

Kurusa Árpád

Topológiai alapismeretek



Kurusa Árpád

Topológiai alapismeretek

A címlapon egy Möbius-szalag látható,
ami az újrahasznosítás nemzetközi jele.

Ez a dokumentum

- nem köztulajdon,
- kizárólag személyes használatra tölthető le,
- másolása, sokszorosítása és terjesztése tilos,
- bemutatása, előadása vagy felhasználása más műhöz kizárólag jelen dokumentum pontos megnevezésével (szerző, cím, megjelenés éve) és a publikáció oldalra mutató url (nem a közvetlen letöltési link) megadásával engedélyezett,
- semmilyen módon sem módosítható, nem készíthető belőle se átdolgozás, se származékos mű, és
- nem használható fel kereskedelmi célra.



Előszó

Jelen jegyzet létrejöttét a topológiai alapismereteknek a matematika alapképzésből való kimaradása, a matematikai mester szakokon való nélkülözhetetlensége, valamint hirtelen támadt érdeklődésem indokolja. Létrejöttéhez nagyban hozzájárult 2009 őszének néhány szorgalmas és türelmes matematikus szakos MSc hallgatója, akiknek elvárásai komoly motivációt biztosítottak számomra.

A jegyzet írásakor leginkább Gehér László tanárom egyetemi topológiai előadásának arra a részére támaszkodtam, amire még emlékszem :-). A felmerülő hézagokat saját kútfőből próbáltam pótolni, majd ha az nehezebbnek tűnt, mint amennyi időm a kitöltésére volt, akkor a területen rendelkezésre álló számos forrásmunkák közül az akkor gondolataimhoz legjobban illeszkedőt használtam.

Gondot okozott a metrikus tér, ami szerintem a topológia ihletője és legfontosabb példája, fogalmának beillesztése az amúgy absztraktnak szánt tárgyalásba. Ezzel nem voltam, nem vagyok és alighanem soha nem is leszek elégedett, tehát e tekintetben nyilván többször is változni fog a tartalom és nem biztos, hogy mindig a jó irányba.

Az irodalomjegyzék alakulása is elég hektikusnak mondható, de belekerültek nem csak a tárgyalt anyaggal kapcsolatos, hanem azon túlmutató irodalmi utalások is. Igyekeztem szabványos terminológiát, definíciókat és jelöléseket használni, de ez biztosan nem mindig sikerült, ezért ezen a téren is folyamatos változások lesznek. Remélem legalább a jelölések következetességével nincs probléma. :-)

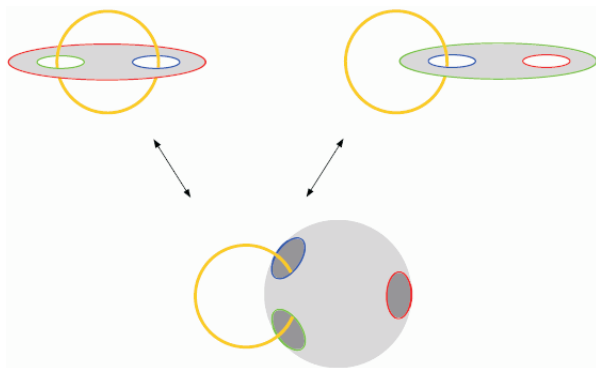
Céлом mindössze annyi volt, hogy rögzítsem mindazt, amit ma a topológiáról *minimum* tudnia kell egy matematikával komolyan foglalkozni kívánó hallgatónak.

Másfelől ez a jegyzetecske helyet teremt arra, hogy a számomra időnként felmerülő topológiai ügyeket a helyükre tegyem, így várhatólag ez az anyag rendszeresen pontosodik és bővül majd.

Az nem cél, hogy ez az anyag valaha is teljesen véglegesedjen (habár egyszer biztosan „abba lesz hagyva” :-), ezért várható, hogy mindig lesznek benne félbehagyott gondolatok, vagy akár kisebb hiányosságok is, amelyekre felhívó leveleket észrevételeket bármikor szívesen fogadok.

Nagyon kevés az ábra, mert ábrát rajzolni nehéz, és még nehezebb ha jó ábrát kell készíteni. Hogy mennyire sokat tud mondani egy ábra, arra a következő, szemlé-

letünket alaposan meglepő megoldású feladat a példa: Egy vékony, de tetszőlegesen nyújtható és összenyomható gumilapon van két lyuk, melyeken át egy fém karika halad. A kérdés az, hogy van-e lehetőség vágás és szakítás nélkül olyan helyzetbe hozni ezeket, melyben a karika már csak egy lyukon megy keresztül. Az alábbi ábra megmutatja mit kell tenni.



A megoldás az ábra alapján azonnal világos, de szavakkal aligha lehetne röviden leírni ;-).

Köszönöm Horváth Erika és Biténé Tilinkó Ágnes segítségét a kezdeti anyag egy részének gépelésében.

A 2020. április 30-ai verzió létrejöttében alapvető szerepet játszott a SARS-CoV-2 vírus miatt 2020-ban kialakult COVID-19 világjárvány elfojtására alkalmazott közösségi távolságtartás, továbbá Lukács Péter PhD hallgató alapos megjegyzései. Sajnos a „fejlesztés” ezúttal is csak abbamaradt, az anyag vége felé bőven vannak töredezett szövegrészek.

Szeged, 2009.12.21., 2010.01.28-03.19., 2013.01.02, 2020.03.20-04.30.

dr. Kurusa Árpád

P.s.: Minden olvasót kérek, hogy ha bármilyen hibát vagy hiányosságot talál e jegyzetben, még a legegyszerűbbet is, jelezze a kurusa@math.u-szeged.hu elektronikus levelezési címemre. A már felfedezett hibákat valamint a szükséges kiegészítéseket a <http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa> weboldalamon folyamatosan közzéteszem, illetve átviszem eme eJegyzet anyagába.

Tartalomjegyzék

Előszó	i
Tartalomjegyzék	iii
1. A halmazelméleti topológia alapjai	1
1.1. Topológia definiálása	1
1.2. Topológiák megadása	3
1.3. Halmazok és pontjaik típusai	7
1.4. Fedések	10
1.5. Folytonosság és homotópia	15
1.6. Valósértékű folytonos függvények	22
1.7. Összefüggőség	26
1.8. Fundamentális csoport	33
2. Topológiai struktúrák	39
2.1. Hausdorff-terek és kompaktság	39
2.2. Metrikus terek topológiája	42
2.3. Kompakt metrikus terek folytonos függvényeinek tere	53
2.4. Topologikus csoportok topológiája	57
2.5. A kör és a gömb topológiája	64
2.6. Görbék topológiája	73
2.7. Topologikus sokaságok	76
F. Függelék	81
F.1. Kiválasztási axióma és ekvivalens formái	81
F.2. Halmazok Baire-féle osztályozása	82
F.3. Halmazosztályok δ -, σ -bővítései	84
F.4. Weierstrass approximációs tétele	86
Irodalomjegyzék	91
Jelölések és konvenciók	93
Név- és tárgymutató	95
Tennivalók listája	99

1

A halmazelméleti topológia alapjai

1.1. Topológia definiálása

Definíció. Az $\mathcal{X}$ halmazt részhalmazainak egy $\mathfrak{T}$ rendszerével együtt *topologikus térnek* nevezzük, ha

- (1) $\emptyset \in \mathfrak{T}$ és $\mathcal{X} \in \mathfrak{T}$;
- (2) $\mathcal{U} \in \mathfrak{T}$ és $\mathcal{V} \in \mathfrak{T}$ esetén $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in \mathfrak{T}$;
- (3) ha $\mathcal{U}_i \in \mathfrak{T}$ valamely $\mathcal{I}$ halmaz minden $i \in \mathcal{I}$ elemére, akkor $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{U}_i \in \mathfrak{T}$.

A (2) feltételt, mely formálalgebrai értelemben a metszésre való zárttságot jelenti, szokás *végismetszet-tulajdonságnak* nevezni, ugyanis abból nem következik, hogy végtelen sok $\mathfrak{T}$ -beli halmaz metszete is $\mathfrak{T}$ -beli. A (3) feltétel esetében az unióképzésre való zártaságról beszélünk, habár ez jóval erősebb, mint az algebrai zárttság.

Az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus térben a $\mathfrak{T}$ elemeit *nyílt halmaznak*, a nyílt halmazok $\mathfrak{T}$ rendszerét pedig *topológiának* nevezzük. Az $\mathcal{X}$ *alaphalmaz* elemeit kényelmi okok miatt *pontoknak* mondjuk.

Világos, hogy egy halmaz az összes részhalmazával topologikus teret alkot, de ugyanilyen *triviális topologikus teret* kapunk, ha csak az alaphalmazt és az üres halmazt tekintjük nyíltnak. Előbbit *diszkrét*, utóbbit *antidiszkrét* topológiának nevezzük. Általában persze az alaphalmazról ezeknél több információt hordozó topológiát érdemes vizsgálni.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{X}$ halmazon a $\mathfrak{T}_1$ topológia *erősebb*, *bővebb*, vagy *finomabb*, mint a $\mathfrak{T}_2$ topológia, ha $\mathfrak{T}_1 \supset \mathfrak{T}_2$.

Ha a $\mathfrak{T}_2$ topológiája erősebb, mint a $\mathfrak{T}_1$ topológia, azt úgy is kifejezhetjük, hogy $\mathfrak{T}_1$ *gyengébb*, *szűkebb*, vagy *durvább*, mint $\mathfrak{T}_2$. A topológiák erősség szerinti rendezését $(\mathcal{X}, \mathfrak{T}_1) < (\mathcal{X}, \mathfrak{T}_2)$ jelöli, ha $\mathfrak{T}_1 \subset \mathfrak{T}_2$. Világos, hogy egy adott alaphalmazon a diszkrét topológia a legerősebb, az antidiszkrét pedig a leggyengébb topológia.

A valós számok $\mathbb{R}$ halmazán például a $\mathfrak{T}_0 = \{(-t, t) : 0 < t\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ egy igen durva topológia. Ennél jóval finomabb topológiát kapunk, ha a $\{(x, y) : x < y, x, y \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ halmaz elemei összes lehetséges uniójának $\mathfrak{T}$ halmazát tekintjük. Az érdeklődő olvasó könnyen igazolhatja, hogy ez topológia. Ezt a topológiát a valós számok *természetes topológiájának* nevezzük és rendszerint nem tüntetjük fel.

Definíció. Az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus térben a $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}$ részhalmazt *zártnak* mondjuk, ha a $\overline{\mathcal{Z}} := \mathcal{X} \setminus \mathcal{Z}$ *komplementer halmaza* nyílt, vagyis $\overline{\mathcal{Z}} \in \mathfrak{T}$.

A zárt halmazok halmazára a $\overline{}$ jelölést használjuk.

Tétel. Az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus térben

- (1) $\emptyset, \mathcal{X} \in \overline{\mathfrak{T}}$;
- (2) ha $\mathcal{Y}, \mathcal{Z} \in \overline{\mathfrak{T}}$, akkor $\mathcal{Y} \cup \mathcal{Z} \in \overline{\mathfrak{T}}$;
- (3) ha valamely $\mathfrak{I}$ halmaz minden $i \in \mathfrak{I}$ elemére $\mathcal{Z}_i \in \overline{\mathfrak{T}}$, akkor $\bigcap_{i \in \mathfrak{I}} \mathcal{Z}_i \in \overline{\mathfrak{T}}$.

Bizonyítás. Nyilván $\emptyset, \mathcal{X} \in \overline{\mathfrak{T}}$, hiszen $\overline{\emptyset} = \mathcal{X} \in \mathfrak{T}$ és $\overline{\mathcal{X}} = \emptyset \in \mathfrak{T}$. Az (1) állítást igazolja, hogy $\overline{\mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}} = \overline{\mathcal{Y}} \cap \overline{\mathcal{Z}} \in \mathfrak{T}$. A (2) állítást igazolja, hogy $\overline{\bigcap_{i \in \mathfrak{I}} \mathcal{Z}_i} = \bigcup_{i \in \mathfrak{I}} \overline{\mathcal{Z}_i} \in \mathfrak{T}$. ■

Mint hogy a nyílt halmazok csak véges sok metszésre, a zárt halmazok pedig csak véges sok unióra zártak, érdemes bevezetni a komplementer-képzéssel egymásba alakuló alábbi fogalmakat.

Definíció. Megszámlálható sok nyílt halmaz metszetét G_δ -*halmaznak*, megszámlálható sok zárt halmaz unióját pedig F_σ -*halmaznak* mondjuk.

Világos, hogy minden G_δ -halmaz komplementere F_σ -halmaz, és fordítva, minden F_σ -halmaz komplementere G_δ -halmaz, továbbá megszámlálható sok G_δ -halmaz metszete G_δ -halmaz és megszámlálható sok F_σ -halmaz uniója F_σ -halmaz. Ugyanakkor megszámlálható sok G_δ -halmaz uniója már nem feltétlenül G_δ -halmaz (erre a Függelék F.3 szakaszának vége mutat példát).

A topológia szeparációs tulajdonságait az alábbi, más helyeken néha másképpen sorszámozott vagy fogalmazott, *szétválasztási axiómák* fogalmazzák meg. Egy adott pontot tartalmazó nyílt halmazt a *pont környezetének* nevezünk. A pont egy környezetét tartalmazó zárt halmazokat *pont zárt környezeteinek* hívjuk.

T_0 (*Kolmogorov*) Minden pontpár legalább egyik elemének van a másikat nem tartalmazó környezete;

T_1 Minden pontpár mindkét elemének van a másikat nem tartalmazó környezete;

T'_1 Minden pont komplementere nyílt, vagyis minden pont zárt halmaz;

T_2 (*Hausdorff*) Minden pontpár elemei szétválaszthatóak diszjunkt környezetekkel;

T_3 Egy pont és egy őt nem tartalmazó zárt halmaz szétválasztható diszjunkt környezetekkel;

T'_3 Minden pont minden környezetében létezik a pontnak zárt környezete is;

T_4 Két diszjunkt zárt halmaz szétválasztható diszjunkt környezetekkel;

T'_4 Minden zárt halmaznak minden környezetében létezik zárt környezete is.

1.1.15
Példák?

Általában egy topologikus teret T_i -térnek hívunk, ha teljesíti a T_i axiómát.

Tétel. Egy $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus téren

- (1) T_1 akkor és csak akkor teljesül, ha T'_1 is teljesül,
- (2) T_3 akkor és csak akkor teljesül, ha T'_3 is teljesül, és
- (3) T_4 akkor és csak akkor teljesül, ha T'_4 is teljesül.

Továbbá

- (4) ha T_2 teljesül, akkor T_1 is,
- (5) ha T_1 teljesül, akkor T_0 is;

Bizonyítás. Itt csak néhány állítást igazolunk, a többi az olvasóra marad.

(1 : $T_1 \Rightarrow T'_1$) Tekintsünk egy tetszőleges $X \in \mathcal{X}$ pontot, és tetszőleges $Y \neq X$ pontra jelöljön $\mathcal{U}_Y$ egy olyan, az Y pontot tartalmazó nyílt halmazt, amely nem tartalmazza az X pontot. Ekkor $\{X\} = \mathcal{X} \setminus \bigcup_{Y \in \mathcal{X}} \mathcal{U}_Y$, ami igazolja, hogy $\{X\}$ zárt halmaz.

(1 : $T'_1 \Rightarrow T_1$) Az $\mathcal{X} \setminus \{X\}$ nyílt halmaz minden, az X ponttól különböző pontot elválaszt az X ponttól.

(3 : $T_4 \Rightarrow T'_4$) Ha $\mathcal{Z}$ és $\overline{\mathcal{N}}$ zárt halmazok diszjunktak, akkor T_4 értelmében léteznek olyan diszjunkt nyílt $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{T}$ halmazok, melyekre $\mathcal{Z} \subset \mathcal{U}$ és $\overline{\mathcal{N}} \subset \mathcal{V}$. Ekkor $\mathcal{Z} \subset \mathcal{U} \subset \overline{\mathcal{V}} \subset \mathcal{N}$, ami bizonyítja az állítás „csak akkor” részét, hiszen $\overline{\mathcal{V}}$ zárt környezet az $\mathcal{N}$ környezetben.

(3 : $T_4 \Leftarrow T'_4$) A zárt $\mathcal{Z}, \mathcal{Y} \in \mathfrak{T}$ halmazok legyenek diszjunktak. Ekkor $\mathcal{Z} \subset \overline{\mathcal{Y}}$ és így T'_4 szerint létezik olyan nyílt $\mathcal{U}$ és zárt $\mathcal{V}$ halmaz, melyre $\mathcal{Z} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{V} \subset \overline{\mathcal{Y}}$. Eszerint $\mathcal{Z} \subset \mathcal{U}$, $\mathcal{Y} \subset \overline{\mathcal{V}}$ és nyilván $\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}} = \emptyset$, ami bizonyítja az állítás „akkor” részét. ■

Definíció. Egy $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus teret

- Hausdorff-térnek nevezünk, ha teljesíti a T_2 axiómát,
- Kolmogorov-térnek mondunk, ha teljesíti a T_0 axiómát,
- regulárisnak hívunk, ha $\mathfrak{T} \in T_1 \cap T_3$, és
- normálisnak nevezünk, ha $\mathfrak{T} \in T_1 \cap T_4$.

Világos, hogy a normális terek regulárisak, a reguláris terek pedig Hausdorffak, de vannak Kolmogorov-terek, amelyek nem T_1 -terek, és vannak olyan T_1 -terek, amelyek nem Hausdorff-terek.

1.2. Topológiák megadása

Ha adott egy topologikus tér, akkor könnyen definiálható annak megfelelő részhalmozata is topológia.

Tétel. Ha egy $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus tér alaphalmazának $\mathcal{Y}$ egy részhalmaza, akkor $(\mathcal{Y}, \{\mathcal{Y} \cap \mathcal{U} : \mathcal{U} \in \mathfrak{T}\})$ is topologikus tér.

Bizonyítás. Igazolnunk kell a topologikus tér definíciójának feltételeit az $(\mathcal{Y}, \mathfrak{T}')$ rendszerre, ahol $\mathfrak{T}' = \{\mathcal{Y} \cap \mathcal{U} : \mathcal{U} \in \mathfrak{T}\}$.

Világos, hogy $\emptyset, \mathcal{Y} \in \mathfrak{T}'$, tehát az (1) feltétel teljesül.

A (2) feltételt igazolja, hogy $\mathcal{U}', \mathcal{V}' \in \mathfrak{T}'$ esetén valamely $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{T}$ nyílt halmazokra $\mathcal{U}' = \mathcal{Y} \cap \mathcal{U}$ és $\mathcal{V}' = \mathcal{Y} \cap \mathcal{V}$, amiért $\mathcal{U}' \cap \mathcal{V}' = (\mathcal{Y} \cap \mathcal{U}) \cap (\mathcal{Y} \cap \mathcal{V}) = \mathcal{Y} \cap (\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \in \mathfrak{T}'$.

Hasonlóan érvelünk a (3) feltétel ügyében is, ugyanis ha valamely $\mathfrak{I}$ halmaz i elemeire $\mathcal{U}'_i \in \mathfrak{T}'$, akkor valamely $\mathcal{U}_i \in \mathfrak{T}$ halmazra $\mathcal{U}'_i = \mathcal{Y} \cap \mathcal{U}_i$, amiért $\bigcup_{i \in \mathfrak{I}} \mathcal{U}'_i = \bigcup_{i \in \mathfrak{I}} (\mathcal{Y} \cap \mathcal{U}_i) = \mathcal{Y} \cap (\bigcup_{i \in \mathfrak{I}} \mathcal{U}_i) \in \mathfrak{T}'$. ■

Az alaphalmaz valamely részhalmazán a tétel által megadott topológiát *relatív topológiának* vagy *örökölt topológiának* nevezzük. A jelölés pontosságát alig, ugyanakkor a hosszát érdemben csökkentve, a relatív topológiát ugyanazzal a betűvel adjuk meg, mint az alaphalmazon adottat, vagyis $(\mathcal{Y}, \mathfrak{T}) := (\mathcal{Y}, \{\mathcal{Y} \cap \mathcal{U} : \mathcal{U} \in \mathfrak{T}\})$, ahol a $\mathfrak{T}$ elemei nem feltétlenül $\mathcal{Y}$ részhalmazai.

Tetszőleges $\mathcal{X}$ halmazon általában nem ilyen egyszerű egy topológia megadása, ám kihasználva a nyílt halmazok halmazának az unióképzéssel szembeni zártságát, a topológia megadásához szükséges részhalmazok számát jelentősen csökkenthetjük.

Definíció. Az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus térben a $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$ részhalmaz-rendszert a $\mathfrak{T}$ topológia *bázisának* nevezzük, ha $\mathfrak{T}$ minden eleme előáll a $\mathfrak{B}$ halmaz megfelelő elemeinek uniójaként.

Félreértések elkerülése végett jó ha megjegyezzük, hogy ez a bázisfogalom jelentősen eltér a lineáris algebrában megszokottól, ahol csak a legszűkebb generáló részhalmazokat nevezzük bázisnak. Azt is jegyezzük meg, hogy $\mathfrak{T}$ maga is bázisa önmagának.

A valós számok halmaza természetes topológiájának $\{(x, y) : x < y, x, y \in \mathbb{R}\}$ egy bázisa. Az érdeklődő olvasó azt is beláthatja, hogy $\{(p, q) : p < q, p, q \in \mathbb{Q}\}$ is egy bázis. Érdeemes felfigyelni rá, hogy az utóbbi bázisnak „mindössze” megszámlálhatóan sok eleme van.

A bázis megadásához szükséges elemszámot is csökkenthetjük a nyílt halmazok véges sok metszéssel szembeni zártságát használva.

Definíció. Az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus térben az $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{T}$ részhalmaz-rendszert a $\mathfrak{T}$ topológia *szubbázisának* vagy *előbázisának* mondjuk, ha véges metszeteinek halmaza a $\mathfrak{T}$ egy bázisa.

A valós számok halmaza természetes topológiájának $\{(-\infty, y) : y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, \infty) : x \in \mathbb{R}\}$ egy szubbázisa, de az imént másodjára adott bázis alapján $\{(-\infty, q) : q \in \mathbb{Q}\} \cup \{(p, \infty) : p \in \mathbb{Q}\}$ is egy szubbázis.

Definíció. A $\mathfrak{B} \subseteq P(\mathcal{X})$ részhalmaz-rendszert *környezetbázisnak* nevezzük, ha

- (1) minden $X \in \mathcal{X}$ pont esetén létezik $\mathcal{U} \in \mathfrak{B}$, melyre $X \in \mathcal{U}$,
- (2) minden $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{B}$ esetén, ha $X \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, akkor létezik olyan $\mathcal{W} \in \mathfrak{B}$, melyre $X \in \mathcal{W} \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

Az (1) és (2) feltétel átfogalmazható:

- (1') a környezetbázis elemeinek uniója tartalmazza az alaphalmazt,
- (2') a környezetbázis két elemének metszete a környezetbázis megfelelő elemeinek uniója.

Egy $\mathfrak{B}$ környezetbázis azon elemeit, melyek tartalmaznak egy adott X pontot, az X pont *környezeteinek* nevezzük. Ezek halmazát $\mathfrak{B}_X$ jelöli.

Lemma. Legyen $\mathfrak{B} \subseteq P(\mathcal{X})$ egy környezetbázis. Ekkor:

- (0) $\mathfrak{B}_X$ nem üres;
- (1) $\mathcal{U} \in \mathfrak{B}_X$ esetén $X \in \mathcal{U}$;
- (2) $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{B}_X$ esetén létezik olyan $\mathcal{W} \in \mathfrak{B}_X$, melyre $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$;
- (3) $\mathcal{U} \in \mathfrak{B}_X$ és $Y \in \mathcal{U} \in \mathfrak{B}$ esetén létezik olyan $\mathcal{W} \in \mathfrak{B}_Y$, melyre $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$;

Bizonyítás. A (0) állítás a környezetbázis definíciójának (1) pontjából, az (1) a $\mathfrak{B}_X$ definíciójából, a (2) állítás a környezetbázis definíciójának (2) pontjából közvetlenül következik.

A (3) állítás igazolásához vegyük észre, hogy $\mathcal{V} \in \mathfrak{B}_Y$ esetén a környezetbázis definíciójának (2) pontja szerint létezik olyan $\mathcal{W} \in \mathfrak{B}_Y$, melyre $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. ■

Tétel. Legyen az $\mathcal{X}$ halmazon minden $X \in \mathcal{X}$ pontjához adott egy $\mathfrak{B}_X \subseteq P(\mathcal{X})$ részhalmaz-rendszer, melyre teljesülnek az előbbi lemma (0) – (3) pontjai. Ekkor a $\mathfrak{B} := \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \mathfrak{B}_X$ részhalmaz-rendszer egy környezetbázis.

Bizonyítás. Világos, hogy a $\mathfrak{B}$ részhalmaz-rendszerre teljesül a környezetbázis definíciójának (1) pontja, hiszen $\mathfrak{B}_X$ nem üres, ezért csak a környezetbázis definíciójának (2) pontját kell ellenőriznünk.

Ha $X \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ valamely $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{B}$ esetén, akkor a $\mathfrak{B}$ definíciója miatt van olyan U és V pont, hogy $\mathcal{U} \in \mathfrak{B}_U$ és $\mathcal{V} \in \mathfrak{B}_V$. Minthogy $X \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, a (3) feltétel szerint van olyan $\mathcal{W}_U \in \mathfrak{B}_X$, melyre $\mathcal{W}_U \subseteq \mathcal{U}$, és ugyanezért van olyan $\mathcal{W}_V \in \mathfrak{B}_X$, melyre $\mathcal{W}_V \subseteq \mathcal{V}$. A (2) feltétel miatt ekkor létezik olyan $\mathcal{W} \in \mathfrak{B}_X$, melyre $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}_U \cap \mathcal{W}_V$, és emiatt $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, ami igazolja a környezetbázis definíciójának (2) pontját. ■

Az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus térben tekintsük minden X pontra a $\mathfrak{T}_X := \{\mathcal{U} : X \in \mathcal{U} \in \mathfrak{T}\}$ halmazt. Nyilván $\mathfrak{T} = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \mathfrak{T}_X$, ami igazolja, hogy minden topológia egyben környezetbázis is (ez persze a definícióból közvetlenül is belátható). Most ennek „fordítottját” mutatjuk meg.

Tétel. *Legyen adott az $\mathcal{X}$ halmazon egy $\mathfrak{B} \subset P(\mathcal{X})$ környezetbázis. Ekkor a*

$$\mathfrak{T} = \left\{ \bigcup_{i \in \mathfrak{I}} \mathcal{U}_i : \mathfrak{I} \text{ tetszőleges halmaz, és } \mathcal{U}_i \in \mathfrak{B} \text{ minden } i \in \mathfrak{I} \right\}$$

részhalmoz-rendszer egy topológia, melyre $\mathfrak{B}_X \subseteq \mathfrak{T}_X$ minden $X \in \mathcal{X}$ pontban.

Bizonyítás. A topológia definíciójának három feltételét kell igazolni.

A topológia definíciójának (1) feltétele teljesül, mert $\emptyset = \bigcup_{i \in \emptyset} \mathcal{U}_i \in \mathfrak{T}$, továbbá az $\mathfrak{I} = \mathcal{X}$ és $\mathcal{U}_X \in \mathfrak{B}_X$ választás miatt $\mathcal{X} = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \mathcal{U}_X \in \mathfrak{T}$.

A topológia definíciójának (3) feltétele a $\mathfrak{T}$ definíciója miatt triviálisan teljesül.

A topológia definíciója (2) feltételének bizonyításához legyen $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{T}$. Ekkor $\mathfrak{T}$ definíciója értelmében valamely $\mathfrak{I}$ és $\mathfrak{J}$ halmazok és ezek $i \in \mathfrak{I}$ és $j \in \mathfrak{J}$ elemeihez rendelt $\mathcal{U}_i, \mathcal{V}_j \in \mathfrak{B}$ halmazok esetén $\mathcal{U} = \bigcup_{i \in \mathfrak{I}} \mathcal{U}_i$ és $\mathcal{V} = \bigcup_{j \in \mathfrak{J}} \mathcal{V}_j$, amiért

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \left(\bigcup_{i \in \mathfrak{I}} \mathcal{U}_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in \mathfrak{J}} \mathcal{V}_j \right) = \bigcup_{i \in \mathfrak{I}} \left(\mathcal{U}_i \cap \left(\bigcup_{j \in \mathfrak{J}} \mathcal{V}_j \right) \right) = \bigcup_{i \in \mathfrak{I}} \bigcup_{j \in \mathfrak{J}} (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{V}_j).$$

A környezetbázis definíciójának (2) feltétele szerint minden $\mathcal{U}_i, \mathcal{V}_j \in \mathfrak{B}$ esetén, minden $X \in \mathcal{U}_i \cap \mathcal{V}_j$ ponthoz van olyan $\mathcal{W}_{i,j,X} \in \mathfrak{B}$, melyre $X \in \mathcal{W}_{i,j,X} \subseteq \mathcal{U}_i \cap \mathcal{V}_j$, amiből következik, hogy $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{V}_j = \bigcup_{X \in \mathcal{U}_i \cap \mathcal{V}_j} \mathcal{W}_{i,j,X}$ és így

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \bigcup_{i \in \mathfrak{I}} \bigcup_{j \in \mathfrak{J}} \bigcup_{X \in \mathcal{U}_i \cap \mathcal{V}_j} \mathcal{W}_{i,j,X} \in \mathfrak{T}.$$

Ez igazolja a topológia definíciójának (2) feltételét, így a tétel bizonyítása teljes. ■

Eredményünk könnyűvé teszi topológiák definiálását különféle halmazokon. Például a valós számok $\mathbb{R}$ terén az $x \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$ számokkal definiált $\mathcal{B}_{x,\varepsilon} = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < \varepsilon\}$ halmazok $\mathfrak{B}$ halmaza környezetbázis.

Legyenek adottak a valamely $\mathfrak{I}$ halmaz $i \in \mathfrak{I}$ elemeihez rendelt $(\mathcal{X}_i, \mathfrak{T}_i)$ topologikus terek, és képezzük ezek alaphalmazainak $\mathcal{X} = \prod_{i \in \mathfrak{I}} \mathcal{X}_i$ Descartes szorzatát. Azt a $p_j : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_j$ függvényt, melyre $p_j((X_i)_{i \in \mathfrak{I}}) = X_j$, a j -edik projekciónak nevezzük.

Definíció. Az $(\mathcal{X}_i, \mathfrak{T}_i)_{i \in \mathfrak{I}}$ topologikus terek *topologikus szorzatán* azt az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus teret értjük, melyre az $\mathfrak{S} = \bigcup_{i \in \mathfrak{I}} \{p_i^{-1}(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \mathfrak{T}_i\}$ részhalmoz-rendszer a $\mathfrak{T}$ *szorzattopológiának* egy szubbázisa.

Könnyű igazolni, hogy az $\mathfrak{I}$ véges részhalmazait használva

$$\mathfrak{B} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \prod_{i \in \mathfrak{I}_k} \mathcal{U}_i \times \prod_{j \notin \mathfrak{I}_k} \mathcal{X}_j : \mathcal{U}_i \in \mathfrak{I}_i, \mathfrak{I}_k \subseteq \mathfrak{I}, |\mathfrak{I}_k| = k \right\}$$

a $\mathfrak{T}$ szorzattopológia egy bázisa. Topologikus terek szorzása helyett az egyesítésükkel is nyerhető újabb topologikus tér.

Tétel. *A diszjunkt $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ és $(\mathcal{Y}, \tilde{\mathfrak{T}})$ topologikus terekből képezett $(\mathcal{Z}, \tilde{\mathfrak{T}})$ pár, ahol $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ és $\tilde{\mathfrak{T}} = \{\mathcal{U} \cup \mathcal{V} : \mathcal{U} \in \mathfrak{T} \text{ és } \mathcal{V} \in \tilde{\mathfrak{T}}\}$, egy topologikus tér.*

Az állítás bizonyítása az olvasóra marad. A fenti eljárással létrejövő $(\mathcal{Z}, \tilde{\mathfrak{T}})$ topologikus teret az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ és $(\mathcal{Y}, \tilde{\mathfrak{T}})$ topologikus terek *diszjunkt uniójának* nevezzük.

1.3. Halmazok és pontjaik típusai

Definíció. Az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus térben a $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{X}$ halmaz *lezártjának* nevezzük a $\mathcal{H}$ halmazt tartalmazó összes zárt halmaz $\mathcal{H}^-$ metszetét, vagyis $\mathcal{H}^- = \bigcap_{\mathcal{H} \subseteq \mathcal{Z} \in \mathfrak{T}} \mathcal{Z}$.

A $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{X}$ halmaz *belsejének* nevezzük a $\mathcal{H}$ halmaz által tartalmazott összes nyílt halmaz $\mathcal{H}^\circ$ unióját, vagyis $\mathcal{H}^\circ = \bigcup_{\{\mathcal{U} \in \mathfrak{T} : \mathcal{U} \subseteq \mathcal{H}\}} \mathcal{U}$.

A zárt halmazok metszésre való zártsága alapján minden halmaz lezártja zárt halmaz, és zárt halmaz lezártja megegyezik magával a halmazzal.

A nyílt halmazok egyesítésre való zártsága alapján minden halmaz belseje nyílt halmaz, és nyílt halmaz belseje megegyezik magával a halmazzal.

Definíció. Az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus térben az $X \in \mathcal{X}$ pontot a $\mathcal{H}$ halmaz *érintkezési pontjának* nevezzük, ha minden $\mathcal{U} \in \mathfrak{T}_X$ esetén $\mathcal{U} \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$. Az $X \in \mathcal{X}$ pont a $\mathcal{H}$ halmaz

- *határpontja*, ha az X pont a $\mathcal{H}$ halmaznak és a komplementerének is érintkezési pontja;
- *belső pontja*, ha van olyan $\mathcal{U} \in \mathfrak{T}_X$, melyre $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{H}$;
- *külső pontja*, ha van olyan $\mathcal{U} \in \mathfrak{T}_X$, melyre $\mathcal{U} \subseteq \overline{\mathcal{H}}$.

Világos, hogy a $\mathcal{H}$ halmaz minden pontja egyben érintkezési pontja is, de a $\mathcal{H}$ halmaz nem feltétlenül tartalmazza minden érintkezési pontját. A $\mathcal{H}$ halmaz belső pontjai mind elemei a $\mathcal{H}$ halmaznak, és nyilván a nem belső érintkezési pontok a határpontok.

A $\mathcal{H}$ halmaz belső pontjainak halmazát int $\mathcal{H}$, határpontjainak halmazát $\partial \mathcal{H}$, külső pontjainak halmazát pedig ext $\mathcal{H}$ jelöli.

Tétel. *Egy részhalmaz belseje pontosan a belső pontjainak halmaza. Egy részhalmaz akkor és csak akkor nyílt, ha megegyezik a belsejével. Bármely $\mathcal{H}$ részhalmazra $(\mathcal{H}^\circ)^\circ = \mathcal{H}^\circ$.*

Bizonyítás. Ha $B \in \mathcal{H}^\circ$, akkor nyilván a $\mathcal{H}$ halmaz belső pontja. Ha B a $\mathcal{H}$ halmaz belső pontja, akkor van olyan $\mathcal{U} \in \mathfrak{T}_B$ környezete, mely a $\mathcal{H}$ halmaznak része, így $\mathcal{H}^\circ$ definíciója értelmében $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{H}^\circ$.

Ha $\mathcal{H} = \mathcal{H}^\circ$, akkor $\mathcal{H}$ nyilván nyílt, hiszen $\mathcal{H}^\circ$ nyílt. Ha $\mathcal{U}$ egy nyílt halmaz, akkor $\mathcal{U}^\circ$ definíciója értelmében $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}^\circ$, másrészt nyilván $\mathcal{U}^\circ \subseteq \mathcal{U}$, tehát $\mathcal{U} = \mathcal{U}^\circ$.

Végül $\mathcal{H}^\circ$ nyíltságából következik az utolsó állítás. ■

Tétel. *Egy részhalmaz lezártja pontosan az érintkezési pontjainak halmaza. Egy részhalmaz akkor és csak akkor zárt, ha megegyezik lezártjával. Bármely $\mathcal{H}$ részhalmazra $(\mathcal{H}^-)^- = \mathcal{H}^-$.*

Bizonyítás. Legyen E a $\mathcal{H}$ egy érintkezési pontja. Ha $E \in \mathcal{H}^-$, akkor erre az első állítás teljesül. Ha $E \in \overline{\mathcal{H}^-}$, akkor $\mathcal{H}^-$ zártága miatt $\overline{\mathcal{H}^-}$ nyílt. Csakhogy az E érintkezési pont, így az $\overline{\mathcal{H}^-} \in \mathfrak{T}_E$ esetén is $\overline{\mathcal{H}^-} \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$, amiből az

$$\emptyset \neq \overline{\mathcal{H}^-} \cap \mathcal{H} \subseteq \overline{\mathcal{H}} \cap \mathcal{H} = \emptyset$$

ellentmondás adódik, vagyis $E \in \mathcal{H}^-$.

Ha $E \in \mathcal{H}^-$, és E érintkezési pont, akkor erre az első állítás teljesül. Ha E nem érintkezési pontja a $\mathcal{H}$ halmaznak, akkor valamely $\mathcal{U} \in \mathfrak{T}_E$ környezetének nincs közös pontja a $\mathcal{H}$ halmazzal. Eszerint $\mathcal{H} \subseteq \overline{\mathcal{U}}$, amiért $\mathcal{H}^- \subseteq \overline{\mathcal{U}}$, és így az $E \in \overline{\mathcal{U}}$ ellentmondás adódik, vagyis E érintkezési pont, és ezzel az első állítást teljes egészében beláttuk.

Ha $\mathcal{H} = \mathcal{H}^-$, akkor $\mathcal{H}$ nyilván zárt, hiszen $\mathcal{H}^-$ zárt. Ha $\mathcal{Z}$ egy zárt halmaz, akkor $\mathcal{Z}^-$ definíciója értelmében $\mathcal{Z}^- \subseteq \mathcal{Z}$, másrészt nyilván $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}^-$, tehát $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}^-$.

Végül $\mathcal{H}^-$ zártágából következik az utolsó állítás. ■

Fentiek értelmében azonnal adódnak a következő tétel formulái.

Tétel. $\partial\mathcal{H} = \mathcal{H}^- \cap (\mathcal{X} \setminus \mathcal{H})^- = \partial(\mathcal{X} \setminus \mathcal{H})$, $\text{ext } \mathcal{H} = (\mathcal{X} \setminus \mathcal{H})^\circ$, $\mathcal{H}^- = \mathcal{H}^\circ \cup \partial\mathcal{H}$ és $\mathcal{X} = \mathcal{H}^\circ \cup \partial\mathcal{H} \cup \text{ext } \mathcal{H}$.

Definíció. Az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus térben az $X \in \mathcal{X}$ pontot a $\mathcal{H}$ halmaz *torlódási pontjának* nevezzük, ha minden $\mathcal{U} \in \mathfrak{T}_X$ halmazban van olyan $H \in \mathcal{H}$ pont, melyre $H \neq X$.

Jegyezzük meg, hogy egy torlódási pont lehet belső pontja vagy akár határpontja is a $\mathcal{H}$ halmaznak, de sem a belső, sem a határpontok nem feltétlenül torlódási pontok.

A $\mathcal{H}$ halmaz X határpontját *izolált pontnak* nevezzük, ha X nem torlódási pont. Nyilván minden izolált X pontot tartalmaz egy olyan nyílt halmaz, amely a $\mathcal{H}$ halmazból egyedül az X pontot tartalmazza.

Világos, hogy minden torlódási pont és minden határpont is érintkezési pont is, ezért adódik, hogy a zárt halmazok tartalmazzák torlódási és határpontjaikat is.

Definíció. Az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus térben az $X \in \mathcal{X}$ pontot az $\{X_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \mathcal{X}$ pontsorozat *határértékének* mondjuk, ha minden $\mathcal{U} \in \mathfrak{T}_X$ halmazra $\overline{\mathcal{U}} \cap \{X_i\}_{i=1}^\infty$ véges sok pontot tartalmaz.

Vegyük észre, hogy a határérték nem feltétlen torlódási pont, hiszen ha a pontsorozat konstans, vagyis $X_i = X$, akkor X határérték, de nem torlódási pont. A torlódási pontok sem feltétlenül határértékek. Az olvasóra marad példát mutatni erre.

Definíció. Az olyan pontsorozatokat, melyeknek egyetlen határértéke van, *konvergensnek* nevezzük. Konvergens sorozat határértékének jelölésére a szokásos $X = \lim_{i \rightarrow \infty} X_i$ jelölést alkalmazzuk.

Hausdorff-térben minden sorozatnak legfeljebb egy határértéke van, mert különböző pontoknak van őket tartalmazó diszjunkt környezetük, de egy sorozatnak mindkét környezetből csak véges sok eleme maradhatna ki ahhoz, hogy mindkét pont a határértéke legyen. Hausdorff-térben tehát ha van határértéke egy sorozatnak, akkor az a sorozat konvergens.

Tétel. Megszámlálható bázisú $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus térben egy $\{X_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \mathcal{X}$ pontsorozat minden $X \in \mathcal{X}$ torlódási pontjához, van olyan i_j nem csökkenő számsorozat, melyre X az $\{X_{i_j}\}_{j=1}^\infty$ sorozat határértéke.

Bizonyítás. A megszámlálható bázisú $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus térben, vegyünk egy megszámlálható $\{\mathcal{U}_k\}_{k=1}^\infty$ bázist. A báziselemek közül az X pontot tartalmazók halmaza legyen $\{\mathcal{U}_{k_\ell}\}_{\ell=1}^\infty$, és legyen $\mathcal{V}_j = \bigcap_{\ell=1}^j \mathcal{U}_{k_\ell}$. Minthogy $\mathcal{V}_j \in \mathfrak{T}_X$ és X a pontsorozat torlódási pontja, minden $\mathcal{V}_j$ nyílt halmaz tartalmazza a sorozatnak legalább egy, az X ponttól különböző elemét.

Ha valamely $\mathcal{V}_j \in \mathfrak{T}_X$ nyílt halmazban csak véges sok eleme van az $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ pontsorozatnak, akkor ezek közül legyen X_{i_j} a legkisebb indexű elem.

Ha a $\mathcal{V}_j \in \mathfrak{T}_X$ nyílt halmazok mindegyike végtelen sok pontot tartalmaz az $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ pontsorozatból, akkor válasszuk az i_1 számot úgy, hogy $X_{i_1} \in \mathcal{V}_1$. Ha i_j már adott, akkor válasszuk az i_{j+1} számot úgy, hogy $X_{i_{j+1}} \in \mathcal{V}_{j+1} \cap \{X_i\}_{i=i_j+1}^\infty$.

Az i_j sorozat ekkor nyilván nem csökkenő, minden $\mathcal{V}_j$ halmaz tartalmaz legalább egy pontot az $\{X_{i_j}\}_{j=1}^\infty$ pontsorozatból, továbbá bármely nyílt $\mathcal{U} \in \mathfrak{T}_X$ halmazra az $\overline{\mathcal{U}} \cap \{X_{i_j}\}_{j=1}^\infty$ legfeljebb véges sok elemet tartalmaz, mert valamely $j \in \mathbb{N}$ esetén $\mathcal{U}_{k_j} \subseteq \mathcal{U}$, amiért $\mathcal{V}_j \subseteq \mathcal{U}$, viszont $\{X_{i_\ell}\}_{\ell=1}^\infty \cap \overline{\mathcal{V}_j} \subseteq \{X_{i_\ell}\}_{\ell=1}^j$. ■

A bizonyításból látszik, hogy ha az $\{X_{i_j}\}_{j=1}^\infty$ pontsorozatban nincs olyan pont, mely az X pontnak minden környezetében benne van – Hausdorff-térben ez csak úgy lehetne, ha a sorozat egy indextől kezdve konstans lenne –, akkor az i_j sorozat szigorúan növekvő.

1.4. Fedések

Az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus térben azt mondjuk, hogy az $\mathcal{X}$ részhalmazainak egy $\mathfrak{C}$ rendszere *lefedi* az $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ részhalmazt, ha elemeinek uniója tartalmazza az $\mathcal{Y}$ halmazt. Egy ilyen halmazrendszert *fedőrendszernek*, vagy *fedésnek* nevezünk.

Egy $\mathfrak{C}$ fedést *lokálisan végesnek* mondunk, ha minden pontnak van olyan környezete, ami a fedésnek legfeljebb véges sok elemét metszi. *Nyitottnak* mondjuk a fedést, ha minden eleme nyílt halmaz.

Lindelöf lefedési tétele. *Megszámlálható bázisú tér nyitott lefedéséből kiválasztható egy megszámlálható lefedés.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{C} = \{C_i\}_{i \in \mathfrak{I}}$ egy nyílt fedése a megszámlálható bázisú $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus térnek, és vegyünk egy megszámlálható $\{\mathcal{U}_j\}_{j=1}^\infty$ bázist.

Míthogy minden nyílt halmaz a bázis elemeinek uniója, a bázis minden $\mathcal{U}_j$ eleméhez létezik a fedésben olyan $C_{i(j)}$ halmaz, melyre $\mathcal{U}_j \subseteq C_{i(j)}$. A $\{C_{i(j)}\}_{j=1}^\infty$ megszámlálható halmazrendszer viszont fedés, mert $\mathcal{X} = \bigcup_{j=1}^\infty \mathcal{U}_j = \bigcup_{j=1}^\infty C_{i(j)}$. ■

Egy topologikus teret *Lindelöf-térnek* nevezünk, ha bármely nyitott lefedéséből kiválasztható megszámlálható lefedés. *Erősen Lindelöf-térnek* nevezzük ezt a topologikus teret, ha minden nyílt részhalmaza is Lindelöf-féle.

Definíció. Az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus teret *kompaktnak* nevezzük, ha minden nyitott lefedésében van véges lefedő rendszer is.

A $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{X}$ részhalmazt kompaktnak hívjuk, ha $(\mathcal{K}, \mathfrak{T})$ kompakt.

Az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus teret az $X \in \mathcal{X}$ pontjánál *lokálisan kompaktnak* nevezzük, ha X valamely környezetének lezártja kompakt. Az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus teret lokálisan kompaktnak mondjuk, ha minden pontja valamely kompakt részhalmazának belső pontja.

Könnyű igazolni, hogy Hausdorff-tér esetén a lokális kompaktsághoz elegendő, ha minden pontnak van olyan környezete, amelyet egy kompakt halmaz tartalmaz. A valós számok halmaza például lokálisan kompakt, de nem kompakt.

Definíció. Egy halmazrendszert *végismetszet-tulajdonságúnak* nevezünk, ha bármely véges sok elemének metszete nem üres.

Egy topologikus térre azt mondjuk, hogy teljesíti a *Riesz-féle metszetfeltételt*, ha zárt halmazai bármely végismetszet-tulajdonságú halmazrendszere minden elemének metszete nem üres.

Tétel. *Egy tér akkor és csak akkor kompakt, ha teljesíti a Riesz-féle metszetfeltételt.*

Bizonyítás. Ha a tér teljesíti a Riesz-féle metszetfeltételt, és $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ egy nyílt lefedése, akkor $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} \overline{\mathcal{U}_i} = \emptyset$ esetében valamely $n \in \mathbb{N}$ számra $\bigcap_{j=1}^n \overline{\mathcal{U}_{i(j)}} = \emptyset$ következik, amiből $\{\mathcal{U}_{i(j)}\}_{j=1}^n$ egy véges fedés, tehát a tér kompakt.

Ha a zárt halmazokból álló $\{\mathcal{Z}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ rendszer elemeinek metszete üres, vagyis $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{Z}_i = \emptyset$, akkor $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} \overline{\mathcal{Z}_i} = \mathcal{X}$ alapján $\{\overline{\mathcal{Z}_i}\}_{i \in \mathcal{I}}$ egy fedés, így a kompaktság miatt valamely $n \in \mathbb{N}$ számra $\bigcup_{j=1}^n \overline{\mathcal{Z}_{i(j)}} = \mathcal{X}$ következik, amiből $\bigcap_{j=1}^n \mathcal{Z}_{i(j)} = \emptyset$ adódik, tehát teljesül a Riesz-féle metszetfeltétel. ■

Tyhonov-tétel. *Véges sok kompakt topologikus tér szorzata is kompakt.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ és $(\mathcal{Y}, \mathfrak{T}')$ is kompakt topologikus tér, továbbá $\mathfrak{C} = \{\mathcal{C}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ a szorzattérnek a szorzattopológiában nyílt fedése.

Minden $(X, Y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ pontra van olyan $\mathcal{C}_{i_{X,Y}}$ eleme a fedésnek, amely tartalmazza az (X, Y) pontot. Mivel $\mathcal{C}_{i_{X,Y}}$ nyílt, a szorzatopológia definíciója miatt ekkor van olyan $\mathcal{U}_{i_{X,Y}} \in \mathfrak{T}_X$ és $\mathcal{V}_{i_{X,Y}} \in \mathfrak{T}'_Y$ környezetek rendre az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ és $(\mathcal{Y}, \mathfrak{T}')$ terekben, hogy $(\mathcal{U}_{i_{X,Y}} \times \mathcal{Y}) \cap (\mathcal{V}_{i_{X,Y}} \times \mathcal{X}) \subseteq \mathcal{C}_{i_{X,Y}}$.

Világos, hogy tetszőleges $Y \in \mathcal{Y}$ esetén $\{\mathcal{U}_{i_{X,Y}}\}_{X \in \mathcal{X}}$ az $\mathcal{X}$ egy nyílt fedése, amiért elemei közül véges sok is, mondjuk $\{\mathcal{U}_{i_{X_m^Y, Y}}\}_{m=1}^n$, is fedi az $\mathcal{X}$ alaphalmazt. Ugyanakkor $\{\bigcap_{m=1}^n \mathcal{V}_{i_{X_m^Y, Y}}\}_{Y \in \mathcal{Y}}$ az $\mathcal{Y}$ egy nyílt fedése, amiért elemei közül véges sok is, mondjuk $\{\bigcap_{m=1}^n \mathcal{V}_{i_{X_m^Y, Y_k}}\}_{k=1}^\ell$, is fedi az $\mathcal{Y}$ alaphalmazt. Eszerint

$$\begin{aligned} \bigcup_{k,m=1}^{\ell,n} \mathcal{C}_{i_{X_m^Y, Y_k}} &\supseteq \bigcup_{k=1}^{\ell} \bigcup_{m=1}^n (\mathcal{U}_{i_{X_m^Y, Y_k}} \times \mathcal{Y}) \cap (\mathcal{V}_{i_{X_m^Y, Y_k}} \times \mathcal{X}) \\ &\supseteq \bigcup_{k=1}^{\ell} \left(\bigcup_{m=1}^n \mathcal{U}_{i_{X_m^Y, Y_k}} \times \mathcal{Y} \right) \cap \left(\bigcap_{m=1}^n \mathcal{V}_{i_{X_m^Y, Y_k}} \times \mathcal{X} \right) \\ &= \bigcup_{k=1}^{\ell} (\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \cap \left(\bigcap_{m=1}^n \mathcal{V}_{i_{X_m^Y, Y_k}} \times \mathcal{X} \right) \end{aligned}$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\ell} \bigcap_{m=1}^n \mathcal{V}_{i_{X_m^{Y_k}, Y_k}} \times \mathcal{X} = \mathcal{Y} \times \mathcal{X},$$

ami igazolja, hogy $\mathcal{Y} \times \mathcal{X}$ kompakt. ■

Tétel. Minden $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus tér minden kompakt $\mathcal{K}$ részhalmaza bármely végtelen ponthalmazának van a $\mathcal{K}$ részhalmazba eső torlódási pontja.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a kompakt $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{X}$ részhalmazban létezik olyan $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{K}$ pontsorozat, melynek nincsen torlódási pontja a $\mathcal{K}$ halmazban.

Világos, hogy ekkor $\mathcal{K}$ egyetlen pontja sem torlódási pontja a $\mathcal{P}$ ponthalmaznak, így a torlódási pont definíciója szerint minden $K \in \mathcal{K}$ pontnak van egy olyan $\mathcal{U}_K \in \mathfrak{T}_K$ környezete, mely nem tartalmazza az $\mathcal{P} \setminus \{K\}$ ponthalmaz egyetlen pontját sem.

A nyílt halmazokból álló $\{\mathcal{U}_{P_i}\}_{i=1}^{\infty} \cup \bigcup_{K \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{P}} \mathcal{U}_K$ rendszer lefedi a $\mathcal{K}$ halmazt, ugyanakkor az $\{\mathcal{U}_{P_i}\}_{i=1}^{\infty}$ halmaz bármely elemét elhagyva a $\mathcal{P}$ valamely pontjának fedettsége megszűnik. Ez bizonyítja az állítást. ■

Definíció. Az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus teret *szekvenciálisan kompaktnak* mondjuk, ha minden végtelen sok pontját tartalmazó részhalmazának van torlódási pontja.

Az $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ részhalmazt szekvenciálisan kompaktnak hívjuk, ha $(\mathcal{Y}, \mathfrak{T})$ szekvenciálisan kompakt.

Előbbi tételünk szerint tehát minden kompakt halmaz szekvenciálisan kompakt, azonban utóbbiból általában nem következik a kompaktság se és a zártság se.

1.4.1. Tétel.

- (1) Kompakt topologikus tér zárt részhalmaza kompakt.
- (2) Szekvenciálisan kompakt topologikus tér zárt részhalmaza szekvenciálisan kompakt.

Bizonyítás. (1) Tekintsük a zárt $\mathcal{Z}$ részhalmazt és annak egy $\mathfrak{C}$ nyílt lefedését. Ekkor $\{\overline{\mathcal{Z}}\} \cup \mathfrak{C}$ a tér egy nyílt lefedése, amiből a kompaktság miatt véges sok is lefedi a teret, így a $\mathcal{Z}$ zárt halmazt is. Ezen véges sok nyílt halmaz, ha $\overline{\mathcal{Z}}$ köztük van, akkor azt eldobva, bizonyítja az állítást.

(2) Vizsgáljunk a zárt $\mathcal{Z}$ részhalmazban egy $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{Z}$ pontsorozatot. A tér szekvenciális kompaktsága miatt a $\mathcal{P}$ sorozatnak van torlódási pontja. Ez a torlódási pont a $\mathcal{Z}$ halmaznak is torlódási, így érintési pontja, így $\mathcal{Z}$ zártsága miatt a $\mathcal{Z}$ halmazba esik. ■

1.4.1.
Példát

Definíció. Egy topologikus térre azt mondjuk, hogy *Cantor-tulajdonságú* ha nem üres zárt halmazai bármely egymásba skatulyázott $\mathcal{Z}_0 \supseteq \mathcal{Z}_1 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{Z}_i \supseteq \dots$ sorozatának $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{Z}_i$ metszete nem üres.

Ha egy topologikus tér teljesíti a Riesz-féle metszetfeltételt, akkor természetesen Cantor-tulajdonságú, de ennek megfordításához további feltételek kellenek.

Tétel.

- (1) *Szekvenciális kompakt topologikus tér Cantor-tulajdonságú.*
- (2) *Cantor-tulajdonságú Lindelöf-tér kompakt.*

Bizonyítás. (1) Minden $i \in \mathbb{N}$ számra vegyünk egy X_i pontot a $\mathcal{Z}_i$ zárt halmazból. A szekvenciális kompaktság miatt az $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ pontsorozatnak van egy X torlódási pontja. Mivel minden $j \in \mathbb{N}$ számra $\{X_i\}_{i=j}^{\infty} \subseteq \mathcal{Z}_j$, a $\mathcal{Z}_j$ zártsága miatt $X \in \mathcal{Z}_j$ minden $j \in \mathbb{N}$ számra. Eszerint $X \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{Z}_i$, ami az első állítás.

(2) Legyen $\tilde{\mathcal{C}} = \{\mathcal{C}_i\}_{i \in \mathbb{J}}$ egy nyílt fedés. A Lindelöf-tulajdonság következtében ebben van egy $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_i\}_{i=1}^{\infty}$ megszámlálható nyílt fedés. Vegyük a $\mathcal{Z}_m = \bigcap_{i=1}^m \overline{\mathcal{C}_i}$ zárt halmazokat. Ezek egymásba skatulyázott $\mathcal{Z}_1 \supseteq \mathcal{Z}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{Z}_m \supseteq \dots$ sorozatot alkotnak, és metszetük üres, így valamelyik $\mathcal{Z}_m$ halmaz üres. Ez pontosan azt jelenti, hogy a tér kompakt. ■

A (2) állítás alapján a Riesz-féle metszetfeltétel megszámlálható bázis esetén is következik a Cantor-tulajdonságból.

Definíció. Az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus térben a $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{X}$ halmazt (*mindenütt*) *sűrűnek* mondjuk, ha $\mathcal{H}^- = \mathcal{X}$. A $\mathcal{H}$ halmazt a $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{X}$ halmazban *sűrűnek* nevezzük, ha $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}^-$

A $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{X}$ halmazt *seholsem sűrűnek* hívjuk, ha nincs olyan $\mathcal{U} \in \mathfrak{T}$ nyílt halmaz, amiben sűrű lenne.

Fontos megjegyezni, hogy minden halmaz sűrű önmagában, és véges sok seholsem sűrű halmaz uniója is seholsem sűrű, amit az olvasó egy indirekt bizonyítással könnyen igazolhat.

Tétel. *Ha az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus térben a $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{X}$ halmaz sűrű az $\mathcal{U} \in \mathfrak{T}$ nyílt halmazban, akkor $(\mathcal{U} \cap \mathcal{H})^- = \mathcal{U}^-$.*

Bizonyítás. Világos, hogy $(\mathcal{U} \cap \mathcal{H})^- \subseteq \mathcal{U}^-$, ezért elég ennek fordítottját igazolni.

Legyen $X \in \mathcal{U}^-$ és $\mathcal{V} \in \mathfrak{T}_X$. Ekkor $\mathcal{V} \cap (\mathcal{U} \cap \mathcal{H}) = (\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) \cap \mathcal{H}$ nem üres, mert $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$ nyílt, és $\mathcal{H}$ sűrű. Eszerint X minden környezete belemetsz a $\mathcal{U} \cap \mathcal{H}$ halmazba, vagyis az $\mathcal{U} \cap \mathcal{H}$ halmaz érintkezési pontja, tehát $\mathcal{U}^- \subseteq (\mathcal{U} \cap \mathcal{H})^-$. ■

Tétel. Az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus térben a $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{X}$ halmaz alábbi tulajdonságai ekvivalensek:

- (1) a $\mathcal{H}$ sehol sem sűrű;
- (2) a $\mathcal{H}^-$ sehol sem sűrű;
- (3) a $\mathcal{H}^-$ halmaznak nincs belső pontja;

Bizonyítás. (2) $\Rightarrow$ (1) Ez világos, mert seholsem sűrű halmaz részhalmaza is seholsem sűrű.

(1) $\Rightarrow$ (2) Ha $\mathcal{H}^-$ nem seholsem sűrű, akkor van olyan $\mathcal{U} \in \mathfrak{T}$ nyílt halmaz, amiben sűrű, így erre $\mathcal{U} \subseteq (\mathcal{H}^-)^- = \mathcal{H}^-$ teljesül, amiért $\mathcal{H}$ sem seholsem sűrű.

(2) $\Rightarrow$ (3) Ez világos, mert minden halmaz sűrű minden részhalmazában.

(3) $\Rightarrow$ (2) Ha $\mathcal{H}^-$ nem seholsem sűrű, akkor van olyan $\mathcal{U} \in \mathfrak{T}$ nyílt halmaz, amiben sűrű, így erre $\mathcal{U} \subseteq (\mathcal{H}^-)^- = \mathcal{H}^-$ teljesül, amiért a $\mathcal{H}^-$ halmaznak $\mathcal{U}$ minden pontja belső pontja. ■

Tétel. Nyílt, sűrű halmaz komplementere zárt, seholsem sűrű halmaz. Zárt, seholsem sűrű halmaz komplementere nyílt, sűrű halmaz.

Bizonyítás. Ha $\mathcal{U}$ nyílt és sűrű, akkor $\mathcal{X} = \mathcal{U}^- = (\mathcal{X} \setminus \overline{\mathcal{U}})^- = (\mathcal{X} \setminus \overline{\mathcal{U}}^-)^-$, amiért a zárt $\overline{\mathcal{U}}^- = \overline{\mathcal{U}}$ halmaz nem tartalmazhat belső pontot.

Ha $\mathcal{Z}$ zárt és seholsem sűrű, akkor $\mathcal{X} = (\mathcal{X} \setminus \mathcal{Z}^-)^- = (\mathcal{X} \setminus \mathcal{Z})^- = \overline{\mathcal{Z}}^-$, amiért a nyílt $\overline{\mathcal{Z}}$ halmaz sűrű. ■

Ha a topológia egy bázisának minden eleméből kiválasztunk egy pontot^(*), az így nyert pontok sűrű halmazt fognak alkotni. Ezt most megszámlálható bázis esetén mutatjuk meg.

Tétel. Ha az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus tér topológiájának van megszámlálható bázisa, akkor az alaphalmaznak létezik megszámlálható, sűrű részhalmaza.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{T}$ topológia egy megszámlálható bázisa, vagyis $\mathfrak{B} = \{\mathcal{U}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Válasszunk minden $i \in \mathbb{N}$ esetén egy H_i pontot az $\mathcal{U}_i$ nyílt halmazból, és legyen $\mathcal{H} = \{H_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Ekkor a $\mathcal{H}$ halmaznak minden nyílt halmazban van pontja, ezért minden pont az érintkezési pontja, tehát $\mathcal{H}^- = \mathcal{X}$, vagyis a $\mathcal{H}$ halmaz sűrű. ■

Definíció. Az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus teret *szeparábilisnak* nevezzük, ha létezik megszámlálható sűrű részhalmaza.

^(*)Ehhez a kiválasztási axiómát kell használni. Lásd a Függelékben!

1.5. Folytonosság és homotópia

Definíció. Az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ és $(\mathcal{X}', \mathfrak{T}')$ topologikus terek alaptereinek egy $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ leképezését *folytonosnak* mondjuk, ha nyílt halmazok ősképe nyílt, vagyis minden $\mathcal{U}' \in \mathfrak{T}'$ esetén $f^{-1}(\mathcal{U}') \in \mathfrak{T}$.

A konstans függvény tetszőleges topologikus terek közt folytonos, valamint egy topologikus tér önmagára való identikus leképezése is folytonos.

Tétel. Az $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ leképezés akkor és csak akkor folytonos az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ és $(\mathcal{X}', \mathfrak{T}')$ topologikus terek között, ha

- (1) $\mathfrak{T}'$ valamely $\mathfrak{B}'$ bázisa minden $\mathcal{B}'$ elemének $f^{-1}(\mathcal{B}')$ ősképe nyílt.
- (2) $\mathfrak{T}'$ valamely $\mathfrak{S}'$ szubbázisa minden $\mathcal{S}'$ elemének $f^{-1}(\mathcal{S}')$ ősképe nyílt.

Bizonyítás. (1) Minthogy $\mathfrak{T}'$ minden eleme előáll a bázisa elemeinek valamely $\bigcup_{i \in \mathfrak{J}} \mathcal{B}'_i$ uniójaként és $f^{-1}(\bigcup_{i \in \mathfrak{J}} \mathcal{B}'_i) = \bigcup_{i \in \mathfrak{J}} f^{-1}(\mathcal{B}'_i)$ egy nyílt halmaz, az (1) állítást bizonyítottuk.

(2) A folytonossághoz (1) értelmében elegendő bizonyítani, hogy az $\mathfrak{S}'$ szubbázis véges metszeteiként előálló $\mathfrak{B}'$ bázis minden elemének ősképe nyílt. Minthogy $\mathfrak{B}'$ minden eleme előáll valamely $k \in \mathbb{N}$ értékre a szubbázis elemeinek $\bigcap_{i=1}^k \mathcal{S}'_i$ metszeteként és $f^{-1}(\bigcap_{i=1}^k \mathcal{S}'_i) = \bigcap_{i=1}^k f^{-1}(\mathcal{S}'_i)$ nyílt halmaz, a tételt bizonyítottuk. ■

A valamely $\mathfrak{J}$ halmaz elemeihez rendelt $(\mathcal{X}_i, \mathfrak{T}_i)$ topologikus terek $(\prod_{i \in \mathfrak{J}} \mathcal{X}_i, \mathfrak{T})$ topologikus szorzatát vizsgálva megállapíthatjuk, hogy a $\mathfrak{T}$ szorzattopológiával a $p_j: \prod_{i \in \mathfrak{J}} \mathcal{X}_i \rightarrow \mathcal{X}_j$ projekció, melyre $p_j((X_i)_{i \in \mathfrak{J}}) = X_j$, folytonos függvény, hiszen a szorzattopológiának éppen a projekciókkal megadott bázisát a képtér topológiájába viszi. Az olvasóra marad annak bizonyítása, hogy a $\mathfrak{T}$ szorzattopológia az a leggyengébb topológia az $\prod_{i \in \mathfrak{J}} \mathcal{X}_i$ halmazon, melyre minden p_j projekció folytonos.

Tétel. A következők mindegyike ekvivalens az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ és $(\mathcal{X}', \mathfrak{T}')$ topologikus terek alaphalmazai közti $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ leképezés folytonosságával.

- (1) minden zárt halmaz ősképe zárt,
- (2) minden $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{X}'$ halmazra $f^{-1}(\mathcal{H}^\circ) \subseteq (f^{-1}(\mathcal{H}))^\circ$,
- (3) minden $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{X}$ halmazra $f(\mathcal{H}^-) \subseteq (f(\mathcal{H}))^-$.

Bizonyítás. Az (1) állítást az igazolja, hogy a zárt halmaznak nyílt, a nyílt halmaznak zárt a komplementere.

A (2) állítás és a folytonosság ekvivalenciáját a következők bizonyítják: Nyilván $f^{-1}(\mathcal{H}^\circ) \subseteq f^{-1}(\mathcal{H})$, f folytonossága miatt pedig $f^{-1}(\mathcal{H}^\circ)$ nyílt, amiért (2) következik. Ha (2) teljesül, akkor bármely $\mathcal{U} \in \mathfrak{T}'$ nyílt halmazra $f^{-1}(\mathcal{U}) = f^{-1}(\mathcal{U}^\circ) \subseteq (f^{-1}(\mathcal{U}))^\circ \subseteq f^{-1}(\mathcal{U})$, amiért $f^{-1}(\mathcal{U})$ nyílt, hiszen egybeesik a belsejével.

A (3) állításból a folytonosság igazolásához vegyünk egy tetszőleges nyílt $\mathcal{V} \in \mathfrak{T}'$ halmazt. Ha az $\mathcal{U} := f^{-1}(\mathcal{V})$ halmaz nem nyílt, akkor van olyan $E \in \mathcal{U}$ pontja, mely az $\overline{\mathcal{U}}$ komplementernek érintkezési pontja. Tehát $E \in \overline{\mathcal{U}}^- \cap \mathcal{U}$ és így

$$f(E) \in f(\overline{\mathcal{U}}^- \cap \mathcal{U}) = f(\overline{\mathcal{U}}^-) \cap \mathcal{V} \subseteq (f(\overline{\mathcal{U}}))^- \cap \mathcal{V} = \overline{\mathcal{V}}^- \cap \mathcal{V} = \emptyset.$$

Ez ellentmondás, amiért $f^{-1}(\mathcal{V})$ nyílt halmaz.

A folytonosságból a (3) igazolásához vegyünk egy tetszőleges $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{X}$ halmazt. Mivel $(f(\mathcal{H}))^-$ zárt halmaz, (1) alapján $f^{-1}((f(\mathcal{H}))^-)$ is zárt. Viszont $f^{-1}((f(\mathcal{H}))^-) \supseteq f^{-1}(f(\mathcal{H})) = \mathcal{H}$, amiért $f^{-1}((f(\mathcal{H}))^-) \supseteq \mathcal{H}^-$, és így $(f(\mathcal{H}))^- \supseteq f(\mathcal{H}^-)$, ami az igazolandó volt. ■

Definíció. Az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ és $(\mathcal{X}', \mathfrak{T}')$ topologikus terek alaphalmazai közti $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ függvényt az $X \in \mathcal{X}$ pontban folytonosnak mondjuk, ha minden $\mathcal{U}' \in \mathfrak{T}'_{f(X)}$ környezethez van olyan $\mathcal{U} \in \mathfrak{T}_X$, hogy $f(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}'$. Az ilyen pontokat, a függvény folytonossági pontjainak nevezzük.

Tétel. Egy $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus téren adott $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonossági pontjainak halmaza G_δ .

Bizonyítás. Defináljuk az $\omega_f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy

$$\omega_f(X) = \inf\{\text{diam}(f(\mathcal{U})) : \mathcal{U} \in \mathfrak{T}_X\},$$

ahol diam a halmaz felső és alsó határa közti különbség. Világos, hogy f akkor és csak akkor folytonos egy X pontban, ha $\omega_f(X) = 0$.

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\mathcal{F}_n = \{X \in \mathcal{X} : n\omega_f(X) < 1\}$. Az $\mathcal{F}_n$ halmazok nyíltak, hiszen ha $X \in \mathcal{F}_n$, akkor $n \inf\{\text{diam}(f(\mathcal{U})) : \mathcal{U} \in \mathfrak{T}_X\} < 1$, amiért létezik olyan $\mathcal{U} \in \mathfrak{T}_X$, melyre $n \text{diam}(f(\mathcal{U})) < 1$, ami igazolja, hogy minden $Y \in \mathcal{U}$ pontban $n \inf\{\text{diam}(f(\mathcal{U})) : \mathcal{U} \in \mathfrak{T}_Y\} < 1$.

A folytonossági pontok halmaza tehát $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$, ami nyilván G_δ . ■

Tétel. Az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ és $(\mathcal{X}', \mathfrak{T}')$ topologikus terek alaphalmazai közti $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ leképezés akkor és csak akkor folytonos, ha minden pontban folytonos.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy f folytonos, és válasszunk egy tetszőleges $X \in \mathcal{X}$ pontot. Tetszőleges $\mathcal{U}'_{f(X)} \in \mathfrak{T}'_{f(X)}$ nyílt környezet esetén az f folytonosságából következik, hogy $\mathcal{V} = f^{-1}(\mathcal{U}'_{f(X)})$ egy nyílt halmaz. Ugyanakkor $f(X) \in \mathcal{U}'_{f(X)}$ miatt $X \in \mathcal{V}$, tehát f folytonos az X pontban.

Tegyük most fel, hogy f minden pontban folytonos. Vegyünk egy $\mathcal{U}' \in \mathfrak{T}'$ nyílt halmazt. A topológia bázisának tulajdonsága, hogy minden $X' \in \mathcal{U}'$ ponthoz lehet

úgy választani $\mathcal{U}'_{X'} \in \mathfrak{B}'_{X'}$ környezetet, hogy $\mathcal{U}' = \bigcup_{X' \in \mathcal{U}'} \mathcal{U}'_{X'}$ legyen. A feltétel miatt van olyan $\mathcal{U}_X \in \mathfrak{T}_X$, melyre $f(\mathcal{U}_X) \subseteq \mathcal{U}'_{f(X)}$, ezért

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathcal{U}') &= f^{-1}\left(\bigcup_{X' \in \mathcal{U}'} \mathcal{U}'_{X'}\right) = \bigcup_{X' \in \mathcal{U}'} f^{-1}(\mathcal{U}'_{X'}) \\ &= \bigcup_{X \in f^{-1}(\mathcal{U}')} f^{-1}(\mathcal{U}'_{f(X)}) \supseteq \bigcup_{X \in f^{-1}(\mathcal{U}')} \mathcal{U}_X. \end{aligned}$$

A jobboldal tartalmazza a baloldal minden pontját, így valójában egyenlőség áll fenn, ami bizonyítja a folytonosságot, hiszen a jobboldal nyílt halmaz. ■

Ragasztási lemma. *Ha az $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ leképezés az $\mathcal{X}$ valamely nyitott, vagy zárt és lokálisan véges $\mathfrak{C}$ fedésének minden elemén folytonos, akkor f is folytonos.*

Bizonyítás. Legyen a két topologikus tér $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ és $(\mathcal{X}', \mathfrak{T}')$. Legyen $\mathcal{U}' \in \mathfrak{T}'$. Mint-hogy minden $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}$ halmazra $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{X}'$ folytonos, $f^{-1}(\mathcal{U}' \cap f(\mathcal{C}))$ nyílt a $\mathcal{C}$ rész-halmazban, vagyis van olyan $\mathcal{U}_{\mathcal{C}} \in \mathfrak{T}$ nyílt halmaz, melyre $f^{-1}(\mathcal{U}' \cap f(\mathcal{C})) = \mathcal{U}_{\mathcal{C}} \cap \mathcal{C}$.

Tegyük fel, hogy $\mathfrak{C}$ nyitott. Mivel

$$f^{-1}(\mathcal{U}') = \bigcup_{\mathcal{C} \in \mathfrak{C}} (f^{-1}(\mathcal{U}') \cap \mathcal{C}) = \bigcup_{\mathcal{C} \in \mathfrak{C}} f^{-1}(\mathcal{U}' \cap f(\mathcal{C})) = \bigcup_{\mathcal{C} \in \mathfrak{C}} (\mathcal{U}_{\mathcal{C}} \cap \mathcal{C}),$$

és $\mathcal{U}_{\mathcal{C}} \cap \mathcal{C}$ nyílt minden $\mathcal{C}$ esetén, $f^{-1}(\mathcal{U}')$ nyílt, ami igazolja a tétel állítását ebben az esetben.

Most azt tegyük fel, hogy $\mathfrak{C}$ lokálisan véges és zárt, és válasszunk egy tetszőleges $X \in f^{-1}(\mathcal{U}')$ pontot. A lokális végeesség miatt ennek van olyan $\mathcal{V} \in \mathfrak{T}_X$ környezete, mely a $\mathfrak{C}$ fedésnek legfeljebb véges sok elemét metszi. Számozzuk úgy a $\mathcal{V}$ által metszett elemeket, hogy az X pontot nem tartalmazó elemek sorszáma legyen nagyobb, mint az X pontot tartalmazó elemek sorszáma, vagyis a $\mathcal{V}$ környezetet metsző $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) halmazok közül az első $k \in \mathbb{N}$ tartalmazza az X pontot, a többi pedig nem. Minthogy a $\mathcal{C}_{k+1}, \dots, \mathcal{C}_n$ halmazok zártak, van olyan $\mathcal{W} \in \mathfrak{T}_X$ környezete az X pontnak, mely nem metszi ezeket, és így $\mathcal{W} \subseteq \bigcup_{i=1}^k \mathcal{C}_i$.

$$\begin{aligned} \mathcal{W} \cap \left(\bigcap_{i=1}^k \mathcal{U}_{\mathcal{C}_i}\right) &= \left(\bigcup_{\mathcal{C} \in \mathfrak{C}} (\mathcal{W} \cap \mathcal{C})\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^k \mathcal{U}_{\mathcal{C}_i}\right) = \left(\bigcup_{j=1}^k (\mathcal{W} \cap \mathcal{C}_j)\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^k \mathcal{U}_{\mathcal{C}_i}\right) \\ &\subseteq \left(\bigcup_{j=1}^k \mathcal{C}_j\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^k \mathcal{U}_{\mathcal{C}_i}\right) \\ &\subseteq \left(\bigcup_{j=1}^k (\mathcal{C}_j \cap \mathcal{U}_{\mathcal{C}_j})\right) = \bigcup_{j=1}^k f^{-1}(\mathcal{U}' \cap f(\mathcal{C}_j)) \subseteq f^{-1}(\mathcal{U}') \end{aligned}$$

mutatja, hogy az X pont $\mathcal{W} \cap (\bigcap_{i=1}^k \mathcal{U}_{C_i})$ környezete $f^{-1}(\mathcal{U}')$ része, ami igazolja, hogy $f^{-1}(\mathcal{U}')$ nyílt. ■

Tétel.

- (1) *Az identikus leképezés folytonos;*
- (2) *Két folytonos leképezés összetétele is folytonos;*
- (3) *Ha f folytonos, akkor (ugyanazon topológiákkal) bármely részhalmazra vett $f|_{\mathcal{H}}$ megszorítása is folytonos;*
- (4) *Ha f folytonos, akkor (ugyanazon topológiákkal) bármely a képterét tartalmazó halmazba is folytonosan képez;*

Az (1) állítás különböző topológiák esetén az, hogy az identikus $\text{id}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ($\text{id}(X) = X$) leképezés akkor és csak akkor folytonos a $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ és $(\mathcal{X}, \mathfrak{T}')$ topologikus terek között, ha a $\mathfrak{T}$ topológia finomabb, mint a $\mathfrak{T}'$. Ennek a tétel állításainak bizonyítása is az olvasóra marad.

Általánosított Weierstrass-tétel. *Kompakt halmaz folytonos képe kompakt.*

Bizonyítás. Legyen $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ folytonos az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ és $(\mathcal{X}', \mathfrak{T}')$ topologikus terek között. Legyen $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{X}$ kompakt, és legyen $\mathfrak{C}$ az $f(\mathcal{K})$ halmaz egy nyílt lefedése.

Válasszunk az $f(\mathcal{K})$ halmaz minden K' pontjához egy $\mathcal{C}_{K'} \in \mathfrak{T}'_{K'}$ nyílt halmazt a $\mathfrak{C}$ fedésből. Ekkor

$$\mathcal{K} \subseteq f^{-1}(f(\mathcal{K})) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{K' \in f(\mathcal{K})} \mathcal{C}_{K'}\right) = \bigcup_{K' \in f(\mathcal{K})} f^{-1}(\mathcal{C}_{K'}) = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} f^{-1}(\mathcal{C}_{f(K)})$$

azt bizonyítja, hogy az f folytonossága miatt nyílt $f^{-1}(\mathcal{C}_{f(K)})$ halmazok lefedik a $\mathcal{K}$ kompakt halmazt. Ebből következik, hogy van véges sok, mondjuk $n \in \mathbb{N}$ darab, K_i pont a $\mathcal{K}$ halmazban úgy, hogy $\mathcal{K} \subseteq \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(\mathcal{C}_{f(K_i)})$. Eszerint

$$f(\mathcal{K}) \subseteq f\left(\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(\mathcal{C}_{f(K_i)})\right) = \bigcup_{i=1}^n f(f^{-1}(\mathcal{C}_{f(K_i)})) = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{C}_{f(K_i)},$$

ami igazolja az $f(\mathcal{K})$ halmaz kompaktságát. ■

Jegyezzük meg, hogy egy $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{X}$ sűrű halmaz folytonos f függvény mellett $f(\mathcal{H})$ képe sűrű a $f(\mathcal{X})$ halmazban, mert bármely $X' \in f(\mathcal{X})$ pont bármely $\mathcal{U}' \in \mathfrak{T}_{X'}$ környezetének $f^{-1}(\mathcal{U}')$ öse nyílt, tehát tartalmaz pontot a $\mathcal{H}$ halmazból, aminek képe az $f(\mathcal{H}) \cap \mathcal{U}'$ halmazba esik. Másfelől viszont egy sehol sem sűrű halmaz folytonos képe lehet akár sűrű is, amit az olvasó is beláthat a $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ függvény és az egész számok példáján.

Definíció. Egy folytonos függvényt *homeomorfiának* nevezünk, ha bijektív és inverze is folytonos.

Ha két topologikus tér között létezik egy homeomorfia, akkor a tereket *homeomorfoknak* hívjuk.

Az olvasóra marad a következő tétel állításainak bizonyítása.

Tétel. *Homeomorfiák kompozíciója homeomorfia, a topologikus terek homeomorfizmusa ekvivalencia-reláció.*

Egy homeomorfizmus a $\mathfrak{T}$ és $\mathfrak{T}'$ topológiák, és a zárt halmazok $\overline{\mathfrak{T}}$ és $\overline{\mathfrak{T}'}$ halmazai között is bijekciót hoz létre, ezért két homeomorf topologikus tér a topológia eszközeivel nem megkülönböztethető. A topológia, mint matematikai terület lényege tehát a topologikus terek azon tulajdonságainak vizsgálata, melyek homeomorfia hatására nem változnak.

Definíció. Az $f: (\mathcal{X}, \mathfrak{T}) \rightarrow [0, 1]$ folytonos függvényt, az $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ és $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$ részhalmazokat *szétválasztó függvénynek* nevezzük, ha $f(\mathcal{A}) = \{0\}$ és $f(\mathcal{B}) = \{1\}$.

Egy teret T_{34} -térnek mondunk, ha minden ponthoz és azt nem tartalmazó zárt halmazhoz létezik szétválasztó függvény.

Definíció. Az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus teret *teljesen regulárisnak* nevezzük, ha T_1 és T_{34} . *Tyhonov térnek* mondjuk a teret, ha Hausdorff-féle és T_{34} ($\mathfrak{T} \in T_2 \cap T_{34}$).

A folytonosság tulajdonságai alapján ha T_{34} teljesül, akkor T_3 is (de vannak olyan T_3 -terek, melyek nem T_{34} -terek), tehát a teljesen reguláris topologikus terek regulárisak is.

Az Urison-lemma szerint a normális topologikus terek teljesen regulárisak.

Urison-lemma. *Normális topologikus térben diszjunkt zárt halmazokhoz létezik őket szétválasztó függvény.*

Bizonyítás. Azt kell igazolnunk, hogy ha az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus téren T_1 és T_4 is teljesül, akkor T_{34} is teljesül, vagyis tetszőleges diszjunkt zárt $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{T}$ halmazokhoz konstruálnunk kell őket elválasztó $f: \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$ függvényt.

Mivel $\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{B}}$, ezért előbbi tételünk (3) állítása ($T_4 \Leftrightarrow T'_4$) szerint létezik olyan nyílt $\mathcal{U}_0 \in \mathfrak{T}$ halmaz, melyre $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_0^- \subset \overline{\mathcal{B}}$. Legyen $\mathcal{U}_1 := \overline{\mathcal{B}}$.

Most rekurzív, indukciós módon definiáljuk a kisebb sorszámúak lezártjait tartalmazó nyílt halmazok egy $\mathcal{U}_d$ sorozatát az összes $[0, 1] \cap \mathbb{D}$ diadikus törtre, ahol $\mathbb{D} = \{p/2^m : p, m \in \mathbb{N}\}$.

Az $\mathcal{U}_0$ és $\mathcal{U}_1$ nyílt halmazok tartalmazzák a kisebb sorszámú halmazok lezártjait. Első lépésként keresünk egy alkalmas nyílt $\mathcal{U}_{1/2}$ halmazt. Mivel $\mathcal{U}_0^- \subset \mathcal{U}_1$, előbbi

tételünk (3) állítása szerint létezik egy olyan nyílt $\mathcal{U}_{1/2}$ halmaz, melyre $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_{1/2} \subset \mathcal{U}_{1/2}^- \subset \mathcal{U}_1$. Láthatólag továbbra is fennáll, hogy a megadott halmazok tartalmazzák a kisebb sorszámú halmazok lezártjait.

Tegyük most fel, hogy $\mathcal{U}_{p/2^m}$ már minden $p < 2^m$ páratlan természetes számra adott, és ezek tartalmazzák a kisebb sorszámú halmazok lezártjait.

Ha p egy páros természetes szám, akkor legyen $\mathcal{U}_{p/2^{m+1}} := \mathcal{U}_{(p/2)/2^m}$.

Ha p páratlan természetes szám, akkor válasszunk egy olyan, előbbi tételünk (3) állítása szerint biztosan létező nyílt $\mathcal{U}_{p/2^{m+1}}$ halmazt, melyre $\mathcal{U}_{(p-1)/2^{m+1}}^- \subset \mathcal{U}_{p/2^{m+1}} \subset \mathcal{U}_{p/2^{m+1}}^- \subset \mathcal{U}_{p+1/2^{m+1}}$. Világos, hogy ekkor továbbra is fennáll, hogy a nyílt halmazok tartalmazzák a kisebb sorszámú nyílt halmazok lezártjait.

Ezzel minden $[0, 1]$ szakaszra eső diadikus törthöz hozzárendeltünk egy nyílt környezetet úgy, hogy ezek tartalmazzák a kisebb sorszámú nyílt halmazok lezártjait.

Legyen $f: \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$ az a függvény, melyre

$$f(X) = \begin{cases} 1, & \text{ha } X \in \overline{\mathcal{U}_1}, \\ \inf\{d : X \in \mathcal{U}_d, d \in \mathbb{D} \cap [0, 1]\}, & \text{ha } X \in \mathcal{U}_1. \end{cases}$$

Ekkor minden $X \in \mathcal{A}$ pontra $f(X) = 0$, hiszen $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}_0$, továbbá minden $X \in \mathcal{B}$ pontra $f(X) = 1$, hiszen $\mathcal{U}_1 = \overline{\mathcal{B}}$.

Legyen $0 < \varepsilon < t \in (0, 1)$ esetén $\mathcal{V}_{t,\varepsilon} = f^{-1}((t - \varepsilon, t + \varepsilon))$ és tekintsünk egy $X \in \mathcal{V}_{t,\varepsilon}$ pontot. Nyilván léteznek olyan pozitív $d_1 < d_2$ diadikus törtek, hogy $t - \varepsilon < d_1 < f(X) < d_2 < t + \varepsilon$, amiért $\mathcal{W}_{d_2,d_1} = \mathcal{U}_{d_2} \setminus \mathcal{U}_{d_1}^-$ olyan nyílt környezete az X pontnak, hogy $f(\mathcal{W}_{d_2,d_1}) \subseteq (d_1, d_2) \subseteq (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$, tehát $\mathcal{V}_{t,\varepsilon}$ nyílt halmaz.

Legyen $0 < \varepsilon < 1$ és $\mathcal{V}_{0,\varepsilon} = f^{-1}([0, \varepsilon))$. Tekintsünk egy $X \in \mathcal{V}_{0,\varepsilon}$ pontot. Ha $f(X) > 0$, akkor léteznek olyan pozitív $d_1 < d_2$ diadikus törtek, hogy $0 < d_1 < f(X) < d_2 < \varepsilon$, amiért $\mathcal{W}_{d_2,d_1}$ olyan nyílt környezete az X pontnak, hogy $f(\mathcal{W}_{d_2,d_1}) \subseteq (d_1, d_2) \subseteq [0, \varepsilon)$. Ha $f(X) = 0$, akkor létezik olyan pozitív d diadikus tört, hogy $d < \varepsilon$, amiért $\mathcal{U}_d$ olyan nyílt környezete az X pontnak, hogy $f(\mathcal{U}_d) \subseteq [0, d) \subseteq [0, \varepsilon)$.

Legyen $0 < \varepsilon < 1$ és $\mathcal{V}_{1,\varepsilon} = f^{-1}((1 - \varepsilon, 1])$. Tekintsünk egy $X \in \mathcal{V}_{1,\varepsilon}$ pontot. Ha $f(X) < 1$, akkor léteznek olyan pozitív $d_1 < d_2$ diadikus törtek, hogy $1 - \varepsilon < d_1 < f(X) < d_2 < 1$, amiért $\mathcal{W}_{d_2,d_1}$ olyan nyílt környezete az X pontnak, hogy $f(\mathcal{W}_{d_2,d_1}) \subseteq (d_1, d_2) \subseteq (1 - \varepsilon, 1]$. Ha $f(X) = 1$, akkor létezik olyan $d < 1$ diadikus tört, hogy $1 - \varepsilon < d$, amiért $\overline{\mathcal{U}_d}$ olyan nyílt környezete az X pontnak, hogy $f(\overline{\mathcal{U}_d}) \subseteq (d, 1] \subseteq (1 - \varepsilon, 1]$.

Ezzel a tételt beláttuk. ■

Definíció. A folytonos $f, g: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ függvényeket egymással *homotópnak* nevezzük, ha van olyan folytonos $h: [0, 1] \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ függvény, melyre $h(0, \cdot) = f$ és $h(1, \cdot) = g$.

A homotópia a folytonos függvények között ekvivalencia-reláció, aminek bizonyítása a ragasztási lemma felhasználásával az olvasóra marad.

Tétel. *Homotóp függvények összetétele homotóp függvényekkel homotóp.*

Bizonyítás. Legyenek a folytonos $f, g: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ függvények egymással homotópok, és legyenek a folytonos $f', g': \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}''$ függvények is egymással homotópok.

Vannak tehát olyan folytonos $h: [0, 1] \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ és $h': [0, 1] \times \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}''$ függvények, melyekre $h(0, \cdot) = f$, $h(1, \cdot) = g$ és $h'(0, \cdot) = f'$, $h'(1, \cdot) = g'$.

Legyen $h^*: [0, 1] \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}''$ olyan, hogy $h^*(t, \cdot) = h'(t, h(t, \cdot))$ minden $t \in [0, 1]$ esetén. Ekkor $h^*(0, \cdot) = h'(0, h(0, \cdot)) = h'(0, f(\cdot)) = f'(f(\cdot))$ és $h^*(1, \cdot) = h'(1, h(1, \cdot)) = h'(1, g(\cdot)) = g'(g(\cdot))$, továbbá h^* folytonos, hiszen folytonos függvények összetétele. Ez bizonyítja a tételt. ■

Definíció. Az $(\mathcal{Y}, \mathfrak{T}')$ topologikus tér *abszolút környezet retraktum*, ha minden $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ normális topologikus tér bármely $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}$ zárt halmazának bármely $f: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}$ folytonos függvényéhez létezik a $\mathcal{Z}$ olyan $\mathcal{U} \in \mathfrak{T}$ nyílt környezete és azon egy $g: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$ függvény, hogy $g|_{\mathcal{Z}} = f$.

A gömbfelület topológiájának vizsgálatakor bizonyításra kerül, hogy a gömbfelület abszolút környezet retraktum.

Borsuk homotóp folytatási tétele. *Legyen $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ normális tér, $(\mathcal{Y}, \mathfrak{T}')$ abszolút környezet retraktum, $\tilde{f}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ folytonos, $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}$ zárt, $f: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}$ pedig olyan, hogy $f = \tilde{f}|_{\mathcal{Z}}$. Ha $g: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}$ homotóp az f leképezéssel, akkor létezik olyan folytonos $\tilde{g}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ függvény, mely homotóp az $\tilde{f}$ függvénnel, és $g = \tilde{g}|_{\mathcal{Z}}$.*

Bizonyítás. A feltétel szerint van olyan folytonos $h: [0, 1] \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}$, melyre $h(0, \cdot) = f$ és $h(1, \cdot) = g$. A $[0, 1] \times \mathcal{X}$ egy normális tér, amiben $\hat{\mathcal{Z}} = (\{0\} \times \mathcal{X}) \cup ([0, 1] \times \mathcal{Z})$ zárt halmaz. Az $\mathcal{Y}$ abszolút környezet retraktum, ezért van olyan $\mathcal{U} \subseteq [0, 1] \times \mathcal{X}$ nyílt halmaz és folytonos $\tilde{h}: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$ függvény, hogy $\hat{\mathcal{Z}} \subseteq \mathcal{U}$ és $\tilde{h}|_{[0, 1] \times \mathcal{Z}} = h$ és $\tilde{h}|_{\{0\} \times \mathcal{X}}(0, \cdot) = \tilde{f}$.

Mint hogy $\hat{\mathcal{Z}}$ és $\bar{\mathcal{U}}$ diszjunkt zárt halmazok, Urison lemmája szerint az $[0, 1] \times \mathcal{X}$ normális téren van őket elválasztó $\ell: [0, 1] \times \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$ függvény, melyre $\ell(\bar{\mathcal{U}}) = \{0\}$ és $\ell(\hat{\mathcal{Z}}) = \{1\}$.

Definiáljuk a folytonos $\hat{h}: [0, 1] \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ függvényt a

$$\hat{h}_t(X) := \hat{h}(t, X) = \tilde{h}(t \cdot \ell(t, X), X)$$

formulával.

Ekkor $\hat{h}_0 = \tilde{h}(0, \cdot) = \tilde{f}$, $\hat{h}_0|_{\mathcal{Z}} = \tilde{h}(0, \cdot)|_{\mathcal{Z}} = h(0, \cdot)|_{\mathcal{Z}} = f$ és

$$\begin{aligned} \hat{h}_1(X) &= \tilde{h}(\ell(1, X), X) \\ &= \begin{cases} \tilde{h}(1, X) = h(1, X) = g(X), & \text{ha } X \in \mathcal{Z}, \\ \tilde{h}(\ell(1, X), X), & \text{ha } X \notin \mathcal{Z} \text{ és } (\ell(1, X), X) \notin \overline{\mathcal{U}}, \\ \tilde{h}(0, X) = \tilde{f}(X), & \text{ha } (\ell(1, X), X) \in \overline{\mathcal{U}}. \end{cases} \end{aligned}$$

tehát $\hat{h}_1$ a g függvény folytatása, és homotóp az $h_0 = \tilde{f}$ függvénnyel. Ez volt a bizonyítandó. ■

1.6. Valósértékű folytonos függvények

Tétel. *Ugyanazon topologikus téren értelmezett valósértékű folytonos függvények összege és szorzata is folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $f_1: (\mathcal{X}, \mathfrak{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ és $f_2: (\mathcal{X}, \mathfrak{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ is folytonos függvény, és tekintsük az $f := f_1 + f_2: (\mathcal{X}, \mathfrak{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt.

Elég belátni, hogy az $\mathcal{U}_{X,f,\varepsilon} = f^{-1}(\{y \in \mathbb{R} : |f(X) - y| < \varepsilon\})$ halmaz nyílt.

Legyen $Y \in \mathcal{U}_{X,f,\varepsilon}$. Ekkor a $\delta = \varepsilon - |f(Y) - f(X)|$ szám pozitív. Az $\mathcal{U}_{Y,f_i,\delta/2} = f_i^{-1}(\{z \in \mathbb{R} : |f_i(Y) - z| < \delta/2\})$ halmazok ($i = 1, 2$) az f_1 és f_2 folytonossága miatt nyíltak, ezért a $\mathcal{V} = \mathcal{U}_{Y,f_1,\delta/2} \cap \mathcal{U}_{Y,f_2,\delta/2}$ halmaz is nyílt, és természetesen tartalmazza az Y pontot. Ennek minden $Z \in \mathcal{V}$ pontjára

$$\begin{aligned} |f(Z) - f(X)| &\leq |f(Z) - f(Y)| + |f(Y) - f(X)| \\ &\leq |f_1(Z) - f_1(Y)| + |f_2(Z) - f_2(Y)| + |f(Y) - f(X)| \\ &\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \varepsilon - \delta = \varepsilon, \end{aligned}$$

ami azt mutatja, hogy $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}_{X,f,\varepsilon}$, amiből f folytonossága következik.

A szorzat esetére a fentivel teljesen analóg bizonyítás elvégzése az olvasóra marad. ■

Legyenek az $f_i: (\mathcal{X}, \mathfrak{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in \mathbb{N}$) folytonos függvények olyanok, hogy minden $X \in \mathcal{X}$ pontban létezik az $f(X) := \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(X)$ határérték. Azt mondjuk, hogy az f_i függvéneysorozat *egyenletesen konvergál* az f függvényhez, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $n \in \mathbb{N}$, melyre minden $i > n$ esetén $|f_i(X) - f(X)| < \varepsilon$ minden $X \in \mathcal{X}$ pontban.

Tétel. *Ugyanazon topologikus téren értelmezett valósértékű folytonos függvények egyenletesen konvergens sorozatának határértéke folytonos függvény.*

Bizonyítás. Legyen a folytonos $f_i: (\mathcal{X}, \mathfrak{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in \mathbb{N}$) függvények sorozata egyenletesen konvergens, és tekintsük az $f := \lim_{i \rightarrow \infty} f_i: (\mathcal{X}, \mathfrak{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt.

Elég belátni, hogy az $\mathcal{U}_{X,f,\varepsilon} = f^{-1}(\{y \in \mathbb{R} : |f(X) - y| < \varepsilon\})$ halmaz nyílt.

Legyen $Y \in \mathcal{U}_{X,f,\varepsilon}$. Ekkor a $\delta = \varepsilon - |f(Y) - f(X)|$ szám pozitív. Az egyenletes konvergencia miatt létezik $n \in \mathbb{N}$, melyre $|f_n - f| < \delta/3$. Az f_n folytonossága miatt nyílt $\mathcal{V} = \mathcal{U}_{Y,f_n,\delta/3}$ halmaz bármely Z pontjára

$$\begin{aligned} |f(Z) - f(X)| &\leq |f(Z) - f(Y)| + |f(Y) - f(X)| \\ &\leq |f(Z) - f_n(Z)| + |f_n(Z) - f_n(Y)| + |f_n(Y) - f(Y)| + |f(Y) - f(X)| \\ &\leq \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \varepsilon - \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

teljesül, ami azt mutatja, hogy $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}_{X,f,\varepsilon}$. Eszerint $\mathcal{U}_{X,f,\varepsilon}$ nyílt, amiből f folytonossága következik. ■

Legyenek az $f_j: (\mathcal{X}, \mathfrak{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ ($j \in \mathbb{N}$) folytonos függvények olyanok, hogy minden $X \in \mathcal{X}$ pontban létezik az $f(X) := \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^i f_j(X)$ határérték. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ függvény sor határfüggvénye f . Azt mondjuk, hogy a $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ függvény sor *abszolút konvergens*, ha minden $j \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $K_j > 0$, melyre $|f_j| \leq K_j$ és $\sum_{j=1}^{\infty} K_j < \infty$.

Tétel. *Folytonos függvények abszolút konvergens függvény sorának határfüggvénye folytonos.*

Bizonyítás. Legyen a folytonos $f_j: (\mathcal{X}, \mathfrak{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ ($j \in \mathbb{N}$) függvények sora abszolút konvergens, és legyen $F_i := \sum_{j=1}^i f_j: (\mathcal{X}, \mathfrak{T}) \rightarrow \mathbb{R}$. Az F_i függvények folytonosak, így elég belátni, hogy sorozatuk egyenletesen konvergens.

Az abszolút konvergencia feltétele miatt léteznek olyan $K_j > 0$ számok, melyekre $|f_j| \leq K_j$ és $\sum_{j=1}^{\infty} K_j < \infty$. Utóbbi miatt minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\sum_{j=n}^{\infty} K_j < \varepsilon$, ezért $k > i > n$ esetén az

$$\begin{aligned} |F_i - F_k| &\leq |F_i - F_{i+1}| + \cdots + |F_{k-1} - F_k| = |f_{i+1}| + \cdots + |f_k| \\ &\leq \sum_{j=i+1}^k K_j \leq \sum_{j=i+1}^{\infty} K_j < \varepsilon \end{aligned}$$

egyenlőtlenség igazolja, hogy az F_i függvény sorozat minden pontban Cauchy-sorozat, tehát konvergens, így $F = \lim_{i \rightarrow \infty} F_i$ jól definiált függvény, melyre viszont ismét az abszolút konvergencia feltételeit használva

$$|F_i - F| = |F_i - \lim_{k \rightarrow \infty} F_k| = \lim_{k \rightarrow \infty} |F_i - F_k| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=i+1}^k K_j = \sum_{j=i+1}^{\infty} K_j$$

adódik. Minthogy $\sum_{j=1}^{\infty} K_j < \infty$, tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $i > n$ esetén $\sum_{j=i+1}^{\infty} K_j < \varepsilon$, ami igazolja az egyenletes konvergenciát, és ezeket a határfüggvény folytonosságát. ■

A fentiek alapján felvetődik a kérdés, hogy miféle függvények állnak elő folytonos függvények sorozatának határfüggvényeként. Egy f függvény képterének egy X' pontjához tartozó *szinthalmazán* az X' öseinek $f^{-1}(X')$ halmazát értjük.

Tétel. *Folytonos függvények sorozata határfüggvényének szinthalmazai G_δ -halmazok.*

Bizonyítás. Ha a folytonos függvényekből álló $f_n: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozatnak $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ a határfüggvénye, akkor

$$\mathcal{H}_y = \{X \in \mathcal{X} : y \leq f(X)\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \left\{X \in \mathcal{X} : y - \frac{1}{m} < f_n(X)\right\},$$

ugyanis ha $y \leq f(X)$, akkor valamely elegendően nagy N szám esetén minden $n > N$ és $m \in \mathbb{N}$ számra $y - \frac{1}{m} < f_n(X)$, tehát a bal oldal a jobboldal része. Ha viszont $f(X) < y$, akkor valamely elegendően nagy N szám esetén van olyan $m \in \mathbb{N}$ szám, hogy minden $n > N$ számra $f_n(X) < y - \frac{1}{m}$, tehát a bal oldal komplementere nem része a jobboldalnak. ■

Tietze-féle folytatási tétel. *Legyen $\mathcal{Z}$ az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ normális topologikus tér egy zárt halmaza, azon pedig $f: \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ egy folytonos függvény. Ekkor létezik olyan $\tilde{f}: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, melyre $\tilde{f}|_{\mathcal{Z}} = f$, és $\sup \tilde{f} = \sup f$ és $\inf \tilde{f} = \inf f$.*

Bizonyítás. Ha f konstans, akkor az állítás nyilvánvaló, ezért a továbbiakban felteesszük, hogy f nem konstans.

Először tegyük fel, hogy f korlátos.

Megfelelő c konstans hozzáadásával elérhető, hogy $f + c$ alsó és felső határának összege nulla legyen, így a továbbiakban feltesszük, hogy $-h_0 \leq f \leq h_0$, ahol $h_0 \in \mathbb{R}_+$ az f felső határa.

Legyen $f_0 = f$. Rekurzív eljárással definiálunk egy folytonos függvényekből álló $f_n: \mathcal{Z} \rightarrow [-h_n, h_n]$ függvényt.

Ha a $h_n \in \mathbb{R}_+$ szám és a folytonos $f_n: \mathcal{Z} \rightarrow [-h_n, h_n]$ függvény már adott valamely nem negatív $n \in \mathbb{N}$ számra, akkor az

$$\mathcal{A}_n := \{Z \in \mathcal{Z} : f_n(Z) \leq -h_n/3\} \quad \text{és} \quad \mathcal{B}_n := \{Z \in \mathcal{Z} : f_n(Z) \geq h_n/3\}$$

halmazok zártak, mert zárt halmazok folytonos függvény szerinti ősképei. Az Urison-lemma értelmében ezért van olyan folytonos g_n függvény, melyre

$$g_n: \mathcal{X} \rightarrow \left[-\frac{h_n}{3}, \frac{h_n}{3}\right] \quad g_n(X) = \begin{cases} -h_n/3, & \text{ha } X \in \mathcal{A}_n \\ h_n/3, & \text{ha } X \in \mathcal{B}_n. \end{cases}$$

Legyen $f_{n+1} = f_n - g_n|_{\mathcal{Z}}$. Ekkor f_{n+1} folytonos, hiszen két folytonos függvény különbsége, és

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(Z)| &= |f_n(Z) - g_n(Z)| \leq \begin{cases} g_n(Z) - f_n(Z), & \text{ha } Z \in \mathcal{A}_n \\ f_n(Z) - g_n(Z), & \text{ha } Z \in \mathcal{B}_n \\ |f_n(Z)| + |g_n(Z)|, & \text{ha } Z \in \mathcal{Z} \setminus (\mathcal{A}_n \cup \mathcal{B}_n) \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} -h_n/3 + h_n, & \text{ha } Z \in \mathcal{A}_n \\ h_n - h_n/3, & \text{ha } Z \in \mathcal{B}_n \\ h_n/3 + h_n/3, & \text{ha } Z \in \mathcal{Z} \setminus (\mathcal{A}_n \cup \mathcal{B}_n) \end{cases} \\ &= 2h_n/3. \end{aligned}$$

Legyen tehát $h_{n+1} = 2h_n/3$, és akkor azt látjuk, hogy $f_{n+1}: \mathcal{Z} \rightarrow [-h_{n+1}, h_{n+1}]$ folytonos.

Az f_n függvéneysorozat előállításában közben nyert g_n függvények folytonosak, és

$$\sum_{i=0}^{\infty} |g_i| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{h_i}{3} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^i h_0 = h_0,$$

hiszen $h_i \leq 2h_{i-1}/3 \leq \dots \leq (2/3)^i \cdot h_0$.

Eszerint a $\sum_{i=0}^{\infty} g_i$ függvéneysor abszolút konvergens, amiből következik, hogy az $\tilde{f} := \sum_{i=0}^{\infty} g_i: \mathcal{X} \rightarrow [-h_0, h_0]$ függvény is folytonos. Ugyanakkor

$$\tilde{f}|_{\mathcal{Z}} = \sum_{i=0}^{\infty} g_i|_{\mathcal{Z}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n g_i|_{\mathcal{Z}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_0 - f_{n+1}) = f_0 - \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n+1} = f_0,$$

hiszen $|f_{n+1}| \leq h_{n+1} \leq 2h_n/3 \leq \dots \leq (2/3)^n \cdot h_0$. Ezzel az állítást korlátos függvényre beláttuk.

A bizonyítás teljessé tétele érdekében innentől tetszőleges folytonos $f: \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt vizsgálunk. Tekintsünk egy homeomorf $g: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ függvényt (ilyen például az $x \mapsto (\frac{2}{\pi}) \arctan x$ függvény). Ekkor az $f_1 = g \circ f$ folytonos függvény korlátos, így előbbi megállapításunk értelmében létezik olyan $\tilde{f}_1: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos

függvény, melyre $\tilde{f}_1|_{\mathcal{Z}} = f_1$, valamint $\sup \tilde{f}_1 = \sup f_1$ és $\inf \tilde{f}_1 = \inf f_1$. Legyen $\mathcal{Z}_1 = \{X \in \mathcal{X} : |\tilde{f}_1(X)| = 1\}$. Ez egy zárt halmaz, mely nem metszi a $\mathcal{Z}$ zárt halmazt, hiszen $\tilde{f}_1(\mathcal{Z}) = f_1(\mathcal{Z}) \subseteq (-1, 1)$, ezért az Urison-lemma ad egy olyan $h: \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$ folytonos függvényt, mely elválasztja a $\mathcal{Z}$ és $\mathcal{Z}_1$ zárt halmazokat, vagyis $h(\mathcal{Z}) = \{1\}$ és $h(\mathcal{Z}_1) = \{0\}$. Legyen $f_2 = h \cdot \tilde{f}_1$. Ekkor $f_2(\mathcal{X}) \subseteq (-1, 1)$, ezért létezik a $\tilde{f} = g^{-1} \circ f_2$ függvény, mely éppen teljesíti a tétel minden állítását, mert

$$\tilde{f}|_{\mathcal{Z}} = g^{-1} \circ f_2|_{\mathcal{Z}} = g^{-1} \circ (h|_{\mathcal{Z}} \cdot \tilde{f}_1|_{\mathcal{Z}}) = g^{-1} \circ f_1|_{\mathcal{Z}} = g^{-1} \circ g \circ f = f,$$

valamint $\sup \tilde{f} = \sup f$ és $\inf \tilde{f} = \inf f$, hiszen minden vizsgált függvénynek a $\mathcal{Z}$ halmazon vett alsó és felső határa megegyezik az $\mathcal{X}$ alaphalmazon vett alsó és felső határával. ■

1.7. Összefüggőség

Diszjunkt részhalmazok egy rendszerét az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus térben *partíciónak* nevezzük, ha uniójuk lefedi az $\mathcal{X}$ alaphalmazt. Ha a topologikus térnek van nyílt halmazokból álló partíciója, akkor ezen nyílt halmazok zártak is, hiszen mindegyik a többi uniójának komplementere.

Definíció. Egy $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus teret *összefüggőnek* nevezzük, ha nem létezik olyan valódi $\mathcal{H} \subset \mathcal{X}$ részhalmaza, mely egyszerre zárt és nyílt, vagyis $\overline{\mathcal{H}} \cap \mathcal{H} = \{\emptyset, \mathcal{X}\}$.

Nem összefüggő halmaz folytonos képe könnyen lehet összefüggő, az összefüggőség viszont öröklődik a folytonos képre. Ezt az állítást az elemi analízisben általában *Bolzano–Weierstrass-tételként* mondják ki a valós folytonos függvényekre. A bizonyítása az olvasóra marad (nyílt-zárt halmaz ösképe is nyílt-zárt).

Tétel. Az alábbiak minden $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus térben teljesülnek.

- (1) Ha $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{X}$ összefüggő, akkor minden olyan $\mathcal{K}$ halmaz is összefüggő, melyre $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}^-$.
- (2) Közös ponttal rendelkező összefüggő halmazok uniója is összefüggő.

Bizonyítás. (1) Ha $\mathcal{K}$ nem összefüggő, akkor vannak olyan diszjunkt $\mathcal{Z}_1$ és $\mathcal{Z}_2$ zárt halmazok, hogy $\mathcal{K} = \mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2$. Ekkor $\mathcal{H} = (\mathcal{H} \cap \mathcal{Z}_1) \cup (\mathcal{H} \cap \mathcal{Z}_2)$, amiért $\mathcal{H}$ összefüggősége miatt a benne zárt $\mathcal{H} \cap \mathcal{Z}_1$ és $\mathcal{H} \cap \mathcal{Z}_2$ halmazok egyike üres, a másik pedig a $\mathcal{H}$. Mondjuk $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{Z}_1$ és $\mathcal{H} \cap \mathcal{Z}_2 = \emptyset$. Előbbi miatt $\mathcal{H}^- \subseteq \mathcal{Z}_1$, amiből $\mathcal{K} = \mathcal{Z}_1$ következik.

(2) Valamely $\mathfrak{I}$ halmaz minden $i \in \mathfrak{I}$ elemére legyenek a $\mathcal{H}_i$ halmazok össze-
függőek, páronként közös ponttal, és tekintsük a $\mathcal{H} = \bigcup_{i \in \mathfrak{I}} \mathcal{H}_i$ halmaz diszjunkt $\mathcal{Z}_1$

és $\mathcal{Z}_2$ zárt halmazokra való $\mathcal{H} = \mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2$ felbontását. Minthogy $\mathcal{H}_i$ összefüggő, a benne zárt $\mathcal{H}_i \cap \mathcal{Z}_1$ és $\mathcal{H}_i \cap \mathcal{Z}_2$ halmazok egyike üres, a másik pedig a $\mathcal{H}_i$ minden $i \in \mathcal{I}$ indexre. A különböző $\mathcal{Z}_j$ ($j = 1, 2$) halmazokba eső $\mathcal{H}_i$ halmazoknak nem lehet közös pontja, ezért mind ugyanabba a, mondjuk, $\mathcal{Z}_1$ halmazba esik, amiért $\mathcal{H} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{H}_i \subseteq \mathcal{Z}_1$, ami igazolja az állítást. ■

Az X és Y pontokat *egymással összefüggőnek* nevezzük, ha van olyan összefüggő halmaz, mely mindkettőt tartalmazza. Világos, hogy az egymással összefüggőség reflexív, szimmetrikus, és előbbi tételünk (2) állítása miatt tranzitív is, ezért tekinthetjük egy topologikus térnek az egymással összefüggőségre vett ekvivalenciaosztályait. Ezeket a topologikus tér *összefüggő komponenseinek* nevezzük.

Minden összefüggő komponens zárt, mert lezártja is összefüggő, így annak minden pontját tartalmazza. Ha egy topologikus térnek csak véges sok összefüggő komponense van, akkor ezen komponensek nyíltak is. Végtelen sok komponens esetében azonban ez nem feltétlen teljesül, amit a racionális számok halmaza a szokásos topológiával is mutat.

Tétel. *Összefüggő terek szorzata összefüggő.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ most a valamely $\mathcal{I}$ halmaz minden $i \in \mathcal{I}$ eleméhez adott összefüggő $(\mathcal{X}_i, \mathfrak{T}_i)$ topologikus terek szorzata a szorzattopológiával.

Ha $\mathcal{I}$ véges, akkor elegendő az $\mathcal{I} = \{1, 2\}$ halmaz esetén igazolni az állítást. Tegyük fel, hogy $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ nem összefüggő, tehát van két olyan diszjunkt nyílt halmaz, $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$, hogy $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} = \mathcal{X}$.

Legyen minden $Y \in \mathcal{X}_2$ pontra $\mathcal{X}_{1,Y} = \{(X_1, Y) : X_1 \in \mathcal{X}_1\} \subseteq \mathcal{X}$ és minden $X \in \mathcal{X}_1$ pontra $\mathcal{X}_{2,X} = \{(X, Y_2) : Y_2 \in \mathcal{X}_2\} \subseteq \mathcal{X}$. A szorzattopológiát definiáló szubbázis miatt az ezeken a szorzattopológiából örökölt relatív topológia olyan, hogy a $p_i : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_i$ projekciókra $p_i|_{\mathcal{X}_{i,Y}} : \mathcal{X}_{i,Y} \rightarrow \mathcal{X}_i$ homeomorfizmus, így ezek a terek összefüggőek.

Legyen $U \in \mathcal{U}$ és $V \in \mathcal{V}$. Ekkor a $p_i : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_i$ projekciókkal $p_1(U) = p_1(V)$ és $p_2(U) = p_2(V)$ nem teljesülhet egyszerre. Ha az egyik egyenlőség teljesül, akkor legyen $U' = U$ és $V' = V$. Ha $p_1(U) \neq p_1(V)$ és $p_2(U) \neq p_2(V)$, legyen $W = (p_1(U), p_2(V))$ és $W \in \mathcal{U}$ esetén $U' = W$ és $V' = V$, $W \in \mathcal{V}$ esetén pedig $U' = U$ és $V' = W$. Ekkor az U' és V' pontok olyanok, hogy $p_1(U') = p_1(V')$ és $p_2(U') = p_2(V')$ közül pontosan az egyik teljesül, valamint $U' \in \mathcal{U}$ és $V' \in \mathcal{V}$.

Ha $p_i(U') = p_i(V')$, akkor tekintsük az $\mathcal{X}_{3-i,p_i(U')}$ teret. Ezt lefedik a nyílt, diszjunkt és $U' \in \mathcal{U} \cap \mathcal{X}_{3-i,p_i(U')}$ valamint $V' \in \mathcal{V} \cap \mathcal{X}_{3-i,p_i(U')}$ miatt nem üres $\mathcal{U} \cap \mathcal{X}_{3-i,p_i(U')}$ és $\mathcal{V} \cap \mathcal{X}_{3-i,p_i(U')}$ halmazok, ami ellentmond az $\mathcal{X}_{3-i,p_i(U')}$ tér összefüggőségének.

Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ összefüggő.

Ha $\mathcal{I}$ nem véges, akkor vegyünk egy tetszőleges $X \in \mathcal{X}$ pontot a szorzattérben, és az $\mathcal{I}$ halmaz minden véges $\mathcal{J}$ részhalmazához rendeljük hozzá az $\mathcal{X}_{\mathcal{J}} = \{Y \in \mathcal{X} : Y_i = X_i \text{ minden } i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}\}$ halmazt^(*). Az $\mathcal{X}_{\mathcal{J}}$ összefüggő, mert $f: (\mathcal{X}_{\mathcal{J}}, \mathfrak{T}) \rightarrow (\prod_{i \in \mathcal{J}} \mathcal{X}_i, \mathfrak{T}_{\mathcal{J}})$ homeomorfia, és utóbbi tér a bizonyítás első eredménye szerint összefüggő.

Ekkor az $\mathcal{X}_{\infty} = \bigcup_{|\mathcal{J}| < \infty} \mathcal{X}_{\mathcal{J}}$ halmaz összefüggő, hiszen az X pont minden $\mathcal{X}_{\mathcal{J}}$ halmazban benne van, és közös ponttal rendelkező összefüggő halmazok uniója összefüggő.

Az $\mathcal{X}$ halmaz sűrű az $\mathcal{X}$ alaphalmazban. Vegyünk ugyanis a szorzattopológiát definiáló bázis $\mathcal{U}_{\mathcal{K}} = \{Y : Y_k \in \mathcal{U}_k \in \mathfrak{T}_k, \text{ minden } k \in \mathcal{K}, |\mathcal{K}| < \infty\}$ alakú elemei közül egyet, és ebben egy $Y \in \mathcal{U}$ pontot. Legyen a $Z \in \mathcal{X}$ pont olyan, hogy

$$Z_i = \begin{cases} Y_i, & \text{ha } i \in \mathcal{J}, \\ X_i, & \text{ha } i \notin \mathcal{J}. \end{cases}$$

Ekkor $Z \in \mathcal{U}$ és $Z \in \mathcal{X}_{\mathcal{J}}$, tehát $\mathcal{U} \cap \mathcal{X}_{\mathcal{J}}$ nem üres, vagyis $\mathcal{X}_{\mathcal{J}}$ meszi a topológia bázisának minden elemét, így az azok unióiból álló nyílt halmazokat is.

Eszerint $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{\infty}$, amiért összefüggő, hiszen összefüggő halmaz lezártja is összefüggő. Ezzel beláttuk az állítást. ■

Definíció. A valós számok bármely zárt szakaszának folytonos képét *útnak* hívjuk. A zárt szakasz végpontjainak esetleg egybeeső képeit az út végpontjainak nevezzük. Ha a végpontok egybeesnek, akkor zárt útról, vagy *hurokról* beszélünk. Egy utat triviálisnak mondunk, ha minden pontja megegyezik a végpontjával.

Mivel bármely zárt $[a, b]$ intervallum a $[0, 1]$ zárt intervallummal homeomorf $([0, 1] \ni x \mapsto a + (b - a)x \in [a, b])$, egy $f: [a, b] \rightarrow \mathcal{X}$ út természetes paraméterezésének nevezzük az $\bar{f}: [0, 1] \rightarrow \mathcal{X}$ folytonos függvényt, melyre $\bar{f}(x) = f(a + (b - a)x)$.

Világos, hogy egy út zárt és összefüggő halmaz, és amennyiben egy út egyik végpontja egybeesik egy másik út egyik végpontjával, akkor a két út egyetlen úttá egyesíthető. Az ilyen utat az eredeti *utak szorzatának* nevezzük, és az u útnak a végpontjában kezdődő v úttal vett szorzatát $u * v$ jelöli. Ilyenkor a v utat az u út folytatásának nevezzük.

Definíció. Egy $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus teret *útszerűen összefüggőnek* nevezzük, ha bármely két pontjához van benne ezen pontokat tartalmazó út. Lokálisan útszerű összefüggőségről beszélünk, ha $\mathcal{X}$ minden pontjának van olyan környezete, mely útszerűen összefüggő.

(*) Ehhez a kiválasztási axióma kell. Lásd a Függelékben!

Világos, hogy útszerűen összefüggő halmaz folytonos képe is útszerűen összefüggő, hiszen út folytonos képe út.

Az X és Y pontokat *úttal összefüggőnek* nevezzük, ha van olyan út, mely mindkettőt tartalmazza. Világos, hogy az úttal összefüggőség reflexív, szimmetrikus, tranzitív is, ezért tekinthetjük egy topologikus térnek az úttal összefüggőségre vett ekvivalencia-osztályait. Ezeket a topologikus tér *útszerűen összefüggő komponenseinek* nevezzük.

Mivel egy út összefüggő halmaz, hiszen összefüggő halmaz folytonos képe, az úttal összefüggő pontok egymással összefüggőek, amiért az útszerűen összefüggő komponensek összefüggő komponensek. Útszerűen összefüggő topologikus tér tehát összefüggő.

Tétel. *Összefüggő és lokálisan útszerűen összefüggő topologikus tér útszerűen összefüggő.*

Bizonyítás. Az útszerűen összefüggő komponensek a lokálisan útszerűen összefüggőség miatt nyíltak. Minthogy minden útszerűen összefüggő komponens a többi útszerűen összefüggő komponens uniójának komplementere, az útszerűen összefüggő komponensek zártak is. Mivel a tér összefüggő, ilyen nyílt-zárt halmaz pontosan egy van, mégpedig a teljes alaphalmaz. Tehát az alaphalmaz egy útszerűen összefüggő komponens, ami bizonyítja az állítást. ■

Tétel. *Egy $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus tér akkor és csak akkor útszerűen összefüggő, ha van olyan X_0 pontja, melyet minden más $Y \in \mathcal{X}$ ponttal út köt össze.*

Bizonyítás. Ha $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ útszerűen összefüggő, akkor minden pontja olyan, hogy azt minden más ponttal út köti össze.

Tegyük most fel, hogy az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus tér X_0 pontja olyan, hogy minden $X, Y \in \mathcal{X}$ ponttal út köt össze. Az X és Y pontokat az X_0 ponttal összekötő utak X_0 pontban közös végponttal rendelkeznek, ezért szorzatuk egy olyan út, mely az X pontot köti össze az Y ponttal. ■

Definíció. Egy $\mathcal{H}$ halmazt *egy pontra összehúzhatónak* hívunk, ha létezik olyan folytonos $h: [0, 1] \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ függvény és $H \in \mathcal{H}$ pont, melyre $h(0, \mathcal{H}) = \{H\}$ és $h(1, \cdot) = \text{Id}$.

Mivel $h_P := h(\cdot, P): [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}$ egy olyan út, melyre $h_P(1) = P$ és $h_P(0) = H$, az összehúzható halmazok útszerűen összefüggőek, amiért összefüggőek is.

Tétel. *Ha $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ összehúzható, $(\mathcal{X}', \mathfrak{T}')$ pedig útszerűen összefüggő, akkor minden $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ folytonos függvény homotóp egy konstans függvénnnyel.*

Bizonyítás. Mivel $\mathcal{X}$ összehúzható, van olyan folytonos $h: [0, 1] \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ függvény és $H \in \mathcal{X}$ pont, melyre $h(1, \cdot) = \text{Id}$ és $h(0, \cdot) = H$.

Legyen a folytonos $g: [0, 1] \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ függvény olyan, hogy $g(t, X) = f(h(t, X))$ minden $X \in \mathcal{X}$ pontra. Ekkor $g(0, \cdot) = f(h(0, \cdot)) = f(H)$ és $g(1, \cdot) = f(h(1, \cdot)) = f(\cdot)$. Ez bizonyítja a tételt. ■

Mint hogy egy út összehúzható, eredményünk fontos következménye, hogy egy útnak bármely útszerűen összefüggő halmazba való leképezései homotópok.

Definíció. Az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus teret *egyszerűen összefüggőnek*, vagy *egyszeresen összefüggőnek* mondjuk, ha útszerűen összefüggő, és az azonos végpontú utak természetes paraméterezéséhez van a végpontokat fixen tartó homotópia.

Tétel. Az útszerűen összefüggő $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus tér akkor és csak akkor egyszerűen összefüggő, ha a körvonal bármely folytonos $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{X}$ leképezéséhez létezik a kör lapnak olyan folytonos $\tilde{f}: \mathbb{B}^1 \rightarrow \mathcal{X}$ leképezése, melyre $\tilde{f}|_{\mathbb{S}^1} = f$.

Bizonyítás. Legyenek

$$[-1, 1] \ni x \mapsto f_+(x, \sqrt{1-x^2}) \quad \text{és} \quad [-1, 1] \ni x \mapsto f_-(x, -\sqrt{1-x^2})$$

természetesen paraméterezett utak az $X = f_+(-1, 0) = f_-(-1, 0)$ és $Y = f_+(1, 0) = f_- (1, 0)$ pontok között.

Tegyük fel először, hogy az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus tér egyszerűen összefüggő. Ekkor a megadott utak homotópok, vagyis létezik olyan $h: [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathcal{X}$, melyre $h(\cdot, -1) = f_-(\cdot)$ és $h(\cdot, 1) = f_+(\cdot)$.

Legyen $\tilde{f}: \mathbb{B}^1 \rightarrow \mathcal{X}$ olyan, hogy

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} X, & \text{ha } x = -1, \\ h(x, y/\sqrt{1-x^2}), & \text{ha } |x| \neq 1, \\ Y, & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$

Mint hogy h és az argumentumában szereplő függvények folytonosak, f folytonosságának igazolásához elegendő a $(-1, 0)$ és $(1, 0)$ pontokban vizsgálnunk a folytonosságot.

Legyen $\mathcal{U}_Y \in \mathfrak{T}_Y$. Mivel h folytonos, $h^{-1}(\mathcal{U}_Y)$ nyílt halmaz, mely tartalmazza a $\mathcal{I} = \{1\} \times [-1, 1]$ szakaszt, ugyanis $h(1, \cdot) = Y$. Eszerint $\mathcal{I}$ minden $(1, y)$ pontjának van olyan $\varepsilon_y > 0$ sugarú nyílt kör lap $\mathcal{B}_y$ környezete, mely $h^{-1}(\mathcal{U}_Y)$ része. Viszont $\mathcal{I}$ kompakt, így ezek közül van véges sok is, melyek együtt lefedik, vagyis valamely $\{(1, y_i)\}_{i=1}^n$ pontokra $\mathcal{I} \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{B}_{y_i}$. Véges sok körvonalnak véges sok metszete közül

van egy olyan, amely a legközelebb esik a $\mathcal{I}$ szakaszhoz. Ezt a távolságot jelölje $\delta_{\mathcal{U}_Y} > 0$.

Ha $(x, y) \in \mathbb{B}^1$ és $x > 1 - \delta_{\mathcal{U}_Y}$, akkor előbbi miatt $|y/\sqrt{1-x^2}| \leq 1$, utóbbi miatt pedig eszerint $h(x, y/\sqrt{1-x^2}) \in \mathcal{U}_Y$. Ez bizonyítja, hogy $\tilde{f}$ folytonos az $(1, 0)$ pontban.

Világos, hogy a fenti módon $\tilde{f}$ folytonossága a $(-1, 0)$ pontban is igazolható.

Mivel $(x, y) \in \mathbb{S}^1$ esetén $\tilde{f}(x, y) = h(x, y/\sqrt{1-x^2}) = h(x, \pm 1)$, ezzel bizonyítottuk az állítás „csak akkor” irányát.

Az „akkor” irány igazolásához tegyük fel, hogy van olyan folytonos $\tilde{f}: \mathbb{B}^1 \rightarrow \mathcal{X}$ függvény, hogy $\tilde{f}(x, \pm\sqrt{1-x^2}) = f_{\pm}(x)$. Legyen $h: [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathcal{X}$ olyan, hogy

$$h(x, y) = \tilde{f}(x, y\sqrt{1-x^2}), \text{ amiért } h(\cdot, \pm 1) = f_{\pm}(\cdot).$$

Világos, hogy h folytonos, hiszen $\tilde{f}$ és az argumentumában szereplő függvények is folytonosak. Ezzel a tétel minden állítását beláttuk. ■

Az euklidészi síkból az origó eltávolításával olyan útszerűen összefüggő topologikus teret kapunk, mely nem egyszerűen összefüggő. Vegyünk ugyanis a $(-1, 0)$ és az $(1, 0)$ pontokat összekötő $f_{\pm}: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ utakat az $y > 0$ illetve $y < 0$ félsíkokban. Ha ezek homotópok, akkor a homotópiát megadó folytonos $h: [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ függvényre $f_{\pm}(\cdot) = h(\cdot, \pm 1)$, $(-1, 0) = f_{\pm}(-1) = h(-1, \cdot)$ és $(1, 0) = f_{\pm}(1) = h(1, \cdot)$. Tekintsük minden $x \in [-1, 1]$ esetén a folytonos $h_x: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ *transzverzális utakat*, ahol $h_x(y) = h(x, y)$. Ezek folytonosak és $h_x(1) > 0 > h_x(-1)$ miatt metszik az x -tengelyt. Legyen a h_x transzverzális első metszése az x -tengellyel az $y = m(x)$ argumentumban, vagyis $h_x(m(x)) = 0$. Az $m: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény a h folytonossága miatt folytonos, ezért az $x \mapsto h(x, m(x))$ is folytonos, és így az összefüggő $[-1, 1]$ intervallumot az x -tengely összefüggő halmazába képezi. Viszont $h(-1, m(-1)) = (-1, 0)$ és $h(1, m(1)) = (1, 0)$, amiért valamely $x \in [-1, 1]$ esetén $h(x, m(x)) = (0, 0)$, ami nincs h képterében. Ez az ellentmondás igazolja, hogy $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ nem egyszerűen összefüggő.

Ha $f: (\mathcal{X}, \mathfrak{T}) \rightarrow (\mathcal{X}', \mathfrak{T}')$ folytonos leképezés, és u egy út az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ térben, akkor nyilván $f \circ u$ is út az $(\mathcal{X}', \mathfrak{T}')$ térben. Az utaknak ezt az $f_{\#}: u \mapsto f \circ u$ leképezését az f függvény *indukált leképezésének* nevezzük.

Tétel. *Folytonos függvény indukált leképezése homotóp utakat homotóp utakba visz.*

Bizonyítás. Legyen $f: (\mathcal{X}, \mathfrak{T}) \rightarrow (\mathcal{X}', \mathfrak{T}')$ folytonos függvény, u és v pedig homotóp utak az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ térben. Ekkor létezik olyan folytonos $h: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{X}$ függvény, melyre $h(0, \cdot) = u(\cdot)$ és $h(1, \cdot) = v(\cdot)$. Ekkor a $h_{\#}(\cdot, \cdot) = f(h(\cdot, \cdot))$ olyan folytonos

leképezés, hogy $h_{\#}(0, \cdot) = f(h(0, \cdot)) = f(u(\cdot))$ és $h_{\#}(1, \cdot) = f(h(1, \cdot)) = f(v(\cdot))$. Ez bizonyítja az állítást. ■

Az indukált leképezés ezen tulajdonságának megfordításához erősebb feltételek kellenek, de erre nem csak a homeomorfizmusok alkalmasak.

Definíció. A folytonos $f: (\mathcal{X}, \mathfrak{T}) \rightarrow (\mathcal{X}', \mathfrak{T}')$ leképezést *fedőleképezésnek* nevezzük, ha minden $X' \in \mathcal{X}'$ pontnak van olyan nyílt $\mathcal{U}' \in \mathfrak{T}'_{X'}$ környezete – ezen a fedőleképezést *triviálisnak* mondjuk –, hogy ahhoz valamely $\mathfrak{I}$ halmaz minden $i \in \mathfrak{I}$ elemére van olyan nyílt $\mathcal{U}_i \in \mathfrak{T}$ halmaz, hogy ezek páronként diszjunktak, $f^{-1}(\mathcal{U}') = \bigcup_{i \in \mathfrak{I}} \mathcal{U}_i$ és $f|_{\mathcal{U}_i}: (\mathcal{U}_i, \mathfrak{T}) \rightarrow (\mathcal{U}', \mathfrak{T}')$ homeomorfizmus. Ebben az esetben az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ teret az $(\mathcal{X}', \mathfrak{T}')$ tér *fedőterének* mondjuk.

Világos, hogy minden homeomorfizmus fedőleképezés, de van olyan, például az $\mathbb{R} \ni x \mapsto (\cos x, \sin x) \in \mathbb{S}^1$ fedőleképezés, amely nem homeomorfizmus.

Ha $X' \in \mathcal{X}'$ és $f: (\mathcal{X}, \mathfrak{T}) \rightarrow (\mathcal{X}', \mathfrak{T}')$ egy fedőleképezés, akkor az $f^{-1}(X')$ halmaz számosságát jelölje $g(X')$. Ez a g függvény minden pont valamely környezetében konstans, mert a fedőleképezés miatt az X' pontnak van olyan nyílt $\mathcal{U}' \in \mathfrak{T}'_{X'}$ környezete, hogy valamely $\mathfrak{I}$ halmaz minden $i \in \mathfrak{I}$ eleméhez van olyan nyílt $\mathcal{U}_i \in \mathfrak{T}$ halmaz, hogy ezek páronként diszjunktak, $f^{-1}(\mathcal{U}') = \bigcup_{i \in \mathfrak{I}} \mathcal{U}_i$ és $f|_{\mathcal{U}_i}: (\mathcal{U}_i, \mathfrak{T}) \rightarrow (\mathcal{U}', \mathfrak{T}')$ homeomorfizmus, amiből következik, hogy $\mathfrak{I}$ számossága éppen $f^{-1}(X')$ számossága, amiért g konstans az $\mathcal{U}' \in \mathfrak{T}'_{X'}$ környezetben. Vegyük az összes olyan $\mathcal{U}'$ -t tartalmazó nyílt halmaz $\mathcal{O}'_{X'}$ unióját, amelyen a g ez a konstans. Az $\mathcal{X}'$ ilyen nyílt $\mathcal{O}'_{X'}$ típusú diszkrét halmazok uniója, tehát minden ilyen $\mathcal{O}'_{X'}$ típusú halmaz zárt is, ami azt jelenti, hogy az $(\mathcal{X}', \mathfrak{T}')$ tér összefüggőségi komponensein az $f^{-1}(X')$ halmaz számossága állandó.

A komponensen ezt a számosságot a *fedés rétegszámának*, a diszkrét topológiával ellátott $f^{-1}(X')$ halmazt a *fedés fibrumának* nevezzük.

Fedő utak tétele. Legyen $f: (\mathcal{X}, \mathfrak{T}) \rightarrow (\mathcal{X}', \mathfrak{T}')$ egy fedőleképezés.

- (1) Az $\mathcal{X}'$ tér minden u' útjához és $X_0 \in f^{-1}(u'(0)) \subseteq \mathcal{X}$ ponthoz pontosan egy olyan u út létezik a fedőtérben, melyre $f \circ u = u'$ és $X_0 = u(0)$.
- (2) Ha a fedőtérben az u és v azonos kezdőpontú utak, és az $u' = f \circ u$ valamint $v' = f \circ v$ utak fix végpontokkal homotópok, akkor az u és v utak is fix végponttal homotópok.

Bizonyítás. (1) Az u' út a $[0, 1]$ szakasz leképezése az $(\mathcal{X}', \mathfrak{T}')$ térbe. Minden $x \in [0, 1]$ esetén van olyan $\varepsilon_x > 0$ szám, hogy $u'((x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x))$ teljes egészében a $\mathfrak{T}'_{u'(x)}$ környezetbázisnak egy olyan nyílt $\mathcal{U}'_x \in \mathfrak{T}'_{u'(x)}$ halmazába esik, melyen a fedés triviális. Minthogy $[0, 1]$ kompakt, van véges sok $\{x_j\}_{j=1}^m$ szám (későbbiek érdekében

monoton növekvő sorrendben), hogy a $\mathcal{J}_j = (x_j - \varepsilon_{x_j}, x_j + \varepsilon_{x_j})$ intervallumok együtt lefedik a $[0, 1]$ szakaszt. Legyen minden $0 < j < m$ számra $y_j \in \mathcal{J}_j \cap \mathcal{J}_{j+1}$, továbbá $y_0 = 0$ és $y_m = 1$.

Legyen $u'_{j+1} = u'|_{[y_j, y_{j+1}]}: [y_j, y_{j+1}] \rightarrow (\mathcal{X}', \mathfrak{T}')$ minden $0 \leq j < m$ számra. Ekkor $u'_{j+1}([y_j, y_{j+1}])$ az $\mathcal{U}'_{x_{j+1}}$ környezetben van. A fedőleképezés tulajdonságai alapján $f^{-1}(\mathcal{U}'_{x_{j+1}}) = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{U}_{i,j+1}$ és $f|_{\mathcal{U}_{i,j+1}}: (\mathcal{U}_{i,j+1}, \mathfrak{T}) \rightarrow (\mathcal{U}'_{x_{j+1}}, \mathfrak{T}')$ homeomorfizmus. Utóbbi alapján definiáljuk az $u_{i,j+1}: [y_j, y_{j+1}] \rightarrow (\mathcal{U}_{i,j+1}, \mathfrak{T}) \subseteq (\mathcal{X}', \mathfrak{T}')$ utat úgy, hogy $f|_{\mathcal{U}_{i,j+1}} \circ u_{i,j+1} = u'_{i,j+1}$.

Legyen $u_1 = u_{i_1,1}$ arra az i_1 indexre, amelyre $u_{i_1,1}(0) = X_0$, és ha u_j már adott, akkor legyen $u_{j+1} = u_{i_{j+1},j+1}$ arra az i_{j+1} indexre, amelyre $u_{i_{j+1},j+1}(y_j) = u_{i_j,j}(y_j)$.

Ekkor az $u = u_1 * u_2 * \dots * u_m$ út teljesíti az (1) állítás feltételét, egyértelműsége pedig a konstrukciójából következik, ezzel bizonyítva az (1) állítást.

(2) Az (1) állítás bizonyításából és a ragasztási lemmából következik, hogy elegendő a (2) állítás teljesülését minden olyan környezetben belátni, amelyen a fedés triviális. Mivel homotóp függvények homeomorfiával való összetétele homotóp, ezzel a tétel bizonyítása teljessé vált. ■

E tétel az $\mathcal{X}'$ tér minden u' útjához és egy $X_0 \in f^{-1}(u'(0)) \subseteq \mathcal{X}$ ponthoz egyértelműen rendel olyan u utat, melyre $f \circ u = u'$ és $X_0 = u(0)$. Ezt az u' utat az u út *felemelésének* nevezzük. Tételünk szerint a homotóp utak felemelt útjai is homotópok.

1.8. Fundamentális csoport

Mivel a homotópia ekvivalencia-reláció, az utakat osztályozhatjuk ezzel. Jelölje $[f]$ az f úttal azonos végpontú és vele homotóp utak *homotópia-osztályát*, vagyis az egymással és az f úttal homotóp és azonos végpontú utak halmazát. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az f reprezentálja az $[f]$ homotóp utak osztályát. Világos, hogy $[f] = [g]$ akkor és csak akkor, ha az f és g utak azonos végpontúak és homotópok.

Ha a $g: [c, d] \rightarrow \mathcal{X}$ út az $f: [a, b] \rightarrow \mathcal{X}$ út folytatása, akkor $g(c) = f(b)$ és $f * g: [a, b + d - c] \rightarrow \mathcal{X}$ olyan, hogy

$$f * g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in [a, b], \\ g(x + c - a), & \text{ha } x \in [b, b + d - c]. \end{cases}$$

Tétel. Ha az f útnak g egy folytatása és $[f] = [f']$ valamint $[g] = [g']$, akkor g' az f' folytatása és $[f * g] = [f' * g']$.

Bizonyítás. Legyen f és g természetesen paraméterezve. A feltétel szerint $f(1) = g(0)$. Mivel $[f] = [f']$ és $[g] = [g']$, vannak olyan $h_f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{X}$ és $h_g: [0, 1] \times$

$[0, 1] \rightarrow \mathcal{X}$ folytonos függvények, melyekre $h_f(\cdot, 0) = f(\cdot)$, $h_f(\cdot, 1) = f'(\cdot)$, $h_g(\cdot, 0) = g(\cdot)$ és $h_g(\cdot, 1) = g'(\cdot)$.

Eszerint $f'(1) = h_f(1, 1) = h_f(1, 0) = f(1) = g(0) = h_g(0, 0) = h_g(0, 1) = g'(0)$, tehát g' az f' folytatása.

Világos, hogy

$$f * g: [0, 2] \rightarrow \mathcal{X} \text{ olyan, hogy } f * g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in [0, 1], \\ g(x), & \text{ha } x \in [1, 2], \end{cases}$$

és

$$f' * g': [0, 2] \rightarrow \mathcal{X} \text{ olyan, hogy } f' * g'(x) = \begin{cases} f'(x), & \text{ha } x \in [0, 1], \\ g'(x), & \text{ha } x \in [1, 2], \end{cases}$$

Legyen $h: [0, 2] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{X}$ olyan, hogy

$$h(x, y) = \begin{cases} h_f(x, y), & \text{ha } x \in [0, 1], \\ h_g(x, y), & \text{ha } x \in [1, 2]. \end{cases}$$

A ragasztási lemma miatt ez folytonos függvény, másfelől $h(\cdot, 0) = f * g(\cdot)$ és $h(\cdot, 1) = f' * g'(\cdot)$, ami igazolja a tétel állítását. ■

Ha egy út mindkét végpontja az $X \in \mathcal{X}$ pontba esik, akkor X -hurokról beszélünk. A homotópia az X -hurokok halmazán is ekvivalencia-reláció. Ennek homotópiaosztályait X -hurokosztályoknak nevezzük. Ezek az f hurok által reprezentált X -hurokosztályát $[f]_X$ jelöli. Iménti tételünk alapján ezen bevezethető az összeadás művelete.

Definíció. A $[f]_X$ és $[g]_X$ X -hurokosztályok $[f]_X \oplus [g]_X$ összegén az $[f * g]_X$ X -hurokosztályt értjük.

Tétel. Az X -hurokosztályok a $\oplus$ összeadással csoportot alkotnak.

Bizonyítás. Az asszociativitás a definícióból nyilvánvaló.

Legyen $e: [0, 1] \rightarrow \mathcal{X}$ az az X -hurok, melyre $e([0, 1]) = \{X\}$. Ekkor az $[e]_X$ nullem a $\oplus$ összeadásra nézve, hiszen bármely $f: [0, 1] \rightarrow \mathcal{X}$ hurokra nézve

$$e * f: [0, 1] \rightarrow \mathcal{X} \text{ olyan, hogy } e * f(x) = \begin{cases} X = e(2x), & \text{ha } x \in [0, 1/2], \\ f(2x - 1), & \text{ha } x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

és

$$f * e: [0, 1] \rightarrow \mathcal{X} \text{ olyan, hogy } f * e(x) = \begin{cases} f(2x), & \text{ha } x \in [0, 1/2], \\ X = e(2x - 1), & \text{ha } x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

amiért a ragasztási lemma miatt folytonos

$$h_b: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{X} \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} X, & \text{ha } y \geq 2x, \\ f(\frac{2x-y}{2-y}), & \text{ha } y \leq 2x, \end{cases}$$

függvényre $h_b(\cdot, 0) = f(\cdot)$, $h_b(\cdot, 1) = e * f(\cdot)$. Tehát $[e * f]_X = [f * e]_X = [f]_X$.

Legyen $f: [0, 1] \rightarrow \mathcal{X}$ egy X -hurok, és vegyük az $\bar{f}: [0, 1] \rightarrow \mathcal{X}$ X -hurkot úgy, hogy $\bar{f}(x) = f(1 - x)$. Ekkor

$$\bar{f} * f: [0, 1] \rightarrow \mathcal{X} \text{ olyan, hogy } \bar{f} * f(x) = \begin{cases} \bar{f}(2x), & \text{ha } x \in [0, 1/2], \\ f(2x - 1), & \text{ha } x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

amiért a ragasztási lemma miatt folytonos

$$h_b: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{X} \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} \bar{f}(2x(2 - y)), & \text{ha } y \geq 2x, \\ X, & \text{ha } y \leq 1 - |2x - 1|, \\ f(2x(2 - y) - 1), & \text{ha } y \geq 2 - 2x, \end{cases}$$

által definiált függvényre $h_b(\cdot, 0) = e(\cdot)$, $h_b(\cdot, 1) = \bar{f} * f(\cdot)$. Ekkor $[\bar{f}]_X \oplus [f]_X = [\bar{f} * f]_X = [e]_X$, amivel a tételt bebizonyítottuk. ■

Definíció. Az X -hurokosztályok által a $\oplus$ összeadással alkotott csoportot $\pi_1(\mathcal{X}, X)$ jelöli, és X kezdőpontú *fundamentális csoportnak*, vagy *első homotopikus csoportnak* nevezzük.

Legyen $f: (\mathcal{X}, \mathfrak{T}) \rightarrow (\mathcal{X}', \mathfrak{T}')$ folytonos. Ekkor az $f_{\#}$ indukált leképezése homotóp utakat homotóp utakba visz, ezért az

$$f_*: \pi_1(\mathcal{X}, X_0) \rightarrow \pi_1(\mathcal{X}', f(X_0)) \quad f_*: [u] \mapsto [f_{\#}(u)]$$

leképezés jól definiált. Ugyanakkor ez a leképezés homomorfia is, hiszen minden $[u], [v] \in \pi_1(\mathcal{X}, X_0)$ esetén

$$\begin{aligned} f_*([u] \oplus [v]) &= f_*([u * v]) = [f_{\#}(u * v)] = [f_{\#}(u) * f_{\#}(v)] = [f_{\#}(u)] \oplus [f_{\#}(v)] \\ &= f_*([u]) \oplus f_*([v]), \end{aligned}$$

ezért *indukált homomorfizmusnak* nevezzük.

Tétel. *Fedőleképezés indukált homomorfizmusa adott kezdőpontú fundamentális csoportok között bijektív, általában pedig egy fedőleképezés kép-részcsoportjának indexe megegyezik a fedés rétegszámával.*

Bizonyítás. A fedőutak tétele szerint az adott pontból adott pontba való felemelés injektív leképezés, mely homotóp utakat homotóp utakba visz. Eszerint az indukált homomorfizmus pontosan a fibrum pontjaiban konstans utak által reprezentált hurokosztályokat viszi a null-hurokosztályba, ami bizonyítja a tételt. ■

Fontos speciális eset, hogy eszerint a homeomorfiák indukált homomorfizmusa valójában izomorfizmus a fundamentális csoportok között.

Tétel. *Topologikus terek szorzatának fundamentális csoportja izomorf a fundamentális csoportok direkt szorzatával.*

Bizonyítás. Vegyük az $(\mathcal{X}_1, \mathfrak{T}_1)$ és $(\mathcal{X}_2, \mathfrak{T}_2)$ topologikus terek $(\mathcal{X}, \mathfrak{T}) = (\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2, \mathfrak{T})$ topologikus szorzatát, melyről $p_i: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_i$ a megfelelő $(i = 1, 2)$ térre való vetítés illetve $p_i^*: \pi_1(\mathcal{X}, X) \rightarrow \pi_1(\mathcal{X}_i, p_i(X))$ az ezek által indukált homomorfizmus.

Azonnal kapjuk, hogy

$$p_*: \pi_1(\mathcal{X}, X) \rightarrow \pi_1(\mathcal{X}_1, p_1(X)) \times \pi_1(\mathcal{X}_2, p_2(X)) \quad [u] \mapsto (p_1^*([u]), p_2^*([u])).$$

is egy homomorfizmus, ezért elegendő belátni, hogy ez bijektív.

A p_* szürjektivitása nyilvánvaló, hiszen ha $([u'], [v']) \in \pi_1(\mathcal{X}_1, p_1(X)) \times \pi_1(\mathcal{X}_2, p_2(X))$, akkor a $w: [0, 1] \ni x \mapsto (u(x), v(x))$ hurok olyan, hogy

$$p_*([w]) = (p_1^*([w]), p_2^*([w])) = ([p_1 \circ w], [p_2 \circ w]) = ([u], [v]).$$

Legyen most $[u], [v] \in \pi_1(\mathcal{X}, X)$ és $p_*([u]) = p_*([v])$. Ekkor $p_i^*([u]) = p_i^*([v])$, amiért $[p_i \circ u] = [p_i \circ v]$, vagyis van olyan folytonos $h_i: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{X}_i$ függvény, hogy $h_i(0, \cdot) = p_i(u(\cdot))$, $h_i(1, \cdot) = p_i(v(\cdot))$ és $h_i(\cdot, 0) = p_i(X) = h_i(\cdot, 1)$ minden $i = 1, 2$ esetén. Legyen

$$h: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{X} \quad (x, y) \mapsto (h_1(x, y), h_2(x, y)).$$

Ez nyilván folytonos függvény, és $x = 0, 1$ esetén

$$h(\cdot, x) = (h_1(\cdot, x), h_2(\cdot, x)) = (p_1(X), p_2(X)),$$

valamint

$$h(0, \cdot) = (h_1(0, \cdot), h_2(0, \cdot)) = (p_1(u(\cdot)), p_2(u(\cdot))) = u(\cdot),$$

$$h(1, \cdot) = (h_1(1, \cdot), h_2(1, \cdot)) = (p_1(v(\cdot)), p_2(v(\cdot))) = v(\cdot),$$

ami igazolja a tételt. ■

Tétel. *Ha $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ útszerűen összefüggő, akkor bármely X és X' pontjára $\pi_1(\mathcal{X}, X)$ és $\pi_1(\mathcal{X}, X')$ izomorf.*

Bizonyítás. Legyen $u: [0, 1] \rightarrow \mathcal{X}$ út az $X = u(0)$ és $X' = u(1)$ pontok között, és legyen $\bar{u}: [0, 1] \rightarrow \mathcal{X}$ az az út, melyre $\bar{u}(x) = u(1 - x)$.

Rendeljük hozzá minden f X -hurokhoz azt az X' -hurkot, melyre $f' = \bar{u} * f * u$. Mivel a homotópia felcserélhető az utak szorzásával, ez meghatároz egy $\varphi: \pi_1(\mathcal{X}, X) \rightarrow \pi_1(\mathcal{X}, X')$ leképezést, melyre $[f]_X \in \pi_1(\mathcal{X}, X)$ esetén $\varphi([f]_X) = [\bar{u} * f * u]_{X'}$.

A φ egy homomorfizmus, mert

$$\begin{aligned} \varphi([f]_X \oplus [g]_X) &= \varphi([f * g]_X) = [\bar{u} * f * g * u]_{X'} = [\bar{u} * f * u * \bar{u} * g * u]_{X'} \\ &= [\bar{u} * f * u]_{X'} \oplus [\bar{u} * g * u]_{X'} = \varphi([f]_X) \oplus \varphi([g]_X), \end{aligned}$$

és szürjektív, hiszen ha f' egy X' -hurok, akkor $f = u * f' * \bar{u}$ egy X -hurok, és $\varphi([f]_X) = [\bar{u} * f * u]_{X'} = [\bar{u} * u * f' * \bar{u} * u]_{X'} = [f']_{X'}$.

Ha valamely $[g]_X$ nem egységelem X -hurokosztályra $[e']_{X'} = \varphi([g]_X)$, akkor $[\bar{u} * e * u]_{X'} = [e']_{X'} = [\bar{u} * g * u]_{X'}$ alapján

$$[e]_X = [u * \bar{u} * e * u * \bar{u}]_X = [u * (\bar{u} * e * u) * \bar{u}]_X = [u * (\bar{u} * g * u) * \bar{u}]_X = [g]_X$$

bizonyítja az injektivitást, és ezzel a tételt. ■

Definíció. Útszerűen összefüggő $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus téren a minden kezdőpontra izomorf fundamentális csoportokat egyszerűen a tér $\pi_1(\mathcal{X})$ *fundamentális csoportjának* nevezzük.

Az olvasó beláthatja, hogy az összehúzható terek fundamentális csoportja triviális.

Topológiai struktúrák

2.1. Hausdorff-terek és kompaktság

A Hausdorff-terek sok tekintetben teljesítik a megszkottnak mondható elvárásokat: az egyetlen pontot tartalmazó halmazok zártak, a határértékkel rendelkező pontsorozatok pedig konvergensek.

Tétel.

- (1) *Hausdorff-tér kompakt részhalmaza zárt.*
- (2) *Lokálisan kompakt Hausdorff-tér reguláris.*
- (3) *Lokálisan kompakt Hausdorff-tér minden pontjának minden környezetében van kompakt környezete is.*
- (4) *Lokálisan kompakt Hausdorff-tér Tyihonov-féle.*
- (5) *Kompakt Hausdorff-tér normális.*

Bizonyítás. (1) Legyen $\mathcal{K}$ egy kompakt halmaz. Minden $X \notin \mathcal{K}$ és $K \in \mathcal{K}$ ponthoz vannak diszjunkt $\mathcal{U}_{X,K} \in \mathfrak{T}_X$ és $\mathcal{U}_{K,X} \in \mathfrak{T}_K$ környezetek. Nyilván $\bigcup_{K \in \mathcal{K}} \mathcal{U}_{K,X} \supseteq \mathcal{K}$, így van véges sok olyan $K_i \in \mathcal{K}$ pont, hogy $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_{K_i,X} \supseteq \mathcal{K}$. Eszerint $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{U}_{X,K_i}$ nem metszi a $\mathcal{K}$ kompakt halmazt, így minden a $\mathcal{K}$ halmazon kívüli pontnak van olyan környezete, amely nem metszi a $\mathcal{K}$ halmazt, tehát $\overline{\mathcal{K}}$ nyílt, vagyis $\mathcal{K}$ zárt.

(2) A regularitás a T_1 és a T_3 szétválasztási axiómák teljesülését jelenti. Előbbi a T_2 Hausdorff-feltételből nyilvánvaló, utóbbihoz vegyünk egy X pontot és egy ezt nem tartalmazó $\mathcal{Z}$ zárt halmazt. A lokális kompaktság alapján az X pontnak van olyan $\mathcal{U}$ nyílt környezete, melynek lezártja kompakt. A $\mathcal{K} = \mathcal{U} \cap \mathcal{Z}$ halmaz zárt, hiszen két zárt halmaz metszete, továbbá 1.4.1.(1) miatt kompakt is, mert a kompakt $\mathcal{U}^-$ halmaz zárt része. A $\mathcal{K}$ minden K pontjához vannak diszjunkt $\mathcal{U}_{X,K} \in \mathfrak{T}_X$ és $\mathcal{U}_{K,X} \in \mathfrak{T}_K$ környezetek az $\mathcal{U}$ nyílt halmazon belül (ha nem lennének belül, akkor messük el őket az $\mathcal{U}$ nyílt halmazzal). Minthogy $\bigcup_{K \in \mathcal{K}} \mathcal{U}_{K,X} \supseteq \mathcal{K}$ és $\mathcal{K}$ kompakt, van véges sok olyan $K_i \in \mathcal{K}$ pont, hogy $\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_{K_i,X} \supseteq \mathcal{K}$. Eszerint a $\mathcal{W} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{U}_{X,K_i} \subseteq \mathcal{U}$ környezet nem metszi a $\mathcal{K}$ kompakt halmazt tartalmazó nyílt $\mathcal{V}$ halmazt.

A $\mathcal{Z}$ halmazt eszerint lefedi a $\mathcal{V} \cup \overline{\mathcal{U}^-}$ nyílt halmaz, melynek nincs közös pontja a $\mathcal{W} \in \mathfrak{T}_X$ nyílt halmazzal, tehát T_3 teljesül.

(3) Vegyünk egy tetszőleges X pontot és annak egy $\mathcal{V}' \in \mathfrak{T}_X$ környezetét. A lokális kompaktság alapján az X pontnak van olyan $\mathcal{U}$ nyílt környezete, melynek lezártja kompakt. Legyen $\mathcal{V} = \mathcal{V}' \cap \mathcal{U}$. A $\mathcal{Z} = \mathcal{U}^- \setminus \mathcal{V}$ zárt halmazhoz a regularitás szerint vannak olyan $\mathcal{W}'_X \in \mathfrak{T}_X$ és $\mathcal{W}'_{\mathcal{Z}}$ diszjunkt nyílt halmazok, hogy $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{W}'_{\mathcal{Z}}$ és $X \in \mathcal{W}'_X$. Legyen $\mathcal{W}_X = \mathcal{W}'_X \cap \mathcal{U}$. Eszerint

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{W}_X \subseteq \mathcal{W}_X^- &\subseteq (\mathcal{U} \setminus \mathcal{W}'_{\mathcal{Z}})^- \subseteq \mathcal{U}^- \setminus \mathcal{W}'_{\mathcal{Z}} \subseteq \mathcal{U}^- \setminus \mathcal{Z} \\ &\subseteq \mathcal{U}^- \setminus (\mathcal{U}^- \setminus \mathcal{V}) = \mathcal{U}^- \cap \mathcal{V} = \mathcal{U}^- \cap (\mathcal{V}' \cap \mathcal{U}) = \mathcal{V}' \cap \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Minthogy egy kompakt halmaz zárt része kompakt is, ez igazolja a (3) állítást.

(4) Az olvasóra marad annak végiggondolása a (3) állítás és bizonyítása figyelembevételével, hogy hogyan kell az Urison-lemmában alkalmazott eljárást a regularitás birtokában T_{34} bizonyításához alkalmazni.

(5) Legyenek a $\mathcal{Z}_1$ és $\mathcal{Z}_2$ zárt halmazok diszjunktak. A tér kompaktsága miatt ezek kompaktak, továbbá a tér lokálisan kompakt, amiből (2) szerint következik a regularitása. Eszerint minden $Z \in \mathcal{Z}_1$ ponthoz vannak olyan $\mathcal{U}_Z \in \mathfrak{T}_Z$ és $\mathcal{V}_Z$ diszjunkt nyílt halmazok, hogy $\mathcal{Z}_2 \subseteq \mathcal{V}_Z$. Az $\mathcal{U}_Z$ nyílt halmazok uniója lefedi a $\mathcal{Z}_1$ kompakt halmazt, tehát közülük véges sok $\{\mathcal{U}_{Z_i}\}_{i=1}^n$ is lefedi, így $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_{Z_i}$ és $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{V}_{Z_i}$ olyan nyílt halmazok, melyek igazolják a T_4 feltétel teljesülését. ■

Tétel. Ha $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ kompakt és $(\mathcal{Y}, \mathfrak{T}')$ Hausdorff-tér, akkor minden $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ folytonos bijekció homeomorfa.

Bizonyítás. Elég igazolni, hogy f inverze is folytonos, vagyis f zárt halmazokat zárt halmazokba visz.

Mivel f folytonos és szürjektív, $\mathcal{Y}$ is kompakt. Ha $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}$ zárt, akkor kompakt is, hiszen kompakt halmaz zárt része kompakt. Eszerint $f(\mathcal{Z})$ is kompakt, így zárt is, hiszen kompakt halmaz kompakt részhalmaza zárt. ■

Definíció. Az alaphalmaz részhalmazainak egy $\mathfrak{F} \subseteq P(\mathcal{X})$ rendszerét *filternek* nevezzük, ha végesmetszet-tulajdonságú, $\mathcal{X} \in \mathfrak{F}$, $\emptyset \notin \mathfrak{F}$, és minden olyan $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{X}$ részhalmazt tartalmaz, amelynek valamely $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$ elem része, vagyis $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$. Az $\mathfrak{F}$ filtert *ultrafilternek* hívjuk, ha maximális, vagyis nincs őt tartalmazó filter.

Egy $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus térben az $X \in \mathcal{X}$ pontot tartalmazó $\mathfrak{T}_X$ környezetbázis egy ultrafilter része, mégis *környezetfilternek* nevezzük.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\mathfrak{F}$ filter *konvergens*, ha valamely $X \in \mathcal{X}$ pontra $\mathfrak{T}_X \subset \mathfrak{F}$. Ha ilyen X pont csak egy van, akkor azt az $\mathfrak{F} \rightarrow X$ vagy $X = \lim \mathfrak{F}$ formulával fejezzük ki, és azt mondjuk, hogy az X pont az $\mathfrak{F}$ filter határértéke.

Tétel.

- (1) *Hausdorff-tér konvergens filterének pontosan egy határértéke van.*
- (2) *Minden végesmetszet-tulajdonságú halmazrendszer beágyazható egy filterbe.*
- (3) *Az $\mathfrak{F} \subset P(\mathcal{X})$ filter akkor és csak akkor bővíthető valamely $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{X}$ halmazzal filterré, ha $\{\mathcal{H}\} \cup \mathfrak{F}$ végesmetszet-tulajdonságú.*
- (4) *Az $\mathfrak{F}$ filter akkor és csak akkor ultrafilter, ha minden halmazt vagy a komplementjét tartalmazza.*
- (5) *Minden filter kibővíthető ultrafilterré.*

Bizonyítás. (1) Hausdorff-térben a környezetfilterek elválasztják a pontokat egymástól.

(2) Ha $\mathcal{H}$ végesmetszet-tulajdonságú halmazrendszer, akkor legyen $\tilde{\mathcal{H}} = \{\bigcup_{\mathcal{H} \in \mathcal{G}} \mathcal{H} : \mathcal{G} \subseteq P(\mathcal{H})\}$. Ez egy filter, aminek bizonyítása az olvasóra marad.

Az (2) állításból azonnal következik a (3) állítás.

(4) Ha az $\mathfrak{F}$ ultrafilterhez van olyan $\mathcal{H}$ halmaz, melyre $\mathcal{H} \notin \mathfrak{F}$ és $\overline{\mathcal{H}} \notin \mathfrak{F}$, akkor (3) szerint $\{\mathcal{H}\} \cup \mathfrak{F}$ és $\{\overline{\mathcal{H}}\} \cup \mathfrak{F}$ sem lehet végesmetszet-tulajdonságú, vagyis van olyan $\{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n\} \subseteq \mathfrak{F}$ és $\{\mathcal{F}'_1, \dots, \mathcal{F}'_m\} \subseteq \mathfrak{F}$ része az $\mathfrak{F}$ filternek, melyre $\mathcal{H} \cap \mathcal{F}_1 \cap \dots \cap \mathcal{F}_n = \emptyset$ és $\overline{\mathcal{H}} \cap \mathcal{F}'_1 \cap \dots \cap \mathcal{F}'_m = \emptyset$. Eszerint $\mathcal{F}_1 \cap \dots \cap \mathcal{F}_n \subseteq \overline{\mathcal{H}}$ és $\mathcal{F}'_1 \cap \dots \cap \mathcal{F}'_m \subseteq \mathcal{H}$, amiért $\bigcap_{j=1}^n \mathcal{F}_j \cap \bigcap_{i=1}^m \mathcal{F}'_i = \emptyset$. Ez ellentmond az $\mathfrak{F}$ filterségének, tehát $\mathcal{H} \in \mathfrak{F}$ vagy $\overline{\mathcal{H}} \in \mathfrak{F}$ egyike teljesül.

(5) A filterek halmazát a tartalmazás részbenrendezett halmazzá teszi, melyben az egymást tartalmazó filterek láncai elemeinek uniója a lánc elemeinek felső korlátja, így a Zorn-lemma szerint van maximális filter. ■

Tétel. *Egy Hausdorff-tér akkor és csak akkor kompakt, ha minden ultrafiltere konvergens.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ kompakt Hausdorff-tér és $\mathfrak{F}$ ennek egy ultrafiltere. Ekkor $\mathcal{Z} = \bigcap_{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}} \mathcal{F}^- \neq \emptyset$, hiszen $\mathfrak{F}$ végesmetszet-tulajdonságú. Legyen $X \in \mathcal{Z}$. Mivel $\mathfrak{F}$ ultrafilter, egyetlen halmazzal sem bővíthető, de olyan halmazt sem tartalmazhat, aminek az X pont ne volna eleme, ezért előbbi tételünk (4) pontja értelmében $\mathfrak{T}_X \subset \mathfrak{F}$, ami bizonyítja az állítás „csak akkor” irányát.

Legyen $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ Hausdorff-tér, melynek minden $\mathfrak{F}$ ultrafiltere konvergens. Ha $\mathcal{Z}$ zárt halmazok egy végesmetszet-tulajdonságú rendszere, akkor $\mathcal{Z}$ valamely $\mathfrak{F}_{\mathcal{Z}}$ ultrafilter része. Ekkor az $\mathfrak{F}_{\mathcal{Z}}$ ultrafilternek létezik az $X_{\mathfrak{F}_{\mathcal{Z}}} = \lim \mathfrak{F}_{\mathcal{Z}}$ határértéke, amiért $X_{\mathfrak{F}_{\mathcal{Z}}} \in \bigcap_{\mathcal{Z} \in \mathcal{Z}} \mathcal{Z}$ is teljesül, hiszen $\mathcal{Z}$ elemei közt nem lehet az X pontot nem tartalmazó zárt halmaz. Eszerint $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ teljesíti a Riesz-féle metszetfeltételt, tehát kompakt. ■

Tyihonov-tétel. *Kompakt Hausdorff-terek szorzata kompakt Hausdorff-tér.*

Bizonyítás. Világos, hogy Hausdorff-terek szorzata Hausdorff-féle, így elég a kompaktságot igazolni.

Legyen adott valamely $i \in \mathcal{I}$ halmaz minden eleméhez egy kompakt $(\mathcal{X}_i, \mathfrak{T}_i)$ topologikus tér. Ezek $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ szorzata akkor és csak akkor kompakt, ha minden ultrafilterre konvergens, így elegendő ez utóbbit igazolni.

Legyen $\mathfrak{F}$ ultrafilter a szorzattérben, p_i pedig az azonos indexű térre vett $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_i$ projekció. Legyen $\mathfrak{F}_i = p_i(\mathfrak{F})$. Ekkor $\mathfrak{F}_i$ is ultrafilter és $(\mathcal{X}_i, \mathfrak{T}_i)$ kompaktsága miatt konvergens, vagyis létezik az $X_i = \lim \mathfrak{F}_i$ pont. Ekkor az $X = (X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ pontra $X = \lim \mathfrak{F}$. ■

2.2. Metrikus terek topológiája

Pontnak nevezett elemek egy $\mathcal{X}$ halmazát *metrikus térnek* nevezzük, ha adott egy $d: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés, a *metrika*, melyre:

(M₁) minden P, Q pontpár esetén

(M'₁) $d(P, Q) \geq 0$, és

(M''₁) egyenlőség pontosan akkor érvényes, ha $P = Q$.

(M₂) $d(P, Q) = d(Q, P)$, vagyis a leképezés szimmetrikus.

(M₃) minden P, Q, R ponthármasra teljesül a *háromszög-egyenlőtlenség*, vagyis $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$.

Egy metrikus tér részhalmaza is metrikus teret alkot a befoglaló metrikus tér metrikájának rá vett megszorításával. Metrikus tér a valós számok halmaza az abszolútértékkel mint metrikával, és ugyancsak metrikus tér az $\mathbb{R}^n$ koordinátatér a szokásos, ezért külön szinte sosem jelzett, euklidészi metrikával.

Érdeemes felfigyelni rá, hogy amennyiben d egy metrika az $\mathcal{X}$ halmazon, akkor a $d'(P, Q) := \max\{d(P, Q), 1\}$ is ugyanúgy metrika, viszont korlátos! Ezt a d' metrikát az $(\mathcal{X}, d)$ metrikus tér *természetes korlátos metrikájának* nevezzük.

Tétel. *Az $(\mathcal{X}, d)$ metrikus téren az $X \in \mathcal{X}$ pontokra a pozitív racionális $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$ számokkal definiált $\mathcal{B}_{X, \varepsilon} = \{Y \in \mathcal{X} : d(X, Y) < \varepsilon\}$ halmazok $\mathfrak{B}$ halmaza környezetbázis.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{B}_X = \{\mathcal{B}_{X, \varepsilon} : \varepsilon \in \mathbb{Q}_+\}$.

Ekkor $\mathfrak{B}_X$ nem üres, $\mathcal{U} \in \mathfrak{B}_X$ esetén $X \in \mathcal{U}$, ha pedig $\mathcal{B}_{X, \varepsilon_1}, \mathcal{B}_{X, \varepsilon_2} \in \mathfrak{B}_X$, akkor $\mathcal{B}_{X, \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \subseteq \mathcal{B}_{X, \varepsilon_1} \cap \mathcal{B}_{X, \varepsilon_2}$, így a környezetbázisra vonatkozó tételünk feltételeiből a (0), (1) és (2) teljesül.

A tétel (3) feltételének bizonyításához elegendő belátnunk, hogy $Y \in \mathcal{B}_{X,\varepsilon}$ esetén létezik olyan $\mathcal{B}_{Y,\delta}$, melyre $\mathcal{B}_{Y,\delta} \subseteq \mathcal{B}_{X,\varepsilon}$. Mivel $Y \in \mathcal{B}_{X,\varepsilon}$, $d(X, Y) < \varepsilon$, így van olyan $0 < \delta \in \mathbb{Q}$ szám, amelyre $\delta < \varepsilon - d(X, Y)$. Ha $Z \in \mathcal{B}_{Y,\delta}$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség miatt $d(Z, X) \leq d(Z, Y) + d(Y, X) < \varepsilon - d(X, Y) + d(X, Y) = \varepsilon$, amiért $Z \in \mathcal{B}_{X,\varepsilon}$. Ennek következtében $\mathcal{B}_{Y,\delta} \subseteq \mathcal{B}_{X,\varepsilon}$, ami bizonyítja a tételt. ■

A metrikus téren a tétel szerinti környezetbázis által meghatározott topológiát a metrikus tér *természetes topológiájának* nevezzük.

Egy halmazon adott két metrikát *kommenzurábilisnak* nevezünk, ha van olyan $\varepsilon \in (0, 1)$, hogy minden pontpárra a két távolság aránya $1 - \varepsilon$ és $1/\varepsilon$ közé esik. Az ilyen metrikák nyilván ugyanazt a topológiát határozzák meg a ponthalmazon, hiszen a környezetbázisaik elemei egymást tartalmazzák. Ugyanakkor különböző metrikák vezethetnek eltérő topológiákhoz is, ahogy például az euklidészi metrika és a természetes korlátos metrikája.

Definíció. Egy $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus teret *metrizálhatónak* nevezünk, ha van olyan metrika az $\mathcal{X}$ alaphalmazon, melynek természetes topológiája éppen $\mathfrak{T}$.

Nem minden topologikus tér metrizable, hiszen a metrika bármely két pontot elválaszt, de a topológia nem feltétlenül teszi ugyanezt.

Urison beágyazási tétele. *Megszámálható bázisú normális tér metrizable.*

Bizonyítás. A megszámlálható bázisú normális $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus téren legyen $\{\mathcal{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ egy bázis és nevezzük a báziselemek $(\mathcal{U}_i, \mathcal{U}_j)$ párait jónak, ha $\mathcal{U}_i^- \subset \mathcal{U}_j$. Legyen $\{(\mathcal{U}_{n_i}, \mathcal{U}_{m_i})\}_{i \in \mathbb{N}}$ az összes jó pár halmaza.

Mintfogy $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ normális tér, az Urison-lemma szerint minden jó párhoz létezik olyan folytonos $f_i: \mathcal{X} \rightarrow [-1/i, 1/i]$ függvény, melyre

$$f_i(X) = \begin{cases} 1/i, & \text{ha } X \in \mathcal{U}_{n_i}^-, \\ 0, & \text{ha } X \in \overline{\mathcal{U}_{m_i}}. \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2(X) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < 1 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i(i-1)} = 1 + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i} \right) = \frac{1}{2} < \infty,$$

ezért az $f(X) := (f_1(X), f_2(X), \dots, f_i(X), \dots)$ definícióval egy $f: \mathcal{X} \rightarrow \ell^2$ függvény adódik.

Az f függvény injektív, mert ha $X \neq Y$, akkor $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ normalitása miatt van olyan jó $(\mathcal{U}_{n_i}, \mathcal{U}_{m_i})$ pár, amely elválasztja őket, amiből viszont az következik, hogy az $f(X)$ és az $f(Y)$ vektorok különböznek az i indexű koordinátában.

Az f függvény folytonos is. Legyen ugyanis $\varepsilon > 0$, $X \in \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$ akkora, hogy $\sum_{i=n+1}^{\infty} 1/i^2 < \varepsilon^2/2$, és $\mathcal{U}_{X,f_i,\varepsilon} = f_i^{-1}(\{y \in [-1/i, 1/i] : |y - f_i(X)|^2 < \varepsilon^2/2n\})$. Az f_i folytonossága miatt az $\mathcal{U}_{X,f_i,\varepsilon}$ egy nyílt halmaz. Márpedig, ha $Y \in \mathcal{V}_{X,\varepsilon} := \bigcap_{i=1}^n \mathcal{U}_{X,f_i,\varepsilon}$, akkor

$$\begin{aligned} |f(Y) - f(X)|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} (f_i(Y) - f_i(X))^2 \leq \sum_{i=1}^n (f_i(Y) - f_i(X))^2 + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon^2}{2n} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2, \end{aligned}$$

vagyis a $\mathcal{V}_{X,\varepsilon} \in \mathfrak{T}_X$ nyílt halmaz olyan, hogy minden Y elemére $|f(Y) - f(X)| < \varepsilon$.

Az f^{-1} függvény is folytonos. Ehhez azt kell belátni, hogy bármely X pont bármely $\mathcal{U}_m$ báziskörnyezetéhez van az $f(X)$ vektornak olyan környezete, melynek f^{-1} szerinti képét az $\mathcal{U}_m$ tartalmazza. Vegyük észre, hogy az X pontot bármely tőle különböző, az $\mathcal{U}_m$ báziskörnyezeten belüli X' ponttól elválasztó környezetével az $\mathcal{U}_m$ báziskörnyezet olyan $(\mathcal{U}_{n_i}, \mathcal{U}_{m_i})$ jó párt alkot (itt $i \in \mathbb{N}$), melynek második eleme éppen $\mathcal{U}_m$. Vegyük az $f(X)$ vektor $\{f(Y) \in \ell^2 : |f(X) - f(Y)| < \frac{1}{2}f_i(X)\}$ nyílt környezetét. Az ebben lévő vektorok f^{-1} szerinti képeire, vagyis az Y pontokra

$$\frac{1}{4}f_i^2(X) > |f(X) - f(Y)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (f_j(X) - f_j(Y))^2 > (f_i(X) - f_i(Y))^2$$

alapján $\frac{1}{2}f_i(X) < f_i(Y)$ teljesül, amiért f_i definíciója miatt $Y \notin \overline{\mathcal{U}_{m_i}}$, tehát $Y \in \mathcal{U}_{m_i}$ is érvényes. Ezzel az f^{-1} folytonosságát beláttuk.

Eszerint $f: \mathcal{X} \rightarrow f(\mathcal{X}) \subset \ell^2$ egy homeomorfia a metrikus ℓ^2 térbe, és így a $d(X, Y) := |f(X) - f(Y)|$ egy metrika rajta. Ez bizonyítja a tételt. ■

Ebben a fejezetben a továbbiakban az $(\mathcal{X}, d)$ metrikus térben dolgozunk.

Mivel az $\mathcal{U}_X = \{Z \in \mathcal{X} : d(X, Z) < d(X, Y)/2\}$ és $\mathcal{U}_Y = \{Z \in \mathcal{X} : d(Y, Z) < d(X, Y)/2\}$ nyílt halmazok a háromszög-egyenlőtlenség értelmében diszjunktak és elválasztják az X és Y pontokat, kimondhatjuk a következőt.

Tétel. Minden metrikus tér Hausdorff-féle.

A természetes topológia definícióját felhasználva az olvasó igazolhatja a konvergencia és a folytonosság alábbi lemmában megfogalmazott feltételét.

Lemma. Az $(\mathcal{X}, d)$ metrikus térben egy $\{X_i\}_{i=0}^{\infty} \subseteq \mathcal{X}$ pontsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha létezik olyan $X_{\infty} \in \mathcal{X}$ pont, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ természetes szám, melyre $N < n$ esetén $d(X_n, X_{\infty}) \leq \varepsilon$.

Az $(\mathcal{X}, d)$ és $(\mathcal{X}', d')$ metrikus terek alaphalmazai közti $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ függvény akkor és csak akkor folytonos, ha minden $X \in \mathcal{X}$ pont és $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan $\delta > 0$, hogy $d(Y, X) < \delta$ esetén $d'(f(Y), f(X)) < \varepsilon$.

Metrikus tereken válik fontossá a szekvenciális kompaktság egy „könnyített” verziója.

Definíció. Az $(\mathcal{X}, d)$ metrikus térben egy $\{X_i\}_0^\infty$ pontsorozatot *Cauchy-féle sorozatnak* vagy *Cauchy-sorozatnak* mondunk, ha teljesíti a *Cauchy-tulajdonságot*, vagyis minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy $N < k \leq n$ esetén $d(X_n, X_k) \leq \varepsilon$. Az olyan metrikus tereket, amelyekben minden Cauchy-sorozat konvergens, *teljesnek* hívjuk.

A valós számok zárt intervallumai az abszolútérték-metrikával, — valójában a valós számok bármely axióma-rendszerében megtalálható Dedekind-típusú axióma következtében — teljes metrikus teret alkotnak, a nyílt intervallumai viszont nem. A Minkowski-metrikus affin geometriák is teljesek [15, Függelék: 263. oldal].

A távolságfüggvényt némileg kiterjesztve az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ halmazok távolságát a $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \inf\{d(A, B) : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ formulával értelmezzük. Ez mindig létezik, hiszen a $\{d(A, B) : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ halmaz alulról korlátos.

Tétel.

- (1) Az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ halmazok távolságára $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = d(\mathcal{A}^-, \mathcal{B}^-)$.
- (2) Egy X pont akkor és csak akkor érintési pontja egy $\mathcal{H}$ halmaznak, ha $d(X, \mathcal{H}) = 0$.
- (3) Pont és halmaz távolságára érvényes az általánosított háromszög-egyenlőtlenség, vagyis $d(X, \mathcal{H}) \leq d(X, Y) + d(Y, \mathcal{H})$.

Bizonyítás. (1) Az világos, hogy $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \geq d(\mathcal{A}^-, \mathcal{B}^-)$, hiszen az utóbbi távolság egy bővebb halmaz alsó határa.

Tegyük fel, hogy $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) > d(\mathcal{A}^-, \mathcal{B}^-)$, vagyis $\inf\{d(A, B) : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\} > \inf\{d(A, B_0) : A \in \mathcal{A}\}$ valamely $B_0 \in \mathcal{B}^- \setminus \mathcal{B}$ pontra. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan $A_0 \in \mathcal{A}$ pont és $\varepsilon > 0$, melyre $d(A, B) > d(A_0, B_0) + \varepsilon$ minden $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{B}$ pont esetén. Ez persze az $A_0 \in \mathcal{A}$ pontra is érvényes, ezért kapjuk, hogy $d(A_0, B) > d(A_0, B_0) + \varepsilon$ minden $B \in \mathcal{B}$ pont esetén. Csakhogy a háromszög-egyenlőtlenség alapján ez azt jelenti, hogy $d(B, B_0) > d(A_0, B) - d(A_0, B_0) > \varepsilon$ minden $B \in \mathcal{B}$ pontra, amiért $\mathcal{B}$ egyetlen pontja sem esik a B_0 pont ε sugarú környezetébe. Ez ellentmond annak, hogy B_0 érintkezési pont, ami igazolja az (1) állítást.

(2) Korábbi tételünk szerint X akkor és csak akkor érintési pontja a $\mathcal{H}$ halmaznak, ha minden környezetében van a $\mathcal{H}$ halmaznak pontja. Mivel az $\{Y : d(X, Y) < \varepsilon\}$ halmazok környezetbázist adnak, ez pontosan azt jelenti, hogy a $d(X, \mathcal{H}) = 0$.

(3) Az általánosított háromszög-egyenlőtlenség a

$$\begin{aligned} d(X, Y) + d(Y, \mathcal{H}) &= d(X, Y) + \inf\{d(Y, H) : H \in \mathcal{H}\} = \inf\{d(X, Y) + d(Y, H) : H \in \mathcal{H}\} \\ &\geq \inf\{d(X, H) : H \in \mathcal{H}\} = d(X, \mathcal{H}) \end{aligned}$$

levezetés következménye. ■

Jegyezzük meg, hogy a halmazok most megadott távolsága általában nem metrika. Ellenben az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ halmazok között a

$$d_H(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \max\{\sup\{d(A, \mathcal{B}) : A \in \mathcal{A}\}, \sup\{d(\mathcal{A}, B) : B \in \mathcal{B}\}\}$$

formulával értelmezett *Hausdorff-távolság*, ugyan végtelen is lehet, de a kompakt halmazok halmazát metrikus térré teszi, és ez ráadásul teljes is, ha az eredeti metrikus tér is teljes.

Tétel. *Pont és halmaz távolságfüggvénye a pont változóban folytonos.*

Bizonyítás. Tekintsük azt az $f_{\mathcal{H}} : (\mathcal{X}, d) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, melyre $f_{\mathcal{H}}(X) = d(\mathcal{H}, X)$. Ekkor minden $X \in \mathcal{X}$ pont és $\varepsilon > 0$ szám esetén tekintsük azokat az $Y \in \mathcal{X}$ pontokat, melyekre $d(Y, X) < \varepsilon$. Ezekre az általánosított háromszög-egyenlőtlenség miatt $|f(Y) - f(X)| = |d(\mathcal{H}, X) - d(\mathcal{H}, Y)| \leq d(X, Y) < \varepsilon$ teljesül, ami igazolja az állítást. ■

Tétel. *Minden metrikus tér normális.*

Bizonyítás. Mivel a metrikus tér Hausdorff-féle, elegendő a T_4 axiómát igazolni.

Vegyük a $\mathcal{Z}_1$ és $\mathcal{Z}_2$ diszjunkt zárt halmazokat, és tekintsük az

$$f(X) = \frac{d(X, \mathcal{Z}_1)}{d(X, \mathcal{Z}_1) + d(X, \mathcal{Z}_2)}$$

által definiált $f : \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$ függvényt. Mivel $\mathcal{Z}_1$ és $\mathcal{Z}_2$ diszjunkt, a nevező sosem nulla. Minthogy egy távolság sosem negatív, az f sosem nagyobb mint 1. Ha $X \in \mathcal{Z}_1$, akkor $f(X) = 0$, ha $X \in \mathcal{Z}_2$, akkor $f(X) = 1$.

Mivel f folytonos, f elválasztja a $\mathcal{Z}_1$ és $\mathcal{Z}_2$ diszjunkt zárt halmazokat.

Az $\mathcal{U}_1 = \{X : f(X) < 1/3\}$ és $\mathcal{U}_2 = \{X : f(X) > 2/3\}$ környezetek elválasztják a $\mathcal{Z}_1$ és $\mathcal{Z}_2$ diszjunkt zárt halmazokat, ami bizonyítja az állítást. ■

Szeparabilitás mellett Urison beágyazási tételének alábbi megfordítása adódik.

Tétel. *Szeperábilis metrikus tér megszámlálható bázisú normális Lindelöf-tér.*

Bizonyítás. Elég belátni, hogy a tér megszámlálható bázisú.

Tegyük fel, hogy az $\{X_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ pontthalmaz sűrű az $(\mathcal{X}, d)$ metrikus térben, és definiáljuk az $\mathcal{U}_{m,n} = \{Y \in \mathcal{X} : d(X_m, Y) < 1/n\}$ halmazokat minden $m, n \in \mathbb{N}$ számra.

Mivel a nyílt $\mathcal{U}_{m,n}$ halmazok megszámlálható sokan vannak, elegendő igazolnunk, hogy az $\{\mathcal{U}_{m,n} : m, n \in \mathbb{N}\}$ egy bázis, amihez elég látni, hogy a metrika által adott természetes környezetbázis minden $\mathcal{B}_{X,\varepsilon} = \{Y \in \mathcal{X} : d(X, Y) < \varepsilon \in \mathbb{Q}_+\}$ elemében lévő bármely $Y \in \mathcal{B}_{X,\varepsilon}$ pontnak van olyan $\mathcal{U}_{m,n}$ környezete, melyre $\mathcal{U}_{m,n} \subseteq \mathcal{B}_{X,\varepsilon}$.

Legyen $\delta = \varepsilon - d(Y, X)$, $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $1/n < \delta/2$. Mivel az $\{X_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ pontthalmaz sűrű az $(\mathcal{X}, d)$ metrikus térben, van egy X_m pontja a $\mathcal{B}_{Y,1/n}$ nyílt halmazban, amiért $Y \in \mathcal{U}_{m,n}$. Ekkor bármely $Z \in \mathcal{U}_{m,n}$ pontra

$$d(X, Z) \leq d(X, Y) + d(Y, X_m) + d(X_m, Z) \leq (\varepsilon - \delta) + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \leq \varepsilon - \delta + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \varepsilon,$$

valgyis $\mathcal{U}_{m,n} \subseteq \mathcal{B}_{X,\varepsilon}$, tehát $\{\mathcal{U}_{m,n}\}_{m,n=1}^\infty$ egy bázis. Eszerint van megszámlálható bázis, amiből a tétel következik. ■

Annak bizonyítása, hogy szeperábilis metrikus tér erősen Lindelöf-tér az olvasóra marad.

Definíció. Egy metrikus teret *korlátosnak* mondunk, ha van olyan $c > 0$ valós szám, melyhez van olyan pontja, melytől minden pont legfeljebb c távolságra van.

Metrikus térben egy pontthalmazt ε -*hálózatként* hívunk, ha bármely két pontjának távolsága legalább ε . Egy ε -hálózat maximális, ha minden további pont kisebb mint ε távolságra van valamely pontjától.

Egy metrikus teret *teljesen korlátosnak* nevezünk, ha van benne véges maximális ε -hálózat.

Lemma.

- (1) *Metrikus térben minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik maximális ε -hálózat.*
- (2) *Szekvenciálisan kompakt metrikus térben minden ε -hálózat véges sok pontot tartalmaz.*

Bizonyítás. (1) Vegyünk fel egy tetszőleges pontot. Ez egy ε -hálózat, tehát léteznek nem üres ε -hálózatok. Ezeket rendezhetjük egymás tartalmazása szerint. Ha veszünk egymást tartalmazó ε -hálózatoknak egy halmazát, akkor ezek egyesítése ezek mindegyikét tartalmazza. Ekkor a Zorn–Kuratowski-lemma^(*) szerint létezik

^(*)Ez ekvivalens a kiválasztási axiómával. Lásd a Függelékben!

egy maximális, semelyik ε -hálózat által nem tartalmazott ε -hálózat. Ez volt a bizonyítandó.

(2) Ha az $\mathcal{E}$ egy végtelen sok pontot tartalmazó ε -hálózat, akkor van legalább egy E torlódási pontja, amelynek minden környezetében van az $\mathcal{E}$ halmaznak az E ponttól különböző pontja. Ha $E_1 \in \mathcal{E}$, és $d(E, E_1) = d_1 < 2\varepsilon/3$, akkor az $\mathcal{E}$ tartalmaz egy E_2 pontot az E pont $\{X : d(X, E) < d_1/2\}$ környezetében is, ami se nem E , se nem E_1 . A háromszög-egyenlőtlenség miatt viszont $d(E_1, E_2) < d(E_1, E) + d(E, E_2) < 2\varepsilon/3 + d_1 < \varepsilon$, ami ellentmond annak, hogy E_1 és E_2 ugyanazon ε -hálózat tagja. ■

Tétel. *Szekvenciálisan kompakt metrikus tér teljesen korlátos, szeparábilis, teljes és minden szekvenciálisan kompakt részhalmaza kompakt is.*

Bizonyítás. A minden $k \in \mathbb{N}$ számhoz létező valamely maximális $1/k$ -hálózat pontjainak $\mathcal{X}_k$ halmaza a szekvenciálisan kompaktság miatt véges, így a metrikus tér teljesen korlátos. Az $\mathcal{X}_k$ halmazok $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{X}_k$ uniója egy megszámlálható, sűrű pont-halmaz a metrikus térben, amiért a metrikus tér szeparábilis.

Vegyünk egy $\{X_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{X}$ Cauchy-sorozatot.

A szekvenciális kompaktság miatt van olyan $X \in \mathcal{X}$ pont, mely az $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ pontsorozat torlódási pontja, ami a megszámlálható bázis miatt azt jelenti, hogy van egy $\{X_{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$ részsorozat, melynek határértéke az X pont és i_j szigorúan növekvő.

A sorozat Cauchy-tulajdonsága miatt minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan m , hogy minden $i, j > m$ esetén $d(X_i, X_j) < \varepsilon/2$. Az $\{X_{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$ konvergenciája miatt van olyan n , hogy minden $j > n$ esetén $d(X, X_{i_j}) < \varepsilon/2$. Válasszunk egy $j > \max(m, n)$ indexet. Ekkor minden $i > \max(m, n)$ esetén

$$d(X_i, X) \leq d(X_i, X_{i_j}) + d(X_{i_j}, X) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon,$$

ami azt jelenti, hogy az $\{X_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{X}$ Cauchy-sorozat konvergál az $X \in \mathcal{X}$ ponthoz, vagyis a metrikus tér teljes.

Mint ahogy a tér szeparábilis, Lindelöf tétele szerint elég megszámlálható lefedéseket vizsgálni. Legyen $\mathcal{H}$ az alaphalmaz egy szekvenciálisan kompakt részhalmaza. Ha $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ egy nyílt fedése, akkor $\mathcal{C}'_j = \bigcup_{i=1}^j \mathcal{C}_i$ is egy nyílt fedése, ugyanakkor ezek komplementerei egymásba skatulyázott zárt halmazok $\overline{\mathcal{C}'_1} \supseteq \overline{\mathcal{C}'_2} \supseteq \dots \overline{\mathcal{C}'_j} \supseteq \dots$ sorozatát alkotják, amelyek metszete a $\mathcal{H}$ szekvenciális kompaktsága miatt csak úgy lehet üres a $\mathcal{H}$ halmazban, ha valamelyik $\overline{\mathcal{C}'_j}$ halmaz nem metszi a $\mathcal{H}$ halmazt. Ez éppen azt jelenti, hogy $\mathcal{H}$ kompakt. ■

Tétel. *Egy metrikus tér akkor és csak akkor kompakt, ha teljesen korlátos és teljes.*

Bizonyítás. Mivel a kompaktságból következik a szekvenciális kompaktság, abból pedig következik a teljesen korlátosság és a teljesség is, elegendő a fordított állítással foglalkoznunk.

A minden $k \in \mathbb{N}$ számhoz létező valamely maximális $1/k$ -hálózat pontjainak $\mathcal{H}_k$ halmaza a teljesen korlátosság miatt véges, így ezek uniója $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_k$ egy megszámlálható, sűrű ponthalmaz a metrikus térben, ami emiatt szeparábilis, amiért megszámlálható bázisú Lindelöf-tér.

Most belátjuk a tér szekvenciális kompaktságát. Minthogy a $\mathcal{H}_k$ halmazok véges sok pontot tartalmaznak, valamely $m(k) \in \mathbb{N}$ számra $\mathcal{H}_k = \{H_{k,\ell}\}_{\ell=1}^{m(k)}$. Ekkor a $\mathcal{B}_{k,\ell} = \{Y : d(H_{k,\ell}, Y) < 1/k\}$ nyílt halmazok minden rögzített k esetén lefedik a teret.

Tekintsünk egy tetszőleges $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ pontsorozatot, és legyen $X_{0,i} = X_i$ minden $i \in \mathbb{N}$ számra. Ha adott a végtelen $\mathcal{X}_k = \{X_{k,i}\}_{i=1}^{\infty}$ pontsorozat valamely $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ számra, akkor a $k+1$ számra vizsgáljuk meg, hogy a véges sok $\{\mathcal{B}_{k+1,\ell}\}_{\ell=1}^{m(k+1)}$ halmaz melyikébe esik az $\mathcal{X}_k$ pontok közül végtelen sok. Végtelen sok pontot tartalmazó $\mathcal{B}_{k+1,\ell}$ környezet biztosan van, hiszen végtelen sok pontot véges sok részre szétosztva, legalább az egyik részben végtelen sok pont lesz. Legyen mondjuk a $\mathcal{B}_{k,\ell(k)}$ környezet egy olyan, amelybe az $\mathcal{X}_k$ pontok közül végtelen sok esik. Ezen végtelen sok pont halmaza legyen $\mathcal{X}_{k+1} = \{X_{k+1,i}\}_{i=1}^{\infty}$. Ezzel végtelen pontsorozatok egymásba skatulyázott $\mathcal{X}_0 \supseteq \mathcal{X}_1 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{X}_k \supseteq \dots$ sorozatát kaptuk. Eszerint az $X_{k,1}$ pontok $\{X_{k,1}\}_{k=1}^{\infty}$ sorozata egyrészt $\mathcal{X}_0$ részsorozata, másrészt Cauchy-sorozat, mert bármely $\varepsilon > 0$ szomhoz létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ szám, melyre $1/n < \varepsilon/4$, és akkor minden $k, \ell > n$ esetén

$$\begin{aligned} d(X_{k,1}, X_{\ell,1}) &\leq d(X_{k,1}, X_{n,1}) + d(X_{n,1}, X_{\ell,1}) \\ &\leq d(X_{k,1}, H_{n,\ell(n)}) + d(H_{n,\ell(n)}, X_{n,1}) + d(X_{n,1}, H_{n,\ell(n)}) + d(H_{n,\ell(n)}, X_{\ell,1}) \\ &\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Minthogy a tér teljes, az $\{X_{k,1}\}_{k=1}^{\infty}$ Cauchy-sorozatnak van benne határértéke, ami persze torlódási pontja az $\mathcal{X}_0 = \{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ pontsorozatnak, tehát a tér szekvenciálisan kompakt.

Tekintsük a tér egy $\mathfrak{C} = \{\mathcal{C}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ nyílt lefedését. A Lindelöf-tulajdonság miatt feltehető, hogy $\mathfrak{C}$ megszámlálható, vagyis $\mathfrak{C} = \{\mathcal{C}_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Legyen $\mathcal{Z}_m = \bigcap_{i=1}^m \overline{\mathcal{C}_i}$. Ezzel zárt halmazok egymásba skatulyázott $\mathcal{Z}_1 \supseteq \mathcal{Z}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{Z}_m \supseteq \dots$ sorozatát kaptuk. Szekvenciálisan kompakt térben ezek metszete csak úgy lehet üres, ha valamelyikük üres, ami azt jelenti, hogy a fedés véges sok eleme lefedi a teret, tehát a tér kompakt, és a bizonyítás kész. ■

Azonnali fontos következményként kapjuk a kompaktság és szekvenciális kompaktság ekvivalenciáját metrikus tereken.

Tétel. *Egy metrikus tér akkor és csak akkor kompakt, ha szekvenciálisan kompakt.*

Tétel. *Minden metrikus tér beágyazható egy teljes metrikus térbe.*

Bizonyítás. Vegyük az $(\mathcal{X}, d)$ metrikus tér alaphalmazának összes megszámlálható részhalmazát, és ezek közül legyen $\mathfrak{C}$ az összes Cauchy-sorozat halmaza.

Definiáljuk a $\mathfrak{C}$ halmazon a $\sim$ relációt úgy, hogy $\{X_i\}_{i=1}^\infty \sim \{Y_j\}_{j=1}^\infty$ pontosan akkor, ha a

$$C(X, Y)_k := \begin{cases} X_i, & \text{ha } k = 2i, \\ Y_j, & \text{ha } k = 2j + 1 \end{cases}$$

is Cauchy-sorozat. Ez a reláció nyilván reflexív, szimmetrikus és tranzitív, vagyis ekvivalencia-reláció. Legyen $\tilde{\mathcal{X}} = \mathfrak{C} / \sim$ a $\sim$ ekvivalencia-osztályainak halmaza, melynek egy $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ által reprezentált elemét az $\tilde{X}_i$ jelöli.

Figyeljük meg, hogy a $\tilde{\mathcal{X}}$ halmaz $\tilde{X} = \tilde{X}_i$ és $\tilde{Y} = \tilde{Y}_j$ elemeinek párjaival képzett valós számokból álló $d(X_i, Y_j)$ sorozat Cauchy-féle, hiszen tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $i', j' \in \mathbb{N}$ szám, hogy $d(X_i, X_k) < \varepsilon/2$ és $d(Y_j, Y_\ell) < \varepsilon/2$, ha $i' < i, k$ és $j' < j, \ell$, mely esetben viszont

$$\begin{aligned} & |d(X_i, Y_j) - d(X_k, Y_\ell)| \\ & \leq \max(|d(X_i, X_k) + d(X_k, Y_j) - d(X_k, Y_\ell)|, |d(X_i, Y_j) - d(X_k, Y_j) - d(Y_j, Y_\ell)|) \\ & \leq \max(d(X_i, X_k) + |d(X_k, Y_j) - d(X_k, Y_\ell)|, |d(X_i, Y_j) - d(X_k, Y_j)| + d(Y_j, Y_\ell)) \\ & \leq d(X_i, X_k) + d(Y_j, Y_\ell) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Eszerint létezik a $\lim_{i,j \rightarrow \infty} d(X_i, Y_j)$ nem negatív határérték.

Ha ez a határérték nulla, akkor $C(X, Y)$ egy Cauchy-sorozat, hiszen tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $i', j' \in \mathbb{N}$ szám, hogy $d(X_i, X_j) < \varepsilon$, ha $i' < i, j$, és $d(Y_j, Y_i) < \varepsilon$, ha $j' < j, i$, valamint $\tilde{d}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$ értelmében van olyan $n' \in \mathbb{N}$ szám, hogy $d(X_i, Y_j) < \varepsilon$, ha $n' < i, j$. Ekkor viszont $k, \ell > 2 \max(i', j', n') + 1$ miatt

$$d(C(X, Y)_k, C(X, Y)_\ell) = \begin{cases} d(X_i, Y_j), & \text{ha } k = 2i \text{ és } \ell = 2j + 1, \\ d(Y_j, X_i), & \text{ha } \ell = 2i \text{ és } k = 2j + 1, \\ d(X_i, X_j), & \text{ha } k = 2i \text{ és } \ell = 2j, \\ d(Y_i, Y_j), & \text{ha } k = 2i + 1 \text{ és } \ell = 2j + 1, \end{cases} \leq \varepsilon.$$

Ha viszont $C(X, Y)$ egy Cauchy-sorozat, akkor $\lim_{i,j \rightarrow \infty} d(X_i, Y_j) = 0$, hiszen akkor minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $d(C(X, Y)_k, C(X, Y)_\ell) < \varepsilon$, ha $2k, 2\ell + 1 > n$, márpedig ebből $d(X_k, Y_\ell) < \varepsilon$ adódik minden $k, \ell > n/2$ esetére.

A $\lim_{i,j \rightarrow \infty} d(X_i, Y_j)$ határérték ugyanakkor független az $\tilde{X}$ és $\tilde{Y}$ reprezentánsainak megválasztásától is, hiszen ha $\{X'_i\}_{i=1}^\infty \in \tilde{X}$ és $\{Y'_j\}_{j=1}^\infty \in \tilde{X}$, akkor

$$\begin{aligned} \lim_{k,\ell \rightarrow \infty} d(X'_k, Y'_\ell) &\leq \lim_{i,j,k,\ell \rightarrow \infty} (d(X'_k, X_i) + d(X_i, Y_j) + d(Y_j, Y'_\ell)) \\ &= \lim_{i,k \rightarrow \infty} d(X'_k, X_i) + \lim_{i,j \rightarrow \infty} d(X_i, Y_j) + \lim_{j,\ell \rightarrow \infty} d(Y_j, Y'_\ell) \\ &= 0 + \lim_{i,j \rightarrow \infty} d(X_i, Y_j) + 0 = \lim_{i,j \rightarrow \infty} d(X_i, Y_j), \end{aligned}$$

és ugyanígy $\lim_{i,j \rightarrow \infty} d(X_i, Y_j) \leq \lim_{k,\ell \rightarrow \infty} d(X'_k, Y'_\ell)$, tehát

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} d(X_i, Y_j) = \lim_{k,\ell \rightarrow \infty} d(X'_k, Y'_\ell).$$

Eszerint definiálhatjuk az $\tilde{\mathcal{X}}$ halmaz párjain a

$$\tilde{d}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \lim_{i,j \rightarrow \infty} d(X_i, Y_j)$$

függvényt, mely nem negatív valós értékű függvény szimmetrikus, pontosan akkor nulla, ha argumentumai megegyeznek, és teljesíti a háromszög-egyenlőtlenséget, hiszen minden $j \in \mathbb{N}$ számra

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\tilde{X}, \tilde{Z}) &= \lim_{i,k \rightarrow \infty} d(X_i, Z_k) \\ &\leq \lim_{i,j,k \rightarrow \infty} (d(X_i, Y_j) + d(Y_j, Z_k)) = \lim_{i,j \rightarrow \infty} d(X_i, Y_j) + \lim_{j,k \rightarrow \infty} d(Y_j, Z_k), \\ &= \tilde{d}(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \tilde{d}(\tilde{Y}, \tilde{Z}). \end{aligned}$$

Tehát a $\tilde{d}$ függvény egy távolság, és $(\tilde{\mathcal{X}}, \tilde{d})$ egy metrikus tér.

Vegyük azt az $f: \mathcal{X} \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}$ leképezést, melyre $f(X)$ a konstans $\{X_i : X_i = X, i \in \mathbb{N}\}$ pontsorozat osztálya. Az f leképezés nyilván injektív, ugyanakkor izometria is, hiszen

$$\tilde{d}(f(X), f(Y)) = \lim_{i,j \rightarrow \infty} d(X_i, Y_j) = \lim_{i,j \rightarrow \infty} d(X, Y) = d(X, Y),$$

így a tétel teljes bizonyításához már csak azt kell belátni, hogy $(\tilde{\mathcal{X}}, \tilde{d})$ teljes.

Legyen $\{\tilde{X}_i\}_{i=1}^\infty$ a $(\tilde{\mathcal{X}}, \tilde{d})$ metrikus tér egy Cauchy-sorozata. Mivel $\tilde{X}_i$ is Cauchy-sorozat, van olyan $n_i \in \mathbb{N}$ szigorúan növekvő sorozat, hogy minden $k, \ell \geq n_i$ esetén $\tilde{d}(\tilde{X}_{ik}, \tilde{X}_{i\ell}) < 1/i$. Legyen $Y_i = \tilde{X}_{in_i}$ (az i -edik Cauchy-sorozat n_i -edik eleme) minden $i \in \mathbb{N}$ számra.

Legyen $\varepsilon > 0$ egy tetszőleges szám. Ekkor feltételünk szerint van olyan $n > 6/\varepsilon$ szám, hogy minden $i, j > n$ esetén $\widetilde{d}(\widetilde{X}_i, \widetilde{X}_j) < \varepsilon/2$, így $n < i < j$ esetén

$$\begin{aligned}
 d(Y_i, Y_j) &= d(\widetilde{X}_{i_{n_i}}, \widetilde{X}_{j_{n_j}}) \\
 &\leq d(\widetilde{X}_{i_{n_i}}, \widetilde{X}_{i_{n_j}}) + d(\widetilde{X}_{i_{n_j}}, \widetilde{X}_{j_{n_j}}) = \frac{1}{i} + \widetilde{d}(\widetilde{X}_{i_{n_j}}, \widetilde{X}_{j_{n_j}}) \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{6} + \widetilde{d}(\widetilde{X}_{i_{n_j}}, \widetilde{X}_i) + \widetilde{d}(\widetilde{X}_i, \widetilde{X}_j) + \widetilde{d}(\widetilde{X}_j, \widetilde{X}_{j_{n_j}}) \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{6} + \lim_{k \rightarrow \infty} d(\widetilde{X}_{i_{n_j}}, \widetilde{X}_{i_k}) + \frac{\varepsilon}{2} + \lim_{\ell \rightarrow \infty} d(\widetilde{X}_{j_\ell}, \widetilde{X}_{j_{n_j}}) \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{6} + \frac{1}{i} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{i} \leq \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon,
 \end{aligned}$$

vagyis $\{Y_k\}_{k=1}^\infty$ egy Cauchy-sorozat.

Legyen $\tilde{Y} \in \tilde{\mathcal{X}}$ az $\{Y_k\}_{k=1}^\infty$ osztálya. Mivel $\{Y_k\}_{k=1}^\infty$ egy Cauchy-sorozat, minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $n > 2/\varepsilon$, hogy $i, j > n$ esetén $d(Y_i, Y_j) < \varepsilon/2$. Ebből $i > n$ esetén

$$\widetilde{d}(\widetilde{X}_i, \tilde{Y}) \leq \widetilde{d}(\widetilde{X}_i, \tilde{Y}_i) + \widetilde{d}(\tilde{Y}_i, \tilde{Y}) \leq \widetilde{d}(\widetilde{X}_i, \widetilde{X}_{i_{n_i}}) + \widetilde{d}(\tilde{Y}_i, \tilde{Y}) \leq \frac{1}{i} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

amiből $0 = \lim_{i \rightarrow \infty} \widetilde{d}(\widetilde{X}_i, \tilde{Y})$ következik, vagyis $\lim_{i \rightarrow \infty} \widetilde{X}_i = \tilde{Y}$, tehát $(\tilde{\mathcal{X}}, \tilde{d})$ teljes, és ezzel a bizonyítás teljes. ■

Egy metrikus tér $\chi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ transzformációját *kontrakciónak* nevezzük, ha létezik olyan $0 < \lambda < 1$ szám, hogy minden $\{P, Q\} \subseteq \mathcal{M}$ pontpárra $d(\chi(P), \chi(Q)) \leq \lambda d(P, Q)$.

Tétel. *Teljes metrikus tér minden kontrakciójának létezik pontosan egy fixpontja.*

Bizonyítás. *Unicitás.* Amennyiben $P, Q \in \mathcal{M}$ a χ kontrakció fixpontjai, akkor $d(P, Q) = d(\chi(P), \chi(Q)) \leq \lambda d(P, Q)$ miatt $d(P, Q) = 0$, vagyis $P = Q$.

Egzisztencia. Legyen P_0 egy tetszőleges pont és minden $i \in \mathbb{N}$ esetén legyen $P_{i+1} = \chi(P_i)$. Ekkor

$$d(P_{i+1}, P_i) = d(\chi(P_i), \chi(P_{i-1})) \leq \lambda d(P_i, P_{i-1}) \leq \dots \leq \lambda^i d(P_1, P_0),$$

így minden $n \geq k$ természetes számokra

$$\begin{aligned}
 d(P_{n+1}, P_k) &\leq d(P_{n+1}, P_n) + \dots + d(P_{k+1}, P_k) \leq (\lambda^n + \dots + \lambda^k) d(P_1, P_0) \\
 &= \frac{1 - \lambda^{n-k+1}}{1 - \lambda} \cdot \lambda^k d(P_1, P_0) \leq \frac{\lambda^k}{1 - \lambda} d(P_1, P_0)
 \end{aligned}$$

teljesül. Eszerint P_i Cauchy-sorozat, így a metrikus tér teljessége miatt létezik határértéke. Legyen ez P_∞ . Ekkor

$$d(P_\infty, \chi(P_\infty)) \leq d(P_\infty, P_n) + d(P_n, \chi(P_\infty)) \leq d(P_\infty, P_n) + \lambda d(P_{n-1}, P_\infty)$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Mivel $n \rightarrow \infty$ esetén $d(P_\infty, P_n)$ tart a nullához, ebből $d(P_\infty, \chi(P_\infty)) = 0$, vagyis $P_\infty = \chi(P_\infty)$ következik, tehát a P_∞ pont a χ kontrakció fixpontja, ami az állítást igazolja. ■

2.3. Kompakt metrikus terek folytonos függvényeinek tere

Lebesgue-lemma. Legyen adott az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus tér egy $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in \mathfrak{I}}$ nyílt fedése, egy kompakt $(\mathcal{M}, d)$ metrikus tér, és egy folytonos $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{X}$ függvény. Ekkor létezik olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy amennyiben valamely két $P, Q \in \mathcal{M}$ pontra $d(P, Q) < \varepsilon$ teljesül, akkor van olyan $i \in \mathfrak{I}$, hogy $f(P), f(Q) \in \mathcal{U}_i$.

Bizonyítás. Ha az állítás nem igaz, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra vannak olyan $P_n, Q_n \in \mathcal{M}$ pontok, hogy bár minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $d(P_n, Q_n) < 1/n$ teljesül, mégsem tartalmazza egyetlen $\mathcal{U}_i$ nyílt halmaz sem az $f(P_n), f(Q_n)$ pontokat egyszerre.

Válasszunk a $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ sorozatból egy konvergens $\{P_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ részsorozatot. Legyen $P = \lim_{j \rightarrow \infty} P_{n_j}$. Azonnal kapjuk, hogy $P = \lim_{j \rightarrow \infty} Q_{n_j}$ is teljesül, hiszen $d(P_{n_j}, Q_{n_j}) < 1/n_j \rightarrow 0$. Nyilván van olyan $i \in \mathfrak{I}$, hogy $f(P) \in \mathcal{U}_i$, és ezért $f^{-1}(\mathcal{U}_i)$ a P pont egy nyílt környezete.

Ez azt jelenti, hogy az $f^{-1}(\mathcal{U}_i)$ környezetből a $\{P_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ és $\{Q_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ pontsorozatoknak is csak véges sok eleme marad ki, így elég nagy j számra $P_{n_j}, Q_{n_j} \in f^{-1}(\mathcal{U}_i)$, ami ellentmond a feltevésünknek, és ezzel igazolja a tételt. ■

Definíció. Egy metrikus terek közti $f: (\mathcal{X}, d) \rightarrow (\mathcal{X}', d')$ függvényt *egyenletesen folytonosnak* nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy amennyiben $d(X, Y) < \delta$ teljesül egy (X, Y) pontpárra, akkor $d'(f(X), f(Y)) < \varepsilon$ is teljesül.

Heine–Cantor-tétel. Kompakt metrikus teret metrikus térbe képező folytonos függvény egyenletesen folytonos.

Bizonyítás. Legyen $f: (\mathcal{X}, d) \rightarrow (\mathcal{X}', d')$ folytonos függvény az $(\mathcal{X}, d)$ kompakt metrikus téren, és rögzítsünk egy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ egész számot.

A folytonosság miatt minden $X \in \mathcal{X}$ ponthoz létezik olyan $\delta_{X,n} > 0$, hogy ha $d(X, Y) < \delta_{X,n}$, akkor $d'(f(X), f(Y)) < 1/n$. Mivel a $\mathcal{C}_{X,n} = \{Y : d(X, Y) < \delta_{X,n}/2\}$ nyílt halmazok lefedik az $\mathcal{X}$ alaphalmazt, a kompaktság miatt ezek közül véges

sok, mondjuk a $\mathcal{C}_{X_i,n}$ nyílt halmazok ($i = 1, \dots, m$) már lefedik az $\mathcal{X}$ alaphalmazt. Legyen $\delta_n = \min_{i=1,\dots,m} \delta_{X_i,n}$.

Tegyük fel, hogy $d(X, Y) < \delta_n/2$ valamely X és Y pontokra. Nyilván van olyan $1 \leq i \leq m$, hogy $X \in \mathcal{C}_{X_i,n}$, amiből a háromszög-egyenlőtlenség miatt $d(X_i, Y) \leq d(X_i, X) + d(X, Y) < \delta_{X_i,n}$ következik, amiből viszont $d'(f(X), f(Y)) \leq d'(f(X), f(X_i)) + d'(f(X_i), f(Y)) < 2/n$ adódik. Ez bizonyítja a tételt. ■

Ezen állításnak jóformán semmilyen megfordítása nem lehetséges. Erről meggyőzheti az olvasót a $[0, 1]$ zárt szakaszon értelmezett folytonos

$$g_i(x) = \begin{cases} i(x - \frac{i-3}{i}), & \text{ha } \frac{i-3}{i} < x \leq \frac{i-2}{i}, \\ i(x - \frac{i-2}{i}), & \text{ha } \frac{i-2}{i} < x \leq \frac{i-1}{i}, \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

függvények sorozata.

A következőkben Weierstrass approximációs tételének Stone-féle általánosítását tárgyaljuk. Az eredeti tétel egy konstruktív, Bernstein-polinomokat használó bizonyítása a Függelékben található.

Bár *uniform tereken* is elvégezhető lenne a bizonyítás, mi megelégszünk az általánosság metrikus terekre való kiterjesztésével, mely esetben a szükséges uniformitást a metrika biztosítja.

Szükségünk van pár előkészítő gondolatra.

Jelölje az $(\mathcal{X}, d)$ kompakt metrikus teret a valós számok $\mathbb{R}$ halmazába képező folytonos függvények halmazát $C(\mathcal{X}, \mathbb{R})$. Ez egy egységelemes algebra $\mathbb{R}$ fölött, hiszen $1 \in C(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ és tetszőleges $f, g \in C(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ valamint $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda f + \mu g \in C(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ és $fg \in C(\mathcal{X}, \mathbb{R})$. Minthogy $(\mathcal{X}, d)$ kompakt, a Weierstrass-tétel szerint minden $f \in C(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ függvények korlátos és felveszi szélsőértékeiket (maximum és minimum), ezért definiálható az $\|f\| := \max_{X \in \mathcal{X}} |f(X)|$ érték.

Tétel. $A \|\cdot\|: C(\mathcal{X}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 0}$ függvény norma a $C(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ vektortéren, és $C(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ ezzel a normával egy Banach-algebra.

Bizonyítás. Mivel $\|f\| = 0$ akkor és csak akkor, ha $|f(X)| \equiv 0$ (definitéség vagy szeparációs tulajdonság), $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén pedig $\|\lambda f\| = \max_{X \in \mathcal{X}} |\lambda f(X)| = |\lambda| \|f(X)\|$ (pozitív homogenitás), valamint $\|f + g\| = \max_{X \in \mathcal{X}} |f(X) + g(X)| \leq \max_{X \in \mathcal{X}} (|f(X)| + |g(X)|) = \|f\| + \|g\|$ (háromszögegyenlőtlenség vagy szubadditivitás), a $\|\cdot\|$ függvény tényleg norma a $C(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ vektortéren.

Vegyünk most egy $\{f_i\}_0^\infty \subset C(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ Cauchy-sorozatot, mely azt jelenti, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy $N < k \leq n$ esetén $\|f_n - f_k\| =: d(f_n, f_k) \leq \varepsilon$. Ekkor bármely $X \in \mathcal{X}$ pontban $|f_n(X) - f_k(X)| \leq$

$\|f_n - f_k\|$, amiért az $\{f_i(X)\}_0^\infty \subset \mathcal{X}$ számsorozat Cauchy-tulajdonságú. Minthogy a valós számok $\mathbb{R}$ halmaza teljes, ez a számsorozat konvergens, amiért az $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ valóértékű függvényt az $f(X) := \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(X)$ jól definiálja.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám. Ekkor létezik olyan $k \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy $k < j \leq i$ esetén $\|f_i - f_j\| \leq \varepsilon$, hiszen $\{f_i\}_0^\infty \subset C(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ Cauchy-sorozat. Eszerint $k < j$ esetén

$$|f(X) - f_j(X)| = \left| \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(X) - f_j(X) \right| = \lim_{i \rightarrow \infty} |f_i(X) - f_j(X)| \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \|f_i - f_j\| \leq \varepsilon,$$

ami azt jelenti, hogy a folytonos f_j függvények konvergens sorozata egyenletesen konvergál az f függvényhez.

Eszerint az f függvény folytonos, vagyis $f \in C(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, ami igazolja, hogy $C(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ teljes, vagyis a $\|\cdot\|$ normával egy Banach-tér.

Mivel $\|fg\| = \max_{X \in \mathcal{X}} |f(X)g(X)| \leq \max_{X \in \mathcal{X}} (|f(X)| \cdot |g(X)|) = \|f\| \cdot \|g\|$ is teljesül minden $f, g \in C(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ esetén, a tételt igazoltuk. ■

Tétel. Ha $\mathcal{A}$ a $C(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ egy zárt egységelemes részalgebrája és $f, g \in \mathcal{A}$, akkor az

$$\max(f, g): X \rightarrow \max\{f(X), g(X)\} \quad \text{és} \quad \min(f, g): X \rightarrow \min\{f(X), g(X)\}$$

függvények is $\mathcal{A}$ elemei.

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathcal{A}$ nem negatív.

Tekintsük a $g = (p + f)/\|p + f\| \in \mathcal{A}$ függvényt valamely $p > 0$ számra. Ekkor $0 < p/\|p + f\| \leq g \leq (p + \|f\|)/\|p + f\| = 1$.

Legyen $h = 1 - g$. Ekkor $0 \leq h \leq \hat{h} := \|f\|/\|p + f\| < 1$, amiért a $\sqrt{1 - x}$ függvény $(-1, 1)$ intervallumon konvergens Taylor-sora adja, hogy

$$\sqrt{g} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (j - 1/2)}{i!} h^i,$$

ahol a negatív tagok arányára

$$0 < \frac{h^{i+1}(X) \frac{\prod_{j=0}^i (j - 1/2)}{(i+1)!}}{h^i(X) \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (j - 1/2)}{i!}} = h(X) \frac{2i - 1}{2(i + 1)} < h(X) \leq \hat{h} < 1$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy a sorfejtés abszolút konvergens, vagyis az $\mathcal{A}$ részalgebra

$$g_k := 1 + \sum_{i=1}^k \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (j - 1/2)}{i!} h^i$$

elemei egyenletesen konvergálnak a $\sqrt{g}$ függvényhez, amiből $\mathcal{A}$ zártasága miatt $\sqrt{g} \in \mathcal{A}$ adódik.

Eszerint minden nem negatív $f \in \mathcal{A}$ függvényre és $p > 0$ számra $\sqrt{p+f} \in \mathcal{A}$.
Minthogy

$$\|\sqrt{p+f} - \sqrt{f}\| = \left\| \frac{p}{\sqrt{p+f} + \sqrt{f}} \right\| \leq \sqrt{p},$$

a $\sqrt{p+f} \in \mathcal{A}$ függvények egyenletesen konvergálnak a $\sqrt{f}$ függvényhez, amiért $\sqrt{f} \in \mathcal{A}$ is teljesül.

Újra $\mathcal{A}$ algebrai zártságát használva nyerjük, hogy bármely $f \in \mathcal{A}$ függvényre $|f| = \sqrt{f^2} \in \mathcal{A}$ is teljesül, amiért

$$\max(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2} \in \mathcal{A} \quad \text{és} \quad \min(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2} \in \mathcal{A}$$

bizonyítja a tételt. ■

A $C(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ Banach-algebra egy $\mathfrak{S} \subseteq C(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ részhalmazát *szeparálónak* nevezzük, ha minden különböző pontokból álló $X, Y \in \mathcal{X}$ párhoz létezik olyan $f \in \mathfrak{S}$ eleme, hogy $f(X) \neq f(Y)$.

Stone–Weierstrass-tétel. *Legyen $(\mathcal{X}, d)$ egy kompakt metrikus tér. Ekkor valószínűleg folytonos függvényeinek $C(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ Banach-algebrájában minden szeparáló, egysegelemes $\mathfrak{S}$ részalgebra sűrű.*

Bizonyítás. Legyen $f \in C(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ és $\varepsilon > 0$.

Mivel $\mathfrak{S}$ szeparáló, bármely két különböző $Y, Z \in \mathcal{X}$ ponthoz létezik olyan $g \in \mathfrak{S}$ függvény, melyre $g(Y) \neq g(Z)$. Az ebből konstruált

$$\tilde{f}_{Y,Z}: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \quad \tilde{f}_{Y,Z}(X) = f(Y) \frac{g(X) - g(Z)}{g(Y) - g(Z)} + f(Z) \frac{g(Y) - g(X)}{g(Y) - g(Z)}$$

függvény az $\mathfrak{S}$ algebra eleme és $\tilde{f}_{Y,Z}(Y) = f(Y)$, valamint $\tilde{f}_{Y,Z}(Z) = f(Z)$.

Tekintsük az $\mathcal{U}_{Y,Z} = \{X \in \mathcal{X} : \tilde{f}_{Y,Z}(X) < f(X) + \varepsilon\}$ nyílt halmazokat. Ezek lefedik az egész teret, ezért a kompaktság miatt létezik véges sok $Z_0, Z_1, \dots, Z_n$ ($n \in \mathbb{N}$) pont, hogy $\mathcal{X} = \bigcup_{i=0}^n \mathcal{U}_{Y,Z_i}$. Minden $Y \in \mathcal{X}$ pont esetén legyen

$$\tilde{f}_Y: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{olyan, hogy} \quad \tilde{f}_Y = \min_{0 \leq i \leq n} \tilde{f}_{Y,Z_i}.$$

Az a függvény az $\mathfrak{S}$ algebra $\mathfrak{S}^-$ lezártjának eleme és $\tilde{f}_Y(Y) = f(Y)$, valamint

$$\tilde{f}_Y(X) = \min_{0 \leq i \leq n} \tilde{f}_{Y,Z_i}(X) \stackrel{\exists i: X \in \mathcal{U}_{Y,Z_i}}{\leq} \tilde{f}_{Y,Z_i}(X) \stackrel{X \in \mathcal{U}_{Y,Z_i}}{<} f(X) + \varepsilon.$$

Tekintsük most a $\mathcal{V}_Y = \{X \in \mathcal{X} : \tilde{f}_Y(X) > f(X) - \varepsilon\}$ nyílt halmazokat. Az $\bigcup_{Y \in \mathcal{X}} \mathcal{V}_Y$ unió lefedi a teljes $\mathcal{X}$ teret, ezért a kompaktság miatt létezik véges sok $Y_0, Y_1, \dots, Y_m$ ($m \in \mathbb{N}$) pont, hogy $\mathcal{X} = \bigcup_{j=0}^m \mathcal{V}_{Y_j}$. Legyen

$$\tilde{f}: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{olyan, hogy} \quad \tilde{f} = \max_{0 \leq j \leq m} \tilde{f}_{Y_j}.$$

Ez az $\mathfrak{S}$ algebra $\mathfrak{S}^-$ lezártjának eleme és

$$\begin{aligned} \tilde{f}(X) &= \max_{0 \leq j \leq n} \tilde{f}_{Y_j}(X) \stackrel{\exists j: X \in \mathcal{V}_{Y_j}}{\geq} \tilde{f}_{Y_j}(X) \stackrel{X \in \mathcal{V}_{Y_j}}{>} f(X) - \varepsilon \\ \tilde{f}(X) &= \max_{0 \leq j \leq n} \tilde{f}_{Y_j}(X) \leq \max_{0 \leq j \leq n} (f(X) + \varepsilon) = f(X) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ezzel a tételt beláttuk. ■

A valósértékű függvényekről az állítás kiterjeszthető a komplexértékű függvényekre is, de ehhez a függvényalgebrának a konjugálásra való zártsága is szükséges.

Komplex Stone–Weierstrass-tétel. *Legyen $(\mathcal{X}, d)$ egy kompakt metrikus tér. Ekkor komplexértékű folytonos függvényeinek $C(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ Banach-algebrájában minden szeparáló, egységelemes, a konjugálásra is zárt $\mathfrak{S}$ részalgebra sűrű.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{S}_{\mathbb{R}}$ az $\mathfrak{S}$ algebra összes valósértékű függvényét tartalmazó halmaz. Nyilván ez is egy egységelemes részalgebra.

Mivel $\mathfrak{S}$ szeparáló, bármely két különböző $Y, Z \in \mathcal{X}$ ponthoz létezik olyan $g \in \mathfrak{S}$ komplex függvény, melyre $g(Y) \neq g(Z)$. Az ebből konstruált

$$\operatorname{Re} g = \frac{g + \bar{g}}{2} \quad \text{és} \quad \operatorname{Im} g = \frac{g - \bar{g}}{2i}$$

függvények valósértékűek és az $\mathfrak{S}_{\mathbb{R}}$ algebra elemei, tehát $\operatorname{Re} g, \operatorname{Im} g \in \mathfrak{S}_{\mathbb{R}}$. Minthogy $g(Y) \neq g(Z)$, $\operatorname{Re} g(Y) \neq \operatorname{Re} g(Z)$ vagy $\operatorname{Im} g(Y) \neq \operatorname{Im} g(Z)$ legalább egyike teljesül, ami igazolja, hogy $\mathfrak{S}_{\mathbb{R}}$ elválasztó.

Eszerint a valósértékű folytonos függvényekre vonatkozó Stone–Weierstrass-tétel alapján $\mathfrak{S}_{\mathbb{R}}$ sűrű a $C(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ algebrában. Mivel $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{\mathbb{R}} + i\mathfrak{S}_{\mathbb{R}}$ és $C(\mathcal{X}, \mathbb{C}) = C(\mathcal{X}, \mathbb{R}) + iC(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, ezzel az állítást igazoltuk. ■

A Stone–Weierstrass-tételről további információk találhatók a Függelékben.

2.4. Topologikus csoportok topológiája

Definíció. Egy $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus teret *topologikus csoportnak* nevezzük, ha az $\mathcal{X}$ halmazon adott egy olyan $*$ csoportművelet, melyre $(X, Y) \mapsto X * Y^{-1} \in \mathcal{X}$ folytonos az $(\mathcal{X} \times \mathcal{X}, \tilde{\mathfrak{T}})$ szorzattéren a szorzattopológiában.

Tétel. *Egy topologikus tér egy csoportművelettel akkor és csak akkor alkot topologikus csoportot, ha az $X \mapsto X^{-1}$ és $(X, Y) \mapsto X * Y$ leképezés is folytonos a szorzattopológiában.*

Bizonyítás. Ha $(\mathcal{X}, \mathfrak{T}, *)$ topologikus csoport és E az egységeleme, akkor $(X, Y) \mapsto X * Y^{-1} \in \mathcal{X}$ folytonos a szorzattopológiában, amiért $Y \mapsto (E, Y) \mapsto E * Y^{-1} = Y^{-1}$ és $(X, Y) \mapsto (X, Y^{-1}) \mapsto X * (Y^{-1})^{-1} = X * Y$ is folytonos a szorzattopológiában.

Ha az $X \mapsto X^{-1}$ és $(X, Y) \mapsto X * Y$ leképezés is folytonos a szorzattopológiában, akkor ezek összetétele is folytonos a szorzattopológiában. Ez volt a bizonyítandó. ■

Az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T}, *)$ topologikus csoport minden X elemére definiáljuk az $l_X: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ és $r_X: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ leképezéseket úgy, hogy $l_X: Y \mapsto X * Y$ és $r_X: Y \mapsto Y * X$. Előbbit *bal-* utóbbit *jobbtranszláció*nak nevezzük. A bal- és jobbtranszlációk előbbi tételünk, $(l_X)^{-1} = l_{X^{-1}}$ és $(r_X)^{-1} = r_{X^{-1}}$ miatt homeomorfizmusok.

Ugyancsak homeomorfizmus az $X \mapsto X^{-1}$ inverzképzés, mely involutív is.

Egy $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{X}$ halmaz minden pontjára egy bal- vagy jobbtranszlációt, illetve inverzképzést alkalmazva egy újabb halmazt kapunk az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T}, *)$ topologikus csoportban, melyeket $l_X(\mathcal{H}) = X * \mathcal{H}$, $r_X(\mathcal{H}) = \mathcal{H} * X$ és $\mathcal{H}^{-1}$ jelöl. Mivel homeomorfizmusokat alkalmaztunk, a következőt kapjuk.

Tétel. *Topologikus csoportban nyílt, zárt, kompakt vagy összefüggő halmaz inverze és bármely transzláció szerinti képe rendre nyílt, zárt, kompakt illetve összefüggő.*

Topologikus csoportban az inverzükkel megegyező halmazokat, *szimmetrikusnak* nevezzük.

Lemma. *Topologikus csoport neutrális elemének bármely $\mathcal{U}$ környezetében, van az N neutrális elemnek olyan szimmetrikus $\mathcal{V}$ környezete, melyre $\mathcal{V} * \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$.*

Bizonyítás. Mivel $(X, Y) \mapsto X * Y$ folytonos a szorzattopológiában, van az (N, N) pontnak a szorzattérben olyan $\mathcal{W}$ környezete, hogy $(X, Y) \in \mathcal{W}$ estén $X * Y \in \mathcal{U}$ (vagyis $\mathcal{W} * \mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$).

A topologikus szorzat definíciója miatt így vannak olyan $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in \mathfrak{T}_E$ környezetek, hogy $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{W}$, amiért $\mathcal{V}_1 * \mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{U}$. Ekkor $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_1^{-1} \cap \mathcal{V}_2 \cap \mathcal{V}_2^{-1}$ nyílt halmaz és nyilván teljesíti a lemma minden állítását. ■

Tétel. *Minden topologikus csoport T_3 -tér.*

Bizonyítás. Ha az N neutrális elem nincs benne a $\mathcal{Z}$ zárt halmazban, akkor lemmánk szerint van olyan szimmetrikus $\mathcal{V}$ környezete, hogy $\mathcal{V} * \mathcal{V} \subseteq \overline{\mathcal{Z}}$.

Ha $X \in \mathcal{V}^-$, akkor $(X * \mathcal{V}) \cap \mathcal{V}$ nem üres, hiszen $X * \mathcal{V} \in \mathfrak{T}_X$ és érintési pont lévén, az X minden környezetében van a $\mathcal{V}$ környezetnek pontja. Eszerint van olyan $Y, Y' \in \mathcal{V}$, hogy $X * Y = Y'$, ami viszont azt jelenti, hogy $X = Y' * Y^{-1} \in \mathcal{V} * \mathcal{V}^{-1} \subseteq \overline{\mathcal{Z}}$. Eszerint a $\mathcal{V}$ és $\overline{\mathcal{V}^-}$ környezetek elválasztják az N neutrális elemet az őt nem tartalmazó $\mathcal{Z}$ zárt halmaztól.

Ha a tetszőleges X pont nincs a $\mathcal{Z}$ zárt halmazban, akkor az N neutrális elem nincs az $X^{-1} * \mathcal{Z}$ zárt halmazban, így van ezeket elválasztó két nyílt halmaz, melyeket az X ponttal megszorozva megkapjuk a kívánt elválasztó nyílt halmazokat.

Ezzel a tételt beláttuk. ■

Tétel. *Egy topologikus csoport akkor és csak akkor Hausdorff-féle, ha a neutrális eleméből képzett egyelemű halmaz zárt.*

Bizonyítás. Hausdorff-tér minden egyelemű halmaza zárt, így a tétel ezirányú állítása nyilvánvaló.

Ha a topologikus csoport neutrális eleméből képzett egyelemű halmaz zárt, akkor translációk alkalmazásával kapjuk, hogy minden pontjából képzett egyelemű halmaza zárt, vagyis a topologikus csoport T_1 -tér.

Legyen X az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T}, *)$ topologikus csoport egy nem neutrális eleme.

A T_1 -tulajdonság miatt van olyan $\mathcal{U}$ környezete a topologikus csoport N neutrális elemének, mely nem tartalmazza az X pontot. Előbbi lemmánk szerint van olyan szimmetrikus $\mathcal{V} \in \mathfrak{T}_N$ környezet, melyre $\mathcal{V} = \mathcal{V}^{-1}$ és $\mathcal{V} * \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$.

A $\mathcal{W} = l_X(\mathcal{V})$ nyílt halmaz tartalmazza az X pontot, hiszen $N \in \mathcal{V}$.

Ha $Y \in \mathcal{W} \cap \mathcal{V}$, akkor $Y = X * V$ valamely $V \in \mathcal{V}$ pontra, amiből az $X = Y * V^{-1} \in \mathcal{V} * \mathcal{V}^{-1} = \mathcal{V} * \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ ellentmondás adódik, tehát $\mathcal{W} \cap \mathcal{V} = \emptyset$, vagyis a diszjunkt $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ elválasztja az N és X pontokat egymástól.

Eszerint a topologikus csoport bármely két különböző X és Y pontjára, van a neutrális elemnek és az $X * Y^{-1}$ elemnek egymástól diszjunkt $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ környezete, ami viszont azt jelenti, hogy a diszjunkt $\mathcal{U} * Y$ és $\mathcal{W} * Y$ környezetek elválasztják egymástól az X és Y pontot, tehát a tér Hausdorff-féle. ■

Eszerint egy T_1 -tulajdonságú topologikus csoport Hausdorff-féle.

Tétel. *Topologikus csoportban*

- (1) *nyílt halmaz bármely halmazzal vett szorzata nyílt;*
- (2) *zárt halmaz kompakt halmazzal vett szorzata zárt;*
- (3) *kompakt halmaz szorzata kompakt halmazzal kompakt;*
- (4) *összefüggő halmaz szorzata összefüggő halmazzal összefüggő.*

Bizonyítás. (1) Legyen $(\mathcal{X}, \mathfrak{T}, *)$ egy topologikus csoport és $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{T}$. Mivel $\mathcal{U} * \mathcal{V} = \bigcup_{X \in \mathcal{U}} l_X(\mathcal{V})$ nyílt halmaz szorzata bármely halmazzal nyílt.

(2) Ha $\mathcal{Z}$ zárt és $\mathcal{K}$ kompakt halmaz, akkor minden $X \notin \mathcal{Z} * \mathcal{K}$ pontra az $N \in \mathcal{X}$ neutrális elem nincs az $X^{-1} * \mathcal{Z} * \mathcal{K}$ halmazban, amiért minden $K \in \mathcal{K}$ esetén van a neutrális elemnek olyan szimmetrikus $\mathcal{V}_K$ nyílt környezete, hogy $\mathcal{V}_K$ és $\overline{\mathcal{V}_K}$ elválasztják a neutrális elemet és az $X^{-1} * \mathcal{Z} * K$ halmazt. Világos, hogy $\{K * \mathcal{V}_K\}_{K \in \mathcal{K}}$ egy nyílt fedése a kompakt $\mathcal{K}$ halmaznak, tehát elemeinek egy véges halmaza, mondjuk $\mathcal{V} = \{K_i * \mathcal{V}_{K_i}\}_{i=1}^n$ is lefedi a $\mathcal{K}$ halmazt.

Legyen $\mathcal{V} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{V}_{K_i}$, és $\mathcal{U} = X * \mathcal{V}$.

Ha $\mathcal{U} \cap (\mathcal{Z} * \mathcal{K})$ nem üres, akkor van olyan $V \in \mathcal{V}$, $Z \in \mathcal{Z}$ és $K \in \mathcal{K}$, hogy $X * V = Z * K$. A $\mathcal{V}$ fedőrendszer miatt pedig van olyan i , hogy $K \in K_i * \mathcal{V}_{K_i}$, vagyis létezik olyan $V_i \in \mathcal{V}_{K_i}$, melyre $K = K_i * V_i$, tehát összefoglalva: $X * V = Z * K_i * V_i$. Eszerint $V * V_i^{-1} = X^{-1} * Z * K_i$, ami ellentmondás, mert

$$V * V_i^{-1} \in \mathcal{V} * \mathcal{V}_i \subseteq \mathcal{V}_i * \mathcal{V}_i \subseteq \overline{X^{-1} * \mathcal{Z} * K_i}.$$

Tehát $\mathcal{U} \cap (\mathcal{Z} * \mathcal{K}) = \emptyset$, ami azt mutatja, hogy az $X \notin \mathcal{Z} * \mathcal{K}$ pontnak van nyílt környezete az $\mathcal{Z} * \mathcal{K}$ halmazban, tehát ez utóbbi nyílt halmaz, vagyis $\mathcal{Z} * \mathcal{K}$ zárt, ahogy a (2) állítja.

(3) Ha $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$ kompakt halmazok, akkor a szorzattopológiában $\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2$ is kompakt halmaz. Ebből következik, hogy ennek a folytonos $(X, Y) \mapsto X * Y$ leképezés szerinti $\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2$ képe is kompakt.

(4) Ha $\mathcal{C}_1$ és $\mathcal{C}_2$ összefüggő halmazok, akkor a szorzattopológiában $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ is összefüggő halmaz, így ennek a folytonos $(X, Y) \mapsto X * Y$ leképezés szerinti $\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2$ képe is összefüggő.

Ezzel a tételt beláttuk. ■

Fontos felfigyelni rá, hogy zárt halmazok szorzata nem feltétlen zárt, hiszen például a komplex számok $\mathbb{C}$ additív csoportjában a $\mathcal{Z}_1 = \{x + i/x : x \in \mathbb{R}, x > 0\}$ (hiperbola) és a $\mathcal{Z}_2 = \{y : y \in \mathbb{R}\}$ (egyenes) zárt halmazok $\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2 = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ összege a felső nyílt félsík, amely nyilván nem zárt a $\mathbb{C}$ topologikus csoportban.

Tétel. *Topologikus csoportban a neutrális elemet tartalmazó összefüggő komponens zárt normálosztó.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{N}$ az N neutrális elemet tartalmazó összefüggő komponens. Minthogy az $\mathcal{N}$ összefüggő komponens, zárt is.

Ha $X \in \mathcal{N}$, akkor $l_{X^{-1}}(\mathcal{N})$ tartalmazza a neutrális elemet. Mivel $l_{X^{-1}}(\mathcal{N})$ összefüggő is, $X^{-1} * \mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}$, amiből $X^{-1} \in \mathcal{N}$ következik.

Ha $X \in \mathcal{N}$, akkor $X^{-1} \in \mathcal{N}$ is, amiért $l_X(\mathcal{N})$ tartalmazza a neutrális elemet. Minthogy összefüggő is, ebből $X * \mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}$ következik.

Az eddigiek szerint $\mathcal{N}$ egy részcsoport.

Tetszőleges X pont esetén az $r_{X^{-1}}(l_X(\mathcal{N}))$ halmaz összefüggő és tartalmazza a neutrális elemet, így $X * \mathcal{N} * X^{-1} \subseteq \mathcal{N}$, ami bizonyítja az állítást. ■

Mivel az N neutrális elemet tartalmazó $\mathcal{N}$ összefüggő komponens egy normál-
osztó, minden X pontra $X * \mathcal{N}$ ennek egy mellékosztálya, mely pontosan akkor metsz
egy másik mellékosztályt, ha egybeesik vele, ezért az $X * \mathcal{N}$ alakú összefüggő halma-
zok vagy egybeesnek, vagy diszjunktak. Eszerint egy összefüggő komponens szétesik
összefüggő, zárt, diszjunkt mellékosztályok uniójára, mégpedig minden komponens
ugyannyi darab mellékosztályra, hiszen bármely l_X baltranszlációval szorozva egy
összefüggő komponenst, abból összefüggő komponenst kapunk, a mellékosztályok-
ból pedig mellékosztályokat. Minthogy azonban $\mathcal{N}$ egyetlen mellékosztályból áll,
kimondhatjuk a következőt.

Tétel. *Topologikus csoportban minden összefüggő komponens a neutrális elem össze-
függő komponensének mellékosztálya.*

Tétel. *Topologikus csoport fundamentális csoportja kommutatív.*

Bizonyítás. Legyen f és g az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T}, \star)$ topologikus csoport N neutrális eleménél
hurok. Legyen $h_*: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{X}$ olyan, hogy $h_*(s, t) = f(s) \star g(t)$. Ez nyilván
folytonos, hiszen f , g és a $\star$ -művelet is folytonos.

Világos, hogy $h_*(0, \cdot) = h_*(1, \cdot) = N \star g(\cdot) = g(\cdot)$ és $h_*(\cdot, 0) = h_*(\cdot, 1) =$
 $f(\cdot) \star N = f(\cdot)$, ami azt mutatja, hogy a $[0, 1] \times [0, 1]$ négyzet határán annak $[0, 0]$
csúcsát az $[1, 1]$ csúccsal összekötő $[0, 0] \rightarrow [0, 1] \rightarrow [1, 1]$ illetve $[0, 0] \rightarrow [1, 0] \rightarrow [1, 1]$
utakon rendre az $f * g$ illetve $g * f$ utakat kapjuk. Minthogy a $[0, 1] \times [0, 1]$ négyzetben
megadott két út homotóp, ebből következik, hogy az $f * g$ és $g * f$ utak homotópok,
ami bizonyítja az állítást. ■

Tétel. *Topologikus csoport részcsoportjának és normálosztójának lezártja részcso-
port illetve normálosztó.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{H}$ az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T}, \star)$ topologikus csoport egy részcsoportja.

Legyen $X \in \mathcal{H}^-$ és $\mathcal{V}$ az N neutrális elem bármely szimmetrikus környezete.
Ekkor $(\mathcal{V} * X^{-1}) \cap \mathcal{H} = (X * \mathcal{V})^{-1} \cap \mathcal{H}^{-1} = ((X * \mathcal{V}) \cap \mathcal{H})^{-1}$ nem üres, hiszen
 $X \in \mathcal{H}^-$ miatt $(X * \mathcal{V}) \cap \mathcal{H}$ nem üres, tehát $X^{-1} \in \mathcal{H}^-$.

Legyen $X, Y \in \mathcal{H}^-$ és $\mathcal{U} \in \mathfrak{T}_{X * Y}$. A neutrális elemnek van olyan szimmetrikus
 $\mathcal{V}$ környezete, melyre $\mathcal{V} * \mathcal{V} \subseteq X^{-1} * U * Y^{-1}$, ezekhez léteznek $H_X \in (X * \mathcal{V}) \cap \mathcal{H}$
és $H_Y \in (\mathcal{V} * Y) \cap \mathcal{H}$ elemek, hiszen $X, Y \in \mathcal{H}^-$. Ekkor

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{H} \supseteq (X * \mathcal{V} * \mathcal{V} * Y) \cap \mathcal{H} \supseteq (\{H_X\} * \{H_Y\}) \cap \mathcal{H} \ni H_X * H_Y,$$

vagyis $\mathcal{U} \cap \mathcal{H}$ nem üres, amiért $X * Y \in \mathcal{H}^-$.

Ezzel az első állítást beláttuk.

Legyen $\mathcal{H}$ normálosztó, és $X \in \mathcal{X}$ tetszőleges pont. Valamely $Y \in \mathcal{H}^-$ pontra legyen $Z = X * Y * X^{-1}$. A Z pont bármely $\mathcal{U}$ környezetére $\mathcal{V} = Y^{-1} * X^{-1} * \mathcal{U} * X$ a neutrális elem egy környezete. Ekkor

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{H} \supseteq (X * Y * \mathcal{V} * X^{-1}) \cap (X * \mathcal{H} * X^{-1}) = X * ((Y * \mathcal{V}) \cap \mathcal{H}) * X^{-1}$$

nem üres, hiszen $Y \in \mathcal{H}^-$, és ez igazolja, hogy $Z = X * Y * X^{-1} \in \mathcal{H}^-$, ami a tétel második állítása. ■

Tétel. *Két topologikus csoport közti homomorfizmus akkor és csak akkor folytonos, ha a neutrális elemnél folytonos.*

Bizonyítás. Ha egy homomorfizmus folytonos, akkor természetesen a neutrális elemnél is folytonos.

Ha a $h: (\mathcal{X}, \mathfrak{T}, *) \rightarrow (\mathcal{X}', \mathfrak{T}', *)$ homomorfizmus folytonos az $N \in \mathcal{X}$ neutrális elemnél, akkor a szintén neutrális $N' = h(N) \in \mathcal{X}'$ elem bármely $\mathcal{V} \in \mathfrak{T}'_{N'}$ környezetére $h^{-1}(\mathcal{V}) \in \mathfrak{T}_N$.

Ha $\mathcal{V} \in \mathfrak{T}'$ és $h(\mathcal{X}) \cap \mathcal{V}$ üres, akkor $h^{-1}(\mathcal{V})$ is üres, amiért $h^{-1}(\mathcal{V}) \in \mathfrak{T}$.

Ha $\mathcal{V} \in \mathfrak{T}'$ és $X' \in h(\mathcal{X}) \cap \mathcal{V} = \mathcal{W}$, akkor $((X')^{-1} * \mathcal{W}) \in \mathfrak{T}'_{N'}$, amiért a feltétel szerint $h^{-1}((X')^{-1} * \mathcal{W}) \in \mathfrak{T}_N$. Eszerint minden $X \in h^{-1}(X)$ pontra adódik, hogy $\mathcal{U}_X = X * h^{-1}((X')^{-1} * \mathcal{W}) \in \mathfrak{T}_X$, és

$$h(\mathcal{U}_X) = h(X * h^{-1}((X')^{-1} * \mathcal{W})) = X' * ((X')^{-1} * \mathcal{W}) = \mathcal{W},$$

amiért $h^{-1}(\mathcal{V}) = \bigcup_{h(X) \in \mathcal{V}} \mathcal{U}_X$ nyílt halmaz.

Ezzel a tételt beláttuk. ■

Tetszőleges $(\mathcal{X}, \mathfrak{T}, *)$ topologikus csoport bármely $\mathcal{H}$ részcsoportja mellékosztályainak egy $\mathcal{Y}$ halmazát pontosan akkor nevezünk nyíltnak, ha $\bigcup_{Y \in \mathcal{Y}} (Y * \mathcal{H}) \in \mathfrak{T}$. A mellékosztályok $\mathcal{X}/\mathcal{H}$ halmazán ezzel definiált topológiát a mellékosztályok *természetes topológiájának* nevezzük. Egy $X \in \mathcal{X}$ ponthoz tartozó mellékosztályt a továbbiakban $[X * \mathcal{H}]$ jelöl, melyre nyilván $[X * \mathcal{H}] = [Y * \mathcal{H}]$ akkor és csak akkor, ha $X * Y^{-1} \in \mathcal{H}$.

Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ egy részcsoport az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T}, *)$ topologikus csoportban.*

- (1) *A $h: \mathcal{X} \rightarrow (\mathcal{X}/\mathcal{H})$ leképezés, melyre $X \mapsto [X * \mathcal{H}]$, folytonos és nyílt halmazokat nyílt halmazokba visz.*
- (2) *Ha $\mathcal{H}$ zárt, akkor $\mathcal{X}/\mathcal{H}$ Hausdorff-tér.*

Bizonyítás. (1) A h nyilván folytonos, hiszen a mellékosztályok $\mathcal{X}/\mathcal{H}$ terében egy $\mathcal{U}$ halmaz a definíció szerint pontosan akkor nyílt, ha $h^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_{[Y * \mathcal{H}] \in \mathcal{U}} (Y * \mathcal{H})$ nyílt az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T}, *)$ topologikus csoportban. Ha $\mathcal{V} \in \mathfrak{T}$, akkor $h(\mathcal{V}) = \{[V * \mathcal{H}] : V \in \mathcal{V}\}$, ami nyílt, hiszen $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V * \mathcal{H} = \mathcal{V} * \mathcal{H} = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} \mathcal{V} * H$ nyilván nyílt.

(2) Legyen $[X * \mathcal{H}]$ és $[Y * \mathcal{H}]$ két különböző pont a mellékosztályok $\mathcal{X}/\mathcal{H}$ terében.

Ekkor $X^{-1} * Y \notin \mathcal{H}$, ezért a T_3 tulajdonság alapján van olyan $\mathcal{U} \in \mathfrak{T}_{X^{-1} * Y}$, melyre $\mathcal{U} \cap \mathcal{H} = \emptyset$. Az $X * \mathcal{U} * Y^{-1}$ nyílt halmaz tartalmazza az N neutrális elemet, ezért van benne a neutrális elemnek olyan szimmetrikus $\mathcal{V}$ környezete, melyre $\mathcal{V} * \mathcal{V} \subseteq X * \mathcal{U} * Y^{-1}$.

Ekkor a $\mathcal{W}_X = \{[Z * \mathcal{H}] : Z \in \mathcal{V} * X\}$ és $\mathcal{W}_Y = \{[Z * \mathcal{H}] : Z \in \mathcal{V} * Y\}$ mellékosztály-halmazok nyíltak, mert $\mathcal{V} * X$ és $\mathcal{V} * Y$ is nyílt, továbbá $[X * \mathcal{H}] \in \mathcal{W}_X$ és $[Y * \mathcal{H}] \in \mathcal{W}_Y$, hiszen $X \in \mathcal{V} * X$ és $Y \in \mathcal{V} * Y$. A $\mathcal{W}_X$ és $\mathcal{W}_Y$ mellékosztály-halmazok ugyanakkor diszjunktak is, mert ellenkező esetben lennének olyan $V_X, V_Y \in \mathcal{V}$ pontok, melyekre $[V_X * X * \mathcal{H}] = [V_Y * Y * \mathcal{H}]$, ami azt jelentené, hogy $(V_X * X)^{-1} * (V_Y * Y) \in \mathcal{H}$, de ez lehetetlen, mert $X^{-1} * V_X^{-1} * V_Y * Y \in \mathcal{U}$.

Eszerint a diszjunkt és nyílt $\mathcal{W}_X$ és $\mathcal{W}_Y$ mellékosztály-halmazok elválasztják az $[X * \mathcal{H}]$ és $[Y * \mathcal{H}]$ mellékosztályokat, ami bizonyítja a (2) állítást. ■

Tétel. Legyen $\mathcal{H}$ egy normálosztó az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T}, *)$ topologikus csoportban. Ekkor $\mathcal{X}/\mathcal{H}$ egy topologikus csoport.

Bizonyítás. Elég belátni, hogy a szorzás és inverzképzés folytonos. Legyen $h: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}/\mathcal{H}$.

Legyen $\mathcal{U}$ az $[X * \mathcal{H}]^{-1}$ egy nyílt környezete az $\mathcal{X}/\mathcal{H}$ topologikus térben. Mivel h folytonos, $h^{-1}(\mathcal{U})$ is nyílt halmaz, és tartalmazza az X^{-1} pontot, mert $[X * \mathcal{H}]^{-1} = [X^{-1} * \mathcal{H}] = h(X^{-1})$. Eszerint a $(h^{-1}(\mathcal{U}))^{-1}$ olyan nyílt halmaz, amely tartalmazza az X pontot, így $h((h^{-1}(\mathcal{U}))^{-1})$ olyan nyílt halmaz, mely tartalmazza a $h(X) = [X * \mathcal{H}]$ mellékosztályt, és $(h((h^{-1}(\mathcal{U}))^{-1}))^{-1} = h(h^{-1}(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$. Tehát az inverzképzés folytonos.

Legyen $h(X * Y) = [X * Y * \mathcal{H}]$ egy mellékosztály az $\mathcal{X}/\mathcal{H}$ térben, és $\mathcal{U}$ ennek egy környezete. Mivel h folytonos, $h^{-1}(\mathcal{U})$ is nyílt halmaz, és tartalmazza az $X * Y$ pontot. Eszerint van olyan $\mathcal{V}_X \in \mathfrak{T}_X$ és $\mathcal{V}_Y \in \mathfrak{T}_Y$, melyre $\mathcal{V}_X * \mathcal{V}_Y \subseteq h^{-1}(\mathcal{U})$. Eszerint $\mathcal{U} \supseteq h(\mathcal{V}_X * \mathcal{V}_Y) = h(\mathcal{V}_X) * h(\mathcal{V}_Y)$, $h(\mathcal{V}_X)$ és $h(\mathcal{V}_Y)$ nyílt halmazok rendre tartalmazzák az $h(X)$ és $h(Y)$ mellékosztályt, ami bizonyítja, hogy a szorzás is folytonos. ■

Ha a $\mathcal{H}$ normálosztó zárt, akkor $\mathcal{X}/\mathcal{H}$ Hausdorff-féle topologikus csoport.

Tétel. Legyen $h: (\mathcal{X}, \mathfrak{T}, *) \rightarrow (\mathcal{X}', \mathfrak{T}', \star)$ egy folytonos homorfizmus. Ekkor a $\tilde{h}: (\mathcal{X}/\ker h) \rightarrow \mathcal{X}'$ homomorfizmus folytonos.

Bizonyítás. A $\ker h$ egy normálosztó, ezért előbbi eredményeink miatt $\mathcal{X}/\ker h$ egy topologikus csoport, és a $\tilde{h}: (\mathcal{X}, \mathfrak{T}, *) \rightarrow (\mathcal{X}/\ker h)$ leképezés, melyre $\tilde{h}(X) = [X * \mathcal{H}]$, folytonos és nyílt halmazt nyílt halmazba képező homomorfizmus.

Világos, hogy $h = \tilde{h} \circ \bar{h}$.

Az $\mathcal{U}$ részhalmaz a $\mathcal{X}/\ker h$ topologikus csoportban akkor és csak akkor nyílt, ha $\bar{h}^{-1}(\mathcal{U})$ nyílt a $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ térben.

Ha $\mathcal{V} \in \mathfrak{T}'$, akkor h folytonossága miatt $h^{-1}(\mathcal{V})$ nyílt az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ térben, amiért $\tilde{h}(h^{-1}(\mathcal{V}))$ nyílt az $\mathcal{X}/\ker h$ topologikus csoportban. Mivel $\tilde{h}(\tilde{h}(h^{-1}(\mathcal{V}))) = h(h^{-1}(\mathcal{V})) = \mathcal{V}$, $\tilde{h}$ folytonos. ■

Jegyezzük meg, hogy tételünk szerint ha h szürjektív és nyílt halmazokat nyílt halmazokba képez, akkor a $\tilde{h}$ izomorfizmus homeomorf.

Tétel. Az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T}, *)$ és $(\mathcal{X}', \mathfrak{T}', \star)$ topologikus csoportok szorzattopologikus tere a négyzetén értelmezett $((X, X'), (Y, Y')) \mapsto (X * X, Y \star Y')$ művelettel topologikus csoportot alkot.

A fenti eredményeket használó bizonyítás az olvasóra marad.

2.5. A kör és a gömb topológiája

Minthogy $\mathbb{S}^k$ minden k esetén teljes és teljesen korlátos (ennek bizonyítása az olvasóra marad), kapjuk, hogy $\mathbb{S}^k$ minden k esetén kompakt.

Tétel. Az $\mathbb{S}^{n-1}$ egységgömb-felület a természetes topológiával abszolút környezetet retraktum.

Bizonyítás. Legyen $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ egy normális topologikus tér, $\mathcal{Z} \in \overline{\mathfrak{T}}$ egy zárt halmaza és $f: \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ folytonos.

Legyen $f(X) = (f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X))$, ahol $\sum_{i=1}^n f_i^2 = 1$. Ekkor Tietze tétele szerint minden $i = 1, \dots, n$ számra az f_i függvénynek létezik egy folytonos $\tilde{f}_i: \mathcal{X} \rightarrow [\inf f_i, \sup f_i] \subseteq [-1, 1]$ folytatása. Ebből következőleg az $\mathcal{U} = \{X \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^n \tilde{f}_i^2(X) \neq 0\}$ halmaz nyilván nyílt, és $\mathcal{Z} \subset \mathcal{U}$.

Legyen $\hat{f}_i: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ az a függvény, melyre $\hat{f}_i(X) = \tilde{f}_i(X) / \sqrt{\sum_{i=1}^n \tilde{f}_i^2(X)}$. Ekkor az $\hat{f} = (\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n)$ függvény az $\mathbb{S}^{n-1}$ egységgömb-felületre képez, folytonos és az f függvény folytatása az $\mathcal{U}$ halmazra, ami bizonyítja a tételt. ■

Tétel. A $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ fundamentális csoport izomorf az egész számok $\mathbb{Z}$ additív csoportjával.

Bizonyítás. Tekintsük azt az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ fedőleképezést, melyre $x \mapsto (\cos x, \sin x)$.

Ha $u: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ egy hurok az $\mathbb{S}^1$ tér $(1, 0)$ pontjában, akkor ennek a $\{k2\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ fibrum minden pontjában, így a 0 pontban is egyértelmű $\bar{u}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ felemeltje

létezik, amelyre tehát $f \circ \bar{u} = u$ és $\bar{u}(0) = 0$. A fedő utak tétele értelmében ha az u és v homotóp $(1, 0)$ -hurkok, akkor a fibrum ugyanazon pontjába való felemeltjeik is homotópok, amiért az $\bar{u}$ és $\bar{v}$ felemelték végpontjai is egybeesnek, vagyis $\bar{u}(1) = \bar{v}(1)$, ami, minthogy u és v is hurok, a fibrum egy $k2\pi$ pontja valamely $k \in \mathbb{Z}$ számra, amely eszerint az $[u]$ $(1, 0)$ -hurokosztályra állandó. Ez egy $\chi: \pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0)) \rightarrow \mathbb{Z}$ leképezést definiál.

A χ leképezés szűrjektív, mert $n \in \mathbb{Z}$ esetén az $u_n: [0, 1] \ni x \rightarrow (\cos(xn2\pi), \sin(xn2\pi)) \in \mathbb{S}^1$ hurokra $\chi([u_n]) = n$, hiszen $\bar{u}_n$ éppen a fibrum n pontját tartalmazza.

A χ leképezés injektív, hiszen ha $\chi([u]) = n$, akkor az u felemeltje $\bar{u}$ olyan, hogy $f \circ \bar{u} = u$, $\bar{u}(0) = 0$ és $\bar{u}(1) = n2k\pi$, amiért $\bar{u}$ fix végpontokkal homotóp az $\bar{u}_n$ úttal^(*), vagyis $[u_n] = [u]$.

A χ leképezés homomorfia, mert minden $n, m \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\chi([u_n] \oplus [u_m]) = \chi([u_n * u_m]) = \chi([u_{n+m}]) = n + m = \chi([u_n]) + \chi([u_m]). \quad \blacksquare$$

Tétel. Az egynél nagyobb $(n - 1)$ -dimenziós gömbfelszín $\pi_1(\mathbb{S}^{n-1})$ fundamentális csoportja triviális.

Bizonyítás. Legyen f egy P -hurok az $\mathbb{S}^{n-1}$ ($n > 3$) gömbfelületen. Azt kell belátnunk, hogy homotóp a konstans P -hurokkal^(*),

Minden $x \in [0, 1]$ esetén van olyan $\varepsilon_x > 0$ szám, hogy $f((x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x))$ teljes egészében az $f(x)$ középpontú nyílt félgömbben van. Minthogy $[0, 1]$ kompakt, van véges sok $\{x_i\}_{i=1}^m$ szám (későbbiek érdekében monoton növekvő sorrendben), hogy az $\mathcal{I}_i = (x_i - \varepsilon_{x_i}, x_i + \varepsilon_{x_i})$ intervallumok együtt lefedik a $[0, 1]$ szakaszt. Legyen minden $0 < i < m$ számra $y_i \in \mathcal{I}_i \cap \mathcal{I}_{i+1}$, továbbá $y_0 = 0$ és $y_m = 1$.

Legyen $f_{i+1}: [y_i, y_{i+1}] \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ minden $0 \leq i \leq m$ számra. Ekkor $f_{i+1}([y_i, y_{i+1}])$ az x_{i+1} középpontú nyílt félgömbben van, ami összehúzható, ezért f_{i+1} homotóp az $f_{i+1}(y_i)$ és $f_{i+1}(y_{i+1})$ pontokat ebben a nyílt félgömbben összekötő főkörrel, aminek legyen $g_{i+1}: [y_i, y_{i+1}] \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ egy paraméterezése.

Mivel $[f]_P = [f_1 * \dots * f_m]_P = [g_1 * \dots * g_m]_P$, hiszen a homotóp függvények szorzata homotóp, elég azt látnunk, hogy a $g = g_1 * \dots * g_m$ út homotóp a konstanssal.

Nyilván létezik $Q \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus g([0, 1])$. Ebből a Q pontból az $\mathbb{S}^{n-1} \setminus \{Q\}$ lyukas gömbfelszín sztereografikus vetítéssel homeomorf kapcsolatba kerül az $\mathbb{R}^{n-1}$ térrel, ami igazolja, hogy összehúzható, és így ebben minden hurok homotóp a konstanssal.

Ezzel a tételt beláttuk. \blacksquare

(*) Az $\mathbb{R}$ bármely két útja homotóp egymással!

(*) Az $f([0, 1]) = \mathbb{S}^{n-1}$ eset sem lehetetlen!

Borsuk-tétel. *Nincs olyan folytonos $f: \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ leképezés, melyre $f|_{\mathbb{S}^1}$ identikus.*

Bizonyítás. Legyen $e: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{B}^2$ az identikus leképezés. Ekkor $f \circ e: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ az identikus leképezés, így az indukált homomorfizmusa az identikus $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ leképezés, de ez ellentmond annak, hogy a $\pi_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{e_*} \pi_1(\mathbb{B}^2) \xrightarrow{f_*} \pi_1(\mathbb{S}^1)$ leképezés sorozatban $\pi_1(\mathbb{B}^2)$ a neutrális elemből álló triviális csoport. ■

A Borsuk-tételt magasabb dimenzióban is igazolni fogjuk.

Tétel. *Ha a folytonos $f, g: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ függvényekre minden $X \in \mathbb{S}^{n-1}$ pontban $f(X) \neq -g(X)$, akkor f és g homotópok.*

Bizonyítás. Mivel $f(X) \neq -g(X)$ pontosan egy közös $\mathbb{S}_X^1$ főkör illeszkedik az $f(X)$ és $g(X)$ pontokra. Ezen a főkőrön belül az $f(X)$ és $g(X)$ pontok között pontosan két körív van, melyek közül az egyik rövidebb mint a másik. Legyen ennek a rövidebb körívnek a paraméterezése $u_X: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ olyan, hogy az $\bar{u}_X(t) = (1-t)f(X) + tg(X)$ vektorra $u_X(t) = \bar{u}_X(t)/|\bar{u}_X(t)|$.

Definiáljuk a $h: [0, 1] \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ leképezést úgy, hogy $h(t, X) = u_X(t)$. Ekkor $h(1, \cdot) = g(\cdot)$ és $h(0, \cdot) = f(\cdot)$, ezért f és g homotópiájának igazolásához elég belátnunk, hogy h folytonos.

Legyen $r_X = |f(X) - g(X)|/2$. Mivel $f(X) \neq -g(X)$, $|f(X) - g(X)| < 2$, amiért $r_X < 1$, így az $u_X(1/2)$ középpontú, $\arcsin(r_X + (1-r_X)/2)$ gömbi sugarú, nyílt $\mathcal{S}_X$ gömbsapka lefedi az $f(X)$ és $g(X)$ pontokat. Emiatt létezik olyan $\varepsilon_0 > 0$, hogy mindazon $Z \in \mathbb{S}^{n-1}$ pontok, melyekre $|f(X) - Z| < \varepsilon_0$ vagy $|g(X) - Z| < \varepsilon_0$ szintén az $\mathcal{S}_X$ gömbsapkán vannak.

Vegyük észre, hogy az $\mathcal{S}_X$ gömbsapka konvex burkában lévő különböző P, Q pontokra van olyan $m > 1$ szám, hogy

$$\begin{aligned} \left| \frac{P}{|P|} - \frac{Q}{|Q|} \right| &\leq \left| \frac{P}{|P|} - \frac{Q}{|P|} \right| + \left| \frac{Q}{|P|} - \frac{Q}{|Q|} \right| \\ &= \frac{|P-Q|}{|P|} + |Q| \left| \frac{1}{|P|} - \frac{1}{|Q|} \right| = \frac{|P-Q|}{|P|} + \frac{||P|-|Q||}{|P|} \\ &\leq \frac{2}{|P|} |P-Q| < m |P-Q|. \end{aligned}$$

Legyen $\varepsilon > 0$ olyan, hogy $\varepsilon_0 > \varepsilon$. A folytonosság miatt létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $|X - Y| < \delta$ az $X, Y \in \mathbb{S}^{n-1}$ pontokra, akkor $m|f(X) - f(Y)| < \varepsilon/3$ és $m|g(X) - g(Y)| < \varepsilon/3$, amiért az ilyen $f(Y)$ és $g(Y)$ pontok is a nyílt $\mathcal{S}$ félgömbfelületen vannak, és emiatt $|f(Y) - g(Y)| < 2$ is teljesül.

Ha $X, Y \in \mathbb{S}^{n-1}$, $t, s \in [0, 1]$ és $|X - Y| < \delta$ valamint $m|t - s| < \varepsilon/6$ esetén

$$\begin{aligned}
 & |u_X(t) - u_Y(s)| \\
 & \leq m|\bar{u}_X(t) - \bar{u}_Y(s)| \leq m|\bar{u}_X(t) - \bar{u}_Y(t)| + m|\bar{u}_Y(t) - \bar{u}_Y(s)| \\
 & = m|(1-t)(f(X) - f(Y)) + t(g(X) - g(Y))| + m|(s-t)(f(Y) - g(Y))| \\
 & \leq m(1-t)|f(X) - f(Y)| + mt|g(X) - g(Y)| + m|s-t||f(Y) - g(Y)| \\
 & \leq (1-t)\varepsilon/3 + t\varepsilon/3 + m|s-t|2 \leq \varepsilon,
 \end{aligned}$$

ami bizonyítja h folytonosságát, és ezzel az f és g homotópiáját. ■

Definíció. Az $\mathbb{R}^n$ tér $n + 1$ csúcsú politópját *simplexnek* hívjuk. Az $\mathbb{R}^n$ térben simplexek egy véges sok elemet tartalmazó $\mathcal{K}$ halmazát (geometriai) *simpliciális komplexusnak* nevezzük, ha minden simplexének minden lapját is tartalmazza és bármely két simplexének metszete e két simplexének közös lapja, vagy üreshalmaz.

Egy simpliciális komplexus nulldimenziós simplexeit *csúcsoknak*, 1-dimenziós simplexeit pedig *éleknek* nevezzük.

A simpliciális komplexusban lévő simplexek dimenzióinak legnagyobbikát a simpliciális komplexus *dimenziójának* mondjuk.

Egy simpliciális komplexus *lapjain* azon simplexeit értjük, melyeket nem tartalmaz a simpliciális komplexus egyetlen simplexe sem. A simpliciális komplexust *egyszerűnek* nevezzük, ha minden lapja azonos dimenziós.

Világos, hogy egy simplex lapjai, élei és csúcsai halmazával egyben simpliciális komplexus is.

Eszerint a nulldimenziós simpliciális komplexusok a diszkrét pontthalmazok, az 1-dimenziós egyszerű simpliciális komplexusok az önmagukat nem metsző (nem feltétlen összefüggő) törött vonalak, a 2-dimenziós egyszerű simpliciális komplexusok pedig az éleiknél összeragasztott háromszögekből álló, nem önátmetsző (nem feltétlen összefüggő) felületek.

Definíció. Az $\mathbb{S}^{n-1}$ gömbfelület κ *triangulációján* egy $n - 1$ -dimenziós $\mathcal{K}$ egyszerű simpliciális komplexus és egy olyan $k: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{X}$ homeomorfizmus $\kappa = (\mathcal{K}, k)$ párját értjük, melyre a $\mathcal{K}$ minden $n - 1$ -dimenziós simplexének k szerinti képe egy félgömbfelületen belül van.

Az $\mathbb{S}^{n-1}$ gömbfelület legegyszerűbb triangulációját úgy kapjuk, hogy a vele azonos középpontú n -dimenziós szabályos simplexet a középpontjukból kivetítjük a gömbfelületre.

Az $\mathbb{S}^{n-1}$ gömbfelület egy $\kappa = (\mathcal{K}, k)$ triangulációját *finomabbnak* nevezzük a $\kappa' = (\mathcal{K}', k')$ triangulációjánál, ha $\mathcal{K}$ minden simplexének k szerinti képét a $\mathcal{K}'$

valamely szimplexének k' szerinti képe tartalmazza. Ilyenkor azt is mondjuk, hogy a κ' a κ *trianguláció finomítása*.

Lemma. Az $\mathbb{S}^k$ gömbfelület bármely két triangulációjának van közös finomítása.

A lemma bizonyítását a könnyű $k = 1$ és $k = 2$ esetekben az olvasóra bízunk, a magasabb dimenziókban a szemlélet alapján nyilvánvalónak tűnő állítás teljes precizitás mellett igen hosszadalmas bizonyítását azonban nem közöljük^(*).

Definíció. Egy $\mathbb{R}^n$ térben lévő $\ell \leq n$ dimenziós $\mathcal{S}$ szimplex belső S pontjának koordinátái előállnak, mint az $\mathcal{S}$ szimplex csúcsai koordinátájának konvex lineáris kombinációja. A konvex lineáris kombinációban szereplő $\ell + 1$ nem negatív, 1 összegű együtthatóiból összeállított szám $(\ell + 1)$ -est az S pont *baricentrikus koordinátájának* nevezünk.

Az $\mathbb{S}^{n-1}$ egy $\kappa = (\mathcal{K}, k)$ *triangulációjának durvaságán* a $\mathcal{K}$ szimpliciális komplex csúcsainak k szerinti képei között lévő távolságok maximumát értjük, melyet $|\kappa|$ jelöl. A κ trianguláció *finomságának* vagy *felbontásának* az $1/|\kappa|$ értéket nevezzük. Világos, hogy finomításkor egy trianguláció finomsága nem csökken.

Az $\mathbb{S}^{n-1}$ gömbfelület kellően finom triangulálást választva a baricentrikus koordináták lehetőséget teremtenek $\mathbb{S}^{n-1}$ lokális koordinátázására,

Tekintsünk egy folytonos $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ leképezést. Mivel $\mathbb{S}^{n-1}$ kompakt, van olyan $\delta > 0$ szám, melyre minden $X, Y \in \mathbb{S}^{n-1}$ pontra $|f(X) - f(Y)| < 1$, ha $|X - Y| < \delta$. Az $\mathbb{S}^{n-1}$ azon $\kappa = (\mathcal{K}, k)$ triangulációira, melyekre $|\kappa| < \delta$ teljesül, hogy $\mathcal{K}$ minden szimplexe k szerinti képének f szerinti képe $\mathbb{S}^{n-1}$ egy nyílt félgömbjén belül van. Az ilyen triangulációkat az f függvényhez elegendően finomnak mondjuk.

Definíció. Egy folytonos $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ leképezéshez elegendően finom $\kappa = (\mathcal{K}, k)$ triangulációra az $f_\kappa: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ leképezést *κ -szimpliciális leképezésnek* nevezzük, ha

$$f_\kappa(X) = \frac{\sum_{i=1}^m b_i f(k(P_i))}{\left| \sum_{i=1}^m b_i f(k(P_i)) \right|},$$

ahol $\{P_i\}_{i=1}^m$ a $\mathcal{K}$ azon $\mathcal{S}$ szimplexének csúcshalmaza, mely tartalmazza a $k^{-1}(X)$ pontot, $(b_1, \dots, b_m)$ pedig ennek a $k^{-1}(X)$ pontnak a baricentrikus koordinátája ebben az $\mathcal{S}$ szimplexben.

Világos, hogy a κ -szimpliciális leképezések folytonosak. A szimplexek összehúzóhatósága és $\mathbb{S}^{n-1}$ útszerű összefüggősége miatt bármely szimplexen megadott két folytonos függvény homotóp, amiért minden folytonos leképezés homotóp bármely κ -szimpliciális leképezésével.

^(*)Részletes leírás például Sandro Buoncristiano elektronikus könyvében található.

Legyen $\kappa = (\mathcal{K}, k)$ az $\mathbb{S}^{n-1}$ gömbfelület egy kellően finom triangulációja, $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ egy folytonos leképezés és f_κ ennek szimpliciális leképezése. Minden $Q \in \mathbb{S}^{n-1}$ pontra definiáljuk a $\deg(f, \kappa, Q) = n^+(f, \kappa, Q) - n^-(f, \kappa, Q)$ számot, ahol $n^\pm(f, \kappa, Q)$ a $\mathcal{K}$ azon $(n-1)$ -dimenziós $\mathcal{S}$ szimplexeinek száma, melyekre $f_\kappa(k(\mathcal{S}))$ irányítása megegyezik illetve ellenkezik az $\mathbb{S}^{n-1}$ gömbfelület irányításával és $k^{-1}(Q) \in \text{int } \mathcal{S}$.

Tétel. *A $\deg(f, \kappa, Q)$ értéke nem függ a Q pont megválasztásától.*

Bizonyítás. Világos, hogy a k leképezés a $\mathcal{K}$ szimpliciális komplexus egyetlen szimplexét sem viszi a gömbfelszín valamely alacsonyabb dimenziós síkkal vett metszetébe, mert akkor nem lehetne bijektív.

Legyen $R \in \mathbb{S}^{n-1}$ és kössük össze az R és Q pontot egy olyan folytonos $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ görbével, mely nem metszi a $\mathcal{K}$ szimpliciális komplexusban lévő csúcsok k szerinti képeit.

Ha a $\mathcal{K}$ szimpliciális komplexusban lévő valamely $\mathcal{S}$ szimplex k szerinti $k(\mathcal{S})$ képét az f alacsonyabb dimenziós térbe viszi, akkor az $f(k(\mathcal{S}))$ zárt halmazt a szintén zárt halmazt alkotó g görbétől elválasztó nyílt környezet f szerinti ősén az f függvényt „csekély” mértékben (folytonosság esetén homotóp módon) megváltoztatva az elfajulás megszüntethető, és eközben az $\deg(f, \kappa, g(t))$ függvény értéke nem változik, ezért a továbbiakban feltételezzük, hogy minden a $\mathcal{K}$ szimpliciális komplexusban lévő szimplex dimenziója megegyezik k szerinti képe f szerinti képének dimenziójával.

Tekintsük a $\deg(f, \kappa, g(t))$ függvényt. Ez pontosan akkor változhat, amikor $k^{-1}(g(t))$ az egyik $(n-1)$ -dimenziós $\mathcal{S}$ szimplex határánál átlép egy másik $(n-1)$ -dimenziós $\mathcal{S}'$ szimplexbe. Ezek $f_\kappa \circ k$ szerinti képei azonban vagy azonos irányításúak és akkor $n^+(f, \kappa, g(t))$ és $n^-(f, \kappa, Q)$ sem változik, vagy mindkettő egyszerre nő illetve fogy eggyel-eggyel.

Ezzel az állítást beláttuk. ■

A Q pont választásától független $\deg(f, \kappa) := \deg(f, \kappa, Q)$ számot az f függvénynek a hozzá elegendően finom κ triangulációra vonatkozó fokszámának nevezzük.

Tétel. *Folytonos $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ függvényhez van olyan $\delta > 0$ szám, hogy a $\deg(f, \kappa)$ értéke nem függ a κ trianguláció megválasztásától, ha $|\kappa| < \delta$.*

Bizonyítás. Legyenek $\bar{\kappa} = (\bar{\mathcal{K}}, \bar{k})$ és $\tilde{\kappa} = (\tilde{\mathcal{K}}, \tilde{k})$ az $\mathbb{S}^{n-1}$ gömbfelületnek az f függvényhez elegendően finom triangulációi, és vegyük ezen triangulációknak egy közös κ finomítását. Ekkor nyilván κ is elegendően finom az f függvényhez, hiszen $\bar{\kappa}$ és $\tilde{\kappa}$ sem lehet nála finomabb.

Belátjuk, hogy $\deg(f, \kappa') = \deg(f, \kappa)$.

A κ' finomítása folyamán a κ' triangulációhoz egyenként hozzávéve azon csúcsokat, melyek neki nem, de a κ triangulációnak csúcsai, triangulációk κ_i ($\kappa_0 = \kappa'$, $\dots$, $\kappa_m = \kappa$) sorozatát kapjuk, ahol a következő mindig az előző finomítása pontosan egy csúcs hozzávételével. Legyen $\mathcal{S}$ az a szimplex a $\mathcal{K}_i$ komplexusban, melynek belső pontja az a C pont, mely a $\kappa_{i+1} = (\mathcal{K}_{i+1}, k_{i+1})$ csúcsa, de a $\kappa_i = (\mathcal{K}_i, k_i)$ csúcsai közt nem szerepel. Mivel $|\kappa_i| < \delta$, az $f(k(\mathcal{S}))$ egy félgömbön belül van, ezért van olyan $P \in \mathbb{S}^{n-1}$ pont, mely nincs az $f(k(\mathcal{S}))$ képben. Ebből viszont

$$\deg(f, \kappa_{i+1}) = \deg(f, \kappa_{i+1}, P) = \deg(f, \kappa_i, P) = \deg(f, \kappa_i)$$

következik, hiszen a P pont egy környezetében a finomítás nem változtatja az $f \circ \kappa$ leképezést.

Eszerint $\deg(f, \kappa') = \deg(f, \kappa) = \deg(f, \kappa'')$, ami bizonyítja a tételt. ■

Definíció. A $\deg(f) := \lim_{|\kappa| \rightarrow 0} \deg(f, \kappa)$ számot az f függvény *fokszámának* nevezzük.

Világos, hogy az identikus $i: X \in \mathbb{S}^{n-1} \mapsto X \in \mathbb{S}^{n-1}$ függvény fokszáma $\deg i = 1$, a konstans $c: X \in \mathbb{S}^{n-1} \mapsto C \in \mathbb{S}^{n-1}$ függvény fokszáma pedig $\deg c = 0$.

A gömb középpontjára való $t: X \in \mathbb{S}^{n-1} \mapsto -X \in \mathbb{S}^{n-1}$ centrális tükrözés fokszámának meghatározásához vegyük észre, hogy a középpontos tükrözés n darab, a középpontra illeszkedő, páronként merőleges tükrözés szorzata, mely eszerint n darab irányításváltó leképezés szorzata, vagyis egy az $\mathbb{S}^{n-1}$ gömbfelületen lévő elegendően kicsiny $(n-1)$ -dimenziós „szimplex” és a gömb középpontja által alkotott n -dimenziós szimplex irányítása pontosan akkor változik, ha n páratlan. Tehát $\deg t = (-1)^n$.

Tétel. Két homotóp folytonos $\mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ leképezés fokszáma egyenlő.

Bizonyítás. Legyenek $f, g: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ homotóp folytonos leképezések.

Mivel f és g homotóp, létezik olyan folytonos $h: [0, 1] \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ leképezés, melyre $h(0, \cdot) = f(\cdot)$ és $h(1, \cdot) = g(\cdot)$. Minthogy $[0, 1] \times \mathbb{S}^{n-1}$ kompakt, van olyan $\delta > 0$, melyre $X, Y \in \mathbb{S}^{n-1}$, $t, s \in [0, 1]$ és $|X - Y| < \delta$ valamint $|t - s| < \delta$ esetén $|h(t, X) - h(s, Y)| < 1$. Válasszunk az $\mathbb{S}^{n-1}$ egy olyan $\kappa = (\mathcal{K}, k)$ triangulációját, melyre $|\kappa| < \delta$.

Ekkor κ elegendően finom a $h(t, \cdot)$ függvényekhez minden $t \in [0, 1]$ esetén, ezért létezik az $e(t) = \deg(h(t, \cdot), \kappa)$ egészértékű függvény a $[0, 1]$ intervallumon.

Legyen a $P \in \mathbb{S}^{n-1}$ olyan pont, amelyet a $h_\kappa(t, \cdot)$ szimpliciális leképezés inverze a $k(\mathcal{K})$ valamely belső $\hat{P}_t$ pontjába visz. Ekkor elegendően kicsiny $\varepsilon > 0$ számra

$\hat{P}_{t+\varepsilon}$ ugyanazon szimplexekbe esik, mint $\hat{P}_t$, ezért

$$e(t) = \deg(h(t, \cdot), \kappa) = \deg(h(t, \cdot), \kappa, P) = \deg(h(t + \varepsilon, \cdot), \kappa, P) = e(t + \varepsilon),$$

ami azt mutatja, hogy az e függvény konstans, tehát $\deg f = e(0) = e(1) = \deg g$, ahogy a tétel állítja. ■

A szakasz elején láttuk, hogy ha két $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ leképezés fokszáma megegyezik, akkor homotópok. Ugyanez érvényes magasabb dimenzióban is.

2.5.1:
 $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$

Tétel. Ha az $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ folytonos függvénynek nincsen fix pontja, akkor f fok $(-1)^n$.

A bizonyításhoz elég annyit megjegyeznünk, hogy a gömb középpontjára való $t: X \in \mathbb{S}^{n-1} \mapsto -X \in \mathbb{S}^{n-1}$ centrális tükrözésre $f(X) \neq -t(X)$, hiszen f nem rendelkezik fixponttal, így korábbi tételünk szerint f és t homotóp, amiből iménti eredményünk szerint $\deg f = \deg t$ következik.

Tétel. Az $\mathbb{S}^{n-1}$ gömbfelület nem húzható össze egy pontra.

Bizonyításképpen elég arra gondolni, hogy ha az $\mathbb{S}^{n-1}$ gömbfelület pontra össze-húzható lenne, akkor az identikus és konstans $\mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ leképezések homotópok lennének, holott ezek fokszáma különböző, tehát nem homotópok.

Sündisznó-tétel. Páratlan dimenziós euklidészi tér gömbjének felületén minden folytonos érintő vektormezőnek van zéróhelye.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $n = 2m + 1$ esetén a $\mathbb{S}^{2m}$ gömbfelületen létezik olyan sehol sem nulla, folytonos $\sqsubseteq$ vektormező, melynek minden eleme érinti a gömbfelületet.

Definiáljuk az $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ függvényt úgy, hogy minden $X \in \mathbb{S}^{n-1}$ pontra $\sqsubseteq(X) = Of(X)$, ahol O a gömbfelület középpontja.

Ekkor $|f(X) - X| = \sqrt{2}$ és $|f(X) + X| = \sqrt{2}$, ezért $f(X) \neq X$ és $f(X) \neq -X$, amiért f homtóp az identikus leképezéssel és a középpontra való tükrözéssel.

Eszerint a középpontos tükrözés homotóp az identikus leképezéssel, holott $\deg i = 1$, és $\deg t = (-1)^n = -1$. Ez az ellentmondás igazolja az állítást. ■

Mivel egy sehol sem nulla hosszúságú vektormező elemeinek merőleges vetülete az érintősíkra eszerint valahol bizonyosan eltűnik, adódik, hogy valamely pontban az ilyen vektormezőnek lesz a gömbfelületre merőleges eleme.

Lemma. Egy $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ folytonos függvénynek a gömbfelületre való megszorítása homotóp a konstans függvénnyel.

Bizonyítás. Tekintsük azt a $h: [0, 1] \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ leképezést, melyre $h(t, X) = f(tX)$. Ekkor $h(1, \cdot) = f(\cdot)$, ugyanakkor $h(0, \cdot) = f(0)$ konstans. ■

Borsuk-tétel. *Nincs a gömb belsejét a gömb felületére képező olyan folytonos függvény, amely a gömbfelület pontjait fixen hagyja.*

Az előbbi lemma szerint a gömbfelületen a függvény homotóp a konstanssal, de az nem homotóp az identikus leképezéssel, hiszen előbbi fokszáma 0, utóbbié pedig 1.

Brouwer fixpont-tétele. *A gömb bármely önmagára való folytonos leképezésének van fix pontja.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a folytonos $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ leképezésnek nincsen fix pontja. Ekkor minden $X \in \mathbb{B}^n$ pontra adott az ezen átmenő és az $f(X)$ pontból induló $\mathcal{E}_X$ félegyenes.

Definiáljuk az $\hat{f}: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ függvényt úgy, hogy $\hat{f}(X) = \mathbb{S}^{n-1} \cap \mathcal{E}_X$.

Világos, hogy az $\hat{f}$ függvény folytonos és az $\mathbb{S}^{n-1}$ gömbfelület minden pontját fixen hagyja. Ez ellentmond a Borsuk-tételnek. ■

Egy $g: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ leképezést páratlannak nevezzük, ha $g(-X) = -g(X)$ minden $X \in \mathbb{S}^{n-1}$ pontra. Páratlan leképezés az identikus leképezés és az origóra való tükrözés is, de nem páratlan például a konstans függvény.

Lemma. *Gömbfelület páratlan leképezésének fokszáma páratlan szám.*

Ezt az algebrai topológiai tételt itt nem bizonyítjuk, de megjegyezzük, hogy ha a gömbfelület egy körvonal, akkor a lemma következik abból, hogy minden $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ leképezés egy hurok, amiért pontosan egy $m \in \mathbb{N}$ számra homotóp az $f_m: (\cos \alpha, \sin \alpha) \mapsto (\cos(m\alpha), \sin(m\alpha))$ hurokkal. Viszont homotóp függvenypárok összegei is homotópok, így az $f((\cos \alpha, \sin \alpha)) + f((\cos(\alpha + \pi), \sin(\alpha + \pi))) = (0, 0)$ konstans függvény homotóp az

$$\begin{aligned} & f_m((\cos \alpha, \sin \alpha)) + f_m((\cos(\alpha + \pi), \sin(\alpha + \pi))) \\ &= \begin{cases} (0, 0), & \text{ha } m \text{ páratlan,} \\ 2 * (\cos(m\alpha), \sin(m\alpha)), & \text{ha } m \text{ páros,} \end{cases} \end{aligned}$$

függvénnyel, ami csak páratlan m esetén teljesül.

Tétel. *Ha $f: \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^n$ páratlan folytonos függvény, akkor $m \leq n$.*

Bizonyítás. Elég belátni, hogy nincs páratlan folytonos $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-2}$ függvény.

Tekintsük az $\mathbb{S}^{n-2}$ gömbfelületet az $\mathbb{S}^{n-1}$ gömbfelületben „főkörként” beágyazva, az $\mathbb{S}^{n-1}$ gömbfelületet pedig az $\mathbb{R}^n$ térben.

Az $\mathbb{S}^{n-2}$ „főkör” két nyílt félgömb-felületre vágja az $\mathbb{S}^{n-1}$ gömbfelületet. Ezek egyikét egyesítve az $\mathbb{S}^{n-2}$ „főkörrel”, a kapott zárt $\mathcal{S}$ félgömb-felület p merőleges projekciója az $\mathbb{S}^{n-2}$ „főkör” síkjára nyilván homeomorfia a $\mathbb{B}^{n-2}$ gömbre.

A $g = f \circ p^{-1}$ eszerint olyan $\mathbb{B}^{n-2} \rightarrow \mathbb{S}^{n-2}$ folytonos leképezés, mely az $\mathbb{S}^{n-2}$ gömbfelületen páratlan. Ez ellentmondás, mert korábbi lemmánk szerint g egy ilyen függvény az $\mathbb{S}^{n-2}$ gömbfelületen homotóp a konstanssal, ami viszont nem homotóp páratlan függvénnyel, mert fokszáma nulla. ■

Borsuk–Ulam-tétel. Ha $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ folytonos, akkor van olyan $X \in \mathbb{S}^{n-1}$, hogy $f(X) = f(-X)$.

Bizonyítás. Az állítással szemben tegyük fel, hogy a folytonos $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ függvényre minden $X \in \mathbb{S}^{n-1}$ esetén $f(X) \neq f(-X)$.

Ekkor a

$$g(X) = \frac{f(X) - f(-X)}{|f(X) - f(-X)|}$$

által definiált $g: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-2}$ függvény a feltétel szerint folytonos, és páratlan. Előbbi tételünk szerint ez ellentmondás, ami igazolja jelent tételünk állítását. ■

2.6. Görbék topológiája

Tétel. Ha $\mathcal{A} \subset \mathbb{S}^{n-1}$ zárt és $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ folytonos, akkor létezik olyan folytonos $\phi: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ leképezés, melyre $\phi|_{\mathcal{A}} = \varphi$.

Bizonyítás. Mivel $\mathbb{S}^{n-1}$ abszolút környezet retraktum, létezik $\mathcal{U}(\supset \mathcal{A})$ környezet, melyre φ folytatható, vagyis $\hat{\varphi}: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ olyan, hogy $\hat{\varphi}|_{\mathcal{A}} \equiv \varphi$. Az $\mathbb{S}^{n-1}$ gömbfelület normális, ezért létezik $\mathcal{V}(\supset \mathcal{A})$ környezet, melyre $\mathcal{U} \supset \mathcal{V}^-$. Ekkor $\hat{\varphi}|_{\mathcal{V}^-}$ egyenletesen folytonos, mert $\mathcal{V}^-$ kompakt, így létezik olyan $\delta > 0$, melyre $\rho(x, y) < \delta$ esetén $\rho(\hat{\varphi}(x), \hat{\varphi}(y)) < 1/4$ és $\delta < \rho(\bar{\mathcal{V}}, \mathcal{A})$. Legyen a T triangulációra $|T| < \delta$, és legyen ψ a

$$\hat{\psi}: \mathbb{S}^{n-1} \cap T \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \quad \hat{\psi}(p) = \begin{cases} \hat{\varphi}(p), & \text{ha } p \in \mathcal{V}^- \cap T, \\ \text{bármilyen}, & \text{ha } p \in T \setminus \mathcal{V}^- \end{cases}$$

szimpliciális folytatása. Ekkor φ és $\psi|_{\mathcal{A}}$ homotóp, hiszen $\varphi(x)$ és $\psi|_{\mathcal{A}}(x)$, ha $x \in \mathcal{A}$, távolsága kisebb mint $1/4$. Viszont ekkor Borsuk tétele szerint φ is folytatható $\mathbb{S}^{n-1}$ -re. ■

Bevezetjük a folytonos $\varpi_x: (\mathbb{R}^n - \{x\}) \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ projekciót, melyre $x + \varpi_x(y) = (x + \mathbb{S}^{n-1}) \cap \overline{xy}$.

Tétel. Ha C kompakt, $x \in C$ és ∂C a C határa, akkor $\varpi_x|_{\partial C}$ nem folytatható C -re.

Bizonyítás. Ha folytatni lehetne, akkor a leképezésre használt $\mathbb{S}^{n-1}$ teljes belsejére is lehetne folytatni $\mathbb{S}^{n-1}$ fix. ■

Brouwer tartomány-invariancia tétele. Ha $X \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ egy belső pont, akkor létezik bármilyen kis környezete, úgy, hogy annak határán van olyan $\mathbb{S}^{n-1}$ -be vivő folytonos leképezés, amely nem folytatható az egész környezetre.

Bizonyítás. 1. Ha x belső pont és $G(x, r) \subset A$, akkor $\varpi_x|_{\partial G(x, r)}$ előző tétel szerint nem folytatható $G(x, r)$ -re.

2. Ha x határpont - feltesszük, hogy A kompakt. Véve $x \in G(x, r)$ környezetét és az adott folytonos $f: \partial G(x, r) \cap A \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ függvényt. Mivel A kompakt, az $A \cap \partial G(x, r)$ zárt, ezért f folytatható $\partial G(x, r): \hat{f}$. Ez viszont folytatható $A \cap G(x, r)$ -re, hisz az tartalmaz $\overline{A}$ -beli elemet. ■

Tétel. Kompakt C esetén $\mathbb{R}^n \setminus C$ xy pontja csak akkor van egy komponensben, ha $\varpi_x|_C \sim \varpi_y|_C$.

Bizonyítás. 1. ha xy egy komponensben van, akkor az őket összekötő íven $\varpi_z|_C$ folytonosan vált., ha y megy x -ből y -ba.

2. Egy komponens nyílt, tehát $\forall$ pontja belső pontja. Ezért $\varpi_x|_C$ nem folytatható x komponensére. De ha y nem x komponensében van, akkor $\varpi_y|_C$ folytatható yx komponensére, így $\varpi_x|_C$ és $\varpi_y|_C$ nem homotópok. (Borsuk tétele!) ■

Definíció. Egy körvonal síkbeli topologikus képét *Jordan-görbének* nevezzük.

Tétel. Egyszerű ív nem bontja két részre a teret.

Bizonyítás. $\varpi_x|_H$ és $\varpi_y|_H$, ahol H az ív az előző miatt homotóp, akkor még előbből xy azonos komponensben van. ■

Definíció. görbe-ív szögelfordulása x pontra nézve: $\omega_x(\Gamma)$ - zárt görbére 2π egész számú többszöröse.

Lemma. Γ Jordan-görbére $\omega_x(\Gamma)/2\pi$ éppen a leképezés fokszáma.

Bizonyítás.

ψ leképezés foka egyenlő $\omega_x(\Gamma)/2\pi$ -vel. ■

2.6.1:
Ábra kell

Tétel. $\mathbb{S}^1$ -ben ha két leképezés foka = akkor homotópok.

Bizonyítás. fok $\Rightarrow$ szögelfordulás $\Rightarrow$ eltolható a különbség. - innen egyszerűen egymásba lehet őket vinni. ■

2.6.2:
Ábra kell

Jordan-görbe tétele. Minden Jordan-görbe pontosan két részre osztja a síkot, a határról mindkét rész elérhető.

Bizonyítás. A határtulajdonság abból következik, hogy a tartományinvariancia tétele szerint nincs belső pontjuk és egy komponens nyitott.

1. Ha Γ tartalmaz egyenes szakaszt.

(1.a) Γ legalább két részre osztja a síkot. A szakasz legyen S , a közepére rajzolt elegendően kicsi kör (fél) K . Legyen $\Gamma' = \Gamma \setminus S \cup K$, $\Gamma^* = S \cup K$, ekkor

$$\omega_{\Gamma}(P) + \omega_{\Gamma^*}(P) = \omega_{\Gamma'}(P)$$

$$\omega_{\Gamma}(Q) + \omega_{\Gamma^*}(Q) = \omega_{\Gamma'}(Q).$$

De $\omega_{\Gamma'}(P) = \omega_{\Gamma'}(Q)$, hisz PQ nem metszi Γ' -t, de $\omega_{\Gamma^*}(P) = 0$ és $\omega_{\Gamma^*}(Q) = 2\pi$, így $\omega_{\Gamma}(P) \neq \omega_{\Gamma}(Q)$, ezért $\varpi_P|_{\Gamma}$ nem homotóp $\varpi_Q|_{\Gamma}$, vagyis P és Q nem azonos komponensben van.

(1.b) Γ legfeljebb két részre osztja a síkot. Vegyünk egy tetszőleges R pontot. R összeköthető $F = PQ \cap S$, mert $\Gamma \setminus S$ egyszerű ív. Keressük meg azt a pontot, ahol R először metszi S -t, és nézzük meg S melyik félsíkjaiból jött a vonal. Ez vagy P vagy Q síkjából jött, így az annak megfelelővel összeköthető.

2. Ha Γ tetszőleges Jordan görbe. $P \notin \Gamma$, ezért $\varepsilon = d(P, \Gamma) > 0$. Ha ϕ hozzá létre Γ -ta K körből, akkor egyenletesen folytonos, ezért $\exists \delta > 0 : AB \in K$ -ra $d(A, B) < \delta(\phi(A)\phi(B)) < \varepsilon$. Válasszuk AB -t, így $\phi(A)\phi(B)$ Γ -beli ívét pedig helyettesítsük szakasszal - így kapjuk Γ^+ -t. Ekkor $\omega_{\Gamma}(P) = \omega_{\Gamma^+}(P)$, hisz a szögelfordulás legfeljebb $\pi/3$ -mal változott. De $\omega_{\Gamma^*}(P) = 2\pi$ vagy 0 , így $\omega_{\Gamma}(P)$ is annyi lehet! ■

Schönfliess-tétel. Ha a bijektív $f: S' \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvény folytonos, akkor folytatható $\mathbb{R}^2$ -re úgy, hogy belső-belsőre külső-külsőre képződik.

Megjegyzés. Magasabb dimenzióban az állítás nem érvényes, erre Alexandrov adott ellenpéldát.

2.7. Topologikus sokaságok

Definíció. Az $\mathcal{M}^n$ halmazt $n \in \mathbb{N}$ dimenziós *topologikus sokaságnak* nevezzük, ha

- (1) megszámlálható bázisú Hausdorff-tér, és
- (2) minden pontjának egy környezete homeomorf $\mathbb{R}^n$ nyílt részhalmazával.

Definíció. Az $U \subseteq \mathcal{M}^n$ nyílt halmazból és $r: B^n \rightarrow U$ homeomorfizmusból alkotott (r, U) párt — ahol $B^n \subset \mathbb{R}^n$ a nyílt egységömb — *koordináta-környezetnek* vagy *térképnek* nevezzük. Az r függvényt a koordináta-környezet, vagy egyszerűen az U környezet *paraméterezésének* hívjuk.

Definíció. Az $(r_i, \mathcal{U}_i)$ térképek megszámlálható rendszerét *atlasznak* nevezzük, ha lefedik a topologikus sokaságot.

Az $\mathcal{M}^n$ topologikus sokaságot *differenciálható sokaságnak* nevezzük, ha adott rajta $(r_i, \mathcal{U}_i)$ koordináta-környezetek olyan rendszere, melyre

- (1) az $\mathcal{U}_i$ környezetek lefedik az $\mathcal{M}^n$ halmazt, és
- (2) ha két $\mathcal{U}_i$ és $\mathcal{U}_j$ környezet átmetszi egymást, akkor a

$$\varphi_{i,j} = r_i^{-1} \circ r_j: r_j^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \rightarrow r_i^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$$

átmenetfüggvény akárhányszor differenciálható, és Jacobi-determinánsa nem tűnik el.

Konvenció. Ha nincs külön másként jelezve, egy differenciálható $\mathcal{M}$ sokaság dimenziója $n \in \mathbb{N}$.

Figyeljük meg, hogy $r_j^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ és $r_i^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ is $\mathbb{R}^n$ nyílt részhalmaza, így $\varphi_{i,j}$ egy n -vektor- n -vektor-függvény. Minden atlasz része egy maximális atlasznak, amely már nem bővíthető további koordináta-környezetekkel úgy, hogy atlasz maradjon. Ezt úgy kapjuk, hogy egyszerűen az összes folytonosságot megőrző térképet hozzávesszük az eredeti atlaszhoz.

Definíció. A $\psi: \mathcal{M}^n \rightarrow \mathcal{N}^k$ leképezést m -szer differenciálhatónak mondjuk, ha az $\mathcal{M}^n$ és $\mathcal{N}^k$ differenciálható sokaságok bármely $r_{\mathcal{M}}$ és $r_{\mathcal{N}}$ paraméterezésére az

$$r_{\mathcal{N}}^{-1} \circ \psi \circ r_{\mathcal{M}}: r_{\mathcal{M}}^{-1}(\mathcal{U}_{\mathcal{M}} \cap \psi^{-1}(\mathcal{U}_{\mathcal{N}})) \rightarrow r_{\mathcal{N}}^{-1}(\psi(\mathcal{U}_{\mathcal{M}}) \cap \mathcal{U}_{\mathcal{N}})$$

leképezés m -szer folytonosan differenciálható.

Ha ψ bijektív, és inverzával együtt végtelenszer differenciálható, akkor *difféomorfizmusnak* nevezzük.

Figyeljük meg, hogy $r_{\mathcal{M}}^{-1}(\mathcal{U}_{\mathcal{M}} \cap \psi^{-1}(\mathcal{U}_{\mathcal{N}})) \subset \mathbb{R}^n$ és $r_{\mathcal{N}}^{-1}(\psi(\mathcal{U}_{\mathcal{M}}) \cap \mathcal{U}_{\mathcal{N}}) \subset \mathbb{R}^k$ így $r_{\mathcal{N}}^{-1} \circ \psi \circ r_{\mathcal{M}}$ egy n -vektor- k -vektor-függvény.

Definíció. Ha két sokaság között létezik diffeomorfizmus, akkor azokat *diffeomorf sokaságoknak* nevezzük.

Világos, hogy két diffeomorf sokaság között az atlaszokból kiindulva nem lehet különbséget tenni, vagyis az ilyen sokaságok a differenciálgeometria szempontjából ekvivalensnek tekinthetők, hacsak valami további más struktúra nem különbözteti meg őket.

Egy topologikus sokaságot ugyanakkor különböző atlaszok különböző differenciálható sokasággá tehetnek. Milnor bizonyította be, hogy a szokásos távolság szerinti topologikus 7 dimenziós S^7 gömbfelületet, ami $B^8 \subset \mathbb{R}^8$ határa, *pontosan* 28 nem ekvivalens módon lehet differenciálható sokasággá tenni. A szokásos gömböt kanonikusnak, a többi *egzotikus gömbnek* hívjuk.

Whitney nehéz tétele szerint n -dimenziós kompakt sokaságokat mindig beágyazhatunk a $(2n + 1)$ -dimenziós euklideszi térbe. Ennél most egy gyengébb, de azért a beágyazhatóság lehetőségét mutató állítást itt is bizonyítunk.

Tétel. *Kompakt differenciálható sokaság beágyazható egy megfelelő dimenziójú euklideszi térbe.*

Bizonyítás. Minden $P \in \mathcal{M}^n$ pontnak létezik $(r_P, \mathcal{U}_P)$ koordináta-környezete, melyre $r_P(B^n) = \mathcal{U}_P$.

Vegyünk a B^n gömbön egy olyan differenciálható $\bar{f}$ függvényt, melynek értéke 1 a $B^n(1/3)$ gömbön, 0 és 1 közötti a $B^n(2/3) \setminus B^n(1/3)$ gyűrűn, és 0 a $B^n \setminus B^n(2/3)$ gyűrűn. Legyen $f_P = \bar{f} \circ r_P^{-1}$ az $\mathcal{U}_P$ környezeten, és $f_P = 0$ azon kívül. Ezzel az f_P az egész sokaságon megadott jól definiált függvény. Defináljuk most az $\bar{r}_P: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvényt úgy, hogy teljesüljön az $\bar{r}_P(R) = r_P^{-1}(R) \cdot f_P(R)$ az $\mathcal{U}_P$ környezeten, és $\bar{r}_P(R) = 0$ azon kívül. Ekkor $\bar{r}_P$ is az egész sokaságon értelmezett és a P „közeliében” az R pont paraméterét adja meg.

Legyen $\mathcal{V}_P = r_P(B^n(1/3))$. Nyilván a $\mathcal{V}_P$ környezetek is lefedik az $\mathcal{M}$ sokaságot, mely kompakt, így létezik ezek közül véges sok olyan $\mathcal{V}_{P_1}, \dots, \mathcal{V}_{P_d}$ környezet, melyek együtt ugyancsak lefedik az $\mathcal{M}$ sokaságot.

Legyen az $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^{d(n+1)}$ függvény olyan, hogy

$$F(Q) = (f_{P_1}(Q), \dots, f_{P_d}(Q), \bar{r}_{P_1}(Q), \dots, \bar{r}_{P_d}(Q)).$$

Ekkor F az egész $\mathcal{M}$ sokaságon jól definiált, hiszen f_{P_i} és $\bar{r}_{P_i}$ is az egész sokaságon definiált.

Most belátjuk, hogy az F diffeomorf beágyazás, ami teljessé teszi bizonyításunkat.

F injektív. Ha $F(R) = F(Q)$, és $R \in \mathcal{V}_{P_j}$, akkor $1 = f_{P_j}(R) = f_{P_j}(Q)$ miatt $Q \in \mathcal{V}_{P_j}$ is teljesül. Ekkor viszont az $\bar{r}_{P_j}(R) = \bar{r}_{P_j}(Q)$ egyenlőségből következik, hogy $r_{P_j}(R) = r_{P_j}(Q)$, amiből R és Q egybeesése adódik.

F végtelenszer differenciálható. Azt kell ellenőriznünk, hogy $F \circ r_{P_j}$ minden j esetén végtelenszer differenciálható. Ez nyilvánvaló, mivel F minden koordinátafüggvénye a végtelenszer differenciálható $\varphi_{i,j} = r_{P_i}^{-1} \circ r_{P_j}$ átmenetfüggvényekből és az általunk konstruált szintén végtelenszer differenciálható $\bar{f}_P$ függvényből épül fel.

F^{-1} végtelenszer differenciálható. Azt kell belátnunk, hogy $r_{P_j}^{-1} \circ F^{-1}$ végtelenszer differenciálható az $F(\mathcal{V}_{P_j})$ nyílt halmazon minden j esetén. Nyilván $(F_{d+(j-1)n+1}(Q), \dots, F_{d+jn}(Q)) = \bar{r}_{P_j}(Q)$, ezért az $F(\mathcal{V}_{P_j})$ nyílt halmazon $r_{P_j}^{-1} \circ F^{-1} = r_{P_j}^{-1} \circ \bar{r}_{P_j} = id_{d+(j-1)n+1, \dots, d+jn}: \mathbb{R}^{d(n+1)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ az a leképezés, melyre $id_{d+(j-1)n+1, \dots, d+jn}(x_1, \dots, x_{d(n+1)}) = (x_{d+(j-1)n+1}, \dots, x_{d+jn})$, ami nyilván végtelenszer differenciálható. ■

A további jelölések egyszerűsítése érdekében jegyezzük meg a következőt.

Konvenció. Egy adott $(r, \mathcal{U})$ koordináta-környezeten belül az $x_j: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ *koordináta-függvény* az adott pontnak az r paraméterezés szerinti j -edik koordinátája, vagyis

$$P = r(x_1(P), \dots, x_j(P), \dots, x_n(P)).$$

A most következő definícióval kissé nehézkes igazolni, hogy például a Möbiuszalag nem irányítható, de később a differenciálformáknál az irányíthatóság egy egyszerűbben ellenőrizhető megfogalmazását is megismerjük.

Definíció. Az $\mathcal{M}$ differenciálható sokaság *irányított*, ha atlasza bármely két r_i és r_j paraméterezésére a $\varphi_{i,j} = r_i^{-1} \circ r_j$ átmenetfüggvény az $r_j^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ metszetkörnyezeten pozitív Jacobi-determinánsú!

Az $\mathcal{M}$ differenciálható sokaságot *irányíthatónak* mondjuk, ha létezik vele diffeomorf irányított sokaság!

Mielőtt egy fontos irányíthatósági észrevételt bizonyítanánk, szükségünk van a határ fogalmára.

Definíció. A $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$ részhalmaz *reguláris tartomány*, ha minden $P \in \bar{\mathcal{D}}$ pont vagy a $\mathcal{D}$ belsejébe esik, vagy létezik a P pontnak olyan $(r_P, \mathcal{U}_P)$ koordináta-környezete, melyre $\mathcal{U}_P \cap \bar{\mathcal{D}} = r_P(B^n \cap \{x: x_1 \leq 0\})$, és $P = r_P(0)$, ahol $\bar{\mathcal{D}}$ a $\mathcal{D}$ részhalmaz topologikus lezártja.

A reguláris $\mathcal{D}$ tartomány $\partial\mathcal{D}$ határán azon $P \in \mathcal{M}$ pontok halmazát értjük, melyeknek létezik olyan $(r_P, \mathcal{U}_P)$ koordináta-környezete, melyre $\mathcal{U}_P \cap \overline{\mathcal{D}} = r_P(B^n \cap \{x : x_1 \leq 0\})$ és $P = r_P(0)$.

Megjegyzendő, hogy a definícióban megkerülhető a speciális koordináta-környezet igénye, ha így fogalmazunk: *... bármely $(r_P, \mathcal{U}_P)$ koordináta-környezethez létezik olyan $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény, melynek deriváltja sehol nem tűnik el, $\mathcal{U}_P \cap \overline{\mathcal{D}} = r_P(B^n \cap \{x : \varphi(x) \leq 0\})$, és $P = r_P(0)$.*

Fontos látni, hogy a határ nem feltétlenül része a $\mathcal{D}$ tartománynak. Zárt tartomány határa azonban mindig része a tartománynak, és az alábbiak szerint, ha a reguláris tartomány egy környezete irányítható, akkor a tartomány határa is irányítható.

Tétel. *Irányított sokaság reguláris tartományának határa irányított differenciálható részsokaság.*

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy a határ differenciálható sokaság, vagyis létezik rajta egy atlasz. Ha $P \in \partial\mathcal{D}$, akkor a definícióbeli jelöléseket használva tekintsük a $\mathcal{V}_P = \mathcal{U}_P \cap \partial\mathcal{D}$ környezetet és hozzá a $p_P = r_P|_{x_1=0}$ paraméterezést. A $(p_P, \mathcal{V}_P)$ pár egy koordináta-környezetet definiál a $\partial\mathcal{D}$ határon, mert a definíció szerint $\mathcal{V}_P = p_P(B^{n-1})$. Ha $\mathcal{V}_P$ és $\mathcal{V}_Q$ átmetszi egymást, akkor a p_P és p_Q paraméterezések $\psi_{P,Q}$ átmenetfüggvénye az r_P és r_Q paraméterezések $\phi_{P,Q}$ átmeneti függvényének megszorítása az $x_1 = 0$ hipersíkra és így ugyancsak differenciálható. Tehát a $(p_P, \mathcal{V}_P)$ koordináta-környezetek atlaszt alkotnak.

Az irányítottság bizonyítása most már csak az átmeneti függvények Jacobi-mátrixának vizsgálatán múlik. A $\psi_{P,Q}$ Jacobi-mátrixát a $\phi_{P,Q}$ Jacobi-mátrixából úgy kapjuk, hogy elhagyjuk belőle az első oszlopot és sort, hiszen $(y_2, \dots, y_n) = \psi_{P,Q}(x_2, \dots, x_n)$ ekvivalens a $(0, y_2, \dots, y_n) = \phi_{P,Q}(0, x_2, \dots, x_n)$ egyenlettel.

Az $(y_1, y_2, \dots, y_n) = \phi_{P,Q}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ formulát vizsgálva a határpontokban azt látjuk, hogy egyfelől $\partial_1 y_1 > 0$, hiszen ha x_1 túlnő a nullán, akkor y_1 is, másfelől $\partial_j y_1 = 0$, mert $x_1 = 0$ a többi változótól függetlenül implikálja, hogy $y_1 = 0$. Következésképpen $\det \phi'_{P,Q} = \partial_1 y_1 \det \psi'_{P,Q}$, és ezért $\det \psi'_{P,Q}$ előjele is pozitív. ■



Függelék

F.1. Kiválasztási axióma és ekvivalens formái

Kiválasztási axióma. Ha valamely $\mathcal{I}$ halmaz minden i eleméhez adott egy $\mathcal{H}_i$ halmaz, akkor van olyan $f: \mathcal{I} \rightarrow \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{H}_i$ *kiválasztási függvény*, melyre minden $i \in \mathcal{I}$ esetén $f(i) \in \mathcal{H}_i$.

Mint hogy $\prod_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{H}_i$ elemei definíció értelmében éppen a kiválasztási függvények, a kiválasztási axiómát úgy is fogalmazhatjuk, hogy $\prod_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{H}_i$ nem üres.

Egy $\mathcal{H}$ halmazon egy reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus $\preceq$ relációt rendezésnek nevezünk. Ha $\mathcal{H}$ minden elempárja összehasonlítható a $\preceq$ rendezéssel, akkor teljesen rendezett, vagy egyszerűen rendezett halmazról beszélünk. Ha azonban nem feltétlenül hasonlítható össze minden elempár a $\preceq$ rendezéssel, akkor a $\mathcal{H}$ halmazt részbenrendezettnek mondjuk. A $\mathcal{H}$ egy F elemét valamely $\mathcal{R}$ részhalmaz felső $\preceq$ -korlátjának hívjuk, ha $\mathcal{R}$ minden R elemére $R \preceq F$. A $\mathcal{H}$ egy A elemét valamely $\mathcal{R}$ részhalmaz alsó $\preceq$ -korlátjának mondjuk, ha $\mathcal{R}$ minden R elemére $A \preceq R$. Egy teljesen rendezett halmazt jól rendezettnek nevezünk, ha minden $\mathcal{R}$ részhalmaza tartalmazza egy alsó $\preceq$ -korlátját; Az $\mathcal{R}$ ezen alsó korlátját az $\mathcal{R}$ minimumának mondjuk.

A részbenrendezett $\mathcal{H}$ halmaz $\mathcal{R}$ részhalmazát zártnak mondjuk, ha minden $H \in \mathcal{H}$ elem benne van, melyhez van olyan $R \in \mathcal{R}$, hogy $H \preceq R$. Egy részbenrendezett halmaz olyan részhalmazát, mely ugyanazon rendezés szerint jól rendezett, láncnak nevezzük.

Figyeljük meg a következőket:

- (1) Ha $\mathcal{R}$ a jól rendezett $\mathcal{H}$ halmaz zárt részhalmaza, és $\mathcal{H} \setminus \mathcal{R}$ nem üres, akkor véve ennek M minimumát, kapjuk, hogy $\mathcal{R} = \{R \in \mathcal{H} : R \prec M\}$.
- (2) Ha $\mathcal{L}$ a részben rendezett $\mathcal{H}$ halmaz láncainak egy olyan halmaza, hogy bármely két elemének egyike tartalmazza a másikat, akkor az $\mathcal{F} = \bigcup_{\mathcal{L} \in \mathcal{L}} \mathcal{L}$ halmaz olyan lánc, mely tartalmazza $\mathcal{L}$ minden elemét.

Ezekkel felvértézve bizonyítjuk a *Kuratowski-lemma* néven is ismert állítást.

Zorn-lemma. Ha a $\mathcal{H}$ halmaznak $\preceq$ egy részbenrendezése, és minden $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}$ láncnak van felső $\preceq$ -korlátja a $\mathcal{H}$ halmazban, akkor a $\mathcal{H}$ halmazban van maximális elem.

Bizonyítás. Legyen a $\mathcal{H}$ halmazban lévő láncok halmaza $\mathcal{L}$. A feltétel szerint minden $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}$ lánchoz van olyan $F_{\mathcal{L}} \in \mathcal{H}$ elem, mely az $\mathcal{L}$ felső $\preceq$ -korlátja.

Tegyük fel, hogy a bizonyítandóval ellentétben minden $F_{\mathcal{L}}$ esetében van olyan $F'_{\mathcal{L}}$, melyre $F_{\mathcal{L}} \prec F'_{\mathcal{L}}$.

Ekkor a kiválasztási axióma szerint van olyan $f: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{H}$ függvény, melyre $f(\mathcal{L}) = F'_{\mathcal{L}}$.

Nevezzünk egy $\mathcal{L}$ láncot f -szeletelhetőnek, ha minden, valamely $L \in \mathcal{L}$ eleméhez tartozó $\mathcal{L}_{\prec L} = \{L' \in \mathcal{L} : L' \prec L\}$ szeletének L a kiválasztott felső $\preceq$ -korlátja, vagyis $L = f(\mathcal{L}_{\prec L})$. Ilyen f -szeletelhető láncok vannak, hiszen például az $\mathcal{L}_0 = \emptyset$ és az $\mathcal{L}_1 = \{f(\emptyset)\}$ lánc is f -szeletelhető. Jelölje $\mathcal{L}_f$ az f -szeletelhető láncok halmazát.

Legyen $\mathcal{K}, \mathcal{L} \in \mathcal{L}_f$, $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}$ pedig azon $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{K} \cap \mathcal{L}$ részhalmazok halmaza, melyek zártak a $\mathcal{K}$ és $\mathcal{L}$ láncokban. Legyen $\mathcal{M} = \bigcup_{\mathcal{Z} \in \mathcal{Z}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}} \mathcal{Z}$. Nyilván $\mathcal{M} \in \mathcal{Z}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}$, hiszen zárt halmazok uniója zárt, és $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{K} \cap \mathcal{L}$.

Ha $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$ és $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$, akkor a $\mathcal{K}$ és $\mathcal{L}$ f -szeletelhetősége miatt melyre $\mathcal{K}_{\prec \ell(\mathcal{M})} = \mathcal{M} = \mathcal{L}_{\prec \ell(\mathcal{M})}$, amiért $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \cup \{\ell(\mathcal{M})\}$ is a $\mathcal{K} \cap \mathcal{L}$ halmazban van és zárt. Eszerint $\mathcal{M}' \in \mathcal{Z}$, amiért $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$, vagyis $\mathcal{K} = \mathcal{L} \in \mathcal{M}$, ami ellentmondás, tehát $\mathcal{M} = \mathcal{K}$ vagy $\mathcal{M} = \mathcal{L}$ legalább egyike teljesül. Ez bizonyítja, hogy $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$ vagy $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$, vagyis az f -szeletelhető láncok halmaza teljesen rendezett.

Legyen most $\mathcal{N} = \bigcup_{\mathcal{L} \in \mathcal{L}_f} \mathcal{L}$, az összes f -szeletelhető lánc uniója. Ekkor $\mathcal{N}$ is egy f -szeletelhető lánc, mely tartalmazza az összes f -szeletelhető láncot. Mivel $f(\mathcal{N}) \notin \mathcal{N}$, az $\mathcal{N}' = \mathcal{N} \cup \{f(\mathcal{N})\}$ lánc is f -szeletelhető, de nem $\mathcal{N}$ része. Ezen ellentmondás igazolja, hogy az f függvény nem létezik, tehát van olyan $F_{\mathcal{L}}$, mely maximális elem. ■

Jegyezzük meg, hogy a bizonyítás közben megadott $\mathcal{L}_1$ szeletelhető láncból szeletelhető láncok egész halmazát állíthatjuk elő úgy, hogy (transzfinit) indukcióval a már adott $\mathcal{L}_i$ szeletelhető láncból elkészítjük az $\mathcal{L}_{i+1} = \mathcal{L}_i \cup \{\ell(\mathcal{L}_i)\}$ szeletelhető láncot.

A Zorn-lemma igen fontos következménye, hogy minden vektortérben van bázis. Például a valós számoknak a racionális számok teste feletti vektortérében is vannak bázisok, melyeknek nyilván végtelen sok eleme van – ezeket *Hamel-bázisnak* nevezzük.

F.2. Halmazok Baire-féle osztályozása

Definíció. Az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus térben az $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ részhalmazt

- *első Baire-kategoriásnak* mondjuk, ha lefedhető megszámlálható sok seholsem sűrű részhalmazzal;

- *második Baire-kategóriásnak* nevezzük, ha nem első Baire-kategóriás.
- *reziduálisnak* hívjuk, ha komplementere első Baire-kategóriás.

Az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus teret *Baire-térnek* hívjuk, ha $\mathcal{X}$ minden nem üres, nyílt részhalmaza második Baire-kategóriás.

Tétel. *Az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus tér akkor és csak akkor Baire-féle, ha nyílt, sűrű halmazokból álló bármely megszámlálható rendszer metszete sűrű.*

Bizonyítás. Tegyük először fel, hogy $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ egy Baire-tér, és tekintsük a nem üres, nyílt, sűrű $\mathcal{V}_i$ ($i \in \mathbb{N}$) halmazok $\mathcal{U} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{V}_i$ metszetét. Ha $\mathcal{U}$ nem sűrű, akkor van olyan $\mathcal{W}$ nyílt halmaz, mely nem metszi az $\mathcal{U}$ halmazt. Eszerint

$$\mathcal{W} \subseteq \overline{\mathcal{U}} = \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{V}_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{\mathcal{V}_i},$$

tehát a $\mathcal{W}$ nyílt halmazt megszámlálható sok, zárt seholsem sűrű halmaz lefedi, holott ez Baire-térben lehetetlen.

Tegyük most azt fel, hogy az $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus térben bármely nyílt, sűrű halmazokból álló megszámlálható rendszer metszete sűrű, és tekintsük a $\mathcal{W}$ nyílt halmazt. Ha a $\mathcal{W}$ halmazt a seholsem sűrű $\mathcal{V}_i$ ($i \in \mathbb{N}$) halmazok lefedik, akkor ezek ugyancsak seholsem sűrű lezártjaira $\mathcal{W} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{V}_i^-$, amiért

$$\overline{\mathcal{W}} \supseteq \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{V}_i^-} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\mathcal{V}_i^-}.$$

Mivel a zárt seholsem sűrű halmazok komplementere nyílt sűrű halmaz, és azok metszete feltételünk szerint sűrű, a jobboldalon az alaphalmaz összes eleme megtehető, így $\mathcal{W}$ üres, ami bizonyítja az állítást. ■

Baire tétele metrikus térre. *Teljes metrikus tér Baire-tér.*

Bizonyítás. Azt fogjuk igazolni, hogy nyílt, sűrű halmazokból álló bármely megszámlálható rendszer metszete sűrű.

Ha nincsen sűrű halmaz a térben, akkor a tétel állítása teljesül.

Ha van sűrű halmaz a metrikus térben, akkor az szeparábilis, amiért normális. Jelölje minden $r > 0$ számra $\mathcal{B}_{X,r} = \{Y \in \mathcal{X} : d(X, Y) < r\}$ az „ r -sugarú gömböt”.

Legyen $\mathcal{S}_n$ nyílt sűrű halmaz minden $n \in \mathbb{N}$ számra, $\mathcal{U}$ pedig egy nem üres nyílt halmaz.

Legyen X_1 olyan pont, mely a sűrűség miatt nem üres $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{U}$ halmazban van. Lévéen nyílt halmazok metszete, $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{U}$ nyílt, ezért van olyan $r_1 > 0$, melyre $\mathcal{B}_{X_1, r_1} \subseteq \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{U}$.

Ha a pont és szám (X_i, r_i) párosa már adott, akkor legyen X_{i+1} egy pont a sűrűség miatt nem üres $\mathcal{S}_{i+1} \cap \mathcal{B}_{X_i, r_i}$ halmazban, $r_{i+1} < r_i/2$ pedig legyen olyan, hogy $\mathcal{B}_{X_{i+1}, r_{i+1}} \subseteq \mathcal{S}_{i+1} \cap \mathcal{B}_{X_i, r_i}$ (mivel a tér normális, ilyen r_{i+1} létezik).

Ekkor az X_i pontsorozat Cauchy-féle, hiszen tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $r_1/2^n < \varepsilon/2$, amiből $i, j > n$ esetén $d(X_i, X_j) \leq d(X_i, X_n) + d(X_n, X_j) \leq 2r_n \leq 2r_1/2^n < \varepsilon$.

A tér teljessége miatt eszerint létezik az $X = \lim_{j \rightarrow \infty} X_j$ pont. Mivel $\{X_i\}_{i=j}^\infty \subseteq \mathcal{B}_{X_j, r_j}^-$, utóbbi zártága miatt $X \in \mathcal{B}_{X_j, r_j}^-$, tehát $X \in \mathcal{S}_j$ minden $j \in \mathbb{N}$ esetén. Másrészt a $j = 1$ esetben $X \in \mathcal{U}$ adódik, tehát $X \in \mathcal{U} \cap \bigcap_{j=1}^\infty \mathcal{S}_j$, ami bizonyítja az állítást. ■

Baire-tétel. *Lokálisan kompakt Hausdorff-tér Baire-tér.*

Bizonyítás. Azt fogjuk igazolni, hogy nyílt, sűrű halmazokból álló bármely megszámlálható rendszer metszete sűrű.

Ha nincsen sűrű halmaz a térben, akkor a tétel állítása teljesül.

Legyen $\mathcal{S}_n$ nyílt sűrű halmaz minden $n \in \mathbb{N}$ számra, $\mathcal{U}'$ pedig egy nem üres nyílt halmaz. Lokálisan kompakt Hausdorff-térben ekkor van olyan $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$ nyílt halmaz, hogy $\mathcal{U}^-$ kompakt.

Legyen X_1 olyan pont, mely a sűrűség miatt nem üres $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{U}$ halmazban van. Lévéen nyílt halmazok metszete, $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{U}$ nyílt, ezért van az X_1 pontnak olyan $\mathcal{V}_1 \in \mathfrak{T}_{X_1}$ környezete, melyre $\mathcal{V}_1^- \subseteq \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{U}$.

Ha a pont és környezete $(X_i, \mathcal{V}_i)$ párosa már adott, akkor legyen X_{i+1} egy pont a sűrűség miatt nem üres $\mathcal{S}_{i+1} \cap \mathcal{V}_i$ halmazban, $\mathcal{V}_{i+1} \in \mathfrak{T}_{X_{i+1}}$ pedig legyen olyan, hogy $\mathcal{V}_{i+1}^- \subseteq \mathcal{S}_{i+1} \cap \mathcal{V}_i$.

Ekkor az egymásba skatulyázott $\mathcal{V}_i^-$ zárt halmazok metszete nem üres, hiszen mind a kompakt $\mathcal{U}^-$ halmaz részei. Legyen $X \in \bigcap_{i=1}^\infty \mathcal{V}_i^-$.

Ekkor $X \in \mathcal{S}_i$ minden $i \in \mathbb{N}$ esetén, valamint az $i = 1$ esetben $X \in \mathcal{U}$ adódik, tehát $X \in \mathcal{U} \cap \bigcap_{i=1}^\infty \mathcal{S}_i$, ami bizonyítja az állítást. ■

F.3. Halmazosztályok δ -, σ -bővítései

Definíció. Ha $\mathfrak{C}$ egy halmazosztály, akkor azt mondjuk, hogy az ennek megszámlálható sok eleméből képzett metszetek $\mathfrak{C}_\delta$ -halmazt, uniók $\mathfrak{C}_\sigma$ -halmazt alkotnak. Ezeket *halmazosztály-bővítéseknek* nevezzük.

Világos, hogy bármely $\mathfrak{C}$ halmazosztályra

$$(\mathfrak{C}_\delta)_\delta = \mathfrak{C}_\delta \supseteq \mathfrak{C} \text{ és } (\mathfrak{C}_\sigma)_\sigma = \mathfrak{C}_\sigma \supseteq \mathfrak{C},$$

hiszen megszámlálható sok megszámlálható elem összesen megszámlálható sok elem.

Egy $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ topologikus térben a $\mathfrak{T}_\delta$ halmaz pontosan a tér G_δ -halmazainak osztálya, a $\overline{\mathfrak{T}}_\sigma$ halmaz pedig pontosan a tér F_σ -halmazainak osztálya.

Tétel. *Sűrű G_δ -halmaz komplementere seholsem sűrű F_σ -halmaz, Seholsem sűrű F_σ -halmaz komplementere sűrű G_δ -halmaz.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{H}$ egy sűrű G_δ -halmaz. Ekkor van nyílt, sűrű halmazoknak olyan megszámlálható $\{\mathcal{U}_i\}_{i=1}^\infty$ rendszere, hogy $\mathcal{H} = \bigcap_{i=1}^\infty \mathcal{U}_i$, amiért $\overline{\mathcal{H}} = \bigcup_{i=1}^\infty \overline{\mathcal{U}_i}$ seholsem sűrű F_σ -halmaz.

Legyen $\mathcal{H}$ egy seholsem sűrű F_σ -halmaz. Ekkor van zárt, seholsem sűrű halmazoknak olyan megszámlálható $\{\mathcal{Z}_i\}_{i=1}^\infty$ rendszere, hogy $\mathcal{H} = \bigcup_{i=1}^\infty \mathcal{Z}_i$, amiért $\overline{\mathcal{H}} = \bigcap_{i=1}^\infty \overline{\mathcal{Z}_i}$ sűrű G_δ -halmaz. ■

Tétel. *A valós számok között a racionális számok halmaza nem G_δ , az irracionális számok viszont G_δ -halmazt alkotnak.*

Bizonyítás. Mivel $\mathbb{Q}$ sűrű az $\mathbb{R}$ halmazban, ha ugyanakkor G_δ -halmaz is, akkor komplementere seholsem sűrű F_σ -halmaz. Eszerint $\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\} \cup \overline{\mathbb{Q}}$, vagyis a valós számokat megszámlálható sok seholsem sűrű halmaz lefedi, ami ellent mond Baire-tételének, mely szerint $\mathbb{R}$ egy Baire-tér. Tehát $\mathbb{Q}$ nem G_δ -halmaz, ami a tétel első állítása volt.

A második állítás igazolásához elég egy olyan valós függvényt mutatni, amely pontosan az irracionális számokban folytonos. Legyen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} -1, & \text{ha } x = 0, \\ 0, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q}, \\ 1/n, & \text{ha } \pm x = m/n, (m, n) = 1 \text{ és } m, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Ez nem folytonos a nullában, mert ott negatív, míg mindenütt máshol nemnegatív az értéke. Nem folytonos a többi racionális pontban sem, hiszen mindegyikhez pozitív számot rendel, miközben minden racionális szám tetszőleges közelében van irracionális szám is, amihez a függvény a nullát rendeli. Az irracionális pontokban ugyanakkor a függvény folytonos, mert ha egy racionális számokból álló sorozat egy irracionális számot közelít, akkor a legkisebb nevezőjük egyre nagyobb kell legyen, mert két azonos n legkisebb nevezőjű racionális szám közötti távolság $1/n$. ■

Tételünk szerint nincs olyan valós függvény, amely pontosan a racionális számokban folytonos.

Minden r racionális számból alkotott egyelemű $\{r\}$ halmaz G_δ -halmaz, hiszen $\{r\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} (r - 1/i, r + 1/i)$, tehát a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza megszámlálható sok G_δ -halmaz uniója, mégsem G_δ -halmaz.

F.4. Weierstrass approximációs tétele

Weierstrass 1885-ben bizonyította és publikálta a mára klasszikussá vált approximációs tételét, mely szerint bármely zárt intervallumon a polinomok a folytonos valós függvények mindenütt sűrű részhalmazát alkotják a szuprénum-normára nézve.

Fél évszázaddal később, 1937-ben Stone vette észre, hogy Weierstrass tétele a polinomok tulajdonságainak csak kis részére támaszkodik. Az immár Stone–Weierstrass-tételként emlegetett állítást kompakt metrikus tereken bizonyítottuk lényegében Stone 1948-ban megjelent *nem konstruktív* bizonyítását követve.

Az állítás teljes szépsége és a konkrét esetben elérhető konstruktivitás bemutatása érdekében itt a Bernstein által 1911-ben publikált úton bizonyítjuk Weierstrass eredeti tételét.

Pár előkészítő eredményre van szükségünk:

- (1) Mivel egy zárt intervallum nyilván Lindelöf-tér és a Dedekind-axióma miatt Cantor-tulajdonságú, az $[a, b]$ intervallum kompakt. (Ez a *Bolzano–Weierstrass-tétel*.)
- (2) Mivel egy zárt intervallum kompakt, a Weierstrass-tétel szerint a rajta értelmezett valós folytonos függvények korlátosak és felveszik szélsőértékeiket (maximum és minimum).
- (3) Mivel egy zárt intervallum kompakt metrikus tér, a Heine–Cantor-tétel szerint a rajta értelmezett valós folytonos függvények egyenletesen folytonosak.

Weierstrass approximációs tétele. Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a valós számok egy zárt intervalluma ($a < b$). Ha $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, akkor létezik valós együtthatós polinomok olyan $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ sorozata, hogy $\lim_{k \rightarrow \infty} (\sup_{x \in [a, b]} |p_k(x) - f(x)|) = 0$.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

Mint hogy f egyenletesen folytonos, létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $x, y \in [a, b]$ esetén $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ amennyiben $|x - y| < \delta$. Ebből következőleg

$$|f(x) - f(y)| \leq \begin{cases} \varepsilon/2, & \text{ha } |x - y| < \delta, \\ m^2 = 2 \max f, & \text{mindenképpen,} \end{cases} \leq m^2 \left(\frac{|x - y|}{\delta} \right)^2 + \varepsilon/2.$$

Az f függvény k -adik ($0 < k \in \mathbb{N}$) *Bernstein-polinomját* a

$$B_f^k(x) := \sum_{i=0}^k f\left(a + (b-a)\frac{i}{k}\right) \binom{k}{i} \frac{(x-a)^i (b-x)^{k-i}}{(b-a)^k}$$

formulával definiáljuk. Azonnal látszik, hogy tetszőleges $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényekre és $\lambda, \mu, c \in \mathbb{R}$ számokra $B_{\lambda f + \mu g}^k = \lambda B_f^k + \mu B_g^k$, $f \leq g$ esetén $B_f^k \leq B_g^k$, és $B_c^k = c$, valamint az $id: x \mapsto x$ függvényre

$$\begin{aligned} B_{id}^k(x) &= \sum_{i=0}^k \left(a + (b-a)\frac{i}{k}\right) \binom{k}{i} \frac{(x-a)^i (b-x)^{k-i}}{(b-a)^k} \\ &= a + \sum_{i=1}^k \frac{i}{k} \binom{k}{i} \frac{(x-a)^i (b-x)^{k-i}}{(b-a)^k} \\ &= a + (x-a) \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} \frac{(x-a)^{i-1} (b-x)^{k-i}}{(b-a)^{k-1}} \\ &= a + (x-a) \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{(x-a)^i (b-x)^{k-1-i}}{(b-a)^{k-1}} = x, \end{aligned}$$

az $sq: x \mapsto x^2$ függvényre pedig

$$\begin{aligned} B_{sq}^k(x) &= \sum_{i=0}^k \left(a + (b-a)\frac{i}{k}\right)^2 \binom{k}{i} \frac{(x-a)^i (b-x)^{k-i}}{(b-a)^k} \\ &= ax + \sum_{i=1}^k \frac{i}{k} \left(a + (b-a)\frac{i}{k}\right) \binom{k}{i} \frac{(x-a)^i (b-x)^{k-i}}{(b-a)^k} \\ &= ax + (x-a) \sum_{i=1}^k \left(a + (b-a)\frac{i}{k}\right) \binom{k-1}{i-1} \frac{(x-a)^{i-1} (b-x)^{k-i}}{(b-a)^{k-1}} \\ &= ax + (x-a) \sum_{i=0}^{k-1} \left(a + (b-a)\frac{i}{k-1} + (b-a)\left(\frac{i+1}{k} - \frac{i}{k-1}\right)\right) \times \\ &\quad \times \binom{k-1}{i} \frac{(x-a)^i (b-x)^{k-1-i}}{(b-a)^{k-1}} \\ &= ax + (x-a)x + (x-a) \sum_{i=0}^{k-2} \frac{k-i-1}{k(k-1)} \binom{k-1}{i} \frac{(x-a)^i (b-x)^{k-1-i}}{(b-a)^{k-2}} \\ &= x^2 + \frac{x-a}{k} \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-2}{i} \frac{(x-a)^i (b-x)^{k-1-i}}{(b-a)^{k-2}} = x^2 + \frac{(x-a)(b-x)}{k}. \end{aligned}$$

Eszerint tetszőleges $x, y \in [a, b]$ esetén

$$\begin{aligned}
 & |f(y) - B_f^k(x)| \\
 &= |B_{f(y)}^k(x) - B_f^k(x)| = |B_{f(y)-f}^k(x)| \\
 &\leq B_{|f(y)-f|}^k(x) = \sum_{i=0}^k \left| f(y) - f\left(a + (b-a)\frac{i}{k}\right) \right| \binom{k}{i} \frac{(x-a)^i (b-x)^{k-i}}{(b-a)^k} \\
 &\leq \sum_{i=0}^k \left(m^2 \frac{(y-a - (b-a)i/k)^2}{\delta^2} + \varepsilon \right) \binom{k}{i} \frac{(x-a)^i (b-x)^{k-i}}{(b-a)^k} \\
 &= \frac{m^2}{\delta^2} \sum_{i=0}^k \left(y-a - (b-a)\frac{i}{k} \right)^2 \binom{k}{i} \frac{(x-a)^i (b-x)^{k-i}}{(b-a)^k} + \frac{\varepsilon}{2} \\
 &= \frac{m^2}{\delta^2} \left(y^2 - 2yx + x^2 + \frac{(x-a)(b-x)}{k} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{m^2}{\delta^2} \left((y-x)^2 + \frac{(b-a)^2}{2k} \right) + \frac{\varepsilon}{2}.
 \end{aligned}$$

Ha tehát $\ell \in \mathbb{N}$ olyan, hogy

$$\frac{(b-a)^2}{2\ell} < \frac{\delta^2}{m^2} \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{és} \quad |y-x| < \frac{\delta}{m} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2},$$

akkor minden $k > \ell$ esetén $|f(y) - B_f^k(x)| \leq \varepsilon$, ami bizonyítja az állítást. ■

Ez a konstruktív eljárás többváltozós folytonos függvények és polinomok esete is továbbvihető a Bernstein-polinomok analóg definíciójával.

Weierstrass nem csak a polinomokra igazolt approximációs tételt, hanem a Fourier-analízis alapját képező trigonometrikus polinomokra is. Ezt legegyszerűbben a már bizonyított Stone–Weierstrass-tétel alkalmazásával láthatjuk be.

Tétel. *Ha $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos 2π -periodikus függvény, akkor létezik valós együtthatalós trigonometrikus polinomok olyan*

$$t_k(x) = a_0 + \sum_{\ell=1}^k (a_\ell \cos(\ell x) + b_\ell \sin(\ell x))$$

sorozata ($k \in \mathbb{N}$), hogy $\lim_{k \rightarrow \infty} (\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |t_k(x) - f(x)|) = 0$.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy az egységsugarú $\mathfrak{S}^1$ körvonalon értelmezett folytonos valós függvények $C(\mathfrak{S}^1, \mathbb{R})$ halmaza bijektív módon megfeleltethetők a valós számok halmazán folytonos 2π -periodikus függvények $C_{2\pi}(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(x) \equiv f(x + 2\pi)\}$ halmazának úgy, hogy vesszük a kör $r: \varphi \mapsto (\cos \varphi, \sin \varphi)$ paraméterezését a $(-\pi, \pi]$ intervallumon és az $f \in C(\mathfrak{S}^1, \mathbb{R})$ függvénynek azt az

$\hat{f} \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ függvényt feleltetjük meg, amelyre

$$\hat{f}(x) = f\left(r\left(x - 2\pi\left[\frac{x + \pi}{2\pi}\right]\right)\right).$$

Az $f(x, y) = x$ és a $g(x, y) = y$ folytonos függvények által generált $T(\mathfrak{S}^1)$ függvény-algebra (mely egyben egységelemes is, mert az $\mathfrak{S}^1$ pontjaira $f^2(x, y) + g^2(x, y) = x^2 + y^2 = 1$, és nyilván a $p(x, y) = \sum_{i,j} p_{i,j} x^i y^j$ alakú kétváltozós polinomokból áll, ahol a $p_{i,j}$ együtthatók valós számok) nyilván elválasztó is, hiszen $\mathfrak{S}^1$ két (x_a, y_a) és (x_b, y_b) pontja pontosan akkor esik egybe, ha $f(x_a, y_a) = f(x_b, y_b)$ és $g(x_a, y_a) = g(x_b, y_b)$.

Minthogy $\mathfrak{S}^1$ kompakt (hiszen teljesen korlátos és teljes), a Stone–Weierstrass-tétel szerint az eddigiek alapján következik, hogy $T(\mathfrak{S}^1)$ sűrű a $C(\mathfrak{S}^1, \mathbb{R})$ algebraiban.

Az $f(x, y) = x$ és a $g(x, y) = y$ folytonos függvényeknek a $\phi: f \mapsto \hat{f}$ által megfeleltetett valós függvények az $\hat{f}(x) = \cos x$ és $\hat{g}(x) = \sin x$, továbbá ϕ nyilván felcserélhető a lineáris kombinációval és a szorzással (vagyis $\phi(\lambda f + \mu g) = \lambda \hat{f} + \mu \hat{g} = \lambda \phi(f) + \mu \phi(g)$ és $\phi(fg) = \hat{f}\hat{g} = \hat{f}\hat{g} = \phi(f)\phi(g)$, ahol $f, g \in C(\mathfrak{S}^1, \mathbb{R})$ és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$), ezért a $\cos x$ és $\sin x$ által generált $\hat{T}$ algebra éppen $\phi(T(\mathfrak{S}^1))$. Ugyanakkor $\phi(C(\mathfrak{S}^1, \mathbb{R})) = C_{2\pi}(\mathbb{R})$ és ϕ nyilván folytonos is (a szupremum-normában), ami azt jelenti, hogy a $\hat{T}$ algebra sűrű a $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ algebraiban.

A $\hat{T}$ algebra elemei a véges sok tagot tartalmazó $t(x) = \sum_{i,j} p_{i,j} \cos^i x \sin^j x$ alakú függvények, ahol a $p_{i,j}$ együtthatók valós számok.

Tekintve, hogy minden $\ell, m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} 2 \cos(\ell x) \cos(mx) &= \cos((\ell + m)x) + \cos((\ell - m)x), \\ 2 \sin(\ell x) \cos(mx) &= \sin((\ell + m)x) + \sin((\ell - m)x), \\ 2 \sin(\ell x) \sin(mx) &= \cos((\ell - m)x) - \cos((\ell + m)x), \end{aligned}$$

a $\hat{T}$ algebra elemei pontosan a trigonometrikus polinomok.

Ezzel a tételt beláttuk. ■

Irodalomjegyzék

- [1] ANDRÁSFAI B., *Vonalak és felületek topológiája*, Polygon, Szeged, 1994.
- [2] M.A. ARMSTRONG, *Basic Topology*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 1983.
- [3] V. G. BOLTYANSZKIJ és V. A. JEFREMOVICS, *Szemléletes topológia*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.
- [4] YU. BORISOVICH, N. BLIZNYAKOV, YA. IZRAILEVICH and T. FOMENKO, *Introduction to topology*, Mir Publishers, Moscow, 1985.
- [5] E. D. BLOCH, *A First Course in Geometric Topology and Differential Geometry*, Birkhäuser, Boston, 1963.
- [6] S. BUONCRISTIANO, *Fragments of geometric topology from the sixties*, <http://www.emis.de/journals/GT/gtmcontents6.html>, 2003.
- [7] W. G. CHINN és N. E. STEENROD, *Bevezetés a topológiába*, Gondolat, Budapest, 1980.
- [8] M. D. CROSSLEY, *Essential Topology*, Springer Undergraduate Mathematics Series 5, Springer-Verlag, London, 2005.
- [9] S. GALLOT, D. HULIN and J. LAFONTAINE, *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [10] GEHÉR L., *Topológia*, Szóbeli egyetemi előadás, Szeged, 1983.
- [11] D. R. GRAYSON, *Zorn's lemma*, <http://www.math.uiuc.edu/~dan/ShortProofs/Zorn.pdf>, 2007.
- [12] A. S. KERCHRIS, *Classical descriptive set topology*, Springer, New York, 1995.
- [13] K. KURATOWSKI, *Introduction to set theory and topology*, Pergamon Press, New York, 1961.
- [14] KURUSA Á., *Bevezetés a differenciálgeometriába*, Polygon, Szeged, 1999.
- [15] KURUSA Á., *Euklidészi geometria*, Polygon, Szeged, 2008.
- [16] KURUSA Á., *Nemeuklidészi geometria*, Polygon, Szeged, 2009.
- [17] G. MCCARTY, *Topology: an introduction with application to topological groups*, Dover, New York, 1988.
- [18] A. MISCHENKO and A. FOMENKO, *A Course of Differential Geometry and Topology*, Mir, Moscow, 1988.

- [19] J. M. MØLLER, *General Topology*,
<http://www.math.ku.dk/~moller/e03/3gt/notes/gtnotes.pdf>.
- [20] V. PAULSEN, *An introduction to the theory of topological groups and their representations*, <http://www.math.uh.edu/~vern/grouprepn.pdf>, 2009.
- [21] E. N. PATTERSON, *Topológia*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.
- [22] L. A. STEEN and J. A. SEEBACH JR., *Counterexamples in topology*, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1995. REPRINT OF THE SECOND (1978) EDITION.
- [23] SZŰCS A., *Topológia*, <http://www.cs.elte.hu/~szucs/Top1-2.pdf>.

Jelölések és konvenciók

$\cdot$ és $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – euklidészi belső szorzás	φ, ψ, ϕ – leképezések
$\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ – természetes, racionális és egész számok halmaza	e, f, g, h – egyenesek
$\mathbb{R}, \mathbb{R}_{0\leq}$ – valós számok és nem negatív valós számok halmaza	α, β, γ – szögek
$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ – valós sík és tér	$d(\cdot, \cdot)$ – metrika
$\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^2, \mathbb{P}^3$ – valós projektív egyenes, sík és tér	$ \cdot $ – abszolútérték, norma, vektorok hossza
κ, λ, μ – valós számok	$\partial \mathcal{D}$ – a $\mathcal{D}$ ponthalmaz határa
x, y, z – valós számok	$\overset{\circ}{\mathcal{D}}$ – a $\mathcal{D}$ ponthalmaz belseje
q, r, s – racionális számok	$\mathbb{B}^n(\varrho)$ – az n -dimenziós ϱ sugarú gömb $\mathbb{R}^n$ -ben
i, j, k – természetes vagy egész számok	$\mathbb{B}^n$ – $\mathbb{R}^n$ egységgömbje ($\mathbb{B}^n = \mathbb{B}^n(1)$)
$(i_1, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_k)$	$\mathbb{S}^{n-1}$ – $\mathbb{R}^n$ egységgömbjének felszíne ($\mathbb{S}^{n-1} = \partial \mathbb{B}^n$)
– a k -indexből a j -edik elhagyásával keletkező $(k-1)$ -index	V.MEZŐ – vektormezők félkövére nagybetűvel
$\mathcal{V}, \mathcal{H}$ – vektorterek, halmazok és tartományok írott nagybetűvel	$\overset{\circ}{\mathcal{H}}$ – halmaz belseje
$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ – vektorok félkövére kisbetűvel	$\bar{\mathcal{H}}$ – halmaz lezártja
$\mathbf{M}$ – mátrix	$\circ$ – függvény-összetétel
$\det, \det_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k}, \overline{\det}_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k}$	∂_i – az i -edik változó szerinti parciális deriválás
– determináns, al-determináns és komplementer al-determináns	T_P – a P pont körüli érintőtér
P, Q, R – pontok dőlt nagybetűvel	$T\mathcal{M}$ – az $\mathcal{M}$ sokaság érintőnyalábja
$\overline{PQ}$ – pontpár szakasza	$\dots_i$ – a sorból egyedül az i indexű elem hiányzik
$\overrightarrow{PQ}$ – rendezett pontpár által reprezentált szabad vektor	S_n – az n -rendű permutációk szimmetrikus csoportja
	$\delta_{i,j}$ – a Kronecker-delta, mely 1, ha $i = j$ és 0, ha $i \neq j$

Konvenciók

Minden képletet szigorúan balról jobbra olvasunk, és az első értelmezhető részt azonnal értelmezzük. Ennek megfelelően az operátorok minden más műveletnél előbb hajtandók végre, tehát nem mindig szükséges zárójel használata, vagyis $\mathbf{X}(f)$ ugyanazt jelenti, mint $\mathbf{X}f$.

Amikor ez nem okozhat félreértést, ugyanazon a néven jelöljük egy függvény két paraméterezését. Más szóval az $f(x)$ az $f(x(t))$ jelölés rövidítése is lehet, amennyiben az $x(t)$ függvényt a szöveggörnyezet meghatározza.

Amikor ez nem okozhat félreértést, a függvény-egyenleteknél az azonos paramétereket elhagyjuk. Más szóval az $f(x) = g(x)$ egyenletet az $f = g$ jelöléssel rövidítjük, azzal, hogy ilyenkor a paramétereket mindig a szöveggörnyezet által meghatározott azonos pontban vesszük.

Görög betűk

név	kisbetű	nagybetű	írott	név	kisbetű	nagybetű	írott
alfa	α			nű	ν		
béta	β			kszí	ξ	Ξ	
gamma	γ	Γ		omikron	$\omicron$		
delta	δ	Δ		pí	π	Π	ϖ
epsilon	ϵ		ε	ró	ρ		ϱ
zéta	ζ			szigma	σ	Σ	ς
éta	η			tau	τ		
theta	θ	Θ	ϑ	üpszilon	υ	Υ	
iota	ι			fi	ϕ	Φ	φ
kappa	κ		κ	chi	χ		
lambda	λ	Λ		pszí	ψ	Ψ	
mű	μ			omega	ω	Ω	

Név- és tárgymutató

A

abszolút
~ konvergens, 23
~ környezet retraktum, 21
alaphalmaz, 1
antidiszkrét, 1
atlasz, 76
átmenetfüggvény, 76

B

Baire
~-kategoría
első ~, 82
második ~, 83
~ reziduális, 83
~-tér, 83
~-tétel, 84
~ metrikus térre, 83
Banach-algebra, 54
baricentrikus koordináták, 68
bázis, 4
szub~, 4
belső, 7
~ pont, 7
Bernstein-polinom, 87
Bolzano–Weierstrass-tétel, 26 , 86
Borsuk-tétel, 66 , 72
homotóp folytatási ~, 21

Borsuk–Ulam-tétel, 73
Brouwer-tétel
~ fixpont, 72
~ tartomány-invariancia, 74

C

Cantor-tulajdonság, 13
Cauchy-féle sorozat, 45
Cauchy-tulajdonság, 45

D

diffeomorfizmus, 76
diffeomorf sokaság, 77
differenciálható sokaság, 76
diszjunkt unió, 7

E

egzotikus gömb, 77
egyenletesen konvergál, 22
egyszeresen összefüggő, 30
egyszerűen összefüggő, 30
előbázis, 4
érintkezési pont, 7
erősebb, 1

F

F_σ -halmaz, 2

fedés, 10

lokálisan véges $\sim$, 10

$\sim$ fibruma, 32

nyitott $\sim$, 10

$\sim$ rétegszáma, 32

$\sim$ triviális, 32

fedő

$\sim$ leképezés, 32

$\sim$ rendszer, 10

$\sim$ tér, 32

$\sim$ utak tétele, 32

filter, 40

fokszám, 70

folytonos, 15

egyenletesen $\sim$, 53

pontban $\sim$, 16

$\sim$ sági pont, 16

fundamentális csoport, 35 , 37

G

G_δ -halmaz, 2

gyengébb, 1

H

ε -hálózat, 47

halmaz

$\sim$ lezártja, 7

δ - $\sim$, 84

σ - $\sim$, 84

halmazosztály-bővítés, 84

Hamel-bázis, 82

háromszög-egyenlőtlenség, 42

határ, 79

$\sim$ érték, 9

határpont, 7

Hausdorff-távolság, 46

Hausdorff-tér, 3

Heine–Cantor-tétel, 53

homeomorf, 19 , 19

homotóp, 20

homotopikus csoport, 35

első $\sim$, 35

homotópia-osztály, 33

hurok, 28

X - $\sim$ osztály, 34

I

indukált,

$\sim$ homomorfizmus, 35

$\sim$ leképezés, 31

irányítható, 78

irányított, 78

izolált pont, 9

J

Jordan-görbe, 74

$\sim$ tétel, 75

K

kiválasztási

$\sim$ axióma, 81

$\sim$ függvény, 81

Kolmogorov-tér, 3

kommenzurábilis, 43

kompakt, 10

lokálisan $\sim$, 10

szekvenciálisan $\sim$, 12

komplementer, 2

komponens

összefüggő $\sim$, 27

útszerűen összefüggő $\sim$, 29

kontrakció, 52

konvergens, 9 , 40

koordináta-környezet, 76

környezet, 5

$\sim$ bázis, 5

$\sim$ filter, 40

$\sim$ ponté, 2

zárt $\sim$, 2

Kuratowski-lemma, 81

külső pont, 7

L

Lebesgue-lemma, 53

lefed, 10

Lindelöf-tér, 10

erősen $\sim$, 10

M

metrika, 42

természetes korlátos $\sim$, 42

metrikus tér, 42

korlátos $\sim$, 47

teljesen korlátos $\sim$, 47

metrizálható, 43

N

normális, 3

nyílt halmaz, 1

Ö

örökölt topológia, 4

összefüggő, 26

egymással $\sim$, 27

útszerűen $\sim$, 28

úttal $\sim$, 29

összehúzható, 29

P

paraméterezés, 76

partíció, 26

j -edik projekció, 6

R

ragasztási lemma, 17

reguláris, 3

teljesen $\sim$, 19

$\sim$ tartomány, 78

Riesz-féle metszetfeltétel, 11

S

Schönfliess-tétel, 75

seholsem sűrű, 13

Stone–Weierstrass-tétel, 56

sündisznó-tétel, 71

sűrű, 13

Sz

szeparábilis, 14

szeparáló, 56

szétválasztó függvény, 19

szétválasztási axiómák, 2

szimmetrikus, 58

szimplex, 67

szimpliciális komplexus, 67

$\sim$ dimenziója, 67

$\sim$ egyszerű, 67

szimpliciális leképezés, 68

szinthalmaz, 24

szorzattopológia, 6

szűkebb, 1

T

T_0 , 2

T_1 , 2

T'_1 , 2

T_2 , 2

T_3 , 2

T_{34} , 19

T'_3 , 2

T_4 , 2

T'_4 , 2
 teljes, 45
 térkép, 76
 természetes topológia, 43
 $\sim$ valós számokon, 1
 $\sim$ mellékosztálya, 62
 Tietze-féle folytatási tétel, 24
 topológia, 1
 bővebb $\sim$, 1
 finomabb $\sim$, 1
 diszkrét $\sim$, 1
 durvább $\sim$, 1
 relatív $\sim$, 4
 topologikus
 $\sim$ csoport, 57
 $\sim$ tér, 1
 $\sim$ sokaság, 76
 $\sim$ szorzat, 6
 torlódási pontja, 8
 transláció
 bal $\sim$, 58
 jobb $\sim$, 58
 trianguláció, 67
 $\sim$ durvasága, 68
 $\sim$ felbontása, 68
 $\sim$ finomítása, 68
 $\sim$ finomsága, 68
 finomabb $\sim$, 67

Tyihonov
 $\sim$ -tér, 19
 $\sim$ -tétel, 11 , 42

U

ultrafilter, 40
 uniform ter, 54
 Urison
 $\sim$ -lemma, 19
 $\sim$ beágyazási tétele, 43
 út, 28
 $\sim$ ak szorzata, 28
 $\sim$ felemelése, 33
 transzverzális $\sim$, 31

V

végismetszet-tulajdonság, 1 , 11

W

Weierstrass
 általánosított $\sim$ -tétel, 18
 $\sim$ approximációs tétele, 86
 Whitney, 77

Z

zárt, 2
 Zorn-lemma, 81

Tennivalók listája

Kivonat. Ez egy remek kis lista arról, hogy mi mindent kellene még ebben az anyagban tenni ... :-).

■ Példák olyan terekre, ami T_0 de nem T_1 , stb...	3
■ Példák szekvenciális kompakt de nem kompakt	12
■ Két $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ ($n > 1$) leképezés fokszáma megegyezik, akkor homotópok	71
■ Jordan-görbe fokszámanak bizonyításához ábra kell.	74
■ Ábra kell az $\mathbb{S}^1$ két azonos fokú leképezéséhez.	75
■ Szakaszt tartalmazó Jordan-görbés ábra kell a tételhez.	75