

A tomográfia matematikája

(Mathematics of tomography)

Kurusa Árpád

<http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa>

Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

<http://www.math.u-szeged.hu/>

SZTE Móra Ferenc Kollégium, Szeged, 2017 október 25., 20:00

A multimédia-tartalomhoz [Adobe PDF Reader](#) szükséges.

1895-ben **Wilhelm Conrad Röntgen** felfedezi az X-sugárzást, melyet mi **Röntgen-sugárzásnak** hívunk. A Röntgen-kép a fényképezéssel analóg módon készül, csak a fény helyett a Röntgen-sugár feketíti a kép pontjait. Az első Röntgen-kép Röntgen feleségének kezéről 20 perces(!) expozícióval készült: első fizikai **Nobel-díj 1905**.



1917-ben **Johann Radon** a síkon vizsgálja [20] **Funk** gömbi főkörökön adott integráltranszformációjának [5] megfelelőjét. Ez ma a Radon-transzformáció, amely a síkon adott sima, kompakt tartójú f függvényhez egy a sík egyeneseseinek halmazán értelmezett Rf függvényt rendel úgy, hogy utóbbi az előbbi integrálja az egyenesen.

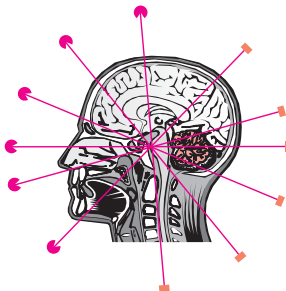


Fizikusok kimérik, hogy bármely anyagon való áthaladás közben az I_0 erősségű sugárzás az anyag átlag sűrűségének és vastagságának exponenciálisával csökken, vagyis ha az anyagsűrűség hely szerinti függvénye f és a sugár az ℓ egyenes mentén halad, akkor a beérkező sugárzás I erősségére: $\ln(I_0/I) = \int_{\ell} f(x)dx$.

1960-as években **Allan McLeod Cormack** (orvos-matematikus) és **Sir Godfrey Newbold Hounsfield** (mérnök) egymástól függetlenül veszi észre, hogy a sugárzás fizikai és Radon matematikai formulái egy számítógép kapacitásával ötvözve testek belsejét engedi látni. Cormack a görög tomos(=szelet) és grafia(=rajz) szavakból alkotta meg a **tomográfia** szót. A számítógép miatt "**CT**(=computed tomograph)" a készülék neve. Az első CT-prototípusok elkészítéséért:

orvosi **Nobel-díj 1979** megosztva.





Készítünk egy sugárforrást (●) amely konstans I_0 erősségű (Röntgen-)sugarat bocsájt ki, és egy sugárzásmérőt (■).

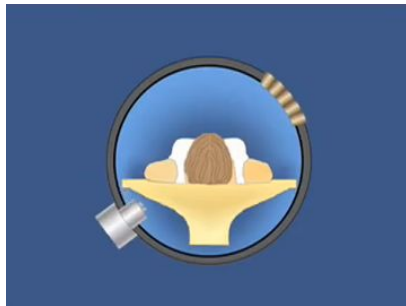
A vizsgálandó objektumot metsző minden egyenes egyik "végére" a sugárforrást, a másik "végére" pedig a sugárzásmérőt elhelyezve az adott egyenesen megkapjuk $\ln(I_0/I)$ értékét.

A mért értékekből interpoláljuk $\ln(I_0/I)$ értékét a többi egyenesre, így megkapjuk az anyagsűrűség hely szerinti f függvénye Rf Radon-transzformáltjának egy $E_\varepsilon Rf$ közelítését. A Radon-transzformáció R^* inverzét erre alkalmazva, egy olyan függvényhez jutunk, mely jól(?) közelítheti az f függvényt ($f \sim R^*E_\varepsilon Rf$).

Arra vonatkozólag, hogy a gyakorlatban megjelenő, voltaképpen alig ismert E_ε operátor mekkora matematikai és fizikaelméleti nehézségeket okoz, lásd [1]. Ennek dacára egy mai modern készülék nagyon gyors és némelyik akár mm pontosságú. Ezt az eredményt a sugarak és érzékelők számának valamint forgatásuk sebességének növelésével, továbbá sokkal nagyobb kapacitású számítógépek alkalmazásával éri el.

Sőt, tovább gyorsítható a szkennelés mozgó alkatrész nélkül: Advanced Electron Beam CT.

Innentől az E_ε operátort identikusnak tekintjük.



A “szép” $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvények igen sokféle módon kaphatók vissza a Radon-transzformáltjukból. Ilyen **inverzformulák** a mai napig születnek, mivel a különféle alkalmazásokban eltérő zajviszonyokra ezek változóan reagálnak. Egy inverzformula 1999-ből a következő.

Egy síkbeli egyenest meghatároz a $(p, \mathbf{u})$ pár, ahol p az origótól vett távolság, $\mathbf{u}$ pedig $(\cos \alpha, \sin \alpha)$. Ezért egy $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Rf Radon-transzformáltjának argumentuma megadható $(p, \mathbf{u})$ alakban.

Tétel [9]. Legyen $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, melyre $f(x, y) \sqrt{x^2 + y^2}^k$ korlátos minden $k \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor $f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} R^* F(x, y)$, ahol

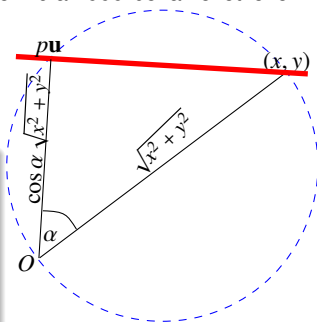
$$R^* F(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} F(\cos \alpha \sqrt{x^2 + y^2}, \mathbf{u}) d\alpha$$

és

$$F(t, \mathbf{u}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|t-p| > \varepsilon} \frac{\partial Rf(p, \mathbf{u})}{\partial p} \frac{dp}{t-p}$$

A feltételek fontosak, mert van olyan nem nulla C^∞ -függvény, melynek Radon-transzformáltja eltűnik.

Bár a matematika felkészült a térbeli tomográfia eljövételére, vagyis vannak magasabb dimenziós inverzformulái, melyek ráadásul numerikusan is jobbak, technológiai problémák miatt a CT-k továbbra is a síkmetszetek meghatározására koncentrálnak,



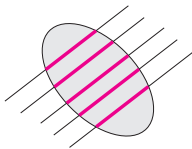
Az alkalmazások közelítési eljárásaiban fontos a nem Radon-transzformációból származó eltérések (zajok) kinullázása a mérési és közelítő eredményekből. Ez alapvetően fontossá teszi azon egyeneseken adott függvények meghatározását, amelyek valamely függvény Radon-transzformáltjai. Egy ilyen, azóta többször általánosított [13] eredmény 1938-ból a következő, melyben egy térbeli ℓ egyenest két $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ és $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ pontjával adunk meg, így az egyenesek halmazán adott F függvény paraméterezhető $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ alakban.

Tétel [10]. *A tér egyeneseinek halmazán adott differenciálható, gyorsan lecsengő F függvény akkor és csak akkor valamely a tér pontjain adott differenciálható, gyorsan lecsengő f függvény Radon-transzformáltja, ha*

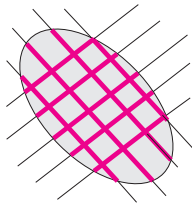
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial y_i} \right) \frac{F(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Nagy pontosságú képek készítéséhez sok adat kell, és ezek begyűjtése és feldolgozása is időigényes, ezért fontos a vizsgált tartományban lévő mozgó részeket a sugarakkal elkerülni. Ezt teszi lehetővé a következő 1960-as eredmény, mely síkon és térben is teljesül.

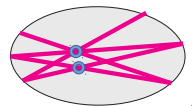
Tétel [9]. *Ha egy folytonos f függvényre $f(\mathbf{x})|\mathbf{x}|^k$ minden k természetes számra korlátos, és Rf minden olyan egyenesen nulla, amely az origótól valamely $p > 0$ számnál messzebb van, akkor f minden olyan pontban nulla, amely az origótól messzebb van, mint p .*



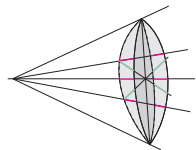
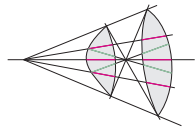
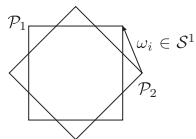
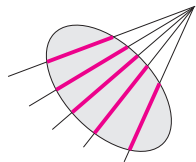
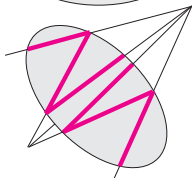
Legyen $\mathcal{K}$ egy konvex, korlátos tartomány a síkban. **Párhuzamos** illetve **pontbeli Röntgen-képének** nevezzük azt a függvényt, amely megadja egy adott iránnyal párhuzamos, illetve egy adott ponton átmenő ℓ egyeneseken a $\mathcal{K} \cap \ell$ **húr** hosszát.

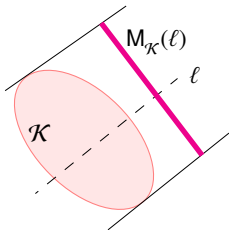


Habár bármely n természetes számhoz van két különböző poligon, melyek n irányból ugyanazt a párhuzamos Röntgen-képet adják, Gardner és McMullen igazolták [6], hogy létezik négy olyan jól megválasztott rögzített irány, hogy ha bármely két konvex tartománynak ezen négy irányból vett röntgenképe megegyezik, akkor egymás eltoltjai.

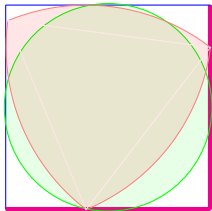
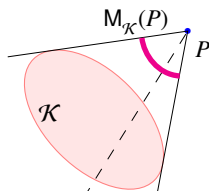


A pontbeli Röntgen-képek tekintetében jelentős nyitott kérdések vannak (lásd a jobboldali ábrákat), ugyanakkor Falconer bizonyította [4], hogy egy konvex tartományt meghatároz két olyan pontbeli Röntgen-képe, melynek pontjai egy a tartományt belső pontban metsző egyenesen vannak, és mindkettő belül esik a tartományon, vagy mindkettő kívül esik és a tartomány elválasztja őket.

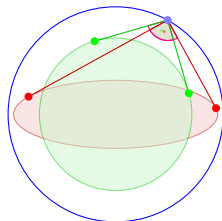




Egy konvex, korlátos $\mathcal{K}$ tartomány **szélességének** nevezzük a valamely ℓ egyenessel párhuzamos két érintő egyenesének $M_{\mathcal{K}}(\ell) \in [0, \infty)$ távolságát. **Látószögének** nevezzük a **külső** P pontból kiinduló, a $\mathcal{K}$ alakzatot érintő két félegyenes által bezárt szög $M_{\mathcal{K}}(P) \in [0, \pi)$ nagyságát.

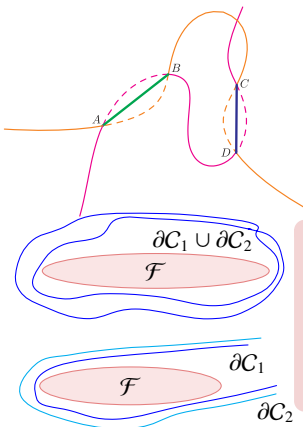


A Reuleaux-háromszög szélessége állandó, vagyis egyenlő egy alkalmas kör ugyancsak állandó szélességével. A szélesség tehát nem határozza meg a konvex tartományt. Az ellipszis a $\sqrt{a^2 + b^2}$ sugarú körrel állandó $\pi/2$ szög alatt látszik, amely körnek minden pontjából a $\sqrt{a^2 + b^2} / \sqrt{2}$ sugarú kör is $\pi/2$ szög alatt látszik.



Kérdés. Vajon egy konvex tartományt körülölelő két koncentrikus körön ismerve a konvex tartomány látószögét meghatározható a konvex tartomány?

Nitsche igazolta [19], hogy ha mindkét körön konstans a látószög, akkor a konvex tartomány egy körlap.



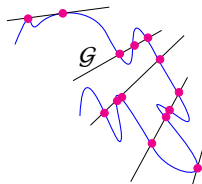
A $\mathcal{K}$ és $\mathcal{L}$ konvex korlátos tartományok **ekviptikusának** nevezzük a $\{P : M_{\mathcal{K}}(P) = M_{\mathcal{L}}(P)\}$ halmazt. Green bizonyította [8], hogy bármely kör lapnak sok-sok konvex tartománnyal vett ekviptikusa a körrel koncentrikus kör.

Egy szakasz két részének ekviptikusa az Apollóniosz-kör. Két szakasz ekviptikusa egy kubikus algebrai görbe, melyet **Apollóniosz-görbének** nevezünk.

Tétel [11, 12, 15]. Legyenek a síkban C_1 , C_2 , $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ zárt tartományok C^2 határral úgy, hogy $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ szigorúan konvex, kompakt és $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \subset C_1 \cap C_2$. Ha a ∂C_1 és ∂C_2 határgörbék (a) valamely pontban nem nulla szögben metszik egymást, vagy (b) valamely ideális pontban érintik egymást, és $\partial C_1 \cup \partial C_2$ része az $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ ekviptikusának, akkor $\mathcal{F}_1 \equiv \mathcal{F}_2$.

A térben a **látókúp alakja** (nem a helyzete!) és **mértéke** a síkkal ellentétben nem határozza meg egymást. **Csak pár dolgot tudunk:** ha a térben egy konvex test minden pontból gömbnek látszik, akkor az gömb [18], ha pedig ellipszisnek látszik, akkor ellipszoid [2]; ha a látókúp mértéke két gömbfelületen is konstans, akkor a test gömb [16].

A **térben a párhuzamos vetület** is több információt ad: Az $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) térben a középpontosan szimmetrikus konvex testeket meghatározza párhuzamos vetületének irány szerinti területfüggvénye [7, Alexandrov tétele: Theorem 3.3.6].



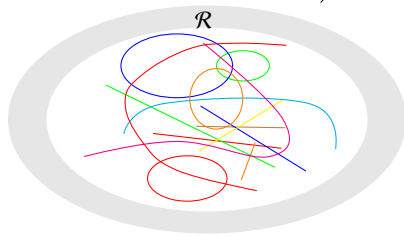
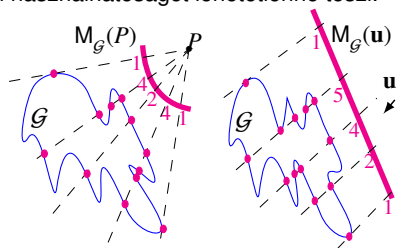
A $\mathcal{G}$ (multi)görbe **Crofton-transzformáltja** [3] az az egyenesek halmazán értelmezett $C\mathcal{G}$ függvény, mely minden ℓ egyenesre megadja a $C\mathcal{G}(\ell) = \#(\ell \cap \mathcal{G})$ metszésszámot. A $C\mathcal{G}$ Crofton-transzformált majdnem minden egyenesen véges, mert integrálja a görbe hossza [21]. A Crofton-transzformált az egyenes elmozdulására nagyon érzékeny, ami a gyakorlati használhatóságot lehetetlenné teszi.

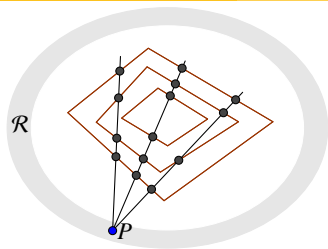
Véges sok görbe unióját (halmazát) **multigörbének** nevezzük. Egy $\mathcal{G}$ multigörbe **takarási száma** [17] a Crofton-transzformáltjának integrálja azonos irányú, vagy azonos ponton átmenő egyenesek halmazán:

$$M_{\mathcal{G}}(\mathbf{u}) = \int_{\ell \parallel \mathbf{u}} C\mathcal{G}(\ell) d\ell \quad \text{és} \quad M_{\mathcal{G}}(P) = \int_{\ell \ni P} C\mathcal{G}(\ell) d\ell.$$

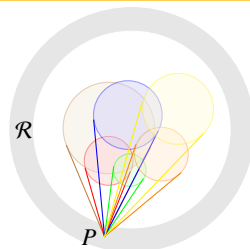
Az irány és pont szerinti takarási szám fele konvex görbe esetén a szélesség illetve a látószög. Szakasz pont szerinti takarási száma a látószöge.

Tétel [17]. Legyen $\mathcal{R}$ egy gyűrű, ami körbeveszi a $\mathcal{G}$ analitikus multigörbét, melynek görbülete a szakaszait kivéve nem nulla. Ha $M_{\mathcal{G}}$ ismert az $\mathcal{R}$ gyűrűn, akkor $\mathcal{G}$ rekonstruálható.





Tétel [17]. Az M_G akkor és csak akkor harmonikus a G multigörbét körbevevő R gyűrűn legfeljebb véges sok egyenes kivételével, ha G egy multiszakasz.



Tétel [17]. Az M_G takarási függvény akkor és csak akkor forgásinvariáns a G multigörbét körbevevő R gyűrűn, ha G egy koncentrikus körökből álló multikör.

Kérdés. *Hány* koncentrikus körön elegendő ismerni egy multiszakasz takarási számait, hogy meghatározható legyen? *Függ* a válaszul adott szám a multiszakaszban lévő szakaszok számától? *Hány* koncentrikus körön elegendő tudni a takarási függvény forgásinvarianciáját, hogy a konvex multigörbéről állíthassuk, hogy multikör?¹

További érdeklődés esetén a [geometriai tomográfia](#) területén Gardner [7], a [Radon-transzformáció](#) területén pedig Helgason [9] könyve ajánlott.

¹ (Nitsche szerint egy elemű multigörbéhez elegendő kettő kör.)



KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!

Bibliográfia szerző szerinti sorban I

- [1] Bagoly Zs., Csákány A., Hevesi L., Kiss Gy., Mag P. és Vella P., Tomográfia, *Elektronika laboratórium II.*, ELTE jegyzet, 1999-2001, Információtechnológiai Oktatási Laboratórium, url: <http://itl7.elte.hu/hlabdb/PDF/tomo.pdf>. $\langle 3 \rangle$
- [2] G. Bianchi and P.M. Gruber, Characterizations of ellipsoids, *Arch. Math.*, **49** (1987), 344–350; doi: [10.1007/BF01210721](https://doi.org/10.1007/BF01210721). $\langle 8 \rangle$
- [3] M. W. Crofton, Probability, *Encyclopaedia Britannica*, 9th ed., **19** (1885), 768–788; url: <http://www.1902encyclopedia.com/>. $\langle 9 \rangle$
- [4] K. J. Falconer, X-ray problems for point sources, *Proc. London Math. Soc.*, **46** (1983), 241–262; doi: [10.1112/plms/s3-46.2.241](https://doi.org/10.1112/plms/s3-46.2.241). $\langle 6 \rangle$
- [5] P. Funk, Über Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien, *Math. Ann.*, **74** (1913), 278–300; doi: [10.1007/BF01456044](https://doi.org/10.1007/BF01456044). $\langle 2 \rangle$
- [6] R. J. Gardner and P. McMullen, On Hammer's X-ray problem, *J. London Math. Soc.*, **21** (1980), 171–175; doi: [10.1112/jlms/s2-21.1.171](https://doi.org/10.1112/jlms/s2-21.1.171). $\langle 6 \rangle$
- [7] R. J. Gardner, *Geometric tomography*, Encyclopedia of Math. and its Appl. **58**, Cambridge University Press, Cambridge, 2006 (1996); url: <http://www.cambridge.org/>. $\langle 8, 10 \rangle$
- [8] J. W. Green, Sets subtending a constant angle on a circle, *Duke Math. J.*, **17** (1950), 263–267; doi: [10.1215/S0012-7094-50-01723-6](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-50-01723-6). $\langle 8 \rangle$
- [9] S. Helgason, *The Radon transform*, Progress in Mathematics **5**, Birkhäuser, Boston, 1999 (1980); pdf: url: <http://www-math.mit.edu/~helgason/Radonbook.pdf>. $\langle 4, 5, 10 \rangle$
- [10] F. John, The ultrahyperbolic differential equation with four independent variables, *Duke Math. J.*, **4:2** (1938), 300–322; doi: [10.1215/S0012-7094-38-00423-5](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-38-00423-5). $\langle 5 \rangle$

Bibliográfia szerző szerinti sorban II

- [11] Á. Kurusa, You can recognize the shape of a figure by its shadows!, *Geom. Dedicata*, **59** (1996), 103–112; doi: [10.1007/BF00155723](https://doi.org/10.1007/BF00155723). $\langle 8 \rangle$
- [12] Á. Kurusa, The shadow picture problem for nonintersecting curves, *Geom. Dedicata*, **59** (1996), 113–125; doi: [10.1007/BF00181528](https://doi.org/10.1007/BF00181528). $\langle 8 \rangle$
- [13] Á. Kurusa, A characterization of the Radon transform's range by a system of PDEs, *J. Math. Anal. Appl.*, **161** (1991), 218–226; doi: [10.1016/0022-247X\(91\)90371-6](https://doi.org/10.1016/0022-247X(91)90371-6). $\langle 5 \rangle$
- [14] Á. Kurusa, You can recognize the shape of a figure by its shadows!, *Geom. Dedicata*, **59** (1996), 103–112; doi: [10.1007/BF00155723](https://doi.org/10.1007/BF00155723). $\langle 8 \rangle$
- [15] Á. Kurusa, The shadow picture problem for parallel straight lines, *J. Geom.*, **103:3** (2012), 515–518; doi: [10.1007/s00022-012-0137-z](https://doi.org/10.1007/s00022-012-0137-z). $\langle 8 \rangle$
- [16] Á. Kurusa and T. Ódor, Isoptic characterization of spheres, *J. Geom.*, **106** (2015), 63–73; doi: [10.1007/s00022-014-0232-4](https://doi.org/10.1007/s00022-014-0232-4). $\langle 8 \rangle$
- [17] Á. Kurusa, Can you see the bubbles in a foam?, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **82:4-4** (2016), 663–694; doi: [10.14232/actasm-015-299-1](https://doi.org/10.14232/actasm-015-299-1). $\langle 9, 10 \rangle$
- [18] S. Matsuura, A problem in solid geometry, *J. Math. Osaka City Univ.*, **A 12** (1961), 89–95; url: <https://projecteuclid.org/euclid.ojm/1353054527>. $\langle 8 \rangle$
- [19] J. C. C. Nitsche, Isoptic characterization of a circle, (Proof of a conjecture of M.S. Klamkin), *Amer. Math. Monthly*, **97** (1990), 45–47; doi: [10.2307/2324004](https://doi.org/10.2307/2324004). $\langle 7 \rangle$

Bibliográfia szerző szerinti sorban III

- [20] J. Radon, Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, *Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse*, **69** (1917), 262–277; url: http://people.csail.mit.edu/bkph/courses/papers/Exact_Conebeam/Radon_Deutsch_1917.pdf;
P. C. Parks fordításában: On the determination of functions from their integral values along certain manifolds, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, **5:4**(1986), 170–176; doi: [10.1109/TMI.1986.4307775](https://doi.org/10.1109/TMI.1986.4307775). <2>
- [21] L. A. Santaló, *Integral Geometry and Geometric Probability*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004 és 1976; doi: [10.1017/CB09780511617331](https://doi.org/10.1017/CB09780511617331). <9>