

Tomográfia egy matematikus szemével

(Mindennapok tomográfiájának matematikájáról)

Kurusa Árpád

Szegedi Tudományegyetem
TTIK, Bolyai Intézet, Geometria Tanszék
<http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa>

2014. nov. 11. 19⁰⁰

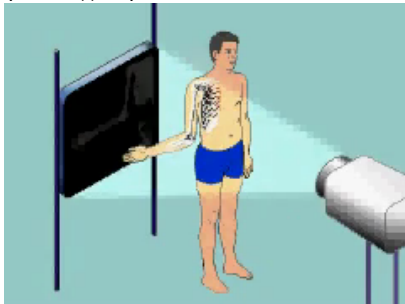


Eötvös-Esték, Eötvös Loránd Kollégium, Szeged

A mozgó képekhez és filmekhez Adobe PDF Reader szükséges.

Röntgen-készülék

- 1 1895-ben Wilhelm Conrad **Röntgen** felfedezi az X-sugárzást, melyet sok helyen Röntgen-sugárzásnak hívnak. Az első Röntgen-felvétel Röntgen felesége kezéről készül mintegy 20 perces(!) expozícióval. Első fizikai **Nobel-díj 1905**.

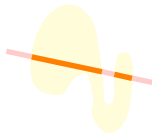


- 2 A Röntgen-készülék a fényképezéssel analóg módon működik, csak a fény helyett Röntgen-sugár feketíti a Röntgen-kép pontjait.
- 3 Ez a technika mindmáig használatos, igaz kisebb dózisú sugárral, mint régen.
- 4 Fizikai és kémia folyamatok alapján keletkező képe nem kíván matematikát.

Megjelenik a matematika

Fizikusok kimérik, hogy az I_0 erősséggel kibocsájtott sugárzás az anyagon való áthaladás közben az anyag átlag sűrűségének és vastagságának exponenciálisával csökken, vagyis ha az anyagsűrűség hely szerinti függvénye f és a sugár az ℓ egyenes mentén halad, akkor a beérkező sugárzás I erősségére: $\ln(I/I_0) = \int_{\ell} f(x) dx$.

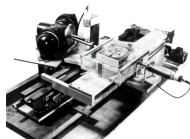
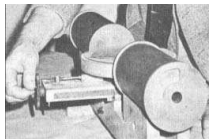
- 1 1917-ben Johan **Radon** vizsgálja a később róla elnevezett Radon-transzformációt, mely a síkon adott f függvényhez egy a sík egyeneseseinek halmazán értelmezett $\mathcal{R}f$ függvényt rendel hozzá úgy, hogy utóbbi az előbbi integrálja az egyenesen. Sikerül invertálnia is: $f = \mathcal{R}^* \mathcal{R} f$.



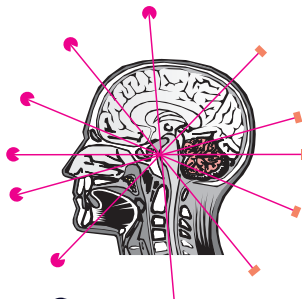
- 2 1960-as években Allan McLeod **Cormack** (orvos-matematikus) és Sir Godfrey Newbold **Hounsfield** (mérnök) egymástól függetlenül veszi észre, hogy a sugárzás fizikai és Radon matematikai formulái egy számítógép kapacitásával ötvözve a vettített kép helyett valódi 3D-képeket adhat. Orvosi **Nobel-díj 1979** megosztva.



- 3 1972-re elkészülnek az első CT-prototípusok (CT) egyenként alig 300USD költséggel.



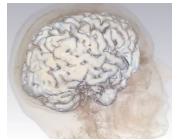
A tomográfia működési elv



- 1 Készítünk egy sugárforrást (●) amely konstans I_o erősségű (Röntgen-)sugarat bocsájt ki.
- 2 Készítünk egy sugárzás mérőt (■) amely leméri a beérkező (Röntgen-)sugár erősségét.
- 3 A feltérképezendő objektumot metsző minden egyenes egyik „végére” a sugárforrást, a másik „végére” pedig a sugárzás mérő eszközt elhelyezve az adott egyenesen lemérjük az objektumon át érkező sugárzás erősségét.
- 4 A mért értékekből interpoláljuk a többi egyenesre a „beérkező” sugárzás I erősségét.
- 5 Az így már minden egyenesre létező $\ln(I/I_o)$ érték az anyagsűrűség hely szerinti f függvénye Rf Radon-transzformáltjának egy $\mathcal{E}_\varepsilon Rf$ közelítését adja.
- 6 Alkalmazva a Radon-transzformáció $\mathcal{R}^*$ inverzét az $\mathcal{E}_\varepsilon Rf$ függvényre, az eredmény egy olyan függvény, mely az f függvénynek egy (jó?) közelítése ($f \sim \mathcal{R}^* \mathcal{E}_\varepsilon Rf$).

E módszer csak az objektum egy szeletét képes meghatározni, ezért Cormack a tomos és grafia görög szavakból kiindulva a módszert *tomográfiának* nevezte el → **computed tomography**.

Egy mai számítógép a metszetek sűrűségfüggvényeiből térbeli képeket tud készíteni.



CAT: Számítógépes axiális tomográf



Egy modern készülék akár 1-2mUSD összegbe is kerülhet, de sokkal gyorsabb és akkurátusabb, mint a korábbi készülékek. Ezt a sugarak és érzékelők számának valamint a forgás sebességének növelésével érik el. Persze sokkal nagyobb számítógépek is kellenek a rengeteg adat feldolgozásához.

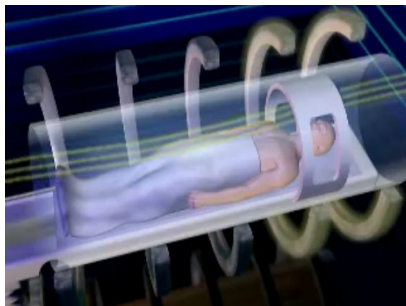


Ma már megy ez mozgó alkatrész nélkül is: [Advanced Electron Beam CT](#)

MRI: mágnesrezonanciás tomográf

Ezt a módszert sok vizet tartalmazó testek esetén lehet jól alkalmazni.

- ➊ Egy nagy mágnes belsejébe helyezve a testet, a hidrogénatomok forgástengelyét be lehet állítani egyformára.
- ➋ Amikor a mágnesességet kikapcsoljuk, akkor ezek az atomok visszatérnek szokásos forgási helyzetükbe.
- ➌ A visszaálláskor kicsi elektromos rádióhullámot keltenek
- ➍ A mérési pontokon tehát ezen hullámok eredőjét mérik.

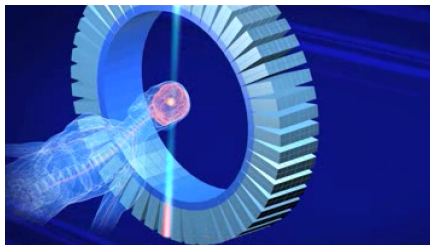


Matematikailag (nagy vonalakban) az történik, hogy amit mérünk egy-egy érzékelőn, az az abból kiinduló egyenesen elhelyezkedő hidrogénatomok eloszlásának az általuk generált rádióhullámok testen belüli gyengülésének integrálja az egyenesen mentén. Ez a Radon-transzformáció egy módosulata, amit ugyanazon matematikai módszerekkel lehet vizsgálni és invertálni.

PET: pozitron emissziós tomográf

A tipikus, de valamilyen szempontból mégis specifikus részek keresésére alkalmas.

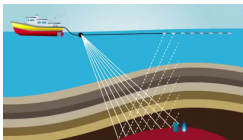
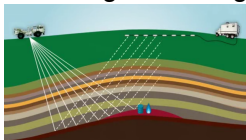
- 1 A testbe olyan reagenssel juttatnak radionukleidot, mely jobban felgyűlik a keresett területeken. (Például daganatokban.)
- 2 Amikor a reagens a test megfelelő részével reakcióba lép, a radionukleid lead egy pozitront, melynek szabad elektronnal való találkozásakor keletkező fotonpár ellentétes irányban távozik.
- 3 A mérési pontokon a beérkező fotonpárok áramát mérik.



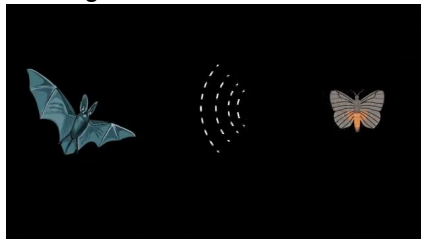
Matematikailag (nagy vonalakban) az történik, hogy amit mérünk egy-egy érzékelőn, az a bevitt kontrasztanyagnak az érzékelőből kiinduló egyenesen való eloszlása és a belőle induló sugarak testen belüli gyengülésének integrálja az egyenesen mentén. Ez is a Radon-transzformáció egy módosulata. Ha a véráramban gyűlik fel a kontrasztanyag, akkor ezt Crofton-transzformációnak is nevezik.

Infra- és ultrahangos tomográfia

Szeizmográfia – nagyban és otthon



Szonográfia

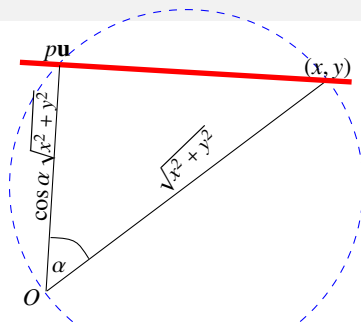


A szív vizsgálata: [Echocardiográfia](#)

Ezek mind a Radon-transzformációs matematikai elméletére (integrálgeometria) épülnek.

Invertálás

A „szép” f függvényekre a Radon-transzformáltból igen sokféle sokféle módon kapható vissza az eredeti f függvény. Mivel a napi alkalmazások nagyon sokfélék ilyen inverziós formulák mindmáig születnek. Egy ilyen 1992-ből a következő. Egy síkbeli egyenest egyértelműen megad az origóhoz legközelebbi $p\mathbf{u}$ pontja, ahol p az origótól vett távolsága, $\mathbf{u}$ pedig egy egységvektor, ezért egy $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $\mathcal{R}f$ Radon-transzformáltjának argumentuma megadható $(p, \mathbf{u})$ alakban.



Tétel. Legyen $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, melyre $f(x, y) \sqrt{x^2 + y^2}^k$ minden k természetes számra korlátos. Ekkor $f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \mathcal{R}^* F(x, y)$, ahol

$$\mathcal{R}^* F(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} F(\cos \alpha \sqrt{x^2 + y^2}, (\cos \alpha, \sin \alpha)) d\alpha \quad \text{és} \quad F(t, \mathbf{u}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|t-p| > \varepsilon} \frac{\partial \mathcal{R}f(p, \mathbf{u})}{\partial p} \frac{dp}{t-p}$$

A feltételek fontosak, mert másként előfordulhat, hogy az f integrálható minden egyenesen... A gyakorlatban elkerülhetetlen közelítések problémáját külön kell kezelni, de nem könnyű: Van a síkon olyan nem konvergens korlátos kompakt tartójú függvénysorozat, melynek Radon-transzformáltjai nullához tartanak (Hertle – 1983).

Képtérjellemezés

Az alkalmazások közelítési eljárásában fontos lenne a nem Radon-transzformációból származó eltérések kinullázása a mért eredményekben. Ez alapvetően fontossá teszi azon függvények meghatározását, melyekhez van olyan függvény, hogy annak Radon-transzformáltjai. Egy ilyen, azóta többször általánosított eredmény 1938-ból a következő.

Egy térbeli ℓ egyenest egyértelműen megad két $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ és $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ pontja, ezért egy ezek halmazán adott F függvény argumentuma megadható $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ alakban.

Tétel. *Egy F a tér egyeneseinek halmazán adott F függvény valamely a tér pontjain adott f függvény Radon-transzformáltja, ha teljesíti a következő parciális differenciálegyenlet-rendszert*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial y_i} \right) \frac{F(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Nagy pontosságú képek készítéséhez sok adat kell, és ezek begyűjtése és feldolgozása is időigényes, ezért fontos a vizsgált tartományban lévő mozgó részeket a sugarakkal elkerülni. Ezt teszi lehetővé a következő 1960-as eredmény, mely síkon és térben is teljesül.

Tétel. *Ha egy folytonos f függvényre $f(\mathbf{x})|\mathbf{x}|^k$ minden k természetes számra korlátos, és $\mathcal{R}f$ minden olyan egyenesen nulla, amely az origótól valamely $p > 0$ számnál messzebb van, akkor f minden olyan pontban nulla, amely az origótól messzebb van, mint p .*



KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!

TELEMEDICINA FÓKUSZÚ KUTATÁSOK

ORVOSI, MATEMATIKAI ÉS INFORMATIKAI TUDOMÁNYTERÜLETEKEN

TÁMOP-4.2.2.A-11/1/KONV-2012-0073 PROJEKT

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE