t) &= \int_0^d \dot{\nu}_s(t) (\sqrt{g\langle \dot{\nu}_t(s), \dot{\nu}_t(s) \rangle}) ds = \int_0^d \frac{g\langle \nabla_{\dot{\nu}_s(t)} \dot{\nu}_t, \dot{\nu}_t(s) \rangle}{\sqrt{g\langle \dot{\nu}_t(s), \dot{\nu}_t(s) \rangle}} ds \\ &= \int_0^d \frac{g\langle \nabla_{\dot{\nu}_t(s)} \dot{\nu}_s, \dot{\nu}_t(s) \rangle}{\sqrt{g\langle \dot{\nu}_t(s), \dot{\nu}_t(s) \rangle}} ds, \end{aligned}$$

amit a $t = 0$ helyen kell megvizsgálnunk. A G görbe ívhossz szerinti paraméterezése miatt egyrészt a $t = 0$ helyen az integrandusz nevezője éppen 1. Ugyanakkor $\dot{\nu}_{t=0}(s) = \dot{G}(s)$, ezért

$$\begin{aligned} m'(0) &= \int_0^d g\langle \nabla_{\dot{\nu}_{t=0}(s)} \dot{\nu}_s, \dot{\nu}_{t=0}(s) \rangle ds = \int_0^d g\langle \nabla_{\dot{G}(s)} \dot{\nu}_s, \dot{G}(s) \rangle ds \\ &= \int_0^d (\dot{G}(s) g\langle \dot{\nu}_s(0), \dot{G}(s) \rangle - g\langle \dot{\nu}_s(0), \nabla_{\dot{G}(s)} \dot{G} \rangle) ds \\ &= [g\langle \dot{\nu}_s(0), \dot{G}(s) \rangle]_0^d - \int_0^d g\langle \dot{\nu}_s(0), \nabla_{\dot{G}(s)} \dot{G} \rangle ds. \end{aligned}$$

Mivel a variálás végpontjai fixek, $\dot{\nu}_{s=0}(0) = \dot{\nu}_{s=d}(0) = 0$, vagyis az összeg első tagja eltűnik, és így

$$m'(0) = - \int_0^d g\langle \dot{\nu}_s(0), \nabla_{\dot{G}(s)} \dot{G} \rangle ds,$$

ahol $\dot{\nu}_s(0)$ a $G(s)$ ponton átmenő $\nu(\cdot, s)$ transzverzális görbe érintője a $t = 0$ pontban.

Ha G geodetikus, akkor $\nabla_{\dot{G}} \dot{G} \equiv 0$, és ezért $m'(0) = 0$ minden variálásra.

Ha $m'(0) = 0$ minden variálásra, akkor tekintsünk egy olyan variálást, melyre $\dot{\nu}_s(0) = (d-s)s\nabla_{\dot{G}(s)} \dot{G}$. (Ennek létezését az előbbi lemma garantálja.) Erre a variálásra a fenti képlet a $0 = \int_0^d (d-s)s g\langle \nabla_{\dot{G}(s)} \dot{G}, \nabla_{\dot{G}(s)} \dot{G} \rangle ds$ eredményt adja, amiből $\nabla_{\dot{G}} \dot{G} = 0$ következik. ■

Az, hogy a geodetikus extrémális görbe az ívhosszmérésre, még nem jelenti azt, hogy minimális hosszúságú, hiszen például a gömbön minden főkör geodetikus, vagyis az átellenes pontokat végtelen sok geodetikus köti össze. Most tovább vizsgáljuk a geodetikusok variációját, hogy valamilyen választ találjunk arra, mikor minimális egy geodetikus.

Definíció. Ha a $G: [0, d] \rightarrow \mathcal{M}$ geodetikus $\nu: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, d] \rightarrow \mathcal{M}$ variációjának minden $\dot{\nu}_s(0)$ transzverzális vektora merőleges a megfelelő $\dot{G}(s)$ érintővektorra, akkor *normális variálásról* beszélünk.

A normális variálás nem feltétlenül fix végpontú, bár mi legtöbbször azzal fogunk dolgozni.

Az m hossz mérésre nézve a G geodetikus extrémális, amennyiben minden ν variálásra $m'(0) = 0$. Ha ugyanakkor szintén minden ν variálásra $m''(0) \neq 0$, akkor biztosan lokális minimumhely a G geodetikus. Ha ez utóbbi nem teljesül, vagyis valamely nem állandó variálásra $m''(0) = 0$, akkor a G geodetikust a hossz mérésre nézve *kritikus geodetikusnak* nevezzük.

Jacobi-tétel. Ha a G ívhossz szerint paraméterezett geodetikus $\nu(t, s)$ fix végpontú, nem állandó normális variációjára teljesül a

$$\nabla_{\dot{G}} \nabla_{\dot{G}} \dot{\nu}_s - R(\dot{G}, \dot{\nu}_s) \dot{G} = 0$$

Jacobi-egyenlet, akkor G éppen a ν variáció miatt a hossz mérésre nézve kritikus.

Bizonyítás. A ν_t görbék hossza $m(t) = \int_0^d \sqrt{g\langle \dot{\nu}_t(s), \dot{\nu}_t(s) \rangle} ds$. Az előző tételünk szerinti $m'(t)$ kifejezést tovább deriválva

$$m''(t) = \int_0^d \left(\frac{g\langle \nabla_{\dot{\nu}_s(t)} \dot{\nu}_t, \nabla_{\dot{\nu}_s(t)} \dot{\nu}_t \rangle + g\langle \nabla_{\dot{\nu}_s(t)} \nabla_{\dot{\nu}_s} \dot{\nu}_t, \dot{\nu}_t(s) \rangle}{\sqrt{g\langle \dot{\nu}_t(s), \dot{\nu}_t(s) \rangle}} - \frac{(g\langle \nabla_{\dot{\nu}_s(t)} \dot{\nu}_t, \dot{\nu}_t(s) \rangle)^2}{\sqrt{g\langle \dot{\nu}_t(s), \dot{\nu}_t(s) \rangle}^3} \right) ds$$

adódik, amit a $t = 0$ helyen kell megvizsgálnunk. A G görbe ívhossz szerinti paraméterezése miatt a $t = 0$ helyen az integrandusok nevezője éppen 1, ezért

$$m''(0) = \int_0^d (g\langle \nabla_{\dot{\nu}_s(0)} \dot{\nu}_t, \nabla_{\dot{\nu}_s(0)} \dot{\nu}_t \rangle + g\langle \nabla_{\dot{\nu}_s(0)} \nabla_{\dot{\nu}_s} \dot{\nu}_t, \dot{\nu}_{t=0}(s) \rangle - (g\langle \nabla_{\dot{\nu}_s(0)} \dot{\nu}_t, \dot{\nu}_{t=0}(s) \rangle)^2) ds,$$

ahol — és innentől végig e bizonyításban — $t = 0$.

Vizsgáljuk meg az utolsó integrandust.

$$\begin{aligned} g\langle \nabla_{\dot{\nu}_s(0)} \dot{\nu}_t, \dot{\nu}_{t=0}(s) \rangle &= g\langle \nabla_{\dot{\nu}_{t=0}(s)} \dot{\nu}_s, \dot{\nu}_{t=0}(s) \rangle = g\langle \nabla_{\dot{G}(s)} \dot{\nu}_s, \dot{G}(s) \rangle \\ &= \dot{G}(s)g\langle \dot{\nu}_s(0), \dot{G}(s) \rangle - g\langle \dot{\nu}_s(0), \nabla_{\dot{G}(s)} \dot{G} \rangle = 0, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a nyilvánvaló $\dot{\nu}_{t=0} = \dot{G}$ azonosságot és a normális variálásra érvényes $g\langle \dot{\nu}_s(0), \dot{G}(s) \rangle \equiv 0$ merőlegességet. Eszerint

$$\begin{aligned} m''(0) &= \int_0^d (g\langle \nabla_{\dot{\nu}_s(0)} \dot{\nu}_t, \nabla_{\dot{\nu}_s(0)} \dot{\nu}_t \rangle + g\langle \nabla_{\dot{\nu}_s(0)} \nabla_{\dot{\nu}_s} \dot{\nu}_t, \dot{\nu}_{t=0}(s) \rangle) ds, \\ &= \int_0^d (g\langle \nabla_{\dot{G}(s)} \dot{\nu}_s, \nabla_{\dot{G}(s)} \dot{\nu}_s \rangle + g\langle \nabla_{\dot{\nu}_s(0)} \nabla_{\dot{G}} \dot{\nu}_s, \dot{G}(s) \rangle) ds, \\ &= \int_0^d (g\langle \nabla_{\dot{G}(s)} \dot{\nu}_s, \nabla_{\dot{G}(s)} \dot{\nu}_s \rangle + g\langle R(\dot{\nu}_s(0), \dot{G}(s)) \dot{\nu}_s, \dot{G}(s) \rangle + \\ &\quad + g\langle \nabla_{\dot{G}(s)} \nabla_{\dot{\nu}_s} \dot{\nu}_s, \dot{G}(s) \rangle) ds. \end{aligned}$$

A következő lépés a

$$\begin{aligned} g\langle \nabla_{\dot{G}(s)} \dot{\nu}_s, \nabla_{\dot{G}(s)} \dot{\nu}_s \rangle + g\langle \nabla_{\dot{G}(s)} \nabla_{\dot{\nu}_s} \dot{\nu}_s, \dot{G}(s) \rangle \\ = \dot{G}(s)(g\langle \dot{\nu}_s, \nabla_{\dot{G}(s)} \dot{\nu}_s \rangle + g\langle \nabla_{\dot{\nu}_s} \dot{\nu}_s, \dot{G}(s) \rangle) - \\ - g\langle \dot{\nu}_s, \nabla_{\dot{G}(s)} \nabla_{\dot{G}(s)} \dot{\nu}_s \rangle - g\langle \nabla_{\dot{\nu}_s} \dot{\nu}_s, \nabla_{\dot{G}(s)} \dot{G}(s) \rangle \end{aligned}$$

formula behelyettesítése, ahol persze a legutolsó tag eltűnik, mert G geodetikus. Ugyanígy el fog tűnni az integrálban a $\dot{G}$ vektor által derivált rész, hiszen annak integrálja $[g\langle \dot{\nu}_s, \nabla_{\dot{G}(s)} \dot{\nu}_s \rangle + g\langle \nabla_{\dot{\nu}_s} \dot{\nu}_s, \dot{G}(s) \rangle]_{s=0}^{s=d} = 0$, mert $\dot{\nu}_{s=0} = \dot{\nu}_{s=d} = 0$ a fix végpontok miatt. Végül tehát a Bianchi-azonosságokat is használva

$$\begin{aligned} m''(0) &= \int_0^d (g\langle R(\dot{\nu}_s(0), \dot{G}(s)) \dot{\nu}_s, \dot{G}(s) \rangle - g\langle \dot{\nu}_s, \nabla_{\dot{G}(s)} \nabla_{\dot{G}(s)} \dot{\nu}_s \rangle) ds \\ &= \int_0^d (g\langle R(\dot{G}(s), \dot{\nu}_s(0)) \dot{G}(s), \dot{\nu}_s \rangle - g\langle \nabla_{\dot{G}(s)} \nabla_{\dot{G}(s)} \dot{\nu}_s, \dot{\nu}_s \rangle) ds \\ &= \int_0^d g\langle R(\dot{G}(s), \dot{\nu}_s(0)) \dot{G}(s) - \nabla_{\dot{G}(s)} \nabla_{\dot{G}(s)} \dot{\nu}_s, \dot{\nu}_s \rangle ds. \end{aligned}$$

Ha a Jacobi-egyenlet teljesül, akkor ebből $m''(0) = 0$ következik a ν variálásra, és ezért a G geodetikus kritikus. ■

Szemléletesen e tétel azt mondja, hogy ha van a Jacobi-egyenletet teljesítő fix végpontú, nem állandó normális variáció, akkor a geodetikus hossza *talán* nem minimális. Ezt látszik erősíteni, de nem igazolni a következő.

Tétel. Ha a G ívhossz szerint paraméterezett geodetikus nem állandó $\nu(t, s)$ variációjában minden ν_t görbe geodetikus, és legalább az egyik végpont fix, akkor a variáció normális, és G a hossz mérésre nézve kritikus.

Bizonyítás. Az állítás igazolásához meg kell mutatni egyrészt, hogy $\dot{\nu}_s(0)$ merőleges a $\dot{G}(s)$ vektorra, másrészt, hogy $\dot{\nu}_s(0)$ teljesíti a Jacobi-egyenletet.

Mivel minden ν_t geodetikus ívhossz arányosan paraméterezett,

$$\begin{aligned}\dot{G}g\langle\dot{\nu}_s(0), \dot{G}\rangle &= g\langle\nabla_{\dot{G}}\dot{\nu}_s(0), \dot{G}\rangle = g\langle\nabla_{\dot{\nu}_t}\dot{\nu}_s, \dot{\nu}_t\rangle|_{t=0} = g\langle\nabla_{\dot{\nu}_s}\dot{\nu}_t, \dot{\nu}_t\rangle|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2}\dot{\nu}_s(0)\underbrace{(g\langle\dot{\nu}_t, \dot{\nu}_t\rangle)}_{\text{konstans}} \equiv 0.\end{aligned}$$

Ugyanakkor $g\langle\dot{\nu}_s(0), \dot{G}(s)\rangle$ eltűnik az egyik végpontban, ezért $g\langle\dot{\nu}_s(0), \dot{G}(s)\rangle \equiv 0$, vagyis $\dot{\nu}_s(0)$ merőleges a $\dot{G}(s)$ vektorra.

Mivel minden ν_t görbe geodetikus, a $\dot{\nu}_s(0)$ vektormező teljesíti a Jacobi-egyenletet is, mert a $t = 0$ pontban

$$\nabla_{\dot{G}}\nabla_{\dot{G}}(\dot{\nu}_s(0)) = \nabla_{\dot{\nu}_t}\nabla_{\dot{\nu}_t}\dot{\nu}_s = \nabla_{\dot{\nu}_t}\nabla_{\dot{\nu}_s}\dot{\nu}_t = \nabla_{\dot{\nu}_s}\underbrace{\nabla_{\dot{\nu}_t}\dot{\nu}_t}_{\equiv 0} + R(\dot{\nu}_t, \dot{\nu}_s)\dot{\nu}_t = R(\dot{G}, \dot{\nu}_s(0))\dot{G}.$$

Ezzel a bizonyítás teljes. ■

Figyeljük meg, hogy a variálás akkor is normális, ha ν_t nem geodetikus, csak ívhossz arányosan paraméterezett! Ez indokolja, hogy részletesebben is megvizsgáljuk a Jacobi-egyenletet teljesítő vektormezők tulajdonságait.

Definíció. Ha a $\mathbf{J}$ vektormező a G geodetikus mentén eleget tesz a

$$\nabla_{\dot{G}}\nabla_{\dot{G}}\mathbf{J} - R(\dot{G}, \mathbf{J})\dot{G} = 0$$

egyenletnek, akkor *Jacobi-mezőnek* nevezzük. A G görbe menti Jacobi-mezők halmazát J_G jelöli.

Tétel. A Jacobi-mezők teljesítik az alábbiakat.

- (1) Bármely a konstans esetén $a\dot{G}$ és $a\dot{G}(s)$ is Jacobi-mező.
- (2) Ha $\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0 \in T_{G(0)}\mathcal{M}$, akkor pontosan egy olyan $\mathbf{J}$ Jacobi-mező létezik, melyre $\mathbf{J}(G(0)) = \mathbf{X}_0$ és $\nabla_{\dot{G}(0)}\mathbf{J} = \mathbf{Y}_0$.
- (3) A Jacobi-mezők J_G halmaza $2n$ -dimenziós vektorteret alkot.
- (4) Ha $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ Jacobi-mező a G geodetikus mentén, akkor $g\langle\nabla_{\dot{G}}\mathbf{X}, \mathbf{Y}\rangle - g\langle\mathbf{X}, \nabla_{\dot{G}}\mathbf{Y}\rangle$ konstans a G mentén.
- (5) Ha $\mathbf{X}$ Jacobi-mező a G geodetikus mentén, akkor $g_{G(s)}\langle\mathbf{X}, \dot{G}\rangle = as + b$ valamely a és b konstansra.

Bizonyítás. Mivel a Jacobi-mezőket egy másodfokú differenciálegyenlet jellemzi, a Pickard–Lindelöf-tétel szerint (2) nyilvánvaló. Ebből azonnal következik (3).

A $\nabla_{\dot{G}}\nabla_{\dot{G}}(a\dot{G}) - R(\dot{G}, a\dot{G})\dot{G} = a\nabla_{\dot{G}}\nabla_{\dot{G}}\dot{G} - aR(\dot{G}, \dot{G})\dot{G} = 0$ levezetés szerint (1) első fele, az alábbi szerint pedig (1) második fele is teljesül:

$$\nabla_{\dot{G}}\nabla_{\dot{G}}(as\dot{G}) - R(\dot{G}, as\dot{G})\dot{G} = a\nabla_{\dot{G}}\dot{G} + as\nabla_{\dot{G}}\nabla_{\dot{G}}\dot{G} - asR(\dot{G}, \dot{G})\dot{G} = 0.$$

A (4) tulajdonság bizonyításához a Bianchi-azonosságok alkalmazásával kell kivonni egymásból a következő két formulát.

$$\begin{aligned}\dot{G}g\langle \mathbf{X}, \nabla_{\dot{G}}\mathbf{Y} \rangle - g\langle \nabla_{\dot{G}}\mathbf{X}, \nabla_{\dot{G}}\mathbf{Y} \rangle &= g\langle \mathbf{X}, \nabla_{\dot{G}}\nabla_{\dot{G}}\mathbf{Y} \rangle = g\langle \mathbf{X}, R(\dot{G}, \mathbf{Y})\dot{G} \rangle, \\ \dot{G}g\langle \nabla_{\dot{G}}\mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle - g\langle \nabla_{\dot{G}}\mathbf{X}, \nabla_{\dot{G}}\mathbf{Y} \rangle &= g\langle \nabla_{\dot{G}}\nabla_{\dot{G}}\mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = g\langle R(\dot{G}, \mathbf{X})\dot{G}, \mathbf{Y} \rangle.\end{aligned}$$

Az utolsó (5) állítást a Bianchi-azonosság felhasználásával

$$\dot{G}\dot{G}g\langle \mathbf{X}, \dot{G} \rangle = g\langle \nabla_{\dot{G}}\nabla_{\dot{G}}\mathbf{X}, \dot{G} \rangle = g\langle R(\dot{G}, \mathbf{X})\dot{G}, \dot{G} \rangle = 0$$

igazolja. ■

Most visszatérünk a kritikus geodetikusok és a Jacobi-mezők közti kapcsolat vizsgálatára.

Tétel. *Ha $\mathbf{J}$ a G érintőjére merőleges nemtriviális Jacobi-mező a G geodetikus mentén, akkor létezik a G olyan nem állandó $\nu(t, s)$ variációja, melyben minden ν_t görbe geodetikus, és $\dot{\nu}_s(0) = \mathbf{J}(s)$.*

Bizonyítás. A bizonyításhoz mutatni kell egy megfelelő $\nu(t, s)$ geodetikus variációt. Legyen $G^\perp$ olyan görbe, melyre $G^\perp(0) = G(0)$ és $\dot{G}^\perp(0) = \mathbf{J}(0)$. Legyen eme $G^\perp$ görbe mentén $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ olyan párhuzamos vektormező, melyre $\mathbf{X}(0) = \dot{G}(0)$ és $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{J}(0)$. Legyen végül

$$\nu(t, s) = \exp_{G^\perp(t)}(s(\mathbf{X}(t) + t\mathbf{Y}(t))).$$

Ekkor $\nu(0, 0) = G(0)$, a ν_t görbék geodetikusak, és $\nu_{t=0} = G$. Ebben az esetben a geodetikus variációkra bizonyítottak szerint $\dot{\nu}_s(0)$ egy Jacobi-mező és $\dot{\nu}_s(0)$ merőleges a $\dot{G}(s)$ vektorra.

Előbbi tételünk értelmében ezért elég látnunk, hogy $\dot{\nu}_{s=0}(0) = \mathbf{J}(0)$ és $\nabla_{\dot{G}(0)}(\dot{\nu}_s(0)) = \dot{\mathbf{J}}(0)$, mert akkor a Jacobi-mezők egyértelműsége folytán $\dot{\nu}_s(0) \equiv \mathbf{J}(s)$ következik.

Tehát a $\dot{\nu}_{s=0}(0) = \dot{G}^\perp(0) = \mathbf{J}(0)$, és a

$$\nabla_{\dot{G}(0)}\dot{\nu}_s = \nabla_{\dot{\nu}_{t=0}}\dot{\nu}_s = \nabla_{\dot{\nu}_{s=0}}\dot{\nu}_t = \nabla_{\dot{G}^\perp(0)}\dot{\nu}_t = \nabla_{\dot{G}^\perp(0)}(\mathbf{X}(t) + t\mathbf{Y}(t)) = \mathbf{Y}(0) = \dot{\mathbf{J}}(0)$$

egyenlőségekkel, ahol mindvégig $s = t = 0$, a bizonyítás teljes. ■

Vigyázat, egy Jacobi-mezőhöz tartozó geodetikus variáció csak akkor fix végpontú, ha $\mathbf{J}(0) = \mathbf{0}$!

4.3. Metrika és izometrikus leképezések

A Riemann-sokaságok a differenciálhatóságon túl egyben metrikus terek is, ahol a metrika a természetéből adódóan globális jellemzőket hordoz.

Definíció. A P és Q pontokat összekötő szakaszonként differenciálható görbék hosszainak $d(P, Q)$ infimumát a nyilvánvaló szimmetria miatt a két pont *távolságának* nevezzük.

Figyeljük meg, hogy ha egy G ívhossz szerint paraméterezett görbére $b - a = d(G(a), G(b))$, akkor a G görbe geodetikus, hiszen az egyenlőség szerint extrémális görbe.

Tétel. *Összefüggő Riemann-sokaság a d távolsággal metrikus teret alkot, melynek metrikus topológiája megegyezik a sokaság topológiájával.*

Bizonyítás. Világos, hogy az összefüggőség miatt minden pontpárnak van távolsága, és — ahogy már említettük — ez szimmetrikus függvénye a pontpárnak. A háromszögegyenlőtlenség nyilván teljesül, hiszen

$$\begin{aligned} d(P, R) &= \inf\{L(G) : G \in \mathcal{G}_P^R\} \leq \inf\{L(G) : G \in \mathcal{G}_P^R \text{ és } Q \in G\} \\ &= \inf\{L(G) : G \in (\mathcal{G}_P^Q \cup \mathcal{G}_Q^R)\} \\ &= \inf\{L(G) : G \in \mathcal{G}_P^Q\} + \inf\{L(G) : G \in \mathcal{G}_Q^R\} = d(P, Q) + d(Q, R), \end{aligned}$$

ahol $\mathcal{G}_P^R$ jelöli a P pontot az R ponttal összekötő szakaszonként differenciálható görbék halmazát, $L(G)$ pedig a G görbe hosszát.

Nyilván $d(P, P) = 0$. Most igazolni fogjuk, hogy különböző $P \neq R$ pontokhoz rendelt távolság mindig pozitív. Rögzítsük a P egy olyan $(\mathcal{U}, r)$ koordinátakörnyezetét, melyben R nincs benne, és legyen $G \in \mathcal{G}_P^R$. Vegyük a G görbének a P ponthoz csatlakozó első differenciálható részgörbét, és legyen $G_P : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$ ennek olyan részgörbéje, mely az $\mathcal{U}$ környezetben van és $P = G_P(0)$. Mivel a $r^{-1} \circ G_P$ görbe a $B^n \subset \mathbb{R}^n$ gömbön belül van, és annak középpontját köti össze annak S^{n-1} gömbfelszínével, minden $r^{-1} \circ G_P$ görbe biztosan tartalmazza az $\frac{1}{2}S^{n-1}$ egy pontját, és ezek közül is van egy első.

Elég tehát igazolni, hogy az $r(\frac{1}{2}S^{n-1})$ bármely pontját a P ponttal összekötő, és az $r(\frac{1}{2}B^n)$ környezeten belül haladó görbe hossza nem kisebb valamely pozitív konstansnál.

Az $\mathcal{U}$ környezet $T_P\mathcal{M}$ érintő tereiben vezessük be a $|\mathbf{v}| := \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$ normát, ahol $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i \partial_i$. Ekkor a $\lambda_P = \min\{g_P\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle / |\mathbf{v}|^2 : \mathbf{v} \in T_P\mathcal{M}\}$ nyilván minden P pontban pozitív, mert $T_P\mathcal{M}$ egységsgömbfelszíne ($|\mathbf{v}| = 1$) kompakt halmaz, és

$g_P\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ csak a $\mathbf{0}$ origóban nulla. Minthogy g_P folytonosan függ a P ponttól, és $r(\frac{1}{2}B^n)$ kompakt halmaz, következik, hogy $\lambda = \min_{P \in r(\frac{1}{2}B^n)} \lambda_P$ pozitív.

Eszerint ha $G \in \mathcal{G}_P^{r(\frac{1}{2}S^{n-1})}$, akkor megfelelő $t > 0$ paraméterre $G = r \circ g: [0, t] \rightarrow r(\frac{1}{2}B^n)$ és $P = G(0) = r(g(0))$, $G(t) = r(g(t)) \in r(\frac{1}{2}S^{n-1})$, és

$$\begin{aligned} \int_0^t \sqrt{g_{G(x)}\langle \dot{G}(x), \dot{G}(x) \rangle} dx &= \int_0^t \sqrt{\lambda} |\dot{G}(x)| dx = \sqrt{\lambda} \int_0^t |\dot{G}(x)| dx \\ &= \sqrt{\lambda} \int_0^t |\dot{g}(x)| dx \geq \sqrt{\lambda} \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

ahol az utolsó sor azért teljesül, mert $\int_0^t |\dot{g}(x)| dx$ nem lehet kisebb, mint a $g(0)$ origó és a $g(t) \in \frac{1}{2}S^{n-1}$ pont távolsága, ami pontosan $1/2$.

Ezzel igazoltuk, hogy $\mathcal{M}$ metrikus tér.

A második állításhoz azt kell látnunk minden koordináta-környezetben, hogy bármely P pontnak bármely környezetében van a d metrika által definiált $\mathcal{V}_{g,P,\varepsilon} = \{Q : d(P, Q) < \varepsilon\}$ ε -környezet, és fordítva, bármely P pontnak bármely ε -környezetében van az $\mathcal{M}$ sokaságnak $\mathcal{U}_{P,\delta} = r(r^{-1}(P) + \delta B^n)$ δ -környezete.

Íménti formulánk alapján

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \inf_{G \in \mathcal{G}_P^Q} \int_0^t \sqrt{g_{G(x)}\langle \dot{G}(x), \dot{G}(x) \rangle} dx = \sqrt{\lambda} \inf_{r(g) \in \mathcal{G}_P^Q} \int_0^t |\dot{g}(x)| dx \\ &\geq \sqrt{\lambda} |g(t) - g(0)| = \sqrt{\lambda} |r^{-1}(Q) - r^{-1}(P)|, \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy $\mathcal{V}_{g,P,\varepsilon\sqrt{\lambda}} \subseteq \mathcal{U}_{P,\varepsilon}$.

A másik irány igazolásához fentebbi gondolatmenetünket követjük: a $\mu_P = \max\{g_P\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle / |\mathbf{v}|^2 : \mathbf{v} \in T_P\mathcal{M}\}$ nyilván nem végtelen, mert $T_P\mathcal{M}$ egységgömbfel-színe ($|\mathbf{v}| = 1$) kompakt halmaz; minthogy g_P folytonosan függ a P ponttól, és $r(\frac{1}{2}B^n)$ kompakt halmaz, $\mu = \max_{P \in r(\frac{1}{2}B^n)} \mu_P < \infty$ adódik. Ebből

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \inf_{G \in \mathcal{G}_P^Q} \int_0^t \sqrt{g_{G(x)}\langle \dot{G}(x), \dot{G}(x) \rangle} dx = \inf_{G \in \mathcal{G}_P^Q} \int_0^t \sqrt{\mu} |\dot{G}(x)| dx \\ &= \sqrt{\mu} \inf_{G \in \mathcal{G}_P^Q} \int_0^t |\dot{G}(x)| dx = \sqrt{\mu} \inf_{r(g) \in \mathcal{G}_P^Q} \int_0^t |\dot{g}(x)| dx \\ &\leq \sqrt{\mu} |g(t) - g(0)| = \sqrt{\mu} |r^{-1}(Q) - r^{-1}(P)|, \end{aligned}$$

amiért $\mathcal{V}_{g,P,\delta\sqrt{\mu}} \supseteq \mathcal{U}_{P,\delta}$.

Ezzel a bizonyítást befejeztük. ■

Jegyezzük meg, hogy a fentebb bizonyított $\lambda|\mathbf{v}|^2 \leq g\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \leq \mu|\mathbf{v}|^2$ egyenlőtlenséget szokás a normák kommenzurabilitásának nevezni.

Lemma. *Ha P és R az $\mathcal{M}$ Riemann-sokaság két pontja, és $0 < \delta < d(P, R)$ elegendően kicsi, akkor létezik olyan Q pont a P körüli δ sugarú $S_\delta = \{Q \in \mathcal{M} : d(P, Q) = \delta\}$ gömbfelületen, melyre $d(P, Q) + d(Q, R) = d(P, R)$.*

Bizonyítás. A háromszög-egyenlőtlenség miatt minden $Q \in S$ pontra $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$, így elég megmutatni, hogy létezik olyan $Q \in S$ pont, melyre $d(P, Q) + d(Q, R) \leq d(P, R)$.

Mivel a $d(P, R)$ a P és R pontok közti görbék hosszainak infimuma, elég látni, hogy bármely e két pontot összekötő G görbe $L(G)$ hossza nagyobb, mint $d(P, Q) + d(Q, R)$.

Mivel S_δ kompakt, és a távolságfüggvény folytonos, létezik S_δ olyan pontja, mely legközelebb van az R ponthoz. Legyen ez Q . A P és R közti G görbe messe az S gömböt a Q' pontban. Ekkor $d(P, Q) + d(Q, R) \leq d(P, Q') + d(Q', R) \leq L(G)$, ami bizonyítja állításunk. ■

A Riemann-sokaságok metrikájának alapvető tulajdonságai közvetlen kapcsolatban vannak a geodetikus görbék globális viselkedésével.

Hopf–Rinow-tétel. *Összefüggő Riemann-sokaságon az alábbi tulajdonságok ekvivalensek, és bármelyikből következik, hogy bármely két pont minimális geodetikussal összeköthető.*

- (1) *A sokaság minden geodetikusa a $(-\infty, +\infty)$ -n értelmezett.*
- (2) *Az exponenciális leképezés minden pontban a teljes érintőtéren értelmezett.*
- (3) *Az exponenciális leképezés egy pontban a teljes érintőtéren értelmezett.*
- (4) *A sokaság mint metrikus tér minden zárt korlátos részhalmaza kompakt.*
- (5) *A sokaság mint metrikus tér teljes.*

Bizonyítás. Először (3)-ból bizonyítunk egy egyszerűbb állítást, majd az ekvivalenciákat és a teljes tételt.

Tételezzük fel, hogy a P pontban az $\exp_P$ exponenciális leképezés az egész érintőtéren értelmezett. Legyen $R \in \mathcal{M}$ és $\delta > 0$ olyan kicsi, melyre alkalmazható előző lemmánk, mely szerint létezik olyan $Q \in \mathcal{M}$ pont, melyre

$$d(P, Q) = \delta \quad \text{és} \quad d(P, R) - d(Q, R) = \delta.$$

Legyen $\exp_P \mathbf{v} = Q$ és G az ehhez tartozó geodetikus ívhossz szerinti paraméterezésben.

A távolságfüggvény folytonossága miatt definiálhatjuk a $\tau = \max\{s > 0 : s + d(G(s), R) = d(P, R)\}$ értéket. Nyilván $\delta \leq \tau \leq d(P, R)$. Tegyük fel, hogy

$\tau < d(P, R)$. Legyen $0 < \varepsilon < d(P, R) - \tau$ elegendően kicsi. Előbbi lemmánk szerint létezik olyan $Q'(\varepsilon) \in \mathcal{M}$ pont, melyre

$$d(G(\tau), Q'(\varepsilon)) = \varepsilon \quad \text{és} \quad d(G(\tau), R) - d(Q'(\varepsilon), R) = \varepsilon.$$

A τ definíciójából eszerint

$$d(Q'(\varepsilon), R) = d(G(\tau), R) - \varepsilon = d(P, R) - \tau - \varepsilon.$$

Mivel a G geodetikusra $G(0) = P$ és a d távolság az összekötő görbék hosszának infimuma, a háromszög-egyenlőtlenséget és τ definícióját felhasználva

$$\tau \geq d(P, G(\tau)) \geq d(P, R) - d(G(\tau), R) = \tau$$

adódik. Eszerint

$$d(P, G(\tau)) + d(G(\tau), Q'(\varepsilon)) = \tau + \varepsilon = d(P, R) - d(Q'(\varepsilon), R) \leq d(P, Q'(\varepsilon)),$$

amiben a háromszög-egyenlőtlenség miatt egyenlőségnek kell szerepelnie *minden* elegendően kicsi $0 < \varepsilon < d(P, R) - \tau$ esetén.

Ebből az következik, hogy a $Q'(\varepsilon)$ pont a G geodetikuson van, hiszen másként elegendően kicsi $0 < \varepsilon$ esetén a $G(\tau - \varepsilon)$, $G(\tau)$ és $Q'(\varepsilon)$ pontok által megadott háromszögben $d(G(\tau - \varepsilon), Q'(\varepsilon)) < 2\varepsilon$ lenne, ami ellentmondana a $d(P, Q'(\varepsilon)) = \tau + \varepsilon$ egyenlőségnek.

Ha a $Q'(\varepsilon)$ pont a G geodetikuson van, az viszont ellentmond a $\tau < d(P, R)$ feltételnek, hiszen a τ maximum volt, tehát $\tau = d(P, R)$ következik. Eszerint az R pont is a G geodetikusra esik, vagyis a P pont minden R ponthoz minimális geodetikussal köthető. Így tehát, ha (3)-ból a (2)-t bebizonyítjuk, akkor az állítást is bizonyítjuk.

Világos, hogy $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Legyen $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$ egy zárt, korlátos halmaz. Előbbi bizonyításunk értelmében $\mathcal{K}$ korlátossága miatt létezik olyan $B \subset T_P \mathcal{M}$ origó középpontú kompakt gömb, melyre $\mathcal{K} \subset \exp_P(B)$. Mivel $\exp_P$ folytonos, $\exp_P(B)$ kompakt, melynek zárt része $\mathcal{K}$ ezért ugyancsak kompakt.

(4) $\Rightarrow$ (5). Egy Cauchy-sorozat nyilván korlátos halmaz. A (4) feltétel szerint ennek lezártja kompakt is, ezért ebben kell legyen torlódási pontja a Cauchy-sorozatnak. Ugyanakkor a Cauchy-sorozatok definíciójából közvetlenül látható, hogy legfeljebb egy torlódási pontjuk lehet.

(5) $\Rightarrow$ (1). A geodetikuskok differenciálegyenlete mutatja, hogy minden geodetikusk az $\mathbb{R}$ egy nyitott szakaszán értelmezett. Ahhoz, hogy az (1) feltételt bizonyítsuk,

elég látni, hogy ezek a szakaszok zártak is, mert akkor csak a teljes valós egyenes lehet az értelmezési tartomány, ami éppen (1) állítása.

Legyen tehát G ívhossz szerint paraméterezett geodetikus, és s_n egy s -hez konvergáló sorozat az egyenesen. Ha G minden s_n paraméternél értelmezett, akkor $d(G(s_k), G(s_l)) \leq |s_k - s_l|$, mivel G két pontja közt a távolság nem lehet nagyobb, mint az ezen pontok közti ívhossz. Eszerint $G(s_n)$ egy Cauchy-sorozat, ami az (5) feltétel szerint konvergál valamely $P \in \mathcal{M}$ ponthoz.

A P pontnak a sokaság definíciójából következőleg kompakt környezete is létezik, melyhez viszont létezik $\varepsilon > 0$, hogy minden pontjából induló geodetikus legalább a $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ intervallumon értelmezett. Ha most n olyan nagy, hogy $G(s_n)$ már beleesik ebbe a kompakt környezetbe, akkor G a $G(s_n)$ pont körül még legalább ε ívhosszon folytatható. Ha $|s_n - s| < \varepsilon/2$, akkor az s paraméter beleesik ebbe a folytatásba, ami bizonyítja állításunk most már minden pontját. ■

Vegyük észre, hogy a Hopf–Rinow-tétel (3) pontja értelmében minden kompakt sokaság teljes! A metrika további tulajdonságait az izometriák írják le.

Definíció. A $d(P, Q) = d(\varphi P, \varphi Q)$ egyenlőséget minden (P, Q) pontpárra teljesítő $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ leképezéseket *izometriának* nevezzük.

Ha $\mathcal{U}$ az $\mathcal{M}$ és $\tilde{\mathcal{U}}$ az $\tilde{\mathcal{M}}$ sokaságban egy-egy koordináta-környezet, akkor a $\varphi: \mathcal{U} \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}$ leképezést *lokális izometriának* nevezzük, amennyiben $d(P, Q) = d(\varphi P, \varphi Q)$ teljesül minden $(P, Q) \in \mathcal{U}$ pontpárra.

Izometria-lemma. Ha $\varphi: \mathcal{U} \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}$ lokális izometria, akkor differenciálható és minden $R \in \mathcal{U}$ pontban minden $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_R \mathcal{M}$ vektorra $\tilde{g}_{\varphi R} \langle \varphi_* \mathbf{v}, \varphi_* \mathbf{w} \rangle = g_R \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

Ha minden $R \in \mathcal{U}$ pontban $\tilde{g}_{\varphi R} \langle \varphi_* \mathbf{v}, \varphi_* \mathbf{v} \rangle = g_R \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ minden $\mathbf{v} \in T_R \mathcal{M}$ vektor esetén, akkor a $\varphi: \mathcal{U} \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}$ diffeomorfizmus lokális izometria.

Bizonyítás. Bármely $G: (0, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{U}$ geodetikus hossza bármely pontja elegendően kicsi környezetében éppen a távolságot adja, hiszen a Hopf–Rinow-tétel miatt a geodetikusok lokálisan minimálisak a hosszmérésre nézve. Ha φ lokális izometria, akkor φG is ilyen minimalizáló tulajdonságú kell legyen bármely pontja kis környezetében, hiszen ellenkező esetben a kisebb hosszúságú görbét visszahúzza a φ^{-1} lokális izometriával, a G geodetikusról kiderülne, hogy nem minimalizál. Tehát a lokális izometria a geodetikusokat geodetikusokba viszi, ráadásul úgy, hogy még a

$$\int_0^\varepsilon \sqrt{\tilde{g}_{\varphi G(t)} \langle (\varphi G)'|_t, (\varphi G)'|_t \rangle} dt = \int_0^\varepsilon \sqrt{g_{G(t)} \langle \dot{G}(t), \dot{G}(t) \rangle} dt$$

hosszukat is megőrzi. Ebből deriválással

$$\tilde{g}_{\varphi G} \langle \varphi_* \dot{G}, \varphi_* \dot{G} \rangle = \tilde{g}_{\varphi G} \langle (\varphi G)', (\varphi G)' \rangle = g_G \langle \dot{G}, \dot{G} \rangle$$

adódik.

Mint hogy minden pontból minden irányba indul geodetikus, ez azt jelenti, hogy tetszőleges $\mathbf{v} \in T_R \mathcal{M}$ vektor esetén $\tilde{g}_{\varphi R} \langle \varphi_* \mathbf{v}, \varphi_* \mathbf{v} \rangle = g_R \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$, ha $R \in \mathcal{U}$. Ha most $R \in \mathcal{U}$ és $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_R \mathcal{M}$ tetszőleges vektorok, akkor ennek felhasználásával

$$\begin{aligned} 2\tilde{g}_{\varphi R} \langle \varphi_* \mathbf{v}, \varphi_* \mathbf{w} \rangle &= \tilde{g}_{\varphi R} \langle \varphi_* \mathbf{v} + \varphi_* \mathbf{w}, \varphi_* \mathbf{v} + \varphi_* \mathbf{w} \rangle - \tilde{g}_{\varphi R} \langle \varphi_* \mathbf{v}, \varphi_* \mathbf{v} \rangle - \tilde{g}_{\varphi R} \langle \varphi_* \mathbf{w}, \varphi_* \mathbf{w} \rangle \\ &= g_R \langle \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle - g_R \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - g_R \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = 2g_R \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle, \end{aligned}$$

ami igazolja első állításunkat.

Visszafelé, nyilván minden $G: (a, b) \rightarrow \mathcal{U}$ görbére

$$\tilde{g}_{\varphi G} \langle (\varphi G)', (\varphi G)' \rangle = \tilde{g}_{\varphi G} \langle \varphi_* \dot{G}, \varphi_* \dot{G} \rangle = g_G \langle \dot{G}, \dot{G} \rangle,$$

ami azt mutatja, hogy φG és G egyszerre ívhossz szerinti paraméterezésű.

Tekintsük most az $R \in \mathcal{U}$ pont közelében a $P \in \mathcal{U}$ és $Q \in \mathcal{U}$ pontokat. Nyilván

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \inf \{ \ell : \text{létezik ívhossz szerint paraméterezett } G \text{ görbe,} \\ &\quad \text{melyre } G(0) = P \text{ és } G(\ell) = Q \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(\varphi P, \varphi Q) &= \inf \{ \tilde{\ell} : \text{létezik ívhossz szerint paraméterezett } \tilde{G} \text{ görbe,} \\ &\quad \text{melyre } \tilde{G}(0) = \varphi P \text{ és } \tilde{G}(\tilde{\ell}) = \varphi Q \}. \end{aligned}$$

Mivel φG a φP és φQ közötti görbe, és φ a görbék hosszát nem változtatja meg, nyilván $d(P, Q) \geq d(\varphi P, \varphi Q)$. Ugyanígy $\varphi^{-1} \tilde{G}$ a P és Q közötti görbe, amiért $d(\varphi P, \varphi Q) \geq d(P, Q)$. Ezzel az állítást beláttuk. ■

Figyeljük meg, hogy az izometria-lemma első állítása alapján a szürjektív izometriák mindig diffeomorfizmusok. Most belátjuk, hogy ráadásul affinok.

Tétel. *Ha $\varphi: (\mathcal{M}, g) \rightarrow (\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g})$ egy szürjektív izometria az $\mathcal{M}$ és az $\tilde{\mathcal{M}}$ Riemann-sokaság között, akkor φ affin diffeomorfizmus.*

Bizonyítás. Tekintsük a $\hat{\nabla}: \tilde{T}\mathcal{M} \times \tilde{T}\mathcal{M} \rightarrow \tilde{T}\mathcal{M}$ leképezést, melyre $\hat{\nabla}_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} := \varphi_*^{-1} \tilde{\nabla}_{\varphi_* \mathbf{X}} \varphi_* \mathbf{Y}$, ahol $\tilde{\nabla}$ az $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g})$ kovariáns deriválása.

Rögtön látszik, hogy $\hat{\nabla}$ egy kovariáns deriválás az $\mathcal{M}$ téren, melynek torziója

$$\begin{aligned} \hat{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \hat{\nabla}_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - \hat{\nabla}_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \\ &= \varphi_*^{-1} (\tilde{\nabla}_{\varphi_* \mathbf{X}} \varphi_* \mathbf{Y} - \tilde{\nabla}_{\varphi_* \mathbf{Y}} \varphi_* \mathbf{X} - [\varphi_* \mathbf{X}, \varphi_* \mathbf{Y}]) = 0. \end{aligned}$$

Ugyanakkor az izometria-lemma miatt

$$\begin{aligned} g(\hat{\nabla}_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + g(\mathbf{Y}, \hat{\nabla}_{\mathbf{X}} \mathbf{Z}) \\ = g(\varphi_*^{-1} \tilde{\nabla}_{\varphi_* \mathbf{X}} \varphi_* \mathbf{Y}, \varphi_*^{-1} \varphi_* \mathbf{Z}) + g(\varphi_*^{-1} \varphi_* \mathbf{Y}, \varphi_*^{-1} \tilde{\nabla}_{\varphi_* \mathbf{X}} \varphi_* \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \tilde{g}_\varphi \langle \tilde{\nabla}_{\varphi_* \mathbf{X}} \varphi_* \mathbf{Y}, \varphi_* \mathbf{Z} \rangle + \tilde{g}_\varphi \langle \varphi_* \mathbf{Y}, \tilde{\nabla}_{\varphi_* \mathbf{X}} \varphi_* \mathbf{Z} \rangle \\
&= \varphi_* \mathbf{X} \tilde{g}_\varphi \langle \varphi_* \mathbf{Y}, \varphi_* \mathbf{Z} \rangle = \mathbf{X}(g\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle),
\end{aligned}$$

és így $\hat{\nabla}$ a $\mathcal{M}$ Riemann-sokaság Levi-Civita kovariáns deriválása, melynek egyértelműsége miatt $\hat{\nabla} = \nabla$. ■

Jegyezzük meg, hogy tételünk rögtön adja a $\varphi_* R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = \tilde{R}(\varphi_* \mathbf{X}, \varphi_* \mathbf{Y})\varphi_* \mathbf{Z}$ és $\varphi_* T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \tilde{T}(\varphi_* \mathbf{X}, \varphi_* \mathbf{Y})$ összefüggést is.

Az exponenciális leképezés rendszerint nem izometria, de Gauss most következő fontos eredménye szerint bizonyos szögtartása azért mindig van. Figyeljük meg, hogy $\exp_P: T_P \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, ezért $\exp_{P*}: TT_P \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$. Ezt megszorítva a $\mathbf{v}$ vektornál lévő $T_{\mathbf{v}} T_P \mathcal{M}$ érintőtérre, az $\exp_{P*}|_{T_{\mathbf{v}} T_P \mathcal{M}}: T_{\mathbf{v}} T_P \mathcal{M} \rightarrow T_{\exp_P \mathbf{v}} \mathcal{M}$ adódik, hiszen $\mathbf{v} \in T_P \mathcal{M}$ képe $\exp_P \mathbf{v} \in \mathcal{M}$.

Gauss-lemma. Az exponenciális leképezés indukált leképezésére

$$g_{G(s)} \langle \dot{G}(s), \exp_{P*}|_{T_{s\mathbf{v}} T_P \mathcal{M}}(\mathbf{w}) \rangle = g_P \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle,$$

ahol $P \in \mathcal{M}$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_P \mathcal{M}$, $G(s) = \exp_P(s\mathbf{v})$.

Figyeljük meg, hogy a Gauss-lemmában $\mathbf{w} \in T_P \mathcal{M}$ és ez a vektor az $\exp_{P*}|_{T_{s\mathbf{v}} T_P \mathcal{M}}$ argumentumában a $T_{s\mathbf{v}} T_P \mathcal{M}$ és a $T_P \mathcal{M}$ tér kanonikus azonosításán — ami a párhuzamos eltolás — keresztül szerepel!

Bizonyítás. Tetszőleges $\mathbf{u} \in T_P \mathcal{M}$ vektor esetén jelölje $\mathbf{J}_{\mathbf{u}}$ azt a Jacobi-mezőt, melyet a $\mathbf{J}_{\mathbf{u}}(0) = 0$ és $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{J} = \mathbf{u}$ peremértékek határoznak meg.

Legyen $\bar{\mathbf{w}} \in T_P \mathcal{M}$, és tekintsük a $G(s) = \exp_P(s\mathbf{v})$ geodetikus

$$\nu(t, s) = \exp_P(s(\mathbf{v} + t\bar{\mathbf{w}}))$$

variációját. Ez egy geodetikus variáció, melynek egyik végpontja fix, ezért a $\dot{\nu}_s(0)$ transzverzális vektormező egy olyan, a G érintőjére merőleges Jacobi-mező a G geodetikus mentén, melyre egyszerű számolással

$$\nabla_{\mathbf{v}} \dot{\nu}_s = \nabla_{\dot{\nu}_{t=0}(0)} \dot{\nu}_s = \nabla_{\dot{\nu}_{s=0}(0)} \dot{\nu}_t = \nabla_{\dot{\nu}_{s=0}(0)} (\mathbf{v} + t\bar{\mathbf{w}}) = \bar{\mathbf{w}}.$$

A Jacobi-mezők egyértelműsége miatt ezért $\dot{\nu}_s(0) = \mathbf{J}_{\bar{\mathbf{w}}}(s)$. Ugyanakkor

$$\dot{\nu}_s(0) = \partial_1 \nu(0, s) = \frac{d}{dt} (\exp_P(s\mathbf{v} + ts\bar{\mathbf{w}})) \Big|_{t=0} = \exp_{P*}|_{T_{s\mathbf{v}} T_P \mathcal{M}}(s\bar{\mathbf{w}}),$$

ezért

$$\exp_{P*}|_{T_{s\mathbf{v}} T_P \mathcal{M}}(s\bar{\mathbf{w}}) = \mathbf{J}_{\bar{\mathbf{w}}}(s). \quad (\text{GLJ})$$

Legyen most $\mathbf{w} = s\bar{\mathbf{w}}$. Ekkor

$$\begin{aligned} g_{G(s)}\langle \dot{G}(s), \exp_{P*}|_{T_{sv}T_P\mathcal{M}}(\mathbf{w}) \rangle &= g_{G(s)}\langle \dot{G}(s), \exp_{P*}|_{T_{sv}T_P\mathcal{M}}(s\bar{\mathbf{w}}) \rangle \\ &= g\langle \dot{G}(s), \mathbf{J}_{\bar{\mathbf{w}}}(s) \rangle. \end{aligned}$$

Ugyanakkor a Jacobi-mezőkről tudjuk, hogy $g\langle \dot{G}(s), \mathbf{J}_{\bar{\mathbf{w}}}(s) \rangle = as + b$ valamely a és b konstansokra, amit az $s = 0$ pontban vizsgálva azonnal a $b = 0$ eredményre jutunk. Az s szerinti

$$g\langle \nabla_{\dot{G}(s)} \dot{G}, \mathbf{J}_{\bar{\mathbf{w}}}(s) \rangle + g\langle \dot{G}(s), \nabla_{\dot{G}(s)} \mathbf{J}_{\bar{\mathbf{w}}} \rangle = a$$

deriváltból viszont az $s = 0$ pontban $a = g\langle \mathbf{v}, \bar{\mathbf{w}} \rangle$ adódik, és így

$$g\langle \dot{G}(s), \mathbf{J}_{\bar{\mathbf{w}}}(s) \rangle = g\langle \mathbf{v}, s\bar{\mathbf{w}} \rangle$$

következik, ami igazolja az állítást. ■

A Gauss-lemma geometriai jelentése az, hogy ha az érintőtér valamely origó középpontú gömbjét az exponenciális leképezéssel „levisszük” a sokaságra, akkor a sokaságon kialakuló *geodetikus gömb* érintőtere merőleges a középpontból kiinduló geodetikus érintőjére.

Definíció. Egy Riemann-sokaságot

- *homogén (Riemann-)térnek* nevezünk, ha bármely pontja bármely másik pontjába izometriával átvihető,
- *szimmetrikus (Riemann-)térnek* hívunk, ha minden pontjához létezik olyan izometria, mely az adott pontot fixen hagyja, és indukált leképezése az érintőtéren centrális tükrözés, és
- *két-pont-homogén (Riemann-)térnek* nevezünk, ha minden P, Q és P', Q' pontpárhoz, melyekre $d(P, Q) = d(P', Q')$, létezik olyan ι izometria, melyre $\iota(P) = P'$ és $\iota(Q) = Q'$.

Nyilvánvaló, hogy a két-pont-homogén terek homogének is.

Tétel. *Összefüggő, szimmetrikus Riemann-tér homogén.*

Bizonyítás. Legyen a homogenitás feltételében szereplő két pont P és Q . Az összefüggőség miatt létezik ezeket összekötő görbe a sokaságban. Helyettesítsük e görbét szakaszonként geodetikus görbével. A geodetikus szakaszok felezőpontjai legyenek a P_i pontok. A szimmetrikusság miatt minden ilyen pontban létezik olyan φ_{P_i} izometria, melynek indukált leképezése középpontos tükrözés az érintőtéren. Ez

nyilván csak a sokaságoknál már bevezetett σ_{P_i} szimmetria lehet, hiszen a geodetikus szakasznak a P_i pontban vett érintőjét az indukált σ_{P_i*} leképezés egyszerűen -1 -gyel szorozza, és a geodetikus differenciálegyenlete alapján ez már egyértelműen meghatározza a geodetikust.

Ez a σ_{P_i} izometria a geodetikus szakasz két végpontját felcseréli, így ezek szorzata épp egy olyan izometria, mely a két pont egyikét a másikba viszi, ezzel igazolva a homogenitást. ■

A következő szerint minden felsorolt Riemann-tér osztályunk metrikusan teljes.

Tétel. *Összefüggő, homogén Riemann-tér metrikusan teljes.*

Bizonyítás. A metrikus teljességhez a Hopf–Rinow-tétel alapján csak a geodetikusok végtelen folytathatóságát kell megmutatni. Legyen a $G: (a, b) \rightarrow \mathcal{M}$ geodetikus maximális és ívhossz paraméterezésű. Legyen $\varepsilon > 0$ olyan kicsi, hogy az $\exp_P$ exponenciális leképezés diffeomorfizmus a $B(\varepsilon) \in T_P\mathcal{M}$ gömbön.

Ha $b < \infty$, akkor legyen $s_0 \in (a, b)$ olyan, hogy $b - s_0 < \varepsilon/2$. A homogenitás miatt létezik olyan $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ izometria, melyre $\varphi(G(s_0)) = P$. Legyen $\mathbf{v} \in T_P\mathcal{M}$ az az egységnyi vektor, melyre $\varphi_*(\dot{G}(s_0)) = \mathbf{v}$. Ekkor a $\tilde{G}(s) = \varphi^{-1}(\exp_P(s\mathbf{v}))$ olyan geodetikus a $(-\varepsilon, \varepsilon)$ intervallumon, melyre $G(s_0 + s) = \tilde{G}(s)$, ha $\max(a - s_0, -\varepsilon) < s < b - s_0$. Eszerint $\tilde{G}(s)$ ívhossz szerinti geodetikus folytatása a G geodetikusként, holott a G maximális volt. Eszerint $b = \infty$, és ugyanígy $a = -\infty$ ami igazolja állításunkat. ■

Nyilvánvaló, hogy az alábbi lokális tulajdonságok következnek a fentebb definiált megfelelő tulajdonságok teljesüléséből, de ez fordítva csak néha igaz.

Definíció. Azt mondjuk, hogy egy Riemann-sokaság *lokálisan*

- *homogén*, ha bármely pont valamely koordináta-környezetében minden pont lokális izometriával a koordináta-környezet tetszőleges pontjába elmozgatható,
- *szimmetrikus*, ha minden pontjához és annak egy koordináta-környezetéhez létezik annak olyan (lokális) izometriája, mely az adott pontot fixen hagyja, és indukált leképezése az érintőtérén centrális tükrözés, és
- *két-pont-homogén*, ha bármely pont valamely $\mathcal{U}$ koordináta-környezetében minden P, Q és P', Q' pontpárhoz, melyekre $\mathcal{U}$ tartalmazza a P és Q , valamint a P' és Q' pontokat összekötő geodetikusokat, és $d(P, Q) = d(P', Q')$, létezik $\mathcal{U}$ olyan ι (lokális) izometriája, melyre $\iota(P) = P'$ és $\iota(Q) = Q'$.

A kovariáns deriválással rendelkező sokaságoknál már vizsgált szimmetrikus-ságra vonatkozó eredményünk Riemann-tereknél is alkalmazható.

Tétel. *Egy Riemann-sokaság akkor és csak akkor lokálisan szimmetrikus, ha Riemann-görbületének kovariáns deriváltja eltűnik.*

Bizonyítás. A sokaságoknál már bizonyítottuk, hogy az adott feltételek mellett ez a sokaság szimmetrikus, és a $\sigma_P(\exp_P \mathbf{X}) = \exp_P(-\mathbf{X})$ formulával definiált σ_P lokális szimmetria affin diffeomorfizmus. Elég ezért azt belátni, hogy ez a σ_P szimmetria egyben izometria is.

Legyen G egy, a P ponton átmenő geodetikus, és $\mathbf{X} \in T_G\mathcal{M}$ párhuzamos vektormező G mentén. Ekkor

$$\nabla_{\dot{G}}\sigma_{P*}\mathbf{X} = -\nabla_{-\dot{G}}\sigma_{P*}\mathbf{X} = -\nabla_{\sigma_{P*}\dot{G}}\sigma_{P*}\mathbf{X} = -\sigma_{P*}\nabla_{\dot{G}}\mathbf{X} = 0$$

alapján $\sigma_{P*}\mathbf{X}$ is párhuzamos vektormező, melyre $\sigma_{P*}\mathbf{X}(P) = \sigma_{P*}(\mathbf{X}(P)) = -\mathbf{X}(P)$. Mivel a párhuzamosság tartja a hosszat és a bezárt szöget, ebből következik a $\sigma_{P*}\mathbf{X} = -\mathbf{X}$ egyenlőség.

Legyen $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ érintővektor a $T_R\mathcal{M}$ térből, és legyen $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ ezek párhuzamos vektormezővé való kiterjesztése a P és R pontokon átmenő G geodetikusra. Ekkor

$$\begin{aligned} g_R\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= g_R\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = g_{\sigma_P R}\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = g_{\sigma_P R}\langle -\mathbf{X}, -\mathbf{Y} \rangle = g_{\sigma_P R}\langle \sigma_{P*}\mathbf{X}, \sigma_{P*}\mathbf{Y} \rangle \\ &= g_{\sigma_P R}\langle \sigma_{P*}\mathbf{x}, \sigma_{P*}\mathbf{y} \rangle, \end{aligned}$$

amiből az állítás azonnal következik az izometria-lemma alkalmazásával. ■

Tétel. *Az egyszeresen összefüggő lokálisan szimmetrikus teljes terek szimmetrikusak.*

A nehéz bizonyítás [35, 2.3.15] a lokális szimmetria izometrikus kiterjeszthetőségén múlik, amit előbbi eredményünkől a struktúra-tétel egy speciális analitikus esetével lehet megmutatni.

Tétel. *Az összefüggő, egyszeresen összefüggő és két-pont-homogén Riemann-terek szimmetrikusak.*

Bizonyítás. Előbbi tételünk értelmében elég a lokális szimmetriát megmutatni, hiszen az összefüggő két-pont-homogén-terek homogének, és így teljesek.

Legyen $\mathbf{x} \in S_P\mathcal{M}$, és tekintsük az $A_{\mathbf{x}}: T_{\mathbf{x}}S_P\mathcal{M} \rightarrow T_{\mathbf{x}}S_P\mathcal{M}$ leképezést, ahol $A_{\mathbf{x}}\mathbf{y} = \nabla R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{x})$, $S_P\mathcal{M}$ a $T_P\mathcal{M}$ egységömbjének a felülete, $TS_P\mathcal{M}$ ennek érintőnyalábja, és $\mathbf{y} \in T_{\mathbf{x}}S_P\mathcal{M}$.

Nyilván $A_{-\mathbf{x}} = -A_{\mathbf{x}}$, mert

$$A_{-\mathbf{x}}\mathbf{y} = \nabla R(-\mathbf{x}, \mathbf{y}, -\mathbf{x}, -\mathbf{x}) = (-1)^3 \nabla R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{x}) = -A_{\mathbf{x}}\mathbf{y}.$$

Ugyanakkor $A_{\mathbf{x}}$ önadjungált is, mert a Bianchi-azonosságok alapján

$$\begin{aligned} g\langle A_{\mathbf{x}}\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle &= g\langle \nabla_{\mathbf{x}}(R(\mathbf{y}, \mathbf{x})\mathbf{x}), \mathbf{z} \rangle - g\langle R(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{y}, \mathbf{x})\mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle - \\ &\quad - g\langle R(\mathbf{y}, \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{x})\mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle - g\langle R(\mathbf{y}, \mathbf{x})\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \\ &= \mathbf{x}g\langle R(\mathbf{y}, \mathbf{x})\mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle - g\langle R(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{z}, \mathbf{x})\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - g\langle R(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{y}, \mathbf{x})\mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle - \\ &\quad - g\langle R(\mathbf{z}, \mathbf{x})\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - g\langle R(\mathbf{y}, \mathbf{x})\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle, \end{aligned}$$

és ez szintén a Bianchi-azonosságok miatt szimmetrikus az $\mathbf{y}$ és $\mathbf{z}$ változóiban, amiért $g\langle A_{\mathbf{x}}\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = g\langle A_{\mathbf{x}}\mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle$ következik.

Az izometriák affinitása miatt $A_{\varphi_*\mathbf{x}}\varphi_*\mathbf{y} = \varphi_*A_{\mathbf{x}}\mathbf{y}$ bármely φ izometria esetén, így ha $\lambda_{\mathbf{x}}$ az $A_{\mathbf{x}}$ sajátértéke és $\mathbf{y}$ ehhez tartozó sajátvektor, akkor

$$A_{\varphi_*\mathbf{x}}\varphi_*\mathbf{y} = \varphi_*A_{\mathbf{x}}\mathbf{y} = \varphi_*(\lambda_{\mathbf{x}}\mathbf{y}) = \lambda_{\mathbf{x}}\varphi_*\mathbf{y}$$

alapján $\lambda_{\mathbf{x}}$ az $A_{\varphi_*\mathbf{x}}$ sajátértéke is, és viszont. A két-pont-homogenitás miatt bármely $\mathbf{x}' \in S_P\mathcal{M}$ előáll, mint $\varphi_*\mathbf{x}$ valamely alkalmas φ izometriára, ezért a $\lambda_{\mathbf{x}}$ sajátértékek nem függnének az $\mathbf{X}$ vektortól.

Összefoglalva, $A_{\mathbf{x}}$ olyan önadjungált leképezése a gömbi vektormezőknek, melyre $A_{-\mathbf{x}} = -A_{\mathbf{x}}$, és amelynek minden sajátértéke konstans, vagyis független $\mathbf{x}$ választásától. Ebből topológiai (mégpedig homológiai) indoklással következik, hogy $A_{\mathbf{x}}$ a nulla operátor [24].

Legyen G egy geodetikus, a $B: T_G\mathcal{M} \rightarrow T_G\mathcal{M}$ leképezés pedig olyan, hogy $B(\mathbf{X}) = R(\mathbf{X}, \dot{G})\dot{G}$. Ekkor a

$$g\langle B(\mathbf{X}), \mathbf{Y} \rangle = g\langle R(\mathbf{X}, \dot{G})\dot{G}, \mathbf{Y} \rangle = g\langle R(\mathbf{Y}, \dot{G})\dot{G}, \mathbf{X} \rangle = g\langle \mathbf{X}, B(\mathbf{Y}) \rangle$$

Bianchi-azonosság miatt B önadjungált, vagyis pontosan n valós λ_i^0 sajátértéke és ezeknek megfelelő, egymásra merőleges $\mathbf{E}_i^0$ egységnyi sajátvektora van a $T_{G(s_0)}\mathcal{M}$ érintőtérben. Ezek közt az első legyen éppen a $\lambda_1^0 = 0$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{E}_1^0 = \dot{G}(s_0)$ vektor. Legyen továbbá $\mathbf{E}_i$ az $\mathbf{E}_i^0$ sajátvektor egyértelmű párhuzamos kiterjesztése a G geodetikus mentén.

Ha $\mathbf{E}$ párhuzamos vektormező a G geodetikus mentén, akkor a $B(\mathbf{E})$ is párhuzamos vektormező, hiszen $0 = A_{\dot{G}}(\mathbf{E}) = \nabla R(\dot{G}, \mathbf{E}, \dot{G}, \dot{G}) = \nabla_{\dot{G}}(B(\mathbf{E}))$. Emiatt $\lambda_i^0\mathbf{E}_i$ és $B(\mathbf{E}_i)$ is párhuzamos a G mentén, miközben $B(\mathbf{E}_i(s_0)) = B(\mathbf{E}_i^0) = \lambda_i^0\mathbf{E}_i^0$, és $\lambda_i^0\mathbf{E}_i(s_0) = \lambda_i^0\mathbf{E}_i^0$ is. A párhuzamosság egyértelműsége miatt ebből $\lambda_i^0\mathbf{E}_i = B(\mathbf{E}_i)$ következik.

Összefoglalva, B minden sajátértéke konstans a G mentén, az ezekhez tartozó sajátvektorok pedig egymásra merőleges, párhuzamos egységvektor-mezők.

Az izometria-lemma felhasználásával ebből belátjuk, hogy a σ_P lokális szimmetria egyben lokális izometria is, ami bizonyítja tételünket.

Először figyeljük meg, hogy tetszőleges $P = G(0)$ ponton átmenő geodetikus és ezen adott $\mathbf{J}$ Jacobi-mező esetén $\sigma_{P*}\mathbf{J}$ is Jacobi-mező, mert σ_P affin. Továbbá $\sigma_{P*}\mathbf{J}(P) = \sigma_{P*}(\mathbf{J}(P)) = -\mathbf{J}(P)$ és

$$\nabla_{\dot{G}}\sigma_{P*}\mathbf{J}(P) = \nabla_{\dot{G}(0)}\sigma_{P*}(\mathbf{J}) = -\nabla_{\sigma_{P*}\dot{G}(0)}\sigma_{P*}(\mathbf{J}) = -\sigma_{P*}\nabla_{\dot{G}(0)}\mathbf{J} = \nabla_{\dot{G}}\mathbf{J}(P).$$

Ha tehát $\nabla_{\dot{G}}\mathbf{J}(P) = 0$, akkor a $\mathbf{J}$ és $\sigma_{P*}\mathbf{J}$ Jacobi-mezők kezdeti értékei egymás -1 -szeresei, és ezért a G mentén $\sigma_{P*}\mathbf{J} = -\mathbf{J}$ következik.

Legyen $\mathbf{v} \in T_R\mathcal{M}$ egy tetszőleges vektor, aztán G egy, a $P = G(0)$ ponton átmenő geodetikus, melyre $R = G(s_0)$ a P olyan közelében van, hogy $0 < s_0 < \pi/(2\max_{\lambda_i^0 < 0} \sqrt{-\lambda_i^0})$. Legyen $\mathbf{J} = \sum_{i=1}^n f_i \mathbf{E}_i$ egy olyan Jacobi-mező a G mentén, melyre $\nabla_{\dot{G}}\mathbf{J}(P) = 0$ és $\mathbf{J}(R) = \mathbf{v}$. Ezek a feltételek egyértelműen meghatározzák a $\mathbf{J}$ Jacobi-mezőt. A kezdeti értékek alapján $f'_i(0) = 0$ és $f_i(s_0) = g_R\langle \mathbf{v}, \mathbf{E}_i(R) \rangle$ következik, a Jacobi-egyenlet alapján pedig

$$\begin{aligned} f''_i &= g\langle \nabla_{\dot{G}}\nabla_{\dot{G}}\mathbf{J}, \mathbf{E}_i \rangle = g\langle R(\dot{G}, \mathbf{J})\dot{G}, \mathbf{E}_i \rangle = \sum_j g\langle R(\dot{G}, f_j \mathbf{E}_j)\dot{G}, \mathbf{E}_i \rangle \\ &= \sum_j f_j g\langle R(\dot{G}, \mathbf{E}_j)\dot{G}, \mathbf{E}_i \rangle = \sum_j f_j g\langle -B(\mathbf{E}_j), \mathbf{E}_i \rangle = \sum_j f_j g\langle -\lambda_j \mathbf{E}_j, \mathbf{E}_i \rangle = -\lambda_i^0 f_i, \end{aligned}$$

vagyis $f''_i + \lambda_i^0 f_i = 0$. Ennek a differenciálegyenletnek a megoldásai

$$f_i(s) = g_R\langle \mathbf{v}, \mathbf{E}_i(R) \rangle \cdot \begin{cases} \frac{\cos(s\sqrt{\lambda_i^0})}{\cos(s_0\sqrt{\lambda_i^0})}, & \text{ha } \lambda_i^0 > 0, \\ 1, & \text{ha } \lambda_i^0 = 0, \\ \frac{\cosh(s\sqrt{-\lambda_i^0})}{\cosh(s_0\sqrt{-\lambda_i^0})}, & \text{ha } \lambda_i^0 < 0. \end{cases}$$

(Itt jól látszik, mennyire kihasználjuk, hogy csak lokálisan kell megoldást találnunk, hiszen másként nem feltétlenül lenne megoldása a differenciálegyenletnek!)

Eszerint

$$\begin{aligned} \sigma_{P*}\mathbf{v} &= \sigma_{P*}(\mathbf{J}(G(s_0))) = \sigma_{P*}\mathbf{J}(\sigma_P G(s_0)) = -\mathbf{J}(\sigma_P G(s_0)) = -\mathbf{J}(G(-s_0)) \\ &= -\sum_{i=1}^n f_i(-s_0)\mathbf{E}_i(G(-s_0)) = -\sum_{i=1}^n f_i(s_0)\mathbf{E}_i(G(-s_0)), \end{aligned}$$

amelyből a párhuzamos vektormezők hossztartása miatt azonnal adódik, hogy $g_{\sigma_P R}\langle \sigma_{P*}\mathbf{v}, \sigma_{P*}\mathbf{v} \rangle = g_R\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$, hiszen $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n f_i(s_0)\mathbf{E}_i(G(s_0))$.

Az izometria-lemma alapján tehát σ_P lokális izometria, amint állítottuk. ■

4.4. Metszetgörbület

Minden $P \in \mathcal{M}$ pontban definiáljuk a $\kappa_P: T_P\mathcal{M} \times T_P\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést úgy, hogy

$$\kappa_P(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{cases} \frac{-g_P\langle R(\mathbf{v}, \mathbf{w})\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{g_P\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle g_P\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle - g_P^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}, & \text{ha } \mathbf{v} \text{ és } \mathbf{w} \text{ függetlenek,} \\ 0, & \text{ha } \mathbf{v} \text{ és } \mathbf{w} \text{ egyirányú.} \end{cases}$$

Tétel. *A κ_P értéke csak az argumentumai által meghatározott síktól függ.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{v} = a\mathbf{x} + b\mathbf{y}$ és $\mathbf{w} = c\mathbf{x} + d\mathbf{y}$ úgy, hogy $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ ortonormált független vektorok és $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nemelfajuló. Ekkor R asszimmetriája és a Bianchi-azonosságok alapján

$$\begin{aligned} & g_P\langle R(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, c\mathbf{x} + d\mathbf{y})(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}), c\mathbf{x} + d\mathbf{y} \rangle \\ &= (ad - bc)g_P\langle R(\mathbf{x}, \mathbf{y})(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}), c\mathbf{x} + d\mathbf{y} \rangle \\ &= ad(ad - bc)g_P\langle R(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + bc(ad - bc)g_P\langle R(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \\ &= (ad - bc)^2 g_P\langle R(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle. \end{aligned}$$

Ugyanakkor

$$\begin{aligned} & g_P\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle g_P\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle - g_P^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \\ &= \langle a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \rangle \langle c\mathbf{x} + d\mathbf{y}, c\mathbf{x} + d\mathbf{y} \rangle - \langle a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, c\mathbf{x} + d\mathbf{y} \rangle^2 \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 = a^2d^2 + b^2c^2 - 2acbd = (ad - bc)^2, \end{aligned}$$

vagis $\kappa_P(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ értéke nem függ az a, b, c, d együtthatóktól. ■

Definíció. Legyen az $S \subset T_P\mathcal{M}$ sík az érintőtér egy altere. A P pont S síkhoz tartozó *metszetgörbületének*, vagy *szekcionális görbületének*, nevezzük a $\kappa_P(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ értéket, ahol $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ az S sík két független vektora.

A Theorema egregium alapján a metszetgörbület tulajdonképpen a P pontból induló, az S síkhoz simuló geodetikuskok alkotta kétdimenziós részsokaság Gauss-féle szorzatgörbülete.

Tétel. *A metszetgörbület meghatározza a Riemann-görbületet. Ha konstans, akkor*

$$R(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{w} = \kappa_P(g_P\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{u} - g_P\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{v})$$

tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_P\mathcal{M}$ vektorokra.

Bizonyítás. Az $\tilde{R}(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot) = g_P \langle R(\cdot, \cdot), \cdot \rangle$ egy Bianchi-tenzor¹, így meghatározza a normált nyoma, vagyis a metszetgörbület. Ha a normált nyom konstans, akkor

$$\begin{aligned}\tilde{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}) &= \kappa_P(g_P \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle g_P \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle - g_P \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle g_P \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle) \\ &= g_P \langle \kappa_P(g_P \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{u} - g_P \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{v}), \mathbf{x} \rangle\end{aligned}\quad (4.4.1)$$

minden $\mathbf{x}$ esetén teljesül, ami bizonyítja az állítást. ■

Schur-lemma. Legyen az $n \geq 3$ dimenziós $\mathcal{M}^n$ sokaság összefüggő. Ha a $\kappa_P(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ metszetgörbület csak a $P \in \mathcal{M}^n$ ponttól függ, akkor konstans.

Bizonyítás. Az előbbi tétel szerint

$$R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = \kappa(g\langle \mathbf{Z}, \mathbf{Y} \rangle \mathbf{X} - g\langle \mathbf{X}, \mathbf{Z} \rangle \mathbf{Y}),$$

ahol $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \tilde{T}\mathcal{M}$ tetszőleges vektormezők, κ pedig a tétel feltételezése szerint skalármező. Ebből tetszőleges $\mathbf{V} \in \tilde{T}\mathcal{M}$ vektormező esetén

$$\begin{aligned}(\nabla_{\mathbf{V}} R)(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} &= \nabla_{\mathbf{V}} R(\mathbf{V}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \\ &= \nabla_{\mathbf{V}} (\kappa(g\langle \mathbf{Z}, \mathbf{Y} \rangle \mathbf{X} - g\langle \mathbf{X}, \mathbf{Z} \rangle \mathbf{Y})) - \kappa(g\langle \nabla_{\mathbf{V}} \mathbf{Z}, \mathbf{Y} \rangle \mathbf{X} - g\langle \mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{V}} \mathbf{Z} \rangle \mathbf{Y}) - \\ &\quad - \kappa(g\langle \mathbf{Z}, \nabla_{\mathbf{V}} \mathbf{Y} \rangle \mathbf{X} - g\langle \mathbf{X}, \mathbf{Z} \rangle \nabla_{\mathbf{V}} \mathbf{Y}) - \kappa(g\langle \mathbf{Z}, \mathbf{Y} \rangle \nabla_{\mathbf{V}} \mathbf{X} - g\langle \nabla_{\mathbf{V}} \mathbf{X}, \mathbf{Z} \rangle \mathbf{Y}) \\ &= (\mathbf{V}\kappa)(g\langle \mathbf{Z}, \mathbf{Y} \rangle \mathbf{X} - g\langle \mathbf{X}, \mathbf{Z} \rangle \mathbf{Y}).\end{aligned}$$

Összeadva az azonosság két végét a $\mathbf{V}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}$ vektorok ciklikus cseréjére, a másodfajú algebrai Bianchi-azonosság szerint a bal oldalon nulla lesz az eredmény, vagyis

$$\begin{aligned}0 &= (\mathbf{V}\kappa)(g\langle \mathbf{Z}, \mathbf{Y} \rangle \mathbf{X} - g\langle \mathbf{X}, \mathbf{Z} \rangle \mathbf{Y}) + (\mathbf{X}\kappa)(g\langle \mathbf{Z}, \mathbf{V} \rangle \mathbf{Y} - g\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle \mathbf{V}) + \\ &\quad + (\mathbf{Y}\kappa)(g\langle \mathbf{Z}, \mathbf{X} \rangle \mathbf{V} - g\langle \mathbf{V}, \mathbf{Z} \rangle \mathbf{X}).\end{aligned}$$

Mivel a dimenzió $n \geq 3$, lokálisan megválaszthatjuk a vektorokat úgy, hogy $\mathbf{Z} = \mathbf{V}$, és az $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ ortonormált rendszert alkot. Ekkor formulánkból $(\mathbf{X}\kappa)\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}\kappa)\mathbf{X}$ következik, amiért $\mathbf{X}\kappa = \mathbf{Y}\kappa = 0$. Minthogy ez bármely $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ esetén igaz, κ nyilván konstans, ahogy a tétel állította. ■

A szintén fontos $R = \sum_{i,j} g^{i,j} R_{i,j}$ Riemann-féle görbületi skalár az $R_{i,j}$ Ricci-féle görbületi tenzorból származik. A Riemann-féle görbületi skalár független a koordináta-környezettől, tehát a sokaságra jellemző skalármező.

¹Lásd a függelékben!

Tétel. *Egy Riemann-sokaság akkor és csak akkor lokálisan szimmetrikus, ha a metsetgörbület invariáns a párhuzamos eltolással szemben.*

Bizonyítás. Legyen az $\mathcal{M}$ sokaság lokálisan szimmetrikus. Elég belátni, hogy az R Riemann-görbület, és a g Riemann-metrika eltolás-invariáns, hiszen a metsetgörbület ezek összetételéből áll. A Levi–Civita-tétel szerint a Riemann-metrika invariáns a párhuzamos eltolásra. Ha az $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ és $\mathbf{Z}$ vektormezők párhuzamosak a G geodetikus mentén, akkor $\nabla_{\dot{G}}(R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z}) = \nabla R(\dot{G}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = 0$, hiszen $\nabla R = 0$ a szimmetria azonnali következménye. Eszerint $R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z}$ is párhuzamos, amiért R eltolás-invariáns.

Tegyük most fel, hogy a metsetgörbület invariáns a párhuzamos eltolással szemben. Azt kell igazolnunk, hogy $\nabla R = 0$.

Tetszőleges P pontra és $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_P\mathcal{M}$ vektorokra legyen

$$k_P(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\kappa_P(\mathbf{v}, \mathbf{w})(g_P\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle g_P\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle - g_P\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle^2).$$

Ha τ párhuzamos eltolás a P pontból a Q pontba, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_P\mathcal{M}$ tetszőleges, akkor

$$g_Q\langle R_Q(\tau\mathbf{v}, \tau\mathbf{w})\tau\mathbf{v}, \tau\mathbf{w} \rangle = k_Q(\tau\mathbf{v}, \tau\mathbf{w}) = k_P(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = g_P\langle R_P(\mathbf{v}, \mathbf{w})\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle.$$

A $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = g_Q\langle R_Q(\tau\mathbf{u}, \tau\mathbf{v})\tau\mathbf{x}, \tau\mathbf{y} \rangle - g_P\langle R_P(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ különbség nyilván egy Bianchi-tenzor, aminek nyoma $B(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ a fentiek szerint.

Ebből $B \equiv 0$ következik, amiből

$$g_Q\langle R_Q(\tau\mathbf{u}, \tau\mathbf{v})\tau\mathbf{x}, \tau\mathbf{y} \rangle = g_P\langle R_P(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = g_Q\langle \tau(R_P(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{x}), \tau\mathbf{y} \rangle$$

adódik minden $\mathbf{y} \in T_P\mathcal{M}$ vektorra. Akkor $R_Q(\tau\mathbf{u}, \tau\mathbf{v})\tau\mathbf{x} = \tau(R_P(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{x})$ is teljesül, tehát R eltolás-invariáns. Ez azt jelenti, hogy amennyiben $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ és $\mathbf{Z}$ párhuzamos vektormezők a G geodetikus mentén, akkor $R_G(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z}$ is párhuzamos a G mentén, vagyis $0 = \nabla_{\dot{G}}(R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z}) = \nabla R(\dot{G}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$, amiből $\nabla R = 0$ következik, ahogy állítottuk. ■

Cartan–Hadamard-tétel. *Ha a $(\mathcal{M}^n, g)$ Riemann-sokaság teljes és egyszeresen összefüggő, valamint metsetgörbülete minden pontban minden síkra nem pozitív, akkor $\mathcal{M}^n$ diffeomorf az $\mathbb{R}^n$ affin térrel.*

Bizonyítás. Minthogy $(\mathcal{M}^n, g)$ teljes, a Hopf–Rinow-tétel szerint minden $P \in \mathcal{M}^n$ pontra az exponenciális leképezés a teljes $T_P\mathcal{M}^n$ téren értelmezett, vagyis $\exp_P: T_P\mathcal{M}^n \rightarrow \mathcal{M}^n$. Minden $\mathbf{u} \in T_P\mathcal{M}^n$ vektorra legyen $G_{P,\mathbf{u}}: \mathbb{R} \ni t \mapsto \exp_P(t\mathbf{u}) \in \mathcal{M}^n$ a P -ből $\mathbf{u}$ sebességgel induló geodetikus.

A Jacobi-mezőkre vonatkozó tételünk szerint ekkor bármely nem nulla $\mathbf{v} \in T_P\mathcal{M}^n$ vektorhoz létezik pontosan egy olyan $\mathbf{J}$ Jacobi-mező a $G_{P,\mathbf{u}}$ geodetikus mentén, melyre $\mathbf{J}(P) = \mathbf{0}$ és $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{J} = \mathbf{v}$.

Figyeljük meg, hogy $\nabla_{\mathbf{u}}|\mathbf{J}|^2 = 2g_P\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = 0$ és

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{G}_{P,\mathbf{u}}} \nabla_{\dot{G}_{P,\mathbf{u}}} |\mathbf{J}|^2 &= 2\nabla_{\dot{G}_{P,\mathbf{u}}} g_{\dot{G}_{P,\mathbf{u}}} \langle \mathbf{J}, \nabla_{\dot{G}_{P,\mathbf{u}}} \mathbf{J} \rangle \\ &= 2g_{\dot{G}_{P,\mathbf{u}}} \langle \nabla_{\dot{G}_{P,\mathbf{u}}} \mathbf{J}, \nabla_{\dot{G}_{P,\mathbf{u}}} \mathbf{J} \rangle + 2g_{\dot{G}_{P,\mathbf{u}}} \langle \mathbf{J}, \nabla_{\dot{G}_{P,\mathbf{u}}} \nabla_{\dot{G}_{P,\mathbf{u}}} \mathbf{J} \rangle \\ &= 2|\nabla_{\dot{G}_{P,\mathbf{u}}} \mathbf{J}|^2 + 2g_{\dot{G}_{P,\mathbf{u}}} \langle \mathbf{J}, R(\dot{G}_{P,\mathbf{u}}, \mathbf{J})\dot{G}_{P,\mathbf{u}} \rangle \end{aligned}$$

nem negatív, hiszen a metszetgörbület nem pozitív. Tehát $|\mathbf{J}|^2$ egy (nem feltétlenül szigorúan) konvex függvény, így $|\mathbf{J}|^2$ konstans 0 vagy szigorúan monoton növekszik a pozitív valós számokon. Konstans 0 persze nem lehet, hiszen $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{J} = \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, tehát $|\mathbf{J}|$ szigorúan monoton növekvő a pozitív valós számokon (és szigorúan monoton fogyó a negatív valós számokon).

A Gauss-lemma bizonyításában szereplő (GLJ) formulából tudjuk, hogy $\exp_{P*}|_{T_{su}T_P\mathcal{M}}(s\mathbf{v}) = \mathbf{J}(G_{P,\mathbf{u}}(s))$, aminek a hossza pozitív, így nem tűnhet el, ami azt igazolja, hogy $\exp_{P*}$ injektív, tehát izomorfizmus az azonos dimenziójú terek között.

Definiáljuk a $\tilde{g}_{su}: T_{su}T_P\mathcal{M} \times T_{su}T_P\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés értékét minden $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{su}T_P\mathcal{M}$ vektorra azzal, hogy $\tilde{g}_{su}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := g_{G_{P,\mathbf{u}}(s)}\langle \exp_{P*}\mathbf{v}, \exp_{P*}\mathbf{w} \rangle$. Ekkor a $T_P\mathcal{M}$ minden pontjában a $\tilde{g}$ egy szimmetrikus bilineáris forma, ami ráadásul pozitív definit, hiszen $\exp_{P*}$ nem elfajuló lineáris leképezés. Eszerint az $\exp_P: (T_P\mathcal{M}, \tilde{g}) \rightarrow (\mathcal{M}, g)$ egy lokális izometria a $(T_P\mathcal{M}, \tilde{g})$ és $(\mathcal{M}, g)$ Riemann-sokaságok között.

Mivel $\exp_P$ lokális izometria, egy $\tilde{G}$ görbe a $(T_P\mathcal{M}, \tilde{g})$ Riemann-sokaságban pontosan akkor geodetikus, ha a $G = \exp_P(\tilde{G})$ görbe egy geodetikus az $(\mathcal{M}, g)$ Riemann-sokaságban. Eszerint a $T_P\mathcal{M}$ nullelemén átmenő minden egyenes geodetikus, és ezek kiterjednek a teljes valós számegyenesre, így a Hopf–Rinow-tétel szerint a $(T_P\mathcal{M}, \tilde{g})$ Riemann-sokaság teljes.

Mivel $\mathcal{M}$ összefüggő, a Hopf–Rinow-tétel szerint bármely két pontot összeköt egy minimális geodetikus, tehát $\exp_P$ szürjektív. Ha $Q := \exp_P(\mathbf{u}) = \exp_P(\mathbf{v})$, akkor a

$$p: [0, 1] \ni t \mapsto \begin{cases} (1 - 2t)\mathbf{u} & \text{ha } t \in [0, 0.5], \\ (2t - 1)\mathbf{v} & \text{ha } t \in [0.5, 1], \end{cases} \in T_P\mathcal{M}$$

út $\exp_P$ melletti képe az $(\mathcal{M}, g)$ egyszeresen összefüggő sokaságban homotóp a konstans $q: [0, 1] \ni t \mapsto Q$ úttal, így $\exp_P$ folytonossága miatt p is homotóp egy konstans úttal, ami csak $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ esetén lehetséges, tehát $\exp_P$ injektív.

Eszerint $\exp_P$ egy folytonos és bijektív lokális izometria, amiből következik, hogy folytonos és bijektív lokális diffeomorfizmus, tehát diffeomorfizmus. ■

4.5. Konstans görbületű terek

Konstans görbületűnek mondunk egy Riemann-sokaságokat, ha a metszetgörbület konstans skalármező.

Tétel. *Ha egy konstans görbületű Riemann-sokaság összefüggő, egyszeresen összefüggő és teljes is, akkor szimmetrikus, homogén és két-pont-homogén is.*

Bizonyítás. Előző eredményünk szerint a konstans görbületű sokaságok lokálisan szimmetrikusak. Az egyszeresen összefüggőség és teljesség ebből implicálja, hogy a tér szimmetrikus, amiből az összefüggőséggel következik a homogenitás, az izometriák vizsgálatánál bizonyított tételeink szerint. A két-pont-homogenitást nem bizonyítjuk, de lokálisan a következő tételből adódik. ■

Tétel. *Ha két azonos dimenziójú konstans görbületű tér görbülete megegyezik, akkor lokálisan izometrikusak.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathcal{M}, g)$ és $(\bar{\mathcal{M}}, \bar{g})$ két κ görbületű, azonos dimenziójú sokaság. Legyen $P \in \mathcal{M}$ és $\bar{P} \in \bar{\mathcal{M}}$, továbbá legyen $\varphi: T_P \mathcal{M} \rightarrow T_{\bar{P}} \bar{\mathcal{M}}$ egy izometria.

Először belátjuk, hogy konstans görbületű téren az $\exp$ leképezés lokális homotécia, vagyis létezik olyan $\bar{f}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ végtelenszer differenciálható valós függvény, melyre $f(s) \exp_{P*}|_{T_{sv} T_P \mathcal{M}}$ lokális izometria bármely $v \in T_P \mathcal{M}$ egységvektor esetén.

Legyenek a $v, w \in T_P \mathcal{M}$ egységvektorok merőlegesek egymásra, $G(s) = \exp(sv)$, és W párhuzamos vektormező G mentén, melyre $W(0) = w$. A Gauss-lemma bizonyításában szereplő (GLJ) formulából tudjuk, hogy ekkor $J(G(s)) = \exp_{P*}|_{T_{sv} T_P \mathcal{M}}(sw)$.

Célunk a J Jacobi-mező kiszámítása végig a G mentén. Legyen $\{E_i\}_{i=2, \dots, n}$ párhuzamos, ortonormált bázisvektor-mező G mentén úgy, hogy mind merőleges a $\dot{G}$ érintőre, és $E_2 = W$. Ekkor valamely alkalmas f és f_i skalármezőkre $J = fW + \sum_{i=3}^n f_i E_i$, amiből a Jacobi-egyenlet szerint — kihasználva a Schur-lemma előtti lemma formuláját — az $f''(s) + \kappa f(s) = 0$ és $f_i''(s) + \kappa f_i(s) = 0$ differenciálegyenletek, $f'(0) = 1$, $f_i'(0) = 0$, $f(0) = 0$, és $f_i(0) = 0$ adódik, ahol κ az $\mathcal{M}$ tér konstans görbülete. Tehát $J(s) = f(s)W(s)$, ahol

$$f(s) = \begin{cases} \sinh(s\sqrt{-\kappa}), & \text{ha } \kappa < 0, \\ s, & \text{ha } \kappa = 0, \\ \sin(s\sqrt{\kappa}), & \text{ha } \kappa > 0. \end{cases}$$

Ez azt jelenti, hogy $\exp_{P*}|_{T_{sv} T_P \mathcal{M}}(sw) = f(s)W(G(s))$, vagyis $\bar{f}(s) = s/f(s)$ bizonyítja, hogy az $\exp$ leképezés lokális homotécia.

Ekkor a $\phi = \exp_{\bar{P}} \circ \varphi \circ \exp_P^{-1}$ leképezés, ahol $\exp_P^{-1}$ az exponenciális leképezés inverzére utal, lokális izometria, hiszen indukált $\exp_{\bar{P}*} \varphi_* \exp_P^{-1}$ leképezése minden pontban két egymásnak reciprokális homotécia, és egy izometria szorzata. Ezzel a bizonyítást befejeztük. ■

Lényegében azt bizonyítottuk, hogy két azonos görbületű és dimenziójú tér érintőtereit közti izometria a terek közti lokális izometriává terjeszthető ki.

Riemann-tétel. *Az $(\mathcal{M}, g)$ Riemann-sokaság akkor és csak akkor konstans κ metszetgörbületű, ha minden P pontjának létezik olyan r koordináta-környezet paraméterezése, melyben*

$$g_{r(x_1, \dots, x_n)} \langle \partial_i, \partial_j \rangle = \delta_{i,j} \left(1 + \frac{\kappa}{4} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{-2}.$$

Bizonyítás. Előbbi tételünk alapján elegendő látni, hogy a megadott metrikával a tér valóban κ metszetgörbületű.

Legyen $\sigma = 1 + \frac{\kappa}{4} \sum_{i=1}^n x_i^2$, vagyis $g_{i,j} = \delta_{i,j} \sigma^{-2}$, és $g^{k,l} = \delta_{k,l} \sigma^2$. A kovariáns deriválás bevezetésénél kiszámoltuk annak Christoffel-szimbólumait a Riemann-metrika $g_{i,j}$ és inverzének $g^{k,l}$ elemeiből, ami alapján $\Gamma_{i,j}^l = -(\delta_{i,j} \partial_i \sigma + \delta_{i,l} \partial_j \sigma) / \sigma$, és $\Gamma_{i,i}^l = (1 - 2\delta_{i,l}) \partial_l \sigma / \sigma$.

Figyeljük meg, hogy az adott metrikában a ∂_i vektorok ortogonális bázist alkotnak, ezért a $\mathbf{V}_i = \sigma \partial_i$ vektorok adják a $\kappa_P(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j) = -g_P \langle R(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j) \mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j \rangle$ metszetgörbületet. Erről kell igazolnunk, hogy konstans.

$$\begin{aligned} \kappa_P(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j) &= -\sigma^4 g_P \langle R(\partial_i, \partial_j) \partial_i, \partial_j \rangle = -\sigma^4 g_P \langle \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_i - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} \partial_i, \partial_j \rangle \\ &= -\sigma^4 (\partial_i g_P \langle \nabla_{\partial_j} \partial_i, \partial_j \rangle - g_P \langle \nabla_{\partial_j} \partial_i, \nabla_{\partial_i} \partial_j \rangle - \partial_j g_P \langle \nabla_{\partial_i} \partial_i, \partial_j \rangle + \\ &\quad + g_P \langle \nabla_{\partial_i} \partial_i, \nabla_{\partial_j} \partial_j \rangle) \\ &= -\sigma^4 \left(\partial_i (\Gamma_{j,i}^j \sigma^{-2}) - \sum_{k=1}^n (\Gamma_{j,i}^k)^2 \sigma^{-2} - \partial_j (\Gamma_{i,i}^j \sigma^{-2}) + \sum_{k=1}^n \Gamma_{i,i}^k \Gamma_{j,j}^k \sigma^{-2} \right) \\ &= -\sigma^4 \left(-\partial_i (\partial_i \sigma \sigma^{-3}) - ((\partial_i \sigma)^2 + (\partial_j \sigma)^2) \sigma^{-4} - \partial_j (\partial_j \sigma \sigma^{-3}) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^n (\partial_k \sigma)^2 \sigma^{-4} - 2((\partial_i \sigma)^2 + (\partial_j \sigma)^2) \sigma^{-4} \right) \\ &= -\sigma^4 \left(-\frac{\partial_i^2 \sigma}{\sigma^3} + 3 \frac{(\partial_i \sigma)^2}{\sigma^4} - \frac{(\partial_i \sigma)^2 + (\partial_j \sigma)^2}{\sigma^4} - \frac{\partial_j^2 \sigma}{\sigma^3} + 3 \frac{(\partial_j \sigma)^2}{\sigma^4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sigma^4} \sum_{k=1}^n (\partial_k \sigma)^2 - 2 \frac{(\partial_i \sigma)^2 + (\partial_j \sigma)^2}{\sigma^4} \right). \end{aligned}$$

Figyelembe véve, hogy $\partial_i^2 \sigma = \kappa/2$ és $\partial_i \sigma = \kappa x_i/2$,

$$\kappa_P(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j) = -\sigma^4 \left(-\frac{\kappa}{\sigma^3} + \frac{1}{\sigma^4} \sum_{k=1}^n \frac{\kappa^2 x_k^2}{4} \right) = \kappa\sigma - \frac{\kappa^2}{4} \sum_{k=1}^n x_k^2 = \kappa,$$

ami igazolja az állítást. ■

Lemma. Legyen κ az $(\mathcal{M}, g)$ Riemann-sokaság konstans görbülete, $\lambda > 0$, és $\bar{g} = \lambda g$. Ekkor az $(\mathcal{M}, \bar{g})$ Riemann-sokaság konstans κ/λ görbületű.

Bizonyítás. Legyen ∇ az $(\mathcal{M}, g)$ és $\bar{\nabla}$ az $(\mathcal{M}, \bar{g})$ kovariáns deriválása. A Levi-Civita-tétel miatt a

$$\begin{aligned} \lambda g\langle \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle + \lambda g\langle \mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Z} \rangle &= \lambda \mathbf{X}(g\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle) \\ &= \lambda \mathbf{X}(\bar{g}\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle) = \bar{g}\langle \bar{\nabla}_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle + \bar{g}\langle \mathbf{Y}, \bar{\nabla}_{\mathbf{X}} \mathbf{Z} \rangle \\ &= \lambda g\langle \bar{\nabla}_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle + \lambda g\langle \mathbf{Y}, \bar{\nabla}_{\mathbf{X}} \mathbf{Z} \rangle \end{aligned}$$

levezetésből $\bar{\nabla} = \nabla$, és abból $\bar{R} = R$ következik. Utóbbi miatt

$$\bar{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = \kappa(g\langle \mathbf{Z}, \mathbf{Y} \rangle \mathbf{X} - g\langle \mathbf{X}, \mathbf{Z} \rangle \mathbf{Y}) = \frac{\kappa}{\lambda}(\bar{g}\langle \mathbf{Z}, \mathbf{Y} \rangle \mathbf{X} - \bar{g}\langle \mathbf{X}, \mathbf{Z} \rangle \mathbf{Y}),$$

vagyis $(\mathcal{M}, \bar{g})$ konstans κ/λ görbületű. ■

Az eredmény lényegében azt mondja, hogy a konstans görbületű Riemann-sokaság geometriáját nem annyira maga a metszetgörbület, mint inkább annak előjele határozza meg.

Definíció. Egy konstans görbületű teret

- ha $\kappa > 0$, akkor *elliptikusnak*,
- ha $\kappa = 0$, akkor *euklideszinek* és
- ha $\kappa < 0$, akkor *hiperbolikusnak*

nevezünk.

Mielőtt bemutatnánk minden konstans görbületű térre egy modellt, megmutatjuk, hogy a negatív görbületű esetekben nem számíthatunk alacsony dimenziós izometrikus beágyazásra, ha minden jó tulajdonságot fenn kívánunk tartani.

Hilbert-tétel. *Egyszeresen összefüggő, teljes hiperbolikus sík metrikusan nem ágyazható be euklideszi térbe felületként.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a beágyazás mégis sikerült, és az így nyert $\kappa \equiv -1$ görbületű, teljes és összefüggő $\mathcal{F}$ felület aszimptotikus $r_P: T \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméterezése a felület minden P pontjában ívhossz szerinti paraméterű.

Rögzítsünk egy O pontot, mint origót. Legyen $\ell^* \in (0, \infty)$ az r_O aszimptotikus koordinátakörnyezetben lévő $r_O(-\ell, -\ell)$, $r_O(-\ell, +\ell)$, $r_O(+\ell, +\ell)$ és $r_O(+\ell, -\ell)$ pontok által meghatározott $\mathcal{N}_{O,\ell}$ zárt aszimptotikus négyzetek fél oldalhosszának felső határa. Ha létezik ilyen ℓ oldalhosszúságú zárt aszimptotikus négyzet, akkor persze minden $\ell' < \ell$ oldalhosszúságú zárt aszimptotikus négyzet is létezik, ezért minden $\ell < \ell^*$ oldalhosszúságú zárt aszimptotikus négyzet létezik. Legyen $\mathcal{N}$ mindezen zárt négyzetek uniójának lezártja. Ekkor $\mathcal{N}$ zárt, és ugyanakkor korlátos is, ezért az $\mathcal{F}$ teljes felületben kompakt is. Az $\mathcal{N}$ minden P pontjához létezik aszimptotikus r_P koordináta-környezet, és abban egy ℓ_P fél oldalhosszúságú nyílt aszimptotikus $\mathring{\mathcal{N}}_{P,\ell_P}$ négyzet. Ezek a nyílt négyzetek együtt lefedik az $\mathcal{N}$ kompakt halmazt, tehát közülük véges sok $\mathring{\mathcal{N}}_{P_i,\ell_{P_i}}$ négyzet is lefedi azt. Eszerint ugyancsak véges sok négyzet lefedi az $\mathcal{N}$ négyzet $\partial\mathcal{N}$ határát is, ezért létezik a $\partial\mathcal{N}$ határon való túlnyúlás

$$s = \min_i \{ \min \{ f(x_i + \ell_{P_i} - \ell^*), f(-x_i + \ell_{P_i} - \ell^*), f(y_i + \ell_{P_i} - \ell^*), f(-y_i + \ell_{P_i} - \ell^*) \} \}$$

pozitív minimuma, valamint a határközelség

$$p = \min_i \{ \min \{ f(\ell^* - x_i), f(\ell^* + x_i), f(\ell^* - y_i), f(\ell^* + y_i) \} \}$$

pozitív minimuma, ahol $P_i = r_O(x_i, y_i)$ és $f(t) = (t + |t|)/2$. Legyen most ℓ olyan, hogy $0 < \ell^* - \ell < p$. Ekkor az $\mathcal{N}_{O,\ell}$ zárt aszimptotikus négyzet az $\mathcal{N}$ része, és minden $\mathcal{N}_{P_i,\ell_{P_i}}$ négyzet P_i középpontját tartalmazza. Az aszimptotikus görbékre érvényes differenciálegyenlet-rendszer miatt minden r_{P_i} aszimptotikus koordináta-környezet az r_O aszimptotikus koordináta-környezet lokális folytatása, amiért az $\mathcal{N}_{O,\ell} \cup \bigcup_i \mathcal{N}_{P_i,\ell_{P_i}}$ tartalmaz egy $\ell^* + s$ fél oldalhosszúságú aszimptotikus négyzetet az $r_O \cup \bigcup_i r_{P_i}$ aszimptotikus koordinátakörnyezetben.

Eszerint az r_O koordinátakörnyezetben nincs az $\mathcal{N}_{O,\ell}$ zárt aszimptotikus négyzetek fél oldalhosszának felső határa, tehát r_O paraméter-tartománya az egész sík.

Tegyük most fel, hogy valamely $Q \in \mathcal{F}$ pont nincs az r_O értékkészletében. A teljesség miatt létezik egy egyértelmű G geodetikus az O és a Q pont között úgy, hogy $O = G(0)$, és $Q = G(q)$ valamely q valós számra. Legyen $p = \sup \{ x : G(x) \in \text{ran } r_O \}$. Ekkor nyilván $0 < p \leq q$, és minden $x < p$ esetén $G(x)$ benne van az r_O értékkészletében, de a $P = G(p)$ nincs a $\text{ran } r_O$ halmazban. Viszont $\text{ran } r_O$ zárt, így a $P = G(p) = \lim_{x \nearrow p} G(x) \in \text{ran } r_O$ ellentmondás alapján $\text{ran } r_O = \mathcal{F}$ következik.

Ezzel beláttuk, hogy r_O globális koordinátakörnyezet, vagyis diffeomorfizmus az egész sík és az egész $\mathcal{F}$ felület között.

Az aszimptotikus felületi görbék vizsgálatánál láttuk, hogy $\partial_1 \partial_2 \omega = -\kappa \sin \omega$, ahol ω az adott pontban a két paramétervonal $\partial_1 r$ és $\partial_2 r$ érintője között bezárt szög. Mivel $0 < \omega < \pi$, $0 < \partial_1 \partial_2 \omega$, amiért $\partial_2 \omega$ monoton növekvő az első változóban, és minden pont bármely környezetében létezik olyan pont, ahol $\partial_2 \omega \neq 0$. Sőt, mivel

$$\partial_1 \partial_2 \bar{\omega}(x, y) = \partial_1 \partial_2 \omega(-x, -y) = -\kappa \sin \omega(-x, -y) = -\kappa \sin \bar{\omega}(x, y),$$

ahol $\bar{\omega}(x, y) = \omega(-x, -y)$, olyan pont is létezik, ahol $\partial_2 \omega > 0$. Legyen az $O = r(0, 0)$ ilyen pont. Legyen $y_0 > 0$ olyan, hogy $\partial_2 \omega(0, y) > \partial_2 \omega(0, 0) =: \varepsilon$, ha $|y| < y_0$. Mivel $\partial_2 \omega$ monoton növekvő az első változóban, minden $x > 0$ és $|y| < y_0$ esetén $\partial_2 \omega(x, y) > 0$, tehát ω monoton növekvő a második változóban, az $x > 0$ és $|y| < y_0$ tartományon.

Ennek következtében egyrészt

$$\omega(x, y_0) - \omega(x, y) = \int_y^{y_0} \partial_2 \omega(x, t) dt > \int_y^{y_0} \partial_2 \omega(0, t) dt = \omega(0, y_0) - \omega(0, y) > (y_0 - y)\varepsilon,$$

másrészt ugyanígy $\omega(x, y) - \omega(x, 0) > (y_0 - y)\varepsilon$ is érvényes. Ezek szerint $y\varepsilon < \omega(x, y) < \pi - (y_0 - y)\varepsilon$ az $x > 0$ és $|y| < y_0$ tartományon. Ezen a tartományon tehát $\sin \omega(x, y) > \min(\sin(y\varepsilon), \sin((y_0 - y)\varepsilon))$. Legyen $\mathcal{D} = \{r(x, y) : 0 < x < x_0, 0 < y < y_0\}$. Ekkor

$$\begin{aligned} F(\mathcal{D}) &= \int_{\substack{0 < x < x_0 \\ 0 < y < y_0}} \sin \omega(x, y) dx dy \\ &\geq x_0 \int_0^{y_0} \min(\sin(y\varepsilon), \sin((y_0 - y)\varepsilon)) dy \\ &= x_0 \left(\int_0^{y_0/2} \sin(y\varepsilon) dy + \int_{y_0/2}^{y_0} \sin((y_0 - y)\varepsilon) dy \right) = 2x_0 \int_0^{y_0/2} \sin(y\varepsilon) dy \\ &= 2x_0(1 + \cos(\varepsilon y_0/2))/\varepsilon. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy a $\mathcal{D}$ aszimptotikus négyzet felszíne tetszőlegesen nagy lehet, ha x_0 értéke elegendően nagy. Ez ellentmond annak, amit az aszimptotikus felületi görbék vizsgálatánál láttunk, miszerint egy aszimptotikus négyzet felszíne nem lehet nagyobb, mint 2π .

Tehát az izometrikus beágyazás lehetetlen, ami igazolja a tételt. ■

Fontos tudni, hogy a 2-dimenziós Bolyai-geometria pontosan az egyszerűen összefüggő teljes hiperbolikus sík, ami ezek szerint izometrikus felületként nem valósítható meg az euklidészi térben.

Most bemutatjuk az úgynevezett kvadratikus konstans görbületű modelleket. Bár ezek sem izometrikus beágyazások az euklideszi térbe, azért legalább topológikusak, és viszonylag alacsony dimenziósak.

Tétel. Legyen $\kappa \neq 0$, és

$$B_\kappa(x, y) = \kappa \sum_{i=1}^n x_i y_i + |\kappa| x_{n+1} y_{n+1}$$

bilineáris funkcionál az $\mathbb{R}^{n+1}$ tér $x_{n+1} \geq 0$ felére megszorítva. Legyen az $\mathcal{M}_\kappa$ differenciálható sokaság a $B(x, x) = 1$ megoldáshalmaza az örökölt euklideszi topológiával és a

$$g^\kappa \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \sum_{k=1}^n \mathbf{X}_k \mathbf{Y}_k + \text{sign } \kappa \mathbf{X}_{n+1} \mathbf{Y}_{n+1}$$

Riemann-metrikával (lásd (1)), ahol az $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_P \mathcal{M}_\kappa$ érintő vektorokat az $\mathbb{R}^{n+1}$ térben $(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{n+1})$ és $(\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{n+1})$ kanonikusan interpretálja. Ekkor

- (1) g^κ pozitív definit minden érintőtéren,
- (2) $\mathcal{M}_\kappa$ összefüggő és teljes,
- (3) $\mathcal{M}_\kappa$ geodetikusait az origón átmenő kétdimenziós alterek metszik ki,
- (4) $\mathcal{M}_\kappa$ konstans κ görbületű,
- (5) ha $\kappa > 0$, akkor $\mathcal{M}_\kappa$ izometriacsoportja az $O(n+1)$, mely tranzitíven hat,
- (6) ha $\kappa < 0$, akkor $\mathcal{M}_\kappa$ izometriacsoportja az $O(n, 1)$, mely tranzitíven hat,
- (7) $\mathcal{M}_\kappa$ két-pont-homogén és
- (8) ha $\kappa < 0$, akkor $\mathcal{M}_\kappa$ a Bolyai-geometria egy modellje.

Mivel a teljes bizonyítás összesen mintegy hat oldal, az egyes pontokat — kivéve a nyilvánvaló (2) állítást — külön-külön bizonyítjuk.

(1) bizonyítása. Bár a $\kappa > 0$ esetben (1) nyilvánvaló, azért $\kappa < 0$ esetre bizonyítanunk kell. Általában $\mathcal{M}_\kappa$ paraméterezhető az $\mathbb{R}^{n+1}$ tér $x_{n+1} = 0$ alterén úgy, hogy az $r: \mathcal{T}(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{M}_\kappa \subset \mathbb{R}^{n+1}$ paraméterezésre

$$|\kappa| r_{n+1}^2(x_1, \dots, x_n) + \kappa \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \quad \text{és} \quad r_k(x_1, \dots, x_n) = x_k, \quad (k = 1, \dots, n),$$

és $\mathcal{T}$ az egységgömb, ha $\kappa > 0$, illetve az egész $\mathbb{R}^n$ alter, ha $\kappa < 0$. Ekkor

$$\partial_i r_k(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \delta_{i,k}, & \text{ha } k < n+1, \\ -\text{sign } \kappa x_i / r_{n+1}(x_1, \dots, x_n), & \text{ha } k = n+1. \end{cases}$$

Az x_{n+1} -tengelyre vonatkozó forgásinvariancia miatt elég a bizonyítást az $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$ esetben elvégezni. A $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \partial_i r$ érintővektorra

$$\begin{aligned} g^\kappa \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle &= \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j g^\kappa \langle \partial_i r, \partial_j r \rangle = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j \left(\sum_{k=1}^n \delta_{i,k} \delta_{j,k} + \frac{\text{sign } \kappa x_i x_j}{r_{n+1}^2(x_1, \dots, x_n)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + \text{sign } \kappa \lambda_1^2 \cdot \frac{x_1^2}{r_{n+1}^2(x_1, 0, \dots, 0)} = \sum_{i=2}^n \lambda_i^2 + \lambda_1^2 \frac{1/|\kappa|}{r_{n+1}^2(x_1, 0, \dots, 0)}, \end{aligned}$$

ezért $g^\kappa \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ akkor és csak akkor, ha $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. ■

(3) bizonyítás. A $\kappa > 0$ esetben ez az állítás nyilvánvaló, hiszen az $(\mathcal{M}_\kappa, g^\kappa)$ felület éppen az $1/\sqrt{\kappa}$ sugarú gömb. Ezért csak a negatív görbületű esetet vizsgáljuk.

Legyen $\kappa > 0$, $\bar{r}$ az $\mathcal{M}_{-\kappa}$ sokaság előbb már leírt paraméterezése az $x_{n+1} = 0$ altéren, és legyen $\mathcal{M}_0$ az $x_{n+1} = 1/\sqrt{\kappa}$ hipersík az $\mathbb{R}^{n+1}$ térben. Legyen $\varphi: \mathcal{M}_{-\kappa} \rightarrow \mathcal{M}_0$ olyan leképezés, melyre $r = \varphi \circ \bar{r}$ teljesíti, hogy

$$r_i(x) = \bar{r}_i(x) \frac{1/\sqrt{\kappa}}{\sqrt{|x|^2 + 1/\kappa}} = x_i \frac{1}{\sqrt{\kappa|x|^2 + 1}}.$$

Ez tulajdonképpen az $\mathcal{M}_{-\kappa}$ diffeomorf belevetítése az $\mathcal{M}_0$ hipersík felületbe az origón átmenő egyenesekkel.

Jelölje $\bar{\Gamma}_{i,j}^k$ az $(\mathcal{M}_{-\kappa}, g^{-\kappa})$ és $\Gamma_{i,j}^k$ az $(\mathcal{M}_0, g)$ Riemann-sokaság Christoffel-szimbólumát az $\bar{r}$, illetve $r = \varphi \circ \bar{r}$ koordináta-környezetekben, ahol g az $\mathbb{R}^n$ euklideszi belsőszorzása. A továbbiakban legyen $\bar{g} = g^{-\kappa}$.

Most a geodetikus kapcsolatra a sokaságoknál bizonyított

$$(n+1)\bar{\Gamma}_{i,j}^k - \sum_{m=1}^n (\delta_{i,k} \bar{\Gamma}_{m,j}^m + \delta_{j,k} \bar{\Gamma}_{m,i}^m) = (n+1)\Gamma_{i,j}^k \circ \varphi - \sum_{m=1}^n (\delta_{i,k} \Gamma_{m,j}^m \circ \varphi + \delta_{j,k} \Gamma_{m,i}^m \circ \varphi),$$

szükséges és elégséges feltétel alapján igazoljuk, hogy φ geodetikus kapcsolat, ami a (3) állítást azonnal bizonyítja.

Az x_{n+1} -tengely körüli forgás-invariancia miatt elegendő csak az $x_2 = \dots = x_n = 0$ esetben bizonyítanunk.

Az (1) állítás bizonyítása alapján a $\partial_1 \bar{r}, \dots, \partial_n \bar{r}$ bázisban

$$\bar{g}_{i,j}(x_1, \dots, x_n) = \delta_{i,j} - \frac{x_i x_j}{\bar{r}_{n+1}^2(x_1, \dots, x_n)} = \delta_{i,j} - \frac{x_i x_j}{1/\kappa + \sum_{k=1}^n x_k^2},$$

amiért $\bar{g}^{k,l}(x_1, 0, \dots, 0) = \delta_{k,l}(1 + \delta_{1,k} \kappa x_1^2)$. Mivel $\partial_j \bar{r}_{n+1} = x_j / \bar{r}_{n+1}$, nyilván

$$\partial_j \bar{g}_{i,l} = -\partial_j \left(\frac{x_i x_l}{\bar{r}_{n+1}^2} \right) = -\delta_{j,i} \frac{x_l}{\bar{r}_{n+1}^2} - \delta_{j,l} \frac{x_i}{\bar{r}_{n+1}^2} + 2 \frac{x_i x_l x_j}{\bar{r}_{n+1}^4},$$

amiből

$$\partial_j \bar{g}_{i,l} + \partial_i \bar{g}_{j,l} - \partial_l \bar{g}_{i,j} = -2\delta_{i,j} \frac{x_l}{\bar{r}_{n+1}^2} + 2 \frac{x_i x_l x_j}{\bar{r}_{n+1}^4}.$$

A Levi-Civita kovariáns deriváláshoz tartozó Christoffel-szimbólumokra korábban igazolt formula alapján

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{i,j}^k(x_1, 0, \dots, 0) &= \frac{1}{2}(1 + \delta_{1,k} \kappa x_1^2)(\partial_j \bar{g}_{i,k} + \partial_i \bar{g}_{j,k} - \partial_k \bar{g}_{i,j}) \\ &= (1 + \delta_{1,k} \kappa x_1^2) \left(-\delta_{i,j} + \frac{x_i x_j}{\bar{r}_{n+1}^2} \right) \frac{x_k}{\bar{r}_{n+1}^2} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{ha } k \neq 1, \\ 0, & \text{ha } i \neq j, \\ -\kappa x_1, & \text{ha } k = 1, i = j \text{ és } i \neq 1, \\ \frac{-\kappa x_1}{1 + \kappa x_1^2}, & \text{ha } k = 1, i = j \text{ és } i = 1, \end{cases} \\ &= -\kappa x_1 \delta_{i,j} \delta_{k,1} \frac{1 + \kappa x_1^2 - \delta_{i,1} \kappa x_1^2}{1 + \kappa x_1^2}, \end{aligned}$$

és így

$$\sum_{m=1}^n (\delta_{i,k} \bar{\Gamma}_{m,j}^m + \delta_{j,k} \bar{\Gamma}_{m,i}^m) = (\delta_{i,k} \delta_{j,1} + \delta_{j,k} \delta_{i,1}) \frac{-\kappa x_1}{1 + \kappa x_1^2}.$$

Most a $\Gamma_{i,j}^k$ szimbólumokat határozzuk meg. Szükségünk van az

$$\begin{aligned} r_i(x) &= \frac{x_i}{\sqrt{1 + \kappa|x|^2}}, \\ \partial_j r_i(x) &= \frac{\delta_{j,i}}{\sqrt{1 + \kappa|x|^2}} - \frac{\kappa x_i x_j}{\sqrt{1 + \kappa|x|^2}^3}, \\ \partial_k \partial_j r_i(x) &= \frac{-\delta_{j,i} \kappa x_k}{\sqrt{1 + \kappa|x|^2}^3} - \frac{\delta_{k,i} \kappa x_j}{\sqrt{1 + \kappa|x|^2}^3} - \frac{\delta_{k,j} \kappa x_i}{\sqrt{1 + \kappa|x|^2}^3} + \frac{3\kappa^2 x_k x_j x_i}{\sqrt{1 + \kappa|x|^2}^5} \end{aligned}$$

deriváltakra, amiből

$$g_{i,j}(x_1, 0, \dots, 0) = \sum_{l=1}^n \partial_i r_l \partial_j r_l = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j, \\ \frac{1}{1 + \kappa x_1^2}, & \text{ha } i = j \neq 1, \\ \frac{1}{(1 + \kappa x_1^2)^3}, & \text{ha } i = j = 1, \end{cases}$$

valamint

$$g^{k,l}(x_1, 0, \dots, 0) = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \neq l, \\ 1 + \kappa x_1^2, & \text{ha } k = l \neq 1, \\ (1 + \kappa x_1^2)^3, & \text{ha } k = l = 1, \end{cases}$$

$$= \delta_{k,l}(1 + \kappa x_1^2)(1 - \delta_{k,1} + \delta_{k,1}(1 + \kappa x_1^2)^2),$$

következik. A deriváltak az $(x_1, 0, \dots, 0)$ helyen a

$$\begin{aligned}\partial_k r_l &= \delta_{k,l} \frac{1 + \kappa x_1^2 - \delta_{k,1} \kappa x_1^2}{\sqrt{1 + \kappa x_1^2}^3}, \\ \partial_j \partial_i r_l &= \kappa x_1 \frac{3\kappa x_1^2 \delta_{l,1} \delta_{j,1} \delta_{i,1} - (\delta_{j,l} \delta_{i,1} + \delta_{i,l} \delta_{j,1} + \delta_{i,j} \delta_{l,1})(1 + \kappa x_1^2)}{\sqrt{1 + \kappa x_1^2}^5}\end{aligned}$$

értékeket veszik fel, ugyanakkor

$$\begin{aligned}h_{i,j,l} &= \partial_j g_{i,l} + \partial_i g_{j,l} - \partial_l g_{i,j} = \partial_j g \langle \partial_i r, \partial_l r \rangle + \partial_i g \langle \partial_j r, \partial_l r \rangle - \partial_l g \langle \partial_i r, \partial_j r \rangle \\ &= 2g \langle \partial_i \partial_j r, \partial_l r \rangle = 2 \sum_{k=1}^n \partial_j \partial_i r_k \partial_l r_k = 2 \partial_j \partial_i r_l \partial_l r_l \\ &= \frac{2\kappa x_1(1 + \kappa x_1^2 - \delta_{l,1} \kappa x_1^2)}{(1 + \kappa x_1^2)^4} \times \\ &\quad \times (3\kappa x_1^2 \delta_{l,1} \delta_{j,1} \delta_{i,1} - (\delta_{j,l} \delta_{i,1} + \delta_{i,l} \delta_{j,1} + \delta_{i,j} \delta_{l,1})(1 + \kappa x_1^2))\end{aligned}$$

alapján még mindig az $(x_1, 0, \dots, 0)$ helyen

$$\begin{aligned}\Gamma_{i,j}^k &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{k,l} h_{i,j,l} = g^{k,k} h_{i,j,k} \\ &= \frac{(1 + \delta_{k,1}((1 + \kappa x_1^2)^2 - 1))\kappa x_1(1 + \kappa x_1^2 - \delta_{k,1} \kappa x_1^2)}{(1 + \kappa x_1^2)^3} \times \\ &\quad \times (3\kappa x_1^2 \delta_{k,1} \delta_{j,1} \delta_{i,1} - (\delta_{j,k} \delta_{i,1} + \delta_{i,k} \delta_{j,1} + \delta_{i,j} \delta_{k,1})(1 + \kappa x_1^2)) \\ &= \frac{\kappa x_1(1 + \delta_{k,1} \kappa x_1^2)}{(1 + \kappa x_1^2)^2} (3\kappa x_1^2 \delta_{k,1} \delta_{j,1} \delta_{i,1} - (\delta_{j,k} \delta_{i,1} + \delta_{i,k} \delta_{j,1} + \delta_{i,j} \delta_{k,1})(1 + \kappa x_1^2)).\end{aligned}$$

Ebből könnyen adódik, hogy $\sum_{m=1}^n \Gamma_{m,j}^m = \delta_{j,1}(n+2) \frac{-\kappa x_1}{1+\kappa x_1^2}$, amiből

$$\sum_{m=1}^n (\delta_{i,k} \Gamma_{m,j}^m + \delta_{j,k} \Gamma_{m,i}^m) = (\delta_{i,k} \delta_{j,1} + \delta_{j,k} \delta_{i,1})(n+2) \frac{-\kappa x_1}{1 + \kappa x_1^2}.$$

Minden rendelkezésünkre áll, hogy a geodetikus kapcsolattal ekvivalens feltételt bizonyítsuk.

A szummákra kapott formulák alapján már csak azt kell belátnunk, hogy

$$\beta_{i,j}^k = (\bar{\Gamma}_{i,j}^k - \Gamma_{i,j}^k) \frac{1 + \kappa x_1^2}{\kappa x_1} = \delta_{i,k} \delta_{j,1} + \delta_{j,k} \delta_{i,1}$$

az $(x_1, 0, \dots, 0)$ helyen. Ezt az alábbi levezetés igazolja.

$$\begin{aligned}
\beta_{i,j}^k &= -\delta_{i,j}\delta_{k,1}(1 + \kappa x_1^2 - \delta_{i,1}\kappa x_1^2) - \\
&\quad - \frac{1 + \delta_{k,1}\kappa x_1^2}{1 + \kappa x_1^2} (3\kappa x_1^2\delta_{k,1}\delta_{j,1}\delta_{i,1} - (\delta_{j,k}\delta_{i,1} + \delta_{i,k}\delta_{j,1} + \delta_{i,j}\delta_{k,1})(1 + \kappa x_1^2)) \\
&= \frac{(1 + \delta_{k,1}\kappa x_1^2)((\delta_{j,k}\delta_{i,1} + \delta_{i,k}\delta_{j,1} + \delta_{i,j}\delta_{k,1})(1 + \kappa x_1^2) - 3\kappa x_1^2\delta_{k,1}\delta_{j,1}\delta_{i,1})}{1 + \kappa x_1^2} - \\
&\quad - \frac{\delta_{i,j}\delta_{k,1}(1 + \kappa x_1^2)(1 + \kappa x_1^2 - \delta_{i,1}\kappa x_1^2)}{1 + \kappa x_1^2} \\
&= \frac{(1 + \delta_{k,1}\kappa x_1^2)((\delta_{j,k}\delta_{i,1} + \delta_{i,k}\delta_{j,1} + \delta_{i,j}\delta_{k,1})(1 + \kappa x_1^2) - 3\kappa x_1^2\delta_{k,1}\delta_{j,1}\delta_{i,1})}{1 + \kappa x_1^2} - \\
&\quad - \frac{(1 + \kappa x_1^2)(\delta_{i,j}\delta_{k,1}(1 + \kappa x_1^2) - \delta_{j,1}\delta_{k,1}\delta_{i,1}\kappa x_1^2)}{1 + \kappa x_1^2} \\
&= \frac{(1 + \delta_{k,1}\kappa x_1^2)((\delta_{j,k}\delta_{i,1} + \delta_{i,k}\delta_{j,1})(1 + \kappa x_1^2) - 2\kappa x_1^2\delta_{k,1}\delta_{j,1}\delta_{i,1})}{1 + \kappa x_1^2} - \\
&\quad - \frac{(\delta_{k,1} - 1)\kappa x_1^2(\delta_{i,j}\delta_{k,1}(1 + \kappa x_1^2) - \delta_{j,1}\delta_{k,1}\delta_{i,1}\kappa x_1^2)}{1 + \kappa x_1^2} \\
&= \frac{(1 + \delta_{k,1}\kappa x_1^2)((\delta_{j,k}\delta_{i,1} + \delta_{i,k}\delta_{j,1})(1 + \kappa x_1^2) - 2\kappa x_1^2\delta_{k,1}\delta_{j,1}\delta_{i,1})}{1 + \kappa x_1^2} \\
&= \frac{\delta_{k,1}\kappa x_1^2((\delta_{j,k}\delta_{i,1} + \delta_{i,k}\delta_{j,1})(1 + \kappa x_1^2) - 2\kappa x_1^2\delta_{k,1}\delta_{j,1}\delta_{i,1})}{1 + \kappa x_1^2} + \\
&\quad + \delta_{j,k}\delta_{i,1} + \delta_{i,k}\delta_{j,1} - \frac{2\kappa x_1^2\delta_{k,1}\delta_{j,1}\delta_{i,1}}{1 + \kappa x_1^2} \\
&= \frac{\kappa x_1^2(2\delta_{k,1}\delta_{j,1}\delta_{i,1}(1 + \kappa x_1^2) - 2\kappa x_1^2\delta_{k,1}\delta_{j,1}\delta_{i,1}) - 2\kappa x_1^2\delta_{k,1}\delta_{j,1}\delta_{i,1}}{1 + \kappa x_1^2} + \\
&\quad + \delta_{j,k}\delta_{i,1} + \delta_{i,k}\delta_{j,1} \\
&= \delta_{j,k}\delta_{i,1} + \delta_{i,k}\delta_{j,1}.
\end{aligned}$$

Tehát a φ diffeomorfizmus geodetikus kapcsolat.

Mivel az $\mathcal{M}_0$ hipersíkon az egyenesek a geodetikusok, ezzel a (3) állítást teljesen beláttuk. ■

(4) bizonyítása. A (3) állítás szerinti geodetikus kapcsolatból Beltrami tétele azonnal adja, hogy a görbület konstans. Ezért elég csak a $(0, \dots, 0, 1/\sqrt{|\kappa|}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ pontban kiszámítani a görbületet.

A $\kappa > 0$ esetben ezt az izometrikusan beágyazott gömbfelületre könnyű megtenni, hiszen itt Euler tétele szerint a metszetgörbület éppen a két főgörbületi

irányba vett görbék görbületeinek szorzata. Miután mindkét görbe egy főkör, annak a görbülete pedig a sugár reciproka, $\mathcal{M}_\kappa$ görbülete $(\sqrt{|\kappa|})^2 = \kappa$.

Legyen $\kappa < 0$. A már említett pontban minden érintővektor párhuzamos az $x_{n+1} = 0$ síkkal, ezért g^κ megegyezik az érintőtér természetes euklideszi skalárszorzásával, így ∂_i ortonormált bázist alkot ebben a térben. Legyen $\mathcal{M}_\kappa$ konstans görbülete κ_0 . Ekkor

$$-\kappa_0 = \langle R(\partial_1, \partial_2)\partial_1, \partial_2 \rangle = R_{1,2,1}^2 = \partial_1 \bar{\Gamma}_{2,1}^2 - \partial_2 \bar{\Gamma}_{1,1}^2 + \sum_{m=1}^n (\bar{\Gamma}_{2,1}^m \bar{\Gamma}_{1,m}^2 - \bar{\Gamma}_{1,1}^m \bar{\Gamma}_{2,m}^2),$$

ahol felhasználtuk a Riemann-görbület bázisbontására még a sokaságoknál adott formulánkat. A (3) bizonyításában szereplő formula alapján az $(0, \dots, 0, 1/\sqrt{|\kappa|}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ pontban az összes $\bar{\Gamma}_{i,j}^m$ Christoffel-szimbólum nulla, valamint szintén $\partial_1 \bar{\Gamma}_{2,1}^2 = 0$. Ugyanazon formulából egyszerű szimmetria-megfontolással $\bar{\Gamma}_{1,1}^2 = \kappa x_2$ (a hivatkozott formulában $-|\kappa|$ szerepel!) adódik, amiért $-\kappa_0 = -\partial_2 \bar{\Gamma}_{1,1}^2 = -\kappa$. ■

(5) bizonyítása. $O(n+1)$ az origó fixpontú izometriák csoportja, így nyilván invariánsan hagyja az egységgömböt. Ugyanakkor tranzitív is, hiszen a gömb bármely pontja átvihető egy másikba egy megfelelő tengely körüli forgással. ■

(6) bizonyítása. $O(n, 1)$ azon lineáris transzformációk csoportja, melyek invariánsan hagyják az $\sum_{i=1}^n x_i^2 - x_{n+1}^2$ kvadratikus formát. Akkor ezek invariánsan hagyják a $\sum_{i=1}^n x_i^2 - x_{n+1}^2 = -1$ megoldás halmazát is. Ha adott két pont, akkor egy megfelelő x_{n+1} -tengely körüli forgással az egyik pontot elmozgatva elérhető, hogy a két pont összekötő egyenese átmenjen az x_{n+1} -tengelyen. Ezután még egy forgatással elérhető, hogy az egyik paramétere $(x_1, 0, \dots, 0)$, a másiké $(y_1, 0, \dots, 0)$ legyen. Ekkor egy megfelelő ϱ választása mellett a

$$Q = \begin{pmatrix} \cosh \varrho & 0 & \cdots & 0 & \sinh \varrho \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sinh \varrho & 0 & \cdots & 0 & \cosh \varrho \end{pmatrix} \in O(n, 1)$$

transzformáció az egyik pontot a másikba viszi, azaz

$$(x_1, 0, \dots, 0, r_{n+1}(x_1, 0, \dots, 0))Q = (y_1, 0, \dots, 0, r_{n+1}(y_1, 0, \dots, 0)).$$

■

(7) bizonyítása. A két-pont-homogenitást általános konstans görbületű tereken lokálisan bizonyítottuk, ami nyilván esetünkben is érvényes. Az ott leírt bizonyítás esetünkben globális eredményt ad, mert az $f(s)$ függvény jól definiált az egész $\mathcal{M}_\kappa$ felületen. ■

(8) bizonyítása. Egyszerűen ellenőrizni kell a geodetikusra mint hiperbolikus egyenesekre a Bolyai-geometria axiómáit. ■

Ezekből a modellekből könnyű további modelleket nyerni. Tekintsük a $\kappa = -1$ esetet. Ha az $\mathcal{M}_{-1}$ modellt az origóból vetítjük az $x_{n+1} = 1$ hipersíkra, akkor az abban lévő egységsugarú kör belsejében a Cayley–Klein-modellt kapjuk. Ha az $(0, 0, \dots, 0, x_{n+1} = -1)$ a vetítő pont, akkor az $x_{n+1} = 0$ sík egységgömbjében kapjuk a Poincaré-modellt. Míg az előbbi modellben a geodetikuskok egyenesbe képződnek, az utóbbi esetben a geodetikuskok körök lesznek, éppen úgy, ahogy az $\mathcal{M}_1$ geodetikuskok főköreivel történik. Sőt, könnyű megmutatni, hogy ahogy ez a vetítés $\mathcal{M}_1$ köreit is körökbe viszi, ahogy $\mathcal{M}_{-1}$ köreit is a Poincaré-modell köreibé viszi.

Beltrami-tétel. *Ha két Riemann-sokaság között geodetikus kapcsolat van, és az egyik konstans görbületű, akkor a másik tér is konstans görbületű, vagyis a geodetikus kapcsolat örökíti a konstans görbületűséget.*

Bizonyítás. Legyen $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \bar{\mathcal{M}}$ geodetikus kapcsolat, az $\mathcal{M}$ konstans görbületű sokaságról. A sokaságoknál már láttuk, hogy a geodetikus kapcsolat szükséges és elegendő feltétele a $\Delta_{m,i}^k = \delta_{m,k}\psi_i + \delta_{i,k}\psi_m$ egyenlőség, ahol $\Delta_{i,j}^k = \bar{\Gamma}_{i,j}^k \circ \varphi - \Gamma_{i,j}^k$, és $\psi_i = (\sum_{j=1}^n \Delta_{i,j}^j)/(n+1)$. Ezt a

$$\bar{\Gamma}_{m,i}^k \circ \varphi = \Gamma_{m,i}^k + \delta_{m,k}\psi_i + \delta_{i,k}\psi_m \quad (4.5.1)$$

alakban fogjuk sokszor használni.

A kovariáns deriválásra bizonyított $\sum_{i=1}^n \Gamma_{i,j}^i = \partial_j \log \sqrt{|\det g|}$ összefüggés alapján azt kapjuk, hogy

$$2(n+1)\psi_j = \partial_j \log \frac{|\det \bar{g}|}{|\det g|}.$$

A $2(n+1)\psi = \log \frac{|\det \bar{g}|}{|\det g|}$ jelöléssel $\psi_j = \partial_j \psi$ adódik, amiért $\partial_i \psi_j = \partial_j \psi_i$.

Célunk a Riemann-görbület kiszámítása a ∂_i báziselemekre. Ehhez kiszámítjuk a második kovariáns deriváltakat:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\partial_i} \bar{\nabla}_{\partial_j} \partial_k &= \bar{\nabla}_{\partial_i} \left(\sum_l (\bar{\Gamma}_{j,k}^l \circ \varphi) \partial_l \right) = \sum_l \left(\partial_i (\bar{\Gamma}_{j,k}^l \circ \varphi) \partial_l + (\bar{\Gamma}_{j,k}^l \circ \varphi) \sum_m (\bar{\Gamma}_{i,l}^m \circ \varphi) \partial_m \right) \\ &= \sum_l \left(\partial_i (\Gamma_{j,k}^l + \delta_{j,l} \psi_k + \delta_{k,l} \psi_j) \partial_l + \right. \\ &\quad \left. + (\Gamma_{j,k}^l + \delta_{j,l} \psi_k + \delta_{k,l} \psi_j) \sum_m (\Gamma_{i,l}^m + \delta_{i,m} \psi_l + \delta_{l,m} \psi_i) \partial_m \right) \\ &= \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_k + \partial_i \psi_k \partial_j + \partial_i \psi_j \partial_k + \psi_k \nabla_{\partial_i} \partial_j + \psi_j \nabla_{\partial_i} \partial_k + \\ &\quad + \psi_k \psi_j \partial_i + \psi_k \psi_i \partial_j + \psi_j \psi_k \partial_i + \psi_j \psi_i \partial_k.\end{aligned}$$

Ezeket kivonva egymásból és figyelembe véve az indexbeli szimmetriákat, valamint, hogy $R(\partial_i, \partial_j) \partial_k = \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_k - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} \partial_k$, az adódik, hogy

$$\bar{R}(\partial_i, \partial_j) \partial_k = R(\partial_i, \partial_j) \partial_k + (\partial_i \partial_k \psi - \partial_i \psi \partial_k) \partial_j - (\partial_j \partial_k \psi - \partial_j \psi \partial_k) \partial_i.$$

Tegyük most fel, hogy $\mathcal{M}$ konstans görbületű, azaz

$$R(\partial_i, \partial_j) \partial_k = \kappa (g(\partial_j, \partial_k) \partial_i - g(\partial_i, \partial_k) \partial_j).$$

Ezt az előbbibe helyettesítve, és élve az $A_{j,k} = \kappa g(\partial_j, \partial_k) - \partial_j \partial_k \psi + \partial_j \psi \partial_k$ jelöléssel, adódik, hogy

$$\bar{g}(\bar{R}(\partial_i, \partial_j) \partial_k, \partial_l) = A_{j,k} \bar{g}_{i,l} - A_{i,k} \bar{g}_{j,l}$$

Baloldalon Bianchi azonosságát a k és l index cseréjére alkalmazva

$$0 = A_{j,k} \bar{g}_{i,l} - A_{i,k} \bar{g}_{j,l} + A_{j,l} \bar{g}_{i,k} - A_{i,l} \bar{g}_{j,k}$$

adódik. Szorozzuk ezt meg a $\bar{g}^{i,l}$ inverzelemmel, és összegezzünk i és l szerint. Az eredmény $0 = A_{j,k} n - \sum_i A_{i,k} \delta_{i,j} + \sum_l A_{j,l} \delta_{l,k} - \sum_{i,l} A_{i,l} \bar{g}_{j,k} \bar{g}^{i,l}$, amiből $A_{j,k} = \varrho \bar{g}_{j,k}$ következik, ahol $\varrho = (\sum_{i,l} A_{i,l} \bar{g}^{i,l})/n$ egy skalármező. Visszahelyettesítve ezt az egygel fentebbi formulánkba, azt látjuk, hogy

$$\bar{g}(\bar{R}(\partial_i, \partial_j) \partial_k, \partial_l) = \varrho (\bar{g}_{j,k} \bar{g}_{i,l} - \bar{g}_{i,k} \bar{g}_{j,l}) = \bar{g} \langle \varrho (\bar{g}(\partial_j, \partial_k) \partial_i - \bar{g}(\partial_i, \partial_k) \partial_j), \partial_l \rangle,$$

aminek minden l index melletti teljesüléséből

$$\bar{R}(\partial_i, \partial_j) \partial_k = \varrho (\bar{g}(\partial_j, \partial_k) \partial_i - \bar{g}(\partial_i, \partial_k) \partial_j)$$

következik. Ez a Schur-lemma szerint azt jelenti, hogy ϱ konstans ha $n \geq 3$. Ez bizonyítja a tételt $n \geq 3$ esetén és megadja, hogy ϱ az $\bar{\mathcal{M}}$ görbülete.

Legyen most $n = 2$. Első lépésben csak azt igazoljuk, hogy az euklidészi síkkal geodetikus kapcsolatban lévő terek konstans görbületűek.

Euklidészi síkon a Christoffel-szimbólumok eltűnnek, vagyis $\bar{\Gamma}_{m,i}^k \circ \varphi \equiv 0$, tehát (4.5.1) szerint $\Gamma_{m,i}^k = -\delta_{m,k}\psi_i - \delta_{i,k}\psi_m$. Eszerint

$$\begin{aligned}\Gamma_{1,1}^2 &= 0, & \Gamma_{2,2}^1 &= 0, \\ \Gamma_{1,1}^1 &= -2\psi_1 = 2\Gamma_{1,2}^2, & \Gamma_{2,2}^2 &= -2\psi_2 = 2\Gamma_{2,1}^1\end{aligned}\quad (4.5.2)$$

A Christoffel-szimbólumok deriváltjainak meghatározásához vegyük észre, hogy (4.4.1) szerint

$$\begin{aligned}\sum_h R_{i,j,k}^h g_{h,m} &= \sum_h g\langle R_{i,j,k}^h \partial_h, \partial_m \rangle = g\langle R(\partial_i, \partial_j) \partial_k, \partial_m \rangle \\ &= \kappa(g\langle \partial_k, \partial_j \rangle g\langle \partial_i, \partial_m \rangle - g\langle \partial_i, \partial_k \rangle g\langle \partial_j, \partial_m \rangle) \\ &= \kappa(g_{k,j}g_{i,m} - g_{i,k}g_{j,m}),\end{aligned}$$

amiért $R_{i,j,k}^l = \sum_m \sum_h R_{i,j,k}^h g_{h,m} g^{m,l} = \kappa(g_{k,j}\delta_{i,l} - g_{i,k}\delta_{j,l})$. Ebből (3.4.1) szerint

$$\partial_i \Gamma_{j,k}^l - \partial_j \Gamma_{i,k}^l + \sum_{m=1}^n (\Gamma_{j,k}^m \Gamma_{i,m}^l - \Gamma_{i,k}^m \Gamma_{j,m}^l) = \kappa(g_{k,j}\delta_{i,l} - g_{i,k}\delta_{j,l})$$

következik. Ez $j = k = 1$ és $i = l = 2$ esetén

$$\partial_2 \Gamma_{1,1}^2 - \partial_1 \Gamma_{2,1}^2 + (\Gamma_{1,1}^1 \Gamma_{2,1}^2 - \Gamma_{2,1}^1 \Gamma_{1,1}^2) + (\Gamma_{1,1}^2 \Gamma_{2,2}^2 - \Gamma_{2,1}^2 \Gamma_{1,2}^2) = \kappa g_{1,1},$$

amiből (4.5.2) alapján $\kappa g_{1,1} = (\Gamma_{1,2}^2)^2 - \partial_1 \Gamma_{2,1}^2$ következik. A $j = k = 2$ és $i = l = 1$ esetén $\partial_1 \Gamma_{2,2}^1 - \partial_2 \Gamma_{1,2}^1 + (\Gamma_{2,2}^1 \Gamma_{1,1}^1 - \Gamma_{1,2}^1 \Gamma_{2,1}^1) + (\Gamma_{2,2}^2 \Gamma_{1,2}^1 - \Gamma_{1,2}^2 \Gamma_{2,2}^1) = \kappa g_{2,2}$ adódik, amiből (4.5.2) alapján $\kappa g_{2,2} = (\Gamma_{1,2}^1)^2 - \partial_2 \Gamma_{1,2}^1$ következik.

Az $i = k = l = 1$ és $j = 2$ választás esetén

$$\partial_1 \Gamma_{2,1}^1 - \partial_2 \Gamma_{1,1}^1 + (\Gamma_{2,1}^1 \Gamma_{1,1}^1 - \Gamma_{1,1}^1 \Gamma_{2,1}^1) + (\Gamma_{2,1}^2 \Gamma_{1,2}^1 - \Gamma_{1,1}^2 \Gamma_{2,2}^1) = \kappa g_{1,2}$$

adódik, amiből (4.5.2) alapján $\kappa g_{1,2} = \Gamma_{2,1}^2 \Gamma_{1,2}^1 + \partial_1 \Gamma_{2,1}^1 - 2\partial_2 \Gamma_{1,2}^2$ következik. Figyeljük meg, hogy (4.5.1) és az utána következő számítások szerint

$$\partial_1 \Gamma_{2,1}^1 = \partial_1(\psi_2) = \partial_1 \partial_2 \psi = \partial_2 \partial_1 \psi = \partial_2(\psi_1) = \partial_2 \Gamma_{1,2}^2,$$

vagyis $\kappa g_{1,2} = \Gamma_{2,1}^2 \Gamma_{1,2}^1 - \partial_2 \Gamma_{1,2}^2$.

Ezeket és a (2.5.1) egyenletet felhasználva

$$2g_{1,2}\Gamma_{1,2}^2 = g_{1,2}\Gamma_{1,1}^1 + g_{2,2}\Gamma_{1,1}^2 = \frac{1}{2}(\partial_1 g_{1,2} + \partial_1 g_{1,2} - \partial_2 g_{1,1}) = \partial_1 g_{1,2} - \frac{1}{2}\partial_2 g_{1,1}.$$

Újra a (2.5.1) egyenlet adja, hogy

$$g_{1,1}\Gamma_{1,2}^1 + g_{1,2}\Gamma_{1,2}^2 = \frac{1}{2}(\partial_2 g_{1,1} + \partial_1 g_{2,1} - \partial_1 g_{1,2}) = \frac{1}{2}\partial_2 g_{1,1}.$$

Ebből kivonva az előzőt azt kapjuk, hogy $g_{1,1}\Gamma_{1,2}^1 - g_{1,2}\Gamma_{1,2}^2 = \partial_2 g_{1,1} - \partial_1 g_{1,2}$. Eszerint

$$\begin{aligned} & \kappa(\partial_2 g_{1,1} - \partial_1 g_{1,2}) \\ &= \kappa g_{1,1}\Gamma_{1,2}^1 - \kappa g_{1,2}\Gamma_{1,2}^2 = ((\Gamma_{1,2}^2)^2 - \partial_1 \Gamma_{2,1}^2)\Gamma_{1,2}^1 - (\Gamma_{2,1}^2\Gamma_{1,2}^1 - \partial_2 \Gamma_{1,2}^2)\Gamma_{1,2}^2 \\ &= -\partial_1 \Gamma_{2,1}^2\Gamma_{1,2}^1 + \partial_2 \Gamma_{1,2}^2\Gamma_{1,2}^2 \end{aligned}$$

Ugyanakkor

$$\begin{aligned} & \partial_2(\kappa g_{1,1}) - \partial_1(\kappa g_{1,2}) \\ &= \partial_2((\Gamma_{1,2}^2)^2 - \partial_1 \Gamma_{2,1}^2) - \partial_1(\Gamma_{2,1}^2\Gamma_{1,2}^1 - \partial_2 \Gamma_{1,2}^2) \\ &= 2\Gamma_{1,2}^2\partial_2 \Gamma_{1,2}^2 - \partial_2 \partial_1 \Gamma_{2,1}^2 - \partial_1 \Gamma_{2,1}^2\Gamma_{1,2}^1 - \Gamma_{2,1}^2\partial_1 \Gamma_{1,2}^1 + \partial_1 \partial_2 \Gamma_{1,2}^2 \\ &= 2\Gamma_{1,2}^2\partial_1 \Gamma_{2,1}^1 - \partial_1 \Gamma_{2,1}^2\Gamma_{1,2}^1 - \Gamma_{2,1}^2\partial_1 \Gamma_{1,2}^1 \\ &= \Gamma_{1,2}^2\partial_1 \Gamma_{2,1}^1 - \partial_1 \Gamma_{2,1}^2\Gamma_{1,2}^1 \end{aligned}$$

Az előző kivonása ebből azt adja, hogy

$$\partial_2 \kappa g_{1,1} - \partial_1 \kappa g_{1,2} = \Gamma_{1,2}^2\partial_1 \Gamma_{2,1}^1 - \partial_2 \Gamma_{1,2}^2\Gamma_{1,2}^2 = 0.$$

Hasonlóan számolva $\partial_2 \kappa g_{1,2} + \partial_1 \kappa g_{2,2} = 0$ adódik, ami az előzővel együtt azt jelenti, hogy a nem elfajuló $\begin{pmatrix} g_{1,1} & -g_{1,2} \\ g_{2,1} & g_{2,2} \end{pmatrix}$ mátrix a $(\partial_2 \kappa, \partial_1 \kappa)^T$ vektort nullába transzformálja. Ez igazolja, hogy $\partial_2 \kappa = \partial_1 \kappa = 0$ minden pontban, tehát κ konstans. Eszerint az euklidészi síkkal geodetikus kapcsolatban lévő terek konstans görbületűek. Mivel minden konstans görbületű síknak van geodetikus kapcsolata az euklidészi síkkal, ez igazolja a tétel állítását az $n = 2$ dimenzióban.

A tételt bebizonyítottuk. ■



Függelék

F.1. Vektor–vektor-függvények analízise

Vektor–vektor-függvénynek nevezzük a többváltozós, vektorértékű függvényeket. Ebben a szakaszban csak az $f: \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^m$ típusú függvényekről szólnak. Ha x_i a független és f_j a függő változók jele, akkor az ilyen függvényeket az

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_\ell) = (f_1(x_1, \dots, x_\ell), \dots, f_m(x_1, \dots, x_\ell)) = (f_1(x), \dots, f_m(x)).$$

alakokban írhatjuk, ahol $x = (x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$.

Az f teljes deriváltja az x helyen az az egyértelmű lineáris $D: \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^m$ leképezés, melyre

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{|f(x+y) - f(x) - Dy|}{|y|} = 0.$$

Ha mindkét téren adott egy bázis, akkor D megfeleltethető egy $m \times \ell$ (m sor és ℓ oszlop) típusú szintén D -vel jelölt mátrixnak, a fenti formulában pedig az y vektort mint ℓ magas oszlopvektort kell szerepeltetni. Ha D létezik, akkor az f függvényt differenciálhatónak mondjuk, és f' vagy $\hat{f}$ jelöli a D leképezést, illetve annak mátrixát. Ha $f(x) = Dx$ egy lineáris leképezés, akkor könnyű látni, hogy $f' = D$. Ha $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ és $f: \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^n$, akkor a láncszabály szerint

$$(f \circ g)' = f'(g) \cdot g',$$

ahol $(f \circ g)'$ egy $n \times m$ típusú, $f'(g)$ egy $n \times \ell$ és g' egy $\ell \times m$ típusú mátrix a megfelelő bázisbontásban.

Az f parciális deriváltjai a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(x_1, \dots, x_j, x_j + t, x_{j+1}, \dots, x_\ell) - f_i(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_\ell)}{t}$$

határértékek. Ha ezek léteznek, akkor a határértéket $\partial_j f_i$ jelöli, és az f függvényt parciálisan deriválhatónak nevezzük.

Ha $f(x) = Dx$ egy lineáris leképezés, akkor nyilván $\partial_j f_i$ a D leképezés mátrixa i -edik sorának j -edik eleme.

Fontos tudni, hogy a parciális deriváltak létéből még a folytonosság sem következik, és még a folytonosság mellett sem következik a parciális differenciálhatóságból a deriválhatóság. Ugyanakkor a deriválhatóságból következik a parciális differenciálhatóság, és ekkor a megfelelő bázisbontásban

$$D_{i,j} = \partial_j f_i$$

a derivált i -edik sorának j -edik eleme. Megfordítva, a deriválhatóság következik abból, ha a parciális deriváltak mind folytonosak, és ekkor a fenti képlet ugyancsak helyes [22, 9.21 tétel]. A parciális differenciálás nyilvánvaló, de nagyon fontos tulajdonsága, hogy a különböző indexű deriválások sorrendje szabadon felcserélhető. A derivált invertálhatóságából visszakövetkeztethetünk az eredeti függvény lokális invertálhatóságára [22, 9.24 tétel].

Inverzfüggvény-tétel. *Legyen az $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény m -szer folytonosan differenciálható egy nyílt halmazon, melynek egy x_0 pontjában $f(x_0) = y_0$ és $f'(x_0)$ invertálható. Ekkor létezik olyan $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ nyílt környezete az x_0 és y_0 pontoknak, melyek között f bijektív és f inverze a $\mathcal{V}$ környezeten szintén m -szer folytonosan differenciálható.*

Az ebben a tételben szereplő lineáris leképezés invertálhatóságának eldöntése tehát fontos feladat, amelyre a legegyszerűbb eszköz a megfelelő mátrix determinánsának vizsgálata. Ezt a determinánst Jacobi-determinánsnak nevezzük, és Jf -el jelöljük.

A Jacobi-determináns fontos szerepet játszik a többváltozós függvények integrálásában is, mert ahogy a differenciálformák is mutatják

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(f(x)) |Jf| dx = \int_{f(\mathbb{R}^n)} g(y) dy,$$

ahol $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható és $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenciálható injektív függvény.

A többváltozós $g: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények integráljának deriválását akkor lehet elvégezni, ha a következő tétel feltételei teljesülnek.

Tétel. *Tegyük fel, hogy a $g: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy az x_{n+1} bármely rögzített értékére az $\mathbb{R}^n$ téren integrálható, és bármely $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $\delta > 0$ szám, amelyre*

$$|\partial_{n+1} g(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) - \partial_{n+1} g(x_1, \dots, x_n, x_{n+1} + \xi)| < \varepsilon$$

minden $x_1, \dots, x_n$ és minden $|\xi| < \delta$ esetén.

Ekkor az $f(x_{n+1}) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) dx_1 \dots dx_n$ függvénynek létezik a deriváltja, és az teljesíti az

$$f'(x_{n+1}) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{n+1} g(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) dx_1 \dots dx_n$$

összefüggést.

F.2. Görbék rektifikálhatósága

Az olyan $\{x_i\}_{i=0}^{n+1}$ sorozatokat, melyekre $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$ ($n \in \mathbb{N}$) teljesül, az $[a, b]$ intervallum *beosztásának*, az $\max\{x_{i+1} - x_i\}_{i=0}^n$ számot a beosztás *finomságának* nevezzük.

Tekintsünk egy $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbét! Vegyük minden beosztáshoz azon törött vonalakat, melyeknek $\{r(x_i)\}_{i=0}^{n+1}$ törésponthalmaza. Az ilyen törött vonal *finomságának* a $\max\{d(r(x_i), r(x_{i+1}))\}_{i=0}^n$ számot nevezzük. A törött vonal hosszát az $L_x = \sum_{i=0}^n d(r(x_i), r(x_{i+1}))$ formula adja, mely a háromszög-egyenlőtlenség miatt nem csökken, ha valamely $x_i < y < x_{i+1}$ helyen újabb $r(y)$ töréspontot veszünk hozzá a sorozathoz.

Definíció. Egy görbét *rektifikálhatónak* mondunk, ha az összes beosztásból eredő törött vonalak hosszainak létezik felső határa. Ezt a görbe *hosszának* nevezzük.

Nem minden folytonos görbe rektifikálható. Például a folytonos

$$r: [0, 1] \rightarrow \mathcal{S} = \mathbb{R}^2 \quad r(x) = \begin{cases} (x, x \cos(\pi/x)), & \text{ha } x \neq 0, \\ (0, 0), & \text{ha } x = 0, \end{cases}$$

görbe nem rektifikálható. Ennek bizonyítására tekintsük a $[0, 1]$ intervallum $x_k = 1/k$ ($0 < k \leq n$) beosztását. Ekkor

$$\begin{aligned} d(r(x_k), r(x_{k-1})) &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (x_k \cos(\pi/x_k) - x_{k-1} \cos(\pi/x_{k-1}))^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right)^2 + \left(\frac{(-1)^k}{k} - \frac{(-1)^{k-1}}{k-1}\right)^2}. \end{aligned}$$

A második tagot tekintve $\left(\frac{(-1)^k}{k} - \frac{(-1)^{k-1}}{k-1}\right)^2 = \frac{(2k-1)^2}{(k(k-1))^2}$, amiért

$$d(r(x_k), r(x_{k-1})) = \frac{\sqrt{1 + (2k-1)^2}}{k(k-1)} \geq \frac{2k-1}{k(k-1)} \geq \frac{2}{k}.$$

Eszerint az $r(0), r(x_n), r(x_{n-1}), \dots, r(x_1), r(1)$ törött vonal hossza legalább $2 \sum_{k=2}^n 1/k$, ami nem korlátos módon növekszik, ha n tart a végtelenbe.

Tétel. *Ha egy görbe minden pontjában deriválható, és a deriváltak halmaza korlátos, akkor a görbe rektifikálható. Ha a derivált függvény normája folytonos, akkor a görbe hossza $\int_a^b |\dot{r}(x)| dx$.*

Bizonyítás. Legyen a deriváltak normáinak felső határa h . Ekkor

$$\begin{aligned} L_{\{x_i\}_{i=0}^{n+1}} &:= \sum_{i=0}^n d(r(x_i), r(x_{i+1})) = \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) \left| \frac{(r(x_{i+1}))_O - (r(x_i))_O}{x_{i+1} - x_i} \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) |\dot{r}(\hat{x}_i)| \leq \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) h \\ &= (x_{n+1} - x_0)h = (b - a)h, \end{aligned}$$

ahol $\hat{x}_i \in [x_i, x_{i+1}]$ a vektorértékű függvényekre vonatkozó középérték-tétel miatt. Ez bizonyítja, hogy a r görbe rektifikálható.

Mivel a $|\dot{r}|$ függvény zárt intervallumon folytonos, egyenletesen is folytonos, amiért minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy $|x - y| < \delta$ esetén $\left| \frac{(r(x))_O - (r(y))_O}{x - y} - \dot{r}(x) \right| < \varepsilon$. Eszerint egy δ értéknél finomabb beosztásra

$$\begin{aligned} L_{\{x_i\}_{i=0}^{n+1}} &\leq \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) (|\dot{G}(x_i)| + \varepsilon) = \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) |\dot{G}(x_i)| + (b - a)\varepsilon, \\ L_{\{x_i\}_{i=0}^{n+1}} &\geq \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) (|\dot{G}(x_i)| - \varepsilon) = \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) |\dot{G}(x_i)| + (a - b)\varepsilon, \end{aligned}$$

amiért minden δ értéknél finomabb beosztásra $|L_{\{x_i\}_{i=0}^{n+1}} - I_{\{x_i\}_{i=0}^{n+1}}| \leq (b - a)\varepsilon$, ahol

$$I_{\{x_i\}_{i=0}^{n+1}} = \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) |\dot{r}(x_i)|.$$

Ha L jelöli a görbe hosszát, akkor minden $\varepsilon > 0$ esetén minden elegendően finom beosztásra

$$\begin{aligned} &\left| L - \int_a^b |\dot{r}(x)| dx \right| \\ &\leq |L - L_{\{x_i\}_{i=0}^{n+1}}| + |L_{\{x_i\}_{i=0}^{n+1}} - I_{\{x_i\}_{i=0}^{n+1}}| + \left| I_{\{x_i\}_{i=0}^{n+1}} - \int_a^b |\dot{r}(x)| dx \right| \\ &\leq 3(b - a)\varepsilon, \end{aligned}$$

ami igazolja a tétel formuláját. ■

F.3. Tenzorok és Bianchi-tenzorok

Alább a tenzorok általában idegenkedve kezelt területének rendkívül tömör áttekintése, és a differenciálható sokaságokon sokat használt Bianchi-tenzorok algebrai szempontból való megismerése a cél.

Az alaptér mindvégig az n -dimenziós V vektortér, melynek duálisa V^* . Előbbi elemeit alsóindexelve, utóbbiét felsőindexelve használjuk. A V bázisa $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$, ennek duálisa $\{\mathbf{v}^i\}_{i=1}^n$ a V^* bázisa, vagyis $\mathbf{v}^i(\mathbf{v}_j) = \delta_{i,j}$.

Definíció. A $T: V^r \times V^{*s} \rightarrow \mathbb{R}$ multilineáris funkcionált (r, s) típusú *valósértékű tenzornak* nevezzük.

Egy tenzor megadása egy adott bázisban lehetséges és szokásos a bázisbontás $T_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} = T(\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_r}; \mathbf{v}^{j_1}, \dots, \mathbf{v}^{j_s})$ együtthatóival is.

Definíció. Az (r, s) típusú T és (ρ, σ) típusú Q tenzorok *tenzorszorzatán* az $(r + \rho, s + \sigma)$ típusú $T \otimes Q$ tenzort értjük, melyre

$$\begin{aligned} T \otimes Q(\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_r}, \mathbf{v}_{i_{r+1}}, \dots, \mathbf{v}_{i_{r+\rho}}; \mathbf{v}^{j_1}, \dots, \mathbf{v}^{j_s}, \mathbf{v}^{j_{s+1}}, \dots, \mathbf{v}^{j_{s+\sigma}}) \\ = T(\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_r}; \mathbf{v}^{j_1}, \dots, \mathbf{v}^{j_s}) \cdot Q(\mathbf{v}_{i_{r+1}}, \dots, \mathbf{v}_{i_{r+\rho}}; \mathbf{v}^{j_{s+1}}, \dots, \mathbf{v}^{j_{s+\sigma}}). \end{aligned}$$

A tenzorszorzás nyilván asszociatív művelet.

Tétel. Az (r, s) típusú tenzorok n^{r+s} -dimenziós vektorteret alkotnak, melynek bázisa $\mathbf{v}^{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}^{i_r} \otimes \mathbf{v}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_{j_s}$.

Bizonyítás. Mivel a funkcionálok összege és valós számmal vett szorzata is funkcionál, ezek vektorteret alkotnak. A megadott elemek függetlenek, mert

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}^{i_r} \otimes \mathbf{v}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_{j_s}(\mathbf{v}_{k_1}, \dots, \mathbf{v}_{k_r}; \mathbf{v}^{l_1}, \dots, \mathbf{v}^{l_s}) \\ = \delta_{i_1, k_1} \dots \delta_{i_r, k_r} \delta_{j_1, l_1} \dots \delta_{j_s, l_s}, \end{aligned}$$

ezt elég megmutatnunk, hogy ezek az elemek generáló elemek.

Legyen $\mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_j^i \mathbf{v}_i$ és $\mathbf{y}^j = \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i^j \mathbf{v}^i$. Ekkor

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r; \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^s) \\ = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s}} \mathbf{x}_1^{i_1} \dots \mathbf{x}_r^{i_r} \mathbf{y}_{j_1}^1 \dots \mathbf{y}_{j_s}^s T(\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_r}; \mathbf{v}^{j_1}, \dots, \mathbf{v}^{j_s}) \\ = \sum \mathbf{x}_1^{i_1} \dots \mathbf{x}_r^{i_r} \mathbf{y}_{j_1}^1 \dots \mathbf{y}_{j_s}^s T_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} \\ = \sum T_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} \cdot \mathbf{v}^{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}^{i_r} \otimes \mathbf{v}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_{j_s}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r; \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^s). \end{aligned}$$

alapján a $\mathbf{v}^{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}^{i_r} \otimes \mathbf{v}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_{j_s}$ tenzorok generálják az összes tenzort, ami igazolja az állítást. ■

Ez az eredmény könnyűvé teszi az eddigi tenzorfogalom általánosítását.

Definíció. A $T: V^r \times V^{*s} \rightarrow V^k \times V^{*l}$ multilineáris leképezést *vektorértékű tenzornak* nevezzük.

Megfigyelés. A vektorértékű tenzorok szintén vektorteret alkotnak, és ez megfeleltethető az $(r+l, s+k)$ típusú valósértékű tenzorok terének az $i: T \mapsto S$ kanonikus izomorfiaival, ahol

$$\begin{aligned} S(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}_{r+1}, \dots, \mathbf{x}_{r+l}; \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^s, \mathbf{y}^{s+1}, \dots, \mathbf{y}^{s+k}) \\ = T_1(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r; \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^s)(\mathbf{y}^{s+1}) \cdots T_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r; \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^s)(\mathbf{y}^{s+k}) \\ \cdot T^1(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r; \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^s)(\mathbf{x}_{r+1}) \cdots T^l(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r; \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^s)(\mathbf{x}_{r+l}), \end{aligned}$$

ahol T_i és T^j a T képét jelöli az i -edik vektortérben, illetve a j -edik duálístérben.

Konvenció. A fenti kanonikus izomorfia okán a továbbiakban a vektorértékű $T: V^r \times V^{*s} \rightarrow V^k \times V^{*l}$ tenzorokat is, mint $(r+l, s+k)$ típusú tenzorokat emlegetjük.

A tenzorszorzáson kívül fontos művelet a kontrakció és a permutáció is.

Definíció. Az (r, s) típusú T tenzor *kontrakcióján*, vagy *nyomán* azt a $\mathcal{K}_l^m$ műveletet értjük, mely azt az $(r-1, s-1)$ típusú $\mathcal{K}_l^m T$ nyomtenzort eredményezi, amelyre

$$\mathcal{K}_l^m T_{i_1, \dots, i_{r-1}}^{j_1, \dots, j_{s-1}} = \sum_{k=1}^n T_{i_1, \dots, i_{l-1}, k, i_l, \dots, i_{r-1}}^{j_1, \dots, j_{m-1}, k, j_m, \dots, j_{s-1}},$$

ahol $1 \leq l \leq r$ és $1 \leq m \leq s$

Az (r, s) típusú T tenzor $\sigma\tau T$ *permutációján* a

$$\sigma\tau T(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r; \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^s) = T(\mathbf{x}_{1\sigma}, \dots, \mathbf{x}_{r\sigma}; \mathbf{y}^{1\tau}, \dots, \mathbf{y}^{s\tau})$$

(r, s) típusú tenzort értjük, ahol $\sigma \in S_r$ és $\tau \in S_s$ permutációk.

A kontrakció lényegében a mátrixoknál megszokott nyom fogalmának kiterjesztése, aminek fontos szerep jut a Bianchi-tenzorok vizsgálatában csakúgy, mint a fixen hagyó permutációknak.

Definíció. Egy $(4, 0)$ típusú valósértékű B tenzort *Bianchi-tenzornak* nevezünk, ha teljesít az

- (1) $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) = -B(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{v})$,
- (2) $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) = -B(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{z})$,
- (3) $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) = B(\mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$,

$$(4) \quad B(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v}) = 0,$$

$$(5) \quad B(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) + B(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{y}) = 0$$

Bianchi azonosságok közül az első hátriből legalább kettőt, valamint az utolsó kettőből legalább egyet.

Tétel. *Ha B egy Bianchi-tenzor, akkor mind az öt fenti azonosságot teljesíti.*

Bizonyítás. $(1) + (2) + (4) \Rightarrow (3)$. (4) alapján

$$0 = B(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v}),$$

$$0 = B(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{x}) + B(\mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{y}, \mathbf{x}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}),$$

$$0 = B(\mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}) + B(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{y}),$$

$$0 = B(\mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) + B(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{z}) + B(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{z}).$$

Ezeket összeadva, a (2) azonosságunk szerint az első kettő oszlop elemei kiejtik egymást, az utolsó oszlopban pedig (1) felhasználásával megjelenik az igazolandó azonosság duplája.

$(1) + (2) + (5) \Rightarrow (3)$. Az előbbivel analóg.

$(1) + (3) + (4) \Rightarrow (5)$. (4) alapján

$$0 = B(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v}).$$

Tagonként alkalmazva előbb a (3), majd az (1) azonosságot,

$$0 = -B(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) - B(\mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) - B(\mathbf{v}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x})$$

adódik.

$(1) + (3) + (5) \Rightarrow (4)$. Az előbbivel analóg.

Tekintetbe véve a nyilvánvaló $(1) + (3) \Rightarrow (2)$ és $(2) + (3) \Rightarrow (1)$ következtetéseket, a bizonyítás teljessé válik. ■

Tétel. *Ha B Bianchi-tenzor, akkor öt meghatározza a $k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ nyomfüggvény, mégpedig a*

$$\begin{aligned} -2B(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}) &= k(\mathbf{u} + \mathbf{x}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) + k(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + k(\mathbf{x}, \mathbf{v}) - \\ &\quad - k(\mathbf{v} + \mathbf{x}, \mathbf{u} + \mathbf{w}) - k(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \\ &\quad + k(\mathbf{v} + \mathbf{x}, \mathbf{u}) + k(\mathbf{v} + \mathbf{x}, \mathbf{w}) + k(\mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{w}) + k(\mathbf{x}, \mathbf{u} + \mathbf{w}) - \\ &\quad - k(\mathbf{u} + \mathbf{x}, \mathbf{v}) - k(\mathbf{u} + \mathbf{x}, \mathbf{w}) - k(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) - k(\mathbf{x}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) \end{aligned}$$

formulán keresztül.

Bizonyítás. Mindenekelőtt vegyük észre, hogy a formula jobb oldalán álló képlet éppen egy $\tilde{B}$ Bianchi-tenzort ad meg, melynek nyomfüggvénye pontosan $k(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Elég tehát bizonyítanunk, hogy ha a B és $\tilde{B}$ Bianchi-tenzoroknak azonos a nyomfüggvényük, akkor B és $\tilde{B}$ egybeesik. Ebből a formula azonnal következik.

Legyen $C = B - \tilde{B}$. Ekkor C is Bianchi-tenzor, melynek a nyomfüggvénye nulla. Csak azt kell belátni, hogy $C(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}) = 0$ bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ és $\mathbf{x}$ vektorok esetén.

Tekintsük a

$$\begin{aligned} 0 &= C(\mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{x}, \mathbf{w} + \mathbf{u}, \mathbf{x} + \mathbf{v}) \\ &= 2C(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}) + 2C(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{x}) + 2C(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) + \\ &\quad + 2C(\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{x}) + 2C(\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) + \\ &\quad + 2C(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

egyenletet. A $\mathbf{v} = 0$ esetben ennek eredménye $C(\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{x}) = 0$, vagyis C eltűnik, ha két argumentuma megegyezik. Ennek ismeretében a fenti képlet általános eredménye $C(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}) + C(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0$. Ebből

$$C(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}) = -C(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = C(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = C(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{x}),$$

vagyis a ciklikus csere nem változtatja C értékét, és így a Jacobi-azonosság alapján

$$0 = C(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}) + C(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}) + C(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{x}) = 3C(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}),$$

ahogy állítottuk. ■

Definíció. A B Bianchi-tenzor *normált nyomának* nevezzük a

$$\kappa(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{cases} \frac{B(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w})}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle^2}, & \text{ha } \mathbf{v} \text{ és } \mathbf{w} \text{ függetlenek,} \\ 0, & \text{ha } \mathbf{v} \text{ és } \mathbf{w} \text{ egyirányú} \end{cases}$$

képlettel definiált bilineáris formát.

Tétel. Egy Bianchi-tenzor normált nyoma csak az argumentumában lévő vektorok által meghatározott sík helyzetétől függ.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{v} = a\mathbf{x} + b\mathbf{y}$ és $\mathbf{w} = c\mathbf{x} + d\mathbf{y}$ úgy, hogy $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ ortonormált

független vektorok és $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nemelfajuló. Ekkor

$$\begin{aligned}\kappa(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \frac{B(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, c\mathbf{x} + d\mathbf{y}, a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, c\mathbf{x} + d\mathbf{y})}{\langle a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \rangle \langle c\mathbf{x} + d\mathbf{y}, c\mathbf{x} + d\mathbf{y} \rangle - \langle a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, c\mathbf{x} + d\mathbf{y} \rangle^2} \\ &= \frac{ad(ad - bc)B(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + bc(bc - ad)B(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x})}{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2} \\ &= \frac{(a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2)B(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x})}{a^2d^2 + b^2c^2 - 2acbd} = B(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}),\end{aligned}$$

ami igazolja az állítást. ■

Tétel. Ha a B Bianchi-tenzor, κ normált nyoma konstans, akkor

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}) = \kappa(\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle).$$

Bizonyítás. Ha κ konstans, akkor a $\tilde{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}) = \kappa(\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle)$ formulával megadott $\tilde{B}$ tenzor Bianchi-féle, és nyoma megegyezik B nyomával. Akkor $B = \tilde{B}$, ami bizonyítja az állítást. ■

F.4. Külsőformák

A térfogatmérés legfontosabb eleme a külsőformák alkalmazása.

Definíció. Az $(r, 0)$ típusú valóértékű T tenzort *alternáló tenzornak* vagy *külsőformának* nevezzük, ha $T(x_1, \dots, x_r) = \text{sign } \sigma T(x_{1\sigma}, \dots, x_{r\sigma})$ minden $\sigma \in S_r$ permutációra, ahol $\text{sign } \sigma$ jelöli a paritást, mely $+1$, ha σ páros, és -1 , ha σ páratlan. Az alternáló tenzorok terét $\wedge^r V^*$ jelöli.

Az $(n, 0)$ típusú alternáló tenzorok 1 dimenziós teret alkotnak, hiszen $T_{1\sigma, \dots, r\sigma} = \text{sign } \sigma T_{1, \dots, r}$ csak a $\pm T_{1, \dots, r}$ lehet. Ismeretes, hogy ez csak a determináns konstans többszöröse lehet.

Grassmann-algebrának hívjuk a $\wedge V^* = \mathbb{R} + V^* + \wedge^2 V^* + \dots + \wedge^n V^*$ teret. Világos, hogy $\wedge^0 V^* = \mathbb{R}$, $\wedge^1 V^* = V^*$ és ha $m > n$, akkor $\wedge^m V^*$ egyetlen eleme a nulla tenzor.

Tétel. A $\wedge^r V^*$ vektortér dimenziója $\binom{n}{r}$, és egy bázisa

$$B_{i_1 \dots i_r} = \sum_{\sigma \in S_r} \frac{\text{sign } \sigma}{r!} \mathbf{v}^{i_{1\sigma}} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}^{i_{r\sigma}},$$

ahol $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$.

Bizonyítás. Az nyilvánvaló, hogy $\wedge^r V^*$ vektortér, és $B_{i_1, \dots, i_r} \in \wedge^r V^*$.

Legyenek $c_{i_1, \dots, i_r}$ az $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$ indexhalmazhoz rendelt konstansok. Legyen $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n$. Ekkor

$$0 = \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} c_{i_1, \dots, i_r} B_{i_1, \dots, i_r} \right) (v_{j_1}, \dots, v_{j_r}) = \frac{c_{j_1, \dots, j_r}}{r!},$$

ami bizonyítja a megadott rendszer függetlenségét.

Ha $Q \in \wedge^r V^*$, és $\mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_j^i \mathbf{v}_i$, akkor

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r) &= \sum_{i_1, \dots, i_r} \mathbf{x}_1^{i_1} \cdots \mathbf{x}_r^{i_r} Q(\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_r}) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} r! Q_{i_1, \dots, i_r} \sum_{\sigma \in S_r} \frac{\text{sign } \sigma}{r!} \mathbf{x}_1^{i_{1\sigma}} \cdots \mathbf{x}_r^{i_{r\sigma}} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} r! Q_{i_1, \dots, i_r} B_{i_1, \dots, i_r}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r), \end{aligned}$$

vagyis a $B_{i_1, \dots, i_r}$ külsőformák generáló rendszert is alkotnak. ■

Definíció. Ha $T \in \wedge^p V^*$ és $S \in \wedge^q V^*$, akkor

$$\begin{aligned} T \wedge S(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p, \mathbf{x}_{p+1}, \dots, \mathbf{x}_{p+q}) \\ = \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \frac{\text{sign } \sigma}{(p+q)!} T(\mathbf{x}_{1\sigma}, \dots, \mathbf{x}_{p\sigma}) S(\mathbf{x}_{(p+1)\sigma}, \dots, \mathbf{x}_{(p+q)\sigma}) \end{aligned}$$

az ő *külsőszorzatuk*.

A $T \wedge S$ külsőszorzat $\wedge^{p+q} V^*$ -ban van, hiszen bármely ϖ permutációra

$$\begin{aligned} T \wedge S(\mathbf{x}_{1\varpi}, \dots, \mathbf{x}_{p\varpi}, \mathbf{x}_{(p+1)\varpi}, \dots, \mathbf{x}_{(p+q)\varpi}) \\ = \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \frac{\text{sign } \sigma}{(p+q)!} T(\mathbf{x}_{1\varpi\sigma}, \dots, \mathbf{x}_{p\varpi\sigma}) S(\mathbf{x}_{(p+1)\varpi\sigma}, \dots, \mathbf{x}_{(p+q)\varpi\sigma}) \\ = \sum_{\tau \in S_{p+q}} \frac{\text{sign}(\varpi^{-1}\tau)}{(p+q)!} T(\mathbf{x}_{1\tau}, \dots, \mathbf{x}_{p\tau}) S(\mathbf{x}_{(p+1)\tau}, \dots, \mathbf{x}_{(p+q)\tau}) \\ = \text{sign } \varpi \cdot T \wedge S(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p, \mathbf{x}_{p+1}, \dots, \mathbf{x}_{p+q}). \end{aligned}$$

Ebből azonnal következik, hogy $T \wedge S = (-1)^{pq} S \wedge T$.

Konstanssal való külsőszorzás megegyezik a valós számmal való szorzással, mert ha $q = 0$, akkor

$$T \wedge S(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p) = \sum_{\sigma \in S_p} \frac{\text{sign } \sigma}{p!} T(\mathbf{x}_{1\sigma}, \dots, \mathbf{x}_{p\sigma}) S = ST(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p).$$

Tétel. *A külsőszorzás asszociatív és disztributív az összeadásra nézve.*

Bizonyítás. A disztributivitás nyilvánvaló, amiért elég az asszociativitást a $B_{i_1, \dots, i_r}$ báziselemekre belátni.

Ehhez elég megmutatni, hogy $B_{1, \dots, r} \wedge B_{r+1, \dots, k} = B_{1, \dots, k}$.

$$\begin{aligned} & B_{1, \dots, r} \wedge B_{r+1, \dots, k}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) \\ &= \sum_{\tau \in S_k} \frac{\text{sign } \tau}{k!} B_{1 \dots r}(\mathbf{x}_{1\tau}, \dots, \mathbf{x}_{r\tau}) B_{r+1 \dots k}(\mathbf{x}_{(r+1)\tau}, \dots, \mathbf{x}_{k\tau}) \\ &= \sum_{\tau \in S_k} \frac{\text{sign } \tau}{k!} \sum_{\sigma \in S_r} \frac{\text{sign } \sigma}{r!} \mathbf{v}^{1\sigma}(\mathbf{x}_{1\tau}) \cdots \mathbf{v}^{r\sigma}(\mathbf{x}_{r\tau}) \times \\ &\quad \times \sum_{\rho \in S_{k-r}} \frac{\text{sign } \rho}{(k-r)!} \mathbf{v}^{r+1\rho}(\mathbf{x}_{(r+1)\tau}) \cdots \mathbf{v}^{r+(k-r)\rho}(\mathbf{x}_{k\tau}) \\ &= \sum_{\tau \in S_k} \frac{\text{sign } \tau}{k!} \sum_{\sigma \in S_r} \frac{\text{sign } \sigma}{r!} \mathbf{v}^1(\mathbf{x}_{1\sigma\tau}) \cdots \mathbf{v}^r(\mathbf{x}_{r\sigma\tau}) \times \\ &\quad \times \sum_{\rho \in S_{k-r}} \frac{\text{sign } \rho}{(k-r)!} \mathbf{v}^{r+1}(\mathbf{x}_{(r+1)\rho\tau}) \cdots \mathbf{v}^k(\mathbf{x}_{(r+(k-r)\rho)\tau}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_r} \frac{\text{sign } \sigma}{r!} \sum_{\rho \in S_{k-r}} \frac{\text{sign } \rho}{(k-r)!} B_{1, \dots, k}(\mathbf{x}_{1\sigma}, \dots, \mathbf{x}_{r\sigma}, \mathbf{x}_{r+1\rho}, \dots, \mathbf{x}_{r+(k-r)\rho}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_r} \frac{(\text{sign } \sigma)^2}{r!} \sum_{\rho \in S_{k-r}} \frac{(\text{sign } \rho)^2}{(k-r)!} B_{1, \dots, k}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}_{r+1}, \dots, \mathbf{x}_k) \\ &= B_{1, \dots, k}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k). \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a fentiek szerint $B_{i_1, \dots, i_r} = \mathbf{v}^{i_1} \wedge \mathbf{v}^{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{v}^{i_r}$!

Tétel. *Legyen $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, és legyen $\omega_{\mathbf{u}}$ és $\omega_{\mathbf{v}}$ az az $(1, 0)$ tenzor, melyre $\omega_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle$, illetve $\omega_{\mathbf{v}}(\mathbf{y}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{y} \rangle$. Ha $\Omega_{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}$ az a $(2, 0)$ tenzor, melyre $\Omega_{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, akkor*

$$\omega_{\mathbf{u}} \wedge \omega_{\mathbf{v}} = \frac{1}{2} \Omega_{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}.$$

Bizonyítás. Egyszerű számolással

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \langle (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{v} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle = \omega_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})\omega_{\mathbf{v}}(\mathbf{y}) - \omega_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})\omega_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) \\ &= 2\omega_{\mathbf{u}} \wedge \omega_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\end{aligned}$$

igazolja az állítást. ■

Eszerint a külsőszorzás a keresztszorzás általánosításának tekinthető, és 3-dimenziós V alaptéren $\wedge^2 V \simeq V$. Ez nem igaz magasabb dimenzióban.

A külsőszorzás növeli a külsőformák rendjét. Ennek „fordítottja” egy olyan művelet lenne, mely csökkenti a külsőformák rendjét. Alább minden $\mathbf{v} \in V$ vektorhoz hozzárendelünk egy $\mathbf{v} \vee$ operátort, mely eggyel csökkenti a külsőformák rendjét.

Definíció. Legyen $\mathbf{x}_0 \in V$. Ekkor az $\mathbf{x}_0 \vee$ operátor minden $\alpha \in \wedge^{k+1} V^*$ külsőformához azt az $\mathbf{x}_0 \vee \alpha \in \wedge^k V^*$ külsőformát rendeli, melyre

$$(\mathbf{x}_0 \vee \alpha)(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = (k+1)\alpha(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k).$$

Tétel. Ha $\alpha \in \wedge^{k+1} V^*$, és $\alpha = a\mathbf{v}^0 \wedge \mathbf{v}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}^k$, akkor

$$\mathbf{x}_0 \vee \alpha = \sum_{j=0}^k (-1)^j a \mathbf{v}^j(\mathbf{x}_0) \mathbf{v}^0 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}^k,$$

ahol $\dots \wedge$ azt jelenti, hogy a sorból egyedül a j indexű elem hiányzik.

Bizonyítás. A definícióból kiindulva

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}_0 \vee \alpha)(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) &= (k+1)\alpha(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = \sum_{\sigma \in S_{k+1}} \frac{(k+1)a \operatorname{sign} \sigma}{(k+1)!} \mathbf{v}^{0\sigma}(\mathbf{x}_0) \dots \mathbf{v}^{k\sigma}(\mathbf{x}_k) \\ &= \sum_{j=0}^k a \mathbf{v}^j(\mathbf{x}_0) \sum_{\substack{\sigma \in S_{k+1} \\ 0\sigma=j}} \frac{\operatorname{sign} \sigma}{k!} \mathbf{v}^{1\sigma}(\mathbf{x}_1) \dots \mathbf{v}^{k\sigma}(\mathbf{x}_k) \\ &= \sum_{j=0}^k a \mathbf{v}^j(\mathbf{x}_0) \sum_{\substack{\varpi \in S_{k+1} \\ 0\varpi=0}} \frac{\operatorname{sign}(\varpi\tau)}{k!} \mathbf{v}^{1\varpi\tau}(\mathbf{x}_1) \dots \mathbf{v}^{k\varpi\tau}(\mathbf{x}_k),\end{aligned}$$

ahol τ jelöli a $(0, j)$ transzpozíciót. Az utolsó formula szummájában az $(1, 2, \dots, k)$ számsornak a $(0, 1, 2, \dots, k)$ számsorba mutató minden lehetséges bijektív leképezése

pontosan egyszer fordul elő. Rendezzük át a szorzatot úgy, hogy ne az argumentumok, hanem a $\mathbf{v}^{i\tau}$ leképezések indexei sorrendjében legyen! Ekkor

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_0 \vee \alpha)(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) &= \sum_{j=0}^k a\mathbf{v}^j(\mathbf{x}_0) \sum_{\substack{\varrho \in S_{k+1} \\ 0\varrho=0}} \frac{\text{sign}(\varrho\tau)}{k!} \mathbf{v}^{1\tau}(\mathbf{x}_{1\varrho}) \cdots \mathbf{v}^{k\varrho}(\mathbf{x}_{k\varrho}) \\ &= \sum_{j=0}^k a\mathbf{v}^j(\mathbf{x}_0) \text{sign } \tau \mathbf{v}^{1\tau} \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}^{k\tau}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) \\ &= \sum_{j=0}^k a\mathbf{v}^j(\mathbf{x}_0) (-1)^j \mathbf{v}^0 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}^k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) \end{aligned}$$

bizonyítja az állítást. ■

Jegyezzük még meg, hogy $\mathbf{x}_0 \vee (\mathbf{x}_0 \vee \alpha)$ mindig eltűnik, mert

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 \vee (\mathbf{x}_0 \vee \alpha)(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) &= (k+1)\mathbf{x}_0 \vee (\alpha)(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) \\ &= (k+1)^2 \alpha(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = 0. \end{aligned}$$

Cartan-lemma. Ha a $\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^k \in V^*$ és a független $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k \in V^*$ lineáris funkcionálokra $\mathbf{v}^1 \wedge \mathbf{w}^1 + \cdots + \mathbf{v}^k \wedge \mathbf{w}^k = 0$, akkor $\mathbf{w}^i = \sum_{j=1}^k m_j^i \mathbf{v}^j$, ahol az $M = (m_j^i)_{i,j=1,\dots,k}$ mátrix szimmetrikus, vagyis $m_j^i = m_i^j$.

Bizonyítás. Válasszuk ki a $\mathbf{v}^{k+1}, \dots, \mathbf{v}^n$ külső formákat úgy, hogy $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n$ egy bázis legyen! Ekkor az egyértelmű $\mathbf{w}^i = \sum_{j=1}^n m_j^i \mathbf{v}^j$ bázisbontások együtthatóival számolva

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^1 \wedge \mathbf{w}^1 + \cdots + \mathbf{v}^k \wedge \mathbf{w}^k &= \sum_{i=1}^k \left(\mathbf{v}^i \wedge \sum_{j=1}^n m_j^i \mathbf{v}^j \right) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n m_j^i \mathbf{v}^i \wedge \mathbf{v}^j \\ &= \sum_{i,j=1}^k m_j^i \mathbf{v}^i \wedge \mathbf{v}^j + \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^n m_j^i \mathbf{v}^i \wedge \mathbf{v}^j, \end{aligned}$$

tehát

$$0 = \sum_{1 \leq i < j \leq k} (m_j^i - m_i^j) \mathbf{v}^i \wedge \mathbf{v}^j + \sum_{1 \leq i \leq k < j < n} m_j^i \mathbf{v}^i \wedge \mathbf{v}^j.$$

Ebből $m_j^i = 0$ adódik a $1 \leq i \leq k < j < n$ indexekre, és $m_j^i = m_i^j$ az $1 \leq i < j \leq k$ indexekre, mivel a $\mathbf{v}^i \wedge \mathbf{v}^j$ külső formák ($i < j$) bázist alkotnak a $\wedge^2 V^*$ vektortérben. ■

Irodalomjegyzék

- [1] A. L. BESSE, *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas], vol. **93**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978. With appendices by D. B. A. Epstein, J.-P. Bourguignon, L. Bérard-Bergery, M. Berger and J. L. Kazdan.
- [2] E. D. BLOCH, *A first course in geometric topology and differential geometry*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1997.
- [3] I. CHAVEL, *Riemannian symmetric spaces of rank one*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 5, Marcel Dekker, Inc., New York, 1972.
- [4] I. CHAVEL, On Riemannian symmetric spaces of rank one, *Advances in Math.* **4** (1970), 236–263 (1970), doi: [10.1016/0001-8708\(70\)90025-3](https://doi.org/10.1016/0001-8708(70)90025-3).
- [5] E. CHEN and N. LOURIE, Tripod configurations of curves, *J. Geom. Phys.* **89** (2015), 1–16, doi: [10.1016/j.geomphys.2014.11.016](https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2014.11.016).
- [6] G. DOMOKOS, J. PAPADOPULOS, and ANDY RUINA, Static equilibria of planar, rigid bodies: is there anything new?, *J. Elasticity* **36** (1994), no. 1, 59–66, doi: [10.1007/BF00042491](https://doi.org/10.1007/BF00042491).
- [7] L. P. EISENHART, *Riemannian geometry*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Eighth printing; Princeton Paperbacks.
- [8] S. GALLOT, D. HULIN, and J. LAFONTAINE, *Riemannian geometry*, 3rd ed., Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [9] S. HELGASON, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Graduate Studies in Mathematics, vol. **34**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Corrected reprint of the 1978 original.
- [10] J. JOST, *Riemannian geometry and geometric analysis*, 7th ed., Universitext, Springer, Cham, 2017.
- [11] S. KOBAYASHI and K. NOMIZU, *Foundations of Differential Geometry I.-II.*, Wiley Interscience, New York, 1963 – 1969.
- [12] A. G. KUROS, *Felsőbb algebra*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
- [13] KURUSA Á., *Topológiai alapismeretek*, e-könyv, Szeged, 2013; http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa/_site/index.php/about/publ-to-dl/category/33.

- [14] KURUSA Á., *Bevezetés a differenciálgeometriába*, Polygon Jegyzettár **11**, Polygon Kiadó, Szeged, 1999.
- [15] KURUSA Á., Kötélgörbe, avagy miért hasonlítanak egymásra a kupolák?, *Polygon*, **18** (2009), 33–45.
- [16] J. M. LEE, *Riemannian Manifolds, An Introduction to Curvature*, Springer, New York, 1997.
- [17] J. MILNOR, *Morse theory*, Princeton University Press, Princeton, 1963.
- [18] A. MISCHENKO and A. FOMENKO, *A Course of Differential Geometry and Topology*, Mir, Moscow, 1988.
- [19] E. N. PATTERSON, *Topológia*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.
- [20] L. SZ. PONTRJAGIN, *Közönséges differenciálegyenletek*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.
- [21] M. POSTNIKOV, *Lectures in Geometry, Smooth Manifolds*, MIR, Moscow, 1989.
- [22] W. RUDIN, *A matematikai analízis alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.
- [23] I. J. STOKER, *Differential Geometry*, Pure and Applied Math. **20**, Wiley–Interscience, New York, 1969.
- [24] SZABÓ Z., A short topological proof for the symmetry of 2 point homogeneous spaces, *Invent. math.*, **106** (1991), 61–64; doi: <https://doi.org/10.1007/BF01243903>.
- [25] SZABÓ Z., *Differenciálgeometria*, Szóbeli egyetemi előadás, Szeged, 1984.
- [26] SZŐKEFALVI-NAGY GY., GEHÉR L. és NAGY P., *Differenciálgeometria*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.
- [27] S. TABACHNIKOV, The Four-Vertex Theorem Revisited – Two Variations on the Old Theme, *Amer. Math. Monthly*, **102** (1995), 912–916.
- [28] C. THOMASSEN, The Jordan–Schönflies Theorem and the classification of surfaces, *Amer. Math. Monthly*, **99** (1992), 116–131.
- [29] H. TVERBERG, A proof of the Jordan Curve Theorem, *Bull. London Math. Soc.*, **12** (1980), 34–38.
- [30] H. C. WANG, Two point homogeneous spaces, *Ann. Math.*, **55** (1952), 177–191.
- [31] WIKIPEDIA, [Bolzano–Weierstrass-tétel](#).
- [32] WIKIPEDIA, [Gömböc](#)
- [33] WIKIPEDIA, [Picard–Lindelöf-tétel](#)
- [34] WIKIPEDIA, [Rolle tétele](#).
- [35] J. A. WOLF, *Spaces of Constant Curvature*, McGraw–Hill, New York, 1961.

Jelölések és konvenciók

$\cdot$ és $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – euklideszi belső szorzás	$\tilde{T}\mathcal{M}$ – $\mathcal{M}$ sokaság vektormezőinek tere
$\mathbb{R}$ – valós számok	$\mathbf{t}$ – görbe egységnyi érintője
<i>vektor</i> – vektorok félkövér betűvel	$\mathbf{n}$ – görbe normálisa
V.MEZ – vektormezők félkövér nagybetűvel	$\mathbf{b}$ – görbe binormálisa
$\mathcal{H}\mathcal{A}\mathcal{L}\mathcal{M}$. – halmazok kaligrafikus nagybetűvel	δ^i – kotangensnyaláb ∂_i -hez konjugált báziseleme
$\overset{\circ}{\mathcal{H}}$ – halmaz belseje	$g\langle \cdot, \cdot \rangle$ – Riemann-metrika
$\bar{\mathcal{H}}$ – halmaz lezártja	$g_{i,j}$ – Riemann-metrika mátrixának elemei
S^n – az n -dimenziós egységsugarú gömbfelszín $\mathbb{R}^{n+1}$ -ben	$g^{k,l}$ – Riemann-metrika mátrixa inverzének elemei
B^n – az n -dimenziós egységsugarú gömb $\mathbb{R}^n$ -ben	B_P – Weingarten-leképezés
$B^n(\varrho)$ – az n -dimenziós ϱ sugarú gömb $\mathbb{R}^n$ -ben	κ – görbület
$\partial\mathcal{D}$ – a reguláris $\mathcal{D}$ tartomány határa	τ – görbe torziója
$\overset{\circ}{\mathcal{D}}$ – a reguláris $\mathcal{D}$ tartomány nyílt belseje	R – Riemann-görbület
$\dot{\mathbf{X}}$ – a $\mathbf{X}$ vektormező totális deriváltja	T – Torzió
f' – az f skalármező totális deriváltja	∇ – kovariáns deriválás, Levi-Civita kovariáns deriválás
◦ – függvény-összetétel	$[\cdot, \cdot]$ – Lie-zárójel
∂_i – az i -edik változó szerinti parciális deriválás	$\Lambda^k V$ – V feletti k -rendű külsőformák tere
∂_i – a tangensnyaláb i -edik báziseleme	$\tilde{\Lambda}^k \mathcal{M}$ – $\mathcal{M}$ feletti k -rendű differenciálformák tere
C_P – a P pont körüli függvénycsírák tere	$T_P^{r,s} \mathcal{M}$ – a $T_P \mathcal{M}$ feletti (r, s) típusú tenzorok tere
T_P – a P pont körüli érintőtér	$T^{r,s} \mathcal{M}$ – az $\mathcal{M}$ feletti (r, s) típusú tenzornyaláb
$T\mathcal{M}$ – $\mathcal{M}$ sokaság érintőnyalábja	$\tilde{T}^{r,s} \mathcal{M}$ – az $\mathcal{M}$ feletti (r, s) típusú tenzormezők tere
	$\cdot \dot{\cdot} \cdot$ – a sorból egyedül az i indexű elem hiányzik
	φ_* – a φ indukált leképezése

$\delta_{i,j}$ – a Kronecker-delta, mely 1,	d – a külsőderiválás
ha $i = j$ és 0, ha $i \neq j$	S_n – az n -rendű permutációk
$x_0 \vee$ – a belső szorzó	szimmetrikus csoportja
$\wedge$ – a külsőszorzat	

Konvenciók

A könyvben minden függvény, leképezés végtelenszer differenciálható.

Általában egy folyam első paraméterét alsó indexben jelezzük. Ezt a változót gyakran időparaméternek is hívjuk a folyam szemléletes jelentését követve.

Egy adott (r, U) koordinátakörnyezeten belül az $x_j: U \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az adott pontnak az r paraméterezés szerinti j -edik koordinátája, vagyis

$$P = r(x_1(P), \dots, x_j(P), \dots, x_n(P)).$$

Minden képletet szigorúan balról jobbra olvasunk, és az első értelmezhető részt azonnal értelmezzük. Ennek megfelelően az operátorok, így a derivációk, deriválások és lineáris transzformációk minden más műveletnél előbb hajthatók végre, tehát nem mindig szükséges zárójel használata, vagyis $\mathbf{X}(f)$ ugyanazt jelenti, mint $\mathbf{X}f$, $\partial_i f^2$ is megegyezik a $(\partial_i f)^2$ formulával, de $\mathbf{X}f + g$ és $\mathbf{X}(f + g)$ nem egyezik meg.

Egy görbe paraméterében az s betű mindig az ívhossz szerinti paramétert jelenteni.

Amikor ez nem okozhat félreértést, ugyanazon a néven jelöljük egy függvény két paraméterezését. Más szóval az $f(x)$ az $f(x(t))$ jelölés rövidítése is lehet, amennyiben az $x(t)$ függvényt a szöveggörnyezet meghatározza.

Amikor ez nem okozhat félreértést, a függvény-egyenleteknél az azonos paramétereket elhagyjuk. Más szóval az $f(x) = g(x)$ egyenletet az $f = g$ jelöléssel rövidítjük, azzal, hogy ilyenkor a paramétereket mindig a szöveggörnyezet által meghatározott azonos pontban vesszük.

Ha nincs külön másként jelezve, egy $\mathcal{M}$ differenciálható sokaság dimenziója $n \in \mathbb{N}$.

Nem különböztetjük meg a függvénycsírákon ható derivációkat, a reprezentánsokon ható ∂_i deriválásoktól.

A Riemann sokaságokon, hacsak külön nincs jelezve, akkor mindig a Levi-Civita kovariáns deriválást gondolunk, vagyis a kovariáns deriválás torziója eltűnik, a metrikus tenzor pedig párhuzamos.

A vektorértékű $T: V^r \times V^{*s} \rightarrow V^k \times V^{*l}$ tenzorokat egyszerűen $(r + l, s + k)$ típusú tenzorokként emlegetjük.

Pickard–Lindelöf-tételként hivatkozunk a differenciálegyenletek megoldásának unicitás és egzisztenciáját garantáló alaptételre, amely a [20] könyvben is megtalálható.

Görög betűk

név	kisbetű	nagybetű	verzió	név	kisbetű	nagybetű	verzió
alfa	α			nű	ν		
béta	β			kszí	ξ	Ξ	
gamma	γ	Γ		pí	π	Π	ϖ
delta	δ	Δ		ró	ρ		ϱ
epsilon	ϵ		ε	szigma	σ	Σ	ς
zéta	ζ			tau	τ		
éta	η			üpszilon	υ	Υ	
theta	θ	Θ	ϑ	fí	ϕ	Φ	φ
iota	ι			chi	χ		
kappa	κ		$\varkappa$	pszí	ψ	Ψ	
lambda	λ	Λ		omega	ω	Ω	
mű	μ						

Gótikus betűk

név	kisbetű	nagybetű	név	kisbetű	nagybetű
a	a	A	n	n	N
b	b	B	o	o	O
c	c	C	p	p	P
d	d	D	q	q	Q
e	e	E	r	r	R
f	f	F	s	s	S
g	g	G	t	t	T
h	h	H	u	u	U
i	i	I	v	v	V
j	j	J	w	w	W
k	k	K	x	x	X
l	l	L	y	y	Y
m	m	M	z	z	Z

Héber betűk

név	betű
alef	א

Név- és tárgymutató

A

affin diffeomorfizmus, 117
alapmennyiség
 első $\sim$, 38
 második $\sim$, 39
algebrai Bianchi-azonosság, 111
alternáló tenzor, 173
aszimptotikus görbe, 77
atlasz, 27, 83
átmenetfüggvény, 83
átparaméterezés, 27

B

belsőgeometriai főmennyiség, 38
Beltrami-tétel, 161
beosztás, 167
 finomsága, 167
Bertrand, 16
 $\sim$ -féle görbe, 16
Betti-szám, 101
Bianchi-azonosságok, 128
 algebrai $\sim$, 111
 másodfajú algebrai $\sim$, 113
Bianchi-tenzor, 170
binormális vektor, 4

C

Cartan
 $\sim$ -lemma, 177
 $\sim$ -Hadamard-tétel, 148

Christoffel-szimbólum
 felületen, 31
 sokaságon, 108
Codazzi–Mainardi-egyenlet, 49
csavargörbe, 13
csírázás sokaságon, 87

D

Darboux-vektor, 6
Delanuay-tétel, 69
de Rham-csoport, 101
deriváció, 87
diffeomorfizmus
 síkon, 9
 felületen, 27
 sokaságon, 84
 affin $\sim$, 117
diffeomorfizmusok folyt. serege, 9
differenciálforma, 98
 egzakt $\sim$, 101
 zárt $\sim$, 100
differenciálható
 sokaság, 83
 függvény, 28
divergencia, 54

E

egyensúlyi pont, 17
 instabil $\sim$, 17
 stabil $\sim$, 17
egységbontás, 103

egyszerű görbeív, 1
 egzakt differenciálforma, 101
 egzotikus gömb, 84
 elemi felület, 27
 paraméterezése, 27
 elliptikus, 152
 első alapmennyiség, 38
 érintő, 88
 ~nyaláb felületé, 28
 ~nyaláb sokaságé, 89
 ~sík, 28
 ~tér, 87
 ~vektor, 87
 ~vektor-mező, 28
 euklideszi, 152
 Euler-karakterisztika, 62
 sokaságon, 101
 Euler–Poincaré-tétel, 101
 Euler-tétel, 40
 exponenciális leképezés, 116
 extrémális
 görbe felületen, 36
 felület, 67
 görbe sokaságon, 128

F

felszínmérték, 52
 sokaságon, 123
 felület, 27
 variálása, 67
 alaptétele, 41
 felületi
 görbe variálása, 36
 görbületi vektor, 32
 normális, 32
 főgörbület, 40
 főgörbületi irány, 40
 folyam felületen, 46

folyam sokaságon, 91
 Frenet-formulák, 5
 függvénycsírák, 87

G

Gauss
 ~egyenlet, 49
 ~lemma, 140
 ~féle szorzatgörbület, 41
 Gauss–Bonnet-tétel, 60
 gége-típusú felület, 66
 geodetikus
 differenciálegyenlete, 35, 114
 felületen, 35
 sokaságon, 114
 gömb, 141
 görbület, 32
 görbület előjeles, 33
 kapcsolat, 119
 kritikus ~, 130
 gömb-típusú felület, 66
 gömböc, 20
 görbe
 ~k alaptétele, 6
 ~k egzisztencia-tétele, 7
 görbülete, 2
 előjeles ~, 8
 hossza, 167
 kísérő triédere, 4
 sokaságon, 88
 görbület
 előjeles~, 8
 geodetikus~, 32
 görbéé, 2
 metszet~, 146
 szekcionális ~, 146
 ~i vektor, 2
 gradiens, 55

Grassmann-algebra, 173

H

határ, 86

Hesse-forma, 93

Hilbert-lemma, 70

Hilbert-tétel, 152

hiperbolikus tér, 152

homeomorfizmus, 9

homogén tér, 141

Hopf–Rinow-tétel, 136

I

indukált leképezés, 28, 89

integrál

felületen, 53

sokaságon, 105

$\sim$ görbe felületen, 46

$\sim$ görbe sokaságon, 91

Inverzfüggvény-tétel, 29

irányítható felület, 29

irányítható sokaság, 85

irányított sokaság, 85

iránymenti derivált, 29, 30

ívhossz

térben, 1

sokaságban, 123

izometria, 138

lokális $\sim$, 138

J

Jacobi

$\sim$ -azonosság, 46, 92

$\sim$ -azonosság Riemann-görb., 49, 111

$\sim$ -egyenlet, 130

$\sim$ -mező, 132

$\sim$ -tétel, 130

Jordan

$\sim$ -görbe, 9

$\sim$ -tétel, 9

K

katenoid, 69

két-pont-homogén tér, 141

kohomológia, 101

-tér, 101

konstans görbületű tér, 150

kontrakció, 170

koordinátázás, 83

koordináta-környezet, 27, 83

körülfordulási tétel, 10

Koszul-formula, 124

kotangens

$\sim$ nyaláb, 96

$\sim$ tér, 96

kovariáns deriválás, 31

felületen, 34

Levi–Civita $\sim$, 126

sokaságon, 108

tenzormező $\sim$ a, 112

kötélgörbe, 20

kritikus geodetikus, 130

kritikus pont, 93

indexe, 94

elfajult $\sim$, 94

külső

$\sim$ deriválás, 100

$\sim$ szorzat, 174

$\sim$ forma, 173

$\sim$ forma-nyaláb, 98

$\sim$ geometriai főmennyiség, 39

L

Laplace-transzformáció, 55

lejtőgörbe, 15

Levi–Civita

$\sim$ kovariáns deriválás, 126

$\sim$ -tétel, 124

Lie

~derivált, 47, 91

~zárójel, 44, 91

Liebmann-tétel, 72**lokális**

izometria, 138

szimmetria, 118

tulajdonság, 29

~an szimmetrikus, 118

loxodroma, 23**M**

második alaplmenyiség, 39

megengedett tartomány, 52

elemi $\sim$, 52

mérés, 36

metrikus alaptensor, 82

metszetgörbület, 146

Meusnier-tétel, 32

minimálfelület, 68

Minkowski-féle összeggörbület, 41

konstans, 69

Morse

~elmélet, 93

~lemma, 94

~tétel, 96

N

Nash beágyazási tétele, 123

négy csúcs tétele, 11

normál

~görbület, 32

koordináta-környezet, 116

normális

~ bázisú felület, 73

~ bázisú paraméterezés, 73

~ variálás felületen, 67

~ variálás sokaságon, 130

~ vektor, 2

nyomfüggvény, 171

P**paraméterezés**

ekvivalens $\sim$, 1

görbée, 1

ív hossz szerinti, 1

felületé, 27

sokaságé, 83

nyoma, 1

paramétervonal, 27

párhuzamosság, 32

sokaságon, 111

permutáció tenzoré, 170

Poincaré-tétel, 101

poliéder-felbontás, 62

primitív forma, 100

pszeudofok, 66

R

reguláris tartomány, 86

rektifikálható, 167

Ricci-görbület, 111

Riemann

~tétel, 151

~görbület, 48, 109

~metrika, 123

~sokaság, 123

~féle görbületi skalár, 147

S

Schönflies-tétel, 9

Schur-tétel, 147

síkba hajlítható

felület, 73

paraméterezés, 73

simulókör, 3

simulósík, 3

skalármező, 28, 87
 sokaság
 atlasza, 83
 differenciálható $\sim$, 84
 diffeomorf, 84
 irányított $\sim$, 85
 irányítható $\sim$, 85
 lokálisan szimmetrikus $\sim$, 118
 konstans görbületű $\sim$, 150
 paraméterezése, 83
 Riemann- $\sim$, 123
 szimmetrikus $\sim$, 141
 topologikus $\sim$, 83
 Stokes-tétel, 106
 súlypont, 17
 szekcionális görbület, 146
 szimmetrikus tér, 141
 lokális, 118
 szögdefektus-tétel, 62
T
 tartópont, 87
 távolság, 134
 tenzor
 Bianchi- $\sim$, 170
 valósértékű $\sim$, 169
 vektorértékű $\sim$, 170
 $\sim$ mező, 98
 $\sim$ nyaláb, 97
 nyoma, 170
 $\sim$ szorzat, 169
 térfogatnorma, 106
 térkép, 27, 83
 Theorema elegantissimum, 60
 töréspont, 10

törésszög, 10
 torzfelület, 75
 torzió
 görbéé, 5
 sokaságé, 109
 traktrix, 66

U

umbilikus, 70

V

variálás
 görbe $\sim$ a felületen, 36
 görbe $\sim$ a sokaságon, 128
 felület $\sim$ a, 67
 vektor
 egységnyi érintő $\sim$, 2
 egységnyi görbületi $\sim$, 2
 főgörbületi $\sim$, 40
 $\sim$ mező, 28, 90
 normális $\sim$, 2
 vonalfelület, 75

W

Weingarten-leképezés, 39
 mátrixa, 40
 Whitney beágyazási tétele, 84, 123

Z

zárt differenciálforma, 100

Még nem besorolt mutatók

Tennivalók listája

- 0.1Ábrákkal kellene segíteni a szöveget az egész könyvben.... i
- Érdeemes lehetne bizonyítani az Euler–Poincaré-tételt 101