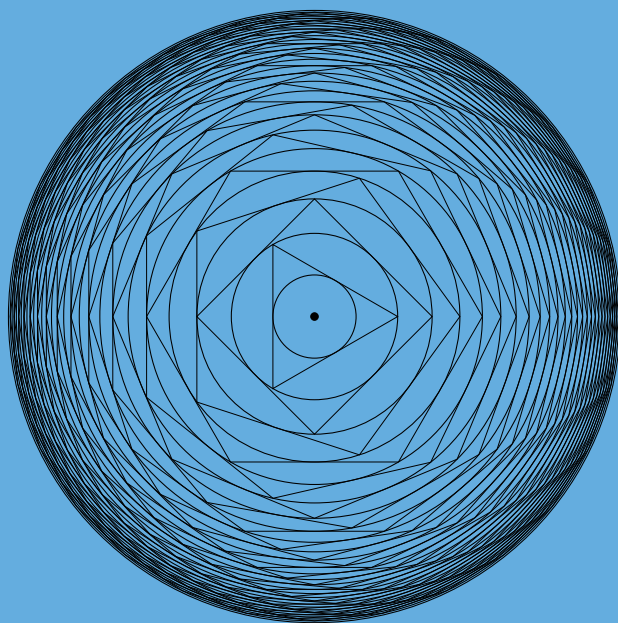


POLYGON

JEGYZETTÁR

Kurusa Árpád

Bevezetés a geometriába



POLYGON JEGYZETTÁR

Szerkeszti:
KURUSA ÁRPÁD

Lektorálta:
DR. KOZMA JÓZSEF

A könyv a Nemzeti Kulturális Alap támogatásával jelent meg.



A címlapi ábra egységnyi körrel indítva ábrázolja
a körök körülírt szabályos sokszögei köré írt köröket,
minden lépésben eggyel több oldalú sokszöggel.

ISSN 1417—0590

Kiadja az SZTE BOLYAI INTÉZET
a POLYGON jegyzetsorozataként

Felelős vezető: Kincses János főszerkesztő

Bolyai Intézet
Szeged, Aradi vértanúk tere 1., 6720
polygon@math.u-szeged.hu
<http://www.math.u-szeged.hu/polygon>

©Kurusa Árpád, 2008 – 2015.

Előszó

A könyv, amelyet az olvasó most a kezében tart, a 2008 márciusában elkészült és még ugyanazon évben meg is jelent *Euklidészi geometria* című könyv anyagának újragondolt, átrendezett, néhol kibővített, máshol szűkített új verziója. Célja változatlanul az, hogy pontos fogalmakon keresztül, csak a feltétlenül szükséges technikai apparátus bevetésével építse fel először az affin, majd erre építve az euklidészi geometriát, és azok fontos eredményeit.

Ennek érdekében a felépítés erős axiómákkal indul, amely lehetőséget teremt az affin geometria viszonylag gyors és pontos felépítésére úgy, hogy közben a *geometria* alapvető fogalmai és tételei tiszta logikai rendben kövessék egymást. A koordinátázás révén merülnek fel az affin transzformációk, végül természetesen jelennek meg a törött vonalak és a konvexitás alapismeretei.

Az euklidészi geometria először csak a síkon jelenik meg, mégpedig a „szokásos” metrikának az affin síkra való alkalmazásaként. Ez gyorsan vezet a dilatációk, tükrözések és izometriák alapos vizsgálatához. Végül a mozgások felhasználásával a szögek és szögmérések pontos elmélete, és a terület fogalmának precíz kidolgozása zárja a tárgyalást.

Felvértvezve az euklidészi sík rendszerének ismeretével, egy teljes fejezet foglalkozik annak geometriai **felfedezésével**. Ebben olyan klasszikus ismeretek is megjelennek, melyek egy része akár önállóan is érdeklődésre tarthat számot: ilyenek például a körtartó transzformációk, a kúpszeletek és a diszkrét mozgáscsoportok.

Az affin és az euklidészi teret csak ezek után és szinte csak a sík és tér különbségeire szorítkozó tárgyalás mutatja be. A megfelelő axiómarendszer a Desargues-tulajdonság alapos tárgyalása céljából jelenik meg, ezután az izometriák részletes ismertetése a síkbeli analógiákra épít. A politópok és szabályos testek után a térfogat fogalma kerül terítékre. Ez utóbbi összevetése a területméréssel megmutatja az alapvető eltéréseket, és elvezet a vektoriális szorzáshoz.

A magasabb dimenziós valós affin tereknek a valós vektorterekből való felépítésének erőteljes algebrai formalizmusát a szorosan kapcsolódó konvex geometriai témák, majd a külön fejezetben tárgyalt **affin metrikák** töltik fel egyre több geometriai tartalommal.

A **Függelék**ben néhány olyan, bevezető tankönyvekben általában nem szokásos téma kerül elő, melyek a szűken értelmezett bevezetéshez nem szükségesek, de jól mutatják, hogy milyen további kérdések merülhetnek fel. Ugyanakkor a felépítéshez szükséges néhány más jellegű téma is a **Függelék**be került. Ennek esetenként eltérő oka lehet: vagy a bevezetés logikáját megtörő ismereteket tartalmaznak, vagy csak az olvasó kényelmét szolgálják.

A könyv megírásakor számos forrásmunkára támaszkodtam, ezekre hivatkozások az irodalomjegyzékben található. Igyekeztem szabványos terminológiát, definíciókat és jelöléseket használni, ami arra vezetett, hogy a nemzetközi konvencióhoz igazodva az *Euklidészi geometria* című könyv dilatáció és homotécia fogalmainak elnevezését felcseréljem.¹

Ez a könyv a korábbi T_EX-rendszer helyett már egy jóval korszerűbb L^AT_EX-rendszerrel készült, az ábrákat pedig a T_ikZ rajzolja. Ez lehetővé tette a tételek és hivatkozások összerendelését, és alapot teremtett a későbbi esetleges elektronikus terjesztéshez.

A könyvben szereplő geometriai gondolatmenet további útja iránt érdeklődőknek ajánlom figyelmébe a „Nemeuklidészi geometriák”, majd a „Bevezetés a differenciálgeometriába” című könyveimet, amelyekből kerek képük alakulhat ki a klasszikus, konstans görbületű geometriákról.

Ahogy minden eddigi könyvem esetében is, a nyomtatás után felfedezett hibák, korrekciók és szükségesnek vélt kiegészítések is elérhetők lesznek a <http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa> lapomon.

Köszönettel tartozom az *Euklidészi geometria* bevezetőjében már említett segítőimnek túl Kozma Józsefnek, aki az ábrák mintegy harmadának gondos és precíz elkészítésével sokat javított a könyv külalakján, lektorként pedig mindent megtett, hogy csökkentse a minden könyvbe óhatatlanul bekerülő hibák számát.

Hálás vagyok feleségemnek és gyermekeimnek, hogy türelemmel viselték elvonultságomat.

Szeged, 2014. szeptember 19. – 2015. március 27.

dr. Kurusa Árpád

¹Felmerült, hogy a magyar hagyományokat követve inkább a (centrális) hasonlósági transzformáció kifejezést használjam, de úgy véltem, a hasonlósági reláció, a hasonlóság és a hasonlósági transzformáció fogalmainak a mai geometriai nyelvzetben tapasztalható keveredését nehezebb lenne tisztázni, mint inkább e viszonylag új és nemzetközibb szavakat használni.

Tartalomjegyzék

Előszó	i
Tartalomjegyzék	iii
1. Affin sík	1
1.1. A sík axiómái	3
1.2. Vektorok konstruálása	10
1.2.1. Szabad vektorok	13
1.2.2. Helyvektorok	25
1.3. Koordinátázások és transzformációk	27
1.4. Kollineációk	35
1.5. Valós affin sík	41
1.6. Törött vonalak, sokszögek és konvexitás	47
2. Euklidészi sík	57
2.1. Dilatációk	65
2.2. Tengelyes tükrözés	68
2.3. Izometriák	72
2.4. Egybevágóság és hasonlóság	80
2.5. Szögek és mérésük	82
2.6. Szögfüggvények és trigonometria	98
2.7. Terület és területformák	102
3. A sík felfedezése	113
3.1. Illeszkedési tételek	113
3.2. Dilatációkról bővebben	116
3.3. Háromszögek szögei és oldalai	121
3.4. Háromszögek nevezetes pontjai	125
3.5. Másodrendű görbék a síkon: kúpszeletek és kúpok szeletei	128
3.6. Körök, szögek és körtartó transzformációk	145
3.7. Inverzió	152
3.8. Transzformációcsoportok és szabályos pontrendszerek	155

4. A tér geometriája	167
4.1. A tér axiómái	167
4.2. Koordinátázások és transzformációk	174
4.3. Euklidészi tér	179
4.4. Konvex politópok: Euler formulája	191
4.5. Térfogat, térfogatformák és vektoriális szorzás	194
4.6. Vektorok szorzásai a térben	200
5. Affin geometria	203
5.1. Véges dimenziós affin geometriák	203
5.2. Konvexitás, konvex burok	211
5.3. Konvex politópok és poliéderek	217
6. Affin metrikák	223
6.1. Minkowski-metrikák	227
6.2. Euklidészi metrika	236
6.3. Tükrözéses metrikák	239
6.4. Ptolemaioszi metrika	246
6.5. Ellipszis karakterizációk	249
F. Függelék	253
F.1. Egy nem Desargues-tulajdonságú affin sík	253
F.2. Vektortér, norma, euklidészi és belső szorzás	262
F.3. Metrikus tér, folytonosság, teljesség és kontrakciók	266
F.4. Normák és indukáltságok	271
F.5. Alternáló formák: determináns	274
F.6. Konvex halmazok elválasztása	279
F.7. Görbék és hosszuk	284
F.8. Valós szögfüggvények	286
F.9. Additivitás és homogenitás	290
F.10. Az algebra néhány alapfogalma	293
F.11. Valóság és geometria	294
Irodalomjegyzék	299
Jelölések és konvenciók	301
Név- és tárgymutató	303

Irodalomjegyzék

- [1] M. Aigner és G. M. Ziegler, *Bizonyítások a Könyvből*, Typotex, Budapest, 2009.
- [2] D. Amir, *Characterizations of Inner Product Spaces*, Birkhäuser, Basel, 1986.
- [3] Niels Bohr, *Atomfizika és emberi megismerés*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1964.
- [4] V. G. Boltjanskij és I. C. Gohberg, *Alakzatok felbontása kisebb részekre*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1976.
- [5] H. Busemann, *The geometry of geodesics*, Academic Press, New York, 1955.
- [6] R. Courant és H. Robbins, *Mi a matematika?*, Gondolat, Budapest, 1966.
- [7] H. S. M. Coxeter, *A geometriák alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.
- [8] H. S. M. Coxeter és S. L. Greitzer, *Az újra felfedezett geometria*, Gondolat, Budapest, 1977.
- [9] Euklidész, *Elemek*, Gondolat, Budapest, 1983.
- [10] Clark Kimberling, *Encyclopedia of triangle centers*, University of Evansville, <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/>.
- [11] Fried Ervin, *Klasszikus és lineáris algebra*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.
- [12] Gehér László, *Bevezetés a geometriába*, Egyetemi előadások, Szeged, 1981 és 1982.
- [13] Gyémánt Iván és Görbe Tamás F., *Lineáris algebra fizikusoknak*, Polygon, Szeged, 2011.
- [14] Hajós György, *Bevezetés a geometriába*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.
- [15] D. Hilbert és S. Cohn-Vossen, *Szemléletes geometria*, Gondolat, Budapest, 1982.
- [16] I. M. Jaglom és Boltjanskij, *Konvex alakzatok*, Polygon, Szeged, 2011.
- [17] N. D. Kazarinoff, *Geometriai egyenlőtlenségek*, Gondolat, Budapest, 1980.
- [18] Kérchy László, *Bevezetés a véges dimenziós vektorterek elméletébe*, Polygon, Szeged, 1997.
- [19] Kincses János, *Bevezetés a geometriába*, Egyetemi előadás-vázlatok, Szeged, 2000.
- [20] Kiss György és Szőnyi Tamás, *Véges geometriák*, Polygon, Szeged, 2001.
- [21] A. Kostovskii, *Geometrical constructions with compasses only*, MIR, Moscow, 1986.
- [22] A. G. Kuros, *Felsőbb algebra*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.

- [23] Kurusa Árpád, *Bevezetés a differenciálgeometriába*, Polygon, Szeged, 1999.
- [24] Kurusa Árpád, *Nemeuklidészi geometriák*, Polygon, Szeged, 2009.
- [25] Laczkovich Miklós, *Sejtés és bizonyítás*, 2. kiadás, Typotex, Budapest, 2010.
- [26] Lánosz Kornél, *A geometriai térfogalom fejlődése*, Gondolat, Budapest, 1976.
- [27] Móricz Ferenc, Az $\sqrt[n]{N}$ (amikor nem egész), e és π számok irracionálisok, *Polygon*, **XV/1** (2006), 25–42.
- [28] Moussong Gábor, *Geometria*, ELTE TTK & Typotex, Budapest, 2014.
- [29] Nagy Gábor, *Transzformációcsoportok*, Jegyzetvázlat, Szeged, 2001.
- [30] Nagy Gábor, *Koordinátageometria*, Jegyzetvázlat, Szeged, 2002.
- [31] Reimann István, *A geometria és határterületei*, Gondolat, Budapest, 1986.
- [32] W. Rudin, *A matematikai analízis alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.
- [33] Simonyi Károly, *A fizika kultúrtörténete a kezdetektől a huszadik század végéig*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2011.
- [34] Szabó László, *Bevezetés a lineáris algebrába*, Polygon, Szeged, 2003.
- [35] Szabó László, *Kombinatorikus geometria és geometriai algoritmusok*, Polygon, Szeged, 2003.
- [36] Szabó Zoltán, *Bevezető fejezetek a geometriába 1. kötet*, JATE Jegyzet, Szeged, 1982; http://www.math.u-szeged.hu/Geo/_site/index.php/download/category/57 .
- [37] Szabó Zoltán, *Geometriai transzformációk - Kurzus példatár*, JATE, Szeged, 1982; http://www.math.u-szeged.hu/Geo/_site/index.php/download/category/57 .
- [38] Szendrei Ágnes, *Diszkrét matematika*, Polygon, Szeged, 1996.
- [39] Szőkefalvi Nagy Gyula, *A geometriai szerkesztések elmélete*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968.
- [40] Szőkefalvi-Nagy Gyula, Gehér László és Nagy Péter, *Differenciálgeometria*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.
- [41] Szőnyi Tamás, Note on planar functions over the reals, *Note di Matematica*, **X** (1990), 59–65.
- [42] A. C. Thompson, *Minkowski geometry*, Cambridge UP, Cambridge, 1996.
- [43] Vigassy Lajos, *Egybevágósági transzformációk a síkban és a térben*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.

A geometriát Euklidész kora óta művelik és oktatják. A XXI. század elején hozzávetőlegesen már a 150-edik diákgeneráció tesz gyakran erőfeszítéseket igénylő, de mindig izgalmas utazásokat ebben a csodálatos világban.

Ez a könyv nem viszi vissza a mai olvasót a régi görögökhöz, de szembeesít a szisztematikus felépítés szükségességének két és fél évezredes igényével, miközben a geometria régi és modern fejezeteinek egységes tárgyalását adja.

Az erős axiómákból kiindulva az olvasó maga építheti fel az affin sík geometriáját, hogy aztán néhány további lépés megtételével rácsodálkozhasson a korábbi tanulmányaiból már ismert euklidészi geometriára. Ebben a koordinátázás kétszeresen is segíti: egyrészt utat nyit az alapvető transzformációk, mint az affinitások és izometriák definiálásához és tulajdonságainak feltárásához, másrészt lehetővé teszi a legváltozatosabb konfigurációk és alakzatok, mint a háromszögek, a kúpszeletek és konvex politópok tanulmányozását számítások révén.

Amikor I. Ptolemaiosz király arról kérdezte a nagy matematikust, hogyan lehetne a geometriát könnyen elsajátítani, Proklosz szerint Euklidész így felelt: „a geometriához nem vezet királyi út”.

Ez a könyv sem kínál királyi utat, de a figyelmes és alapos olvasót biztosan elvezeti a geometria legfontosabb fogalmainak és tételeinek megismeréséhez.