

Hibajegyzék és kiegészítések

a Bevezetés a differenciálgeometriába könyvhöz

Sajnos minden könyvben vannak hibák és hiányosságok, akármennyire gondos az előállítás. Ebben a dokumentumban ezek találhatók, pontosabban az eddig felfedezettek, hiszen — bár ez elvi ellentmondásnak tűnik egy véges sok karaktert tartalmazó könyvben :-) – hiba és kiegészíteni való minden javítás után marad minden könyvben.

Kérem, hogy aki bármely súlyosságú további hibát is talál e könyvben, azt jelezze a kurusa@math.u-szeged.hu elektronikus levelezési címemre.

Hibák a Bevezetés a differenciálgeometriába könyvben

A hiba helyét egy a^b vagy a_b alakú koordináta adja meg, melyek jelentése:

$$\begin{cases} a^b, & \text{az } a \text{ sorszámú oldalon felülről sorban a } b\text{-edik sorban,} \\ a_b, & \text{az } a \text{ sorszámú oldalon alulról sorban a } b\text{-edik sorban.} \end{cases}$$

Régebbi adatokkal való kompatibilitás érdekében $b < 0$ esetén $a^b := a_{-b}$.

<u>hely</u>	<u>hiba és javítása</u>
4^2	$S_n = S(s_0^n, s_1^n, s_2) \longrightarrow S_n = S(s_0, s_1^n, s_2^n)$
5^4	$\langle \lim_{n \rightarrow \infty} d_n, \mathbf{n}(s_0) \rangle \longrightarrow \langle \lim_{n \rightarrow \infty} d_n, \kappa(s_0) \mathbf{n}(s_0) \rangle$
8^{-2}	Beszúrando a síkgörbék alaptétele előjeles görbülettel, ami alább a K.1. Tétel
9^3	$= \langle \mathbf{m}(s), \dots \langle \mathbf{m}(s), \dots \longrightarrow = \langle \mathbf{m}, \dots \langle \mathbf{m}, \dots$
9^{-6}	körre deformálható $\longrightarrow$ körre alakítható
11^8	a κ szélsőértékhe-lyei $\longrightarrow$ a κ szélsőértékei
16^{-1}	irányával. $\longrightarrow$ irányával, mint például a koncentrikus köröknél.
21^{10}	Az ebben a környezetben érvényesülő paraméterezést $\longrightarrow$ Ezt a környezetet és a hozzá tartozó paraméterezést
21^{16}	differenciálható. $\longrightarrow$ differenciálható, ahol $U_{\mathcal{F}}$ és $U_{\mathcal{G}}$ rendre az $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ felület egy-egy koordináta-környezete.
21^{-2}	paraméter vonalak $\longrightarrow$ paramétervonalak

- 22⁻¹⁵ A $\varphi \dots$ mondjuk, ha a $\dots$ paraméterezése. $\longrightarrow$ e kétsoros bekezdés *törlendő*, mert a 21. oldalon a második definíció már meghatározta.
- 22⁻² $\mathbf{w} = \dot{\varphi}(P)\mathbf{v} \longrightarrow \mathbf{w} = (\varphi \circ r)'(r^{-1}(P)) (\dot{r}(r^{-1}(P)))^{-1} \mathbf{v}$
- 23¹ $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{w} \longrightarrow (\varphi \circ r)'(r^{-1}(P)) (\dot{r}(r^{-1}(P)))^{-1} : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{w}$
- 23⁴ $T_P \mathcal{F}_2 \longrightarrow T_{\varphi(P)} \mathcal{F}_2$
- 23⁻¹² Általában $\longrightarrow$ **Konvenció**. Általában
- 23⁻¹¹ Ebben az értelemben $\longrightarrow$ *Új bekezdés után* Ebben az értelemben
- 23⁻¹⁰ irányítható, egy $\longrightarrow$ irányítható, mert egy
- 27³ $\mathbf{E}_i$ vektormezők $\longrightarrow$ $\mathbf{E}_i$ vektorok
- 27⁻¹⁰ vektorokra és $\alpha \longrightarrow$ vektorokra, valamint α
- 28⁸ jellemző mennyiségek, hanem $\longrightarrow$ jellemző, hanem
- 29¹² Figyeljük meg, hogy $\longrightarrow$ Vegyük észre, hogy
- 31⁻⁹ vektormező $\longrightarrow$ érintővektor-mező
- 33² differenciálegyenlet-rendszerre, akkor $\longrightarrow$ differenciálegyenlet-rendszerre,
- 33⁻⁴ $t(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1) \longrightarrow t(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$
- 33⁻³ $t(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1) \dots t(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1) \longrightarrow t(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \dots t(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$
- 34⁻² Általános görbét szakaszonként geodetikusokkal közelítve, a párhuzamos eltolást pedig a geodetikusokon való párhuzamos eltolással közelítve, megkapjuk belülről, az általános görbén való párhuzamos eltolást. *Ez helyes, de talán egyszerűbb a következő.* $\longrightarrow$ A 30-adik oldal alján közölt tétel szerint a $\nabla_{\mathbf{v}}$ kovariáns derivált meghatározható egy $\mathbf{v}$ irányba induló görbén való párhuzamos eltolásból, annak deriváltja. Mivel geodetikus minden irányba, minden sebességgel idul, a $\mathbf{v}$ irányba induló geodetikus választásával a $\nabla_{\mathbf{v}}$ kovariáns derivált belsőgeometriai mennyiségekből számítható, hiszen a geodetikus és azon a párhuzamos eltolás is belsőgeometriai mennyiség. Immár ∇ ismeretében, a párhuzamos eltolás általános görbéken a párhuzamosság definíciójából következik.
- 35⁻⁶ normálisa $\longrightarrow$ normális vektormezője
- 36⁻² $\kappa_{\min} \longrightarrow \kappa_{\min}$
- 37⁴ $t_{\max} \longrightarrow t_{\max}$
- 37⁵ $t_{\max} \longrightarrow t_{\max}$
- 37⁶ $\kappa_{\max}, t_{\max} \longrightarrow \kappa_{\max}, t_{\max}$
- 37⁷ $\kappa_{\max}, t_{\max}, t_{\max} \longrightarrow \kappa_{\max}, t_{\max}, t_{\max}$
- 37⁸ $t_{\max} \longrightarrow t_{\max}$
- 37⁹ $\kappa_{\max} \longrightarrow \kappa_{\max}$
- 37¹⁰ $= \kappa_{\max}, = t_{\max} \longrightarrow$ törlendők
- 40¹ $d_{\mathbf{Y}} d_{\mathbf{X}} f \longrightarrow d_{\mathbf{X}} d_{\mathbf{Y}} f$

- 40⁹ $-d_Y d_Z X + \longrightarrow -d_Y d_Z \mathbf{X} +$
- 42¹ A d deriváció $\longrightarrow$ A nyilván folytonos d deriváció
- 43⁴ $\frac{d(f \circ \varphi \circ \zeta_t(\varphi^{-1}(P)))}{t} \Big|_{t=0} \longrightarrow \frac{d(f \circ \varphi \circ \zeta_t(\varphi^{-1}(P)))}{dt} \Big|_{t=0}$
- 43¹⁵ rendelve $\longrightarrow$ rendeljük
- 47⁻⁵ Egy felület $\mathcal{D}$ egyszeresen összefüggő részhalmazát $\longrightarrow$ Egy felület egyszeresen összefüggő $\mathcal{D}$ részhalmazát
- 50⁶ kiegészítendő $\longrightarrow$ a grad és a Laplace-operátorral, illetve az ez utóbbira vonatkozó K.4 Tétellel
- 50⁻³ $\dot{G}_1 \partial_1 r + \dot{G}_2 \partial_2 r \longrightarrow \dot{g}_1 \partial_1 r + \dot{g}_2 \partial_2 r$
- 53⁸ „Theorema elegantissima” $\longrightarrow$ „Theorema elegantissimum”
- 54¹⁶ Mivel ... határértéke éppen ..., vagyis $\longrightarrow$ ezt az állítást a könyv szándékosan *nem igazolja*, de Varjú Péter írásban átadott bizonyítását a K.2. Tétel bizonyítása tartalmazza.
- 54¹⁹ $\Delta\alpha = \int_{\mathcal{D}} \kappa dF \longrightarrow$
 $\Delta\alpha = \alpha(\partial\mathcal{D}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta\alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(\partial(\bigcup_{\mathcal{N}_{i,j} \subset \mathcal{D}} \mathcal{N}_{i,j}))$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mathcal{N}_{i,j} \subset \mathcal{D}} \int_{\mathcal{N}_{i,j}} \kappa dF = \int_{\mathcal{D}} \kappa dF$
- 54²⁰ a vektor és a $\longrightarrow$ a páhuzamosan körbetolt vektor és a
- 57⁻⁴ *beszúrás a 2.10.2 szakasz végére* $\longrightarrow$ Nem umbilikus pontokra Hilbert lemmájának szép következménye Liebmann tétele. Lásd a K.6 és K.7 Tételeket!
- 59⁻¹³ hajlítható, vonal-, torz- $\longrightarrow$ hajlítható, torz-
- 64⁻¹⁰ görbületű felület $\longrightarrow$ görbületű forgás felület
- 64⁻⁶ tekintetében, és ... felületet. $\longrightarrow$ tekintetében. *mondatrész törlése*
- 64⁻⁴ $(s/\sqrt{|\kappa|}) \longrightarrow (t/\sqrt{|\kappa|})$
- 67² illetve $\longrightarrow$ illetve *nyomtatási hiba*
- 72⁻⁴ *alaptenzornak* nevezett tenzor mátrixa $\longrightarrow$ *alaptenzor* mátrixa
- 72⁻² Figyeljük meg ismét, hogy ... felszínmérték! $\longrightarrow$ Figyeljük meg, hogy ... felszínmérték sűrűsége!
- 73⁹ $\mathbb{R}^n$ nyílt részhalmazával. $\longrightarrow$ a nyílt B^n gömbbel.
- 73¹⁰ $U \dots U \longrightarrow \mathcal{U} \dots \mathcal{U}$
- 73¹¹ $(r, U) \longrightarrow (r, \mathcal{U})$
- 75⁻¹³ $r_{P_j}(R) = r_{P_j}(Q) \longrightarrow r_{P_j}^{-1}(R) = r_{P_j}^{-1}(Q)$
- 75⁻⁴ $\dots = r_{P_j}^{-1} \circ \bar{r}_{P_j} = \dots \longrightarrow \dots = r_{P_j}^{-1} \circ \bar{r}_{P_j}^{-1} = \dots$
- 79¹ x_j és x_k tényezők $\longrightarrow$ $x_j x_k$ szorzat tényezőinek
- 80¹¹ $\mathbf{v} \in T\mathcal{L} \longrightarrow \mathbf{v} \in T_P \mathcal{L}$
- 80⁻³ környezet környezete, az leképezés $\longrightarrow$ környezet, a leképezés
- 81¹ bázisbontást. $\longrightarrow$ bázisbontást, és legyen P a $\mathfrak{t}$ tartópontja.
- 81² $\bar{r}_x(P) = \dots \longrightarrow \bar{r}_x(\mathfrak{t}) = \dots$

- 81⁴ $\bar{r}_y(P) = \dots \longrightarrow \bar{r}_y(\mathbf{t}) = \dots$
- 81⁻¹² $\mathbf{v} = \dots \longrightarrow \sum_{k=1}^n \mathbf{v}_k \frac{\partial}{\partial y_k} = \dots$
- 84⁷ $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}f] = \dots \longrightarrow [\mathbf{X}, f\mathbf{Y}] = \dots$
- 86⁻¹¹ ne-melfajuló $\longrightarrow$ nem-elfajuló
- 86⁻⁶ $F(\Psi(x_1, \dots \longrightarrow F(\Psi_y(x_1, \dots$
- 87⁻¹⁴ nyílt halmazzal $\longrightarrow$ nyílt halmazzal
- 88¹ Legyen $\varphi_t: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ az $\mathbf{F}$ folyama. $\longrightarrow$ Mivel $\mathcal{M}_f^{[a,b]}$ kompakt, létezik $\varphi: [0, b-a] \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ az $\mathbf{F}$ folyama. Legyen $\varphi_t = \varphi(t, \cdot): \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$.
- 88² $\dots = \langle \mathbf{F}(P), \text{grad } f(P) \rangle \equiv \dots \longrightarrow \dots = g_P \langle \mathbf{F}(P), \text{grad } f(P) \rangle \equiv \dots$
- 88¹² nemdegenerált $\longrightarrow$ nemelfajuló
- 88⁻¹¹ nem elfajuló $\longrightarrow$ nemelfajuló
- 89¹¹ $\bar{r}'(P) = \dots \longrightarrow \bar{r}'(\delta) = \dots$
- 90⁴ tenzornyaláb differenciálható $\longrightarrow$ tenzornyaláb kanonikusan differenciálható
- 90⁵ $n^{r+s+1} \longrightarrow n + n^{r+s}$
- 90⁶ $\bar{r}: T^{r,s} \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \bar{r}: T^{r,s} \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^{n+n^{r+s}}$
- 90⁻⁵ $[h]_{i,j} \dots$ aldeterminánsát $\longrightarrow \det[h]_{i,j} \dots$ adjungált aldeterminánsát [9, 5.§]
- 91⁶ $\Lambda^k T^* \mathcal{M}$ külsőformanyaláb is differenciálható $\longrightarrow \tilde{\Lambda}^k T^* \mathcal{M}$ külsőformanyaláb is $n + \binom{n}{k}$ dimenziós differenciálható
- 94⁻¹³ differenciál formából $\longrightarrow$ differenciálformából
- 97¹ $P \in \mathcal{V}_{i+1} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{V}}_i \longrightarrow P \in \mathcal{V}_{i+1} \setminus \mathcal{V}_i$
- 97² $\bar{\mathcal{V}}_{i,P} = \hat{\mathcal{V}}_P \cap (\overset{\circ}{\mathcal{V}}_{i+2} \setminus \mathcal{V}_{i-1}) \longrightarrow \bar{\mathcal{V}}_P = \hat{\mathcal{V}}_P \cap (\overset{\circ}{\mathcal{V}}_{i+2} \setminus \mathcal{V}_{i-1})$
- 97³ $\varphi_P: \bar{\mathcal{V}}_{i,P} \rightarrow \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi_P: \bar{\mathcal{V}}_P \rightarrow \mathbb{R}^n$
- 97³ $\varphi_P(\bar{\mathcal{V}}_{i,P}) \supseteq 3 \cdot B^n \longrightarrow \varphi_P(\bar{\mathcal{V}}_P) \supseteq 3 \cdot B^n$
- 97⁴ és $\hat{\mathcal{V}}_P = \varphi_P^{-1}(B^n)$. Ekkor nyilván $\longrightarrow$ *törlendő*. Ekkor nyilván
- 97⁴ $\bigcup_{P \in \mathcal{V}_{i+1} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{V}}_i} \hat{\mathcal{V}}_P \longrightarrow \bigcup_{P \in \mathcal{V}_{i+1} \setminus \mathcal{V}_i} \mathcal{V}_P$
- 97⁶ melyek $\tilde{\mathcal{V}}_j$ környezetei $\longrightarrow$ melyek $\mathcal{V}_{P_j}$ környezetei
- 97⁷ új $\{\tilde{\mathcal{V}}_j^i\}$ fedőrendszeréhez $\longrightarrow$ új $\{\mathcal{V}_{P_j}^i\}$ fedőrendszeréhez
- 97⁸ megfelelő $\{\tilde{\varphi}_j^i\}$ leképezésrendszeréhez $\longrightarrow$ megfelelő $\{\varphi_{P_j}^i\}$ leképezésrendszeréhez
- 97¹⁴ $f(\tilde{\varphi}_j^i(P))$, ha $P \in \tilde{\mathcal{V}}_j^i \longrightarrow f(\varphi_j^i(P))$, ha $P \in \mathcal{V}_{P_j}^i$
- 97⁻¹¹ Tegyük fel, hogy $\longrightarrow$ Bármely P ponthoz pontosan egy olyan i index létezik, melyre
- 97⁻¹⁰ , és legyen $\longrightarrow$. Legyen
- 97⁻⁸ $\mathcal{P} \cap \tilde{\mathcal{V}}_j^k \subseteq \dots \longrightarrow \mathcal{P} \cap \mathcal{V}_{P_j}^k \subseteq \dots$
- 97⁻⁷ $\tilde{\mathcal{V}}_j^k \longrightarrow \mathcal{V}_{P_j}^k$

- 97⁻⁶ $\tilde{\mathcal{V}}_j^k \longrightarrow \mathcal{V}_{P_j}^k$
- 98¹ olyan μ n -ed fokú differenciálforma $\longrightarrow$ olyan n -ed fokú μ differenciálforma
- 99² abszolút ... abszolút $\longrightarrow$ abszolút
- 99⁹ $\omega \in \tilde{\Lambda}^n T^n \mathcal{M} \longrightarrow \omega \in \tilde{\Lambda}^n T^* \mathcal{M}^n$
- 101⁷ határ-határa $\longrightarrow$ határ határa
- 104⁵ **Tétel.** ... $\longrightarrow$ tétel szövegét *dólttel kell szedni.*
- 105⁻⁷ Ugyanígy párhuzamosnak ... eltűnik. $\longrightarrow$ a 106. oldal aljára *másolandó majd törlendő* így: Párhuzamosnak ... eltűnik.
- 106⁻⁰ *Beszúrandó* és másolódik 105/-7-ből. $\longrightarrow$ Tenzorok kovariáns deriváltja nyilván tenzor. Párhuzamosnak ... eltűnik.
- 107⁻¹² $\sigma R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{T}) = \dots \longrightarrow \sigma(\nabla R(\mathbf{X}; \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{T})) = \dots$
- 107⁻⁶ $[\nabla_{\mathbf{X}}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]]\mathbf{T} \longrightarrow [\nabla_{\mathbf{X}}, [\nabla_{\mathbf{Y}}, \nabla_{\mathbf{Z}}]]\mathbf{T}$
- 107⁻⁵ $-[\nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \nabla_{\mathbf{Z}}]}\mathbf{T} - \nabla_{[[\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{Z}]]\mathbf{T} \longrightarrow -[\nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \nabla_{\mathbf{Z}}]}\mathbf{T} + \nabla_{[[\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{Z}]]\mathbf{T}$
- 110¹⁵ Mindenekelőtt vegyük észre, hogy ha $\longrightarrow$ Mindenekelőtt vegyük észre, hogy az exponenciális leképezés a Pickard–Lindelöf-tétel miatt differenciálható, és ha
- 110⁻¹³ mostmár $\longrightarrow$ most már
- 111² $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T\mathcal{M} \longrightarrow \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \tilde{T}\mathcal{M}$
- 111³ a Struktúra-tétel első bekezdésének jobb fogalmazása $\longrightarrow$ Legyen $(r, \mathcal{U})$ a $P \in \mathcal{M}$ pont egy normál koordináta-környezete, és legyen az $\mathbf{X}_i$ vektormező a $\partial_i \in T_{r(0)}\mathcal{M}$ vektor párhuzamos kiterjesztése az $r(0)$ ponton átmenő geodetikusokon. Ezek mintájára legyen $(\bar{r}, \bar{\mathcal{U}})$ a $\bar{P} \in \bar{\mathcal{M}}$ pont egy normál koordináta-környezete, és legyen az $\bar{\mathbf{X}}_i$ vektormező a $\bar{\partial}_i \in T_{\bar{r}(0)}\bar{\mathcal{M}}$ vektor párhuzamos kiterjesztése az $\bar{r}(0)$ ponton átmenő geodetikusokon.
- 113⁶ párhuzamossággá $\longrightarrow$ párhuzamossága
- 113¹⁰ felcserélhető páratlan fokú $\longrightarrow$ felcserélhető *páros* fokú
- 117⁻⁹ A két P és Q pontot $\longrightarrow$ A P és Q pontokat
- 117⁻⁹ összekötő görbék $\longrightarrow$ összekötő szakaszonként differenciálható görbék
- 117⁻⁹ infimumát a két pont $\longrightarrow$ infimumát a nyilvánvaló szimmetria miatt a két pont
- 117⁻⁹ „A ... nevezzük.” $\longrightarrow$ Ezt a mondatot a 4.3 szakasz elejére mozgatjuk, ahol külön definícióként szerepel.
- 117⁻³ a metrikával együtt $\longrightarrow$ a Riemann-metrikával együtt
- 121⁻³ rögzítetük $\longrightarrow$ rögzítettük
- 123⁻¹ $\dots + g\langle \nabla_{\dot{\nu}_s(0)} \nabla_{\dot{\nu}_s} \dot{\nu}_t, \dot{\nu}_t(s) \rangle - (g\langle \nabla_{\dot{\nu}_s(0)} \dot{\nu}_t, \dot{\nu}_t(s) \rangle)^2 \dots \longrightarrow$
 $\dots + g\langle \nabla_{\dot{\nu}_s(0)} \nabla_{\dot{\nu}_s} \dot{\nu}_t, \dot{\nu}_{t=0}(s) \rangle - (g\langle \nabla_{\dot{\nu}_s(0)} \dot{\nu}_t, \dot{\nu}_{t=0}(s) \rangle)^2 \dots$
- 124³ $\dots g\langle \nabla_{\dot{\nu}_t(s)} \dot{\nu}_s, \dot{\nu}_t(s) \rangle \dots \longrightarrow \dots g\langle \nabla_{\dot{\nu}_{t=0}(s)} \dot{\nu}_s, \dot{\nu}_{t=0}(s) \rangle \dots$

- 124⁶ érvényes $g\langle\dot{\nu}_s(0), \dot{G}(s)\rangle$ nyomtatási hiba $\longrightarrow$ érvényes $g\langle\dot{\nu}_s(0), \dot{G}(s)\rangle$
- 125³ mivel a (2) a (3) állításból következik, jobb lenne, ha *fordított sorrendben* szerepelnének a tételben
- 126⁻¹⁰ Legyen ennek mentén $\longrightarrow$ Legyen eme $G^\perp$ görbe mentén
- 127² $\cdots \nabla_{\dot{\nu}_t} \dot{\nu}_s = \nabla_{\dot{\nu}_s} \dot{\nu}_t \cdots \longrightarrow \cdots \nabla_{\dot{\nu}_{t=0}} \dot{\nu}_s = \nabla_{\dot{\nu}_{s=0}} \dot{\nu}_t \cdots$
- 127⁸ *Beszúrás* $\longrightarrow$ ide kell a K.3. tétel, amit megelőz a 117-edik oldalról érkező definíció.
- 127⁸ túl egyben metrikus $\longrightarrow$ túl tehát metrikus
- 127⁹ Ahogy ... generált metrikát a sokaságon. $\longrightarrow$ *Ez a mondat törlendő.*
- 127¹² Figyeljük meg, hogy ... extrémális görbe. $\longrightarrow$ Ez a mondat a 117-edik oldalról érkező definíció mögé *mozgató*.
- 128¹⁵ Legyen $\exp_P V = Q$ és $\longrightarrow$ Legyen $\exp_P \mathbf{v} = Q$ és
- 128⁻³ $\cdots = \tau + \varepsilon \leq d(P, Q'(\varepsilon)) \longrightarrow$
 $\cdots = \tau + \varepsilon = d(P, R) - d(Q'(\varepsilon), R) \leq d(P, Q'(\varepsilon))$
- 130² a diffeomorf $\varphi \longrightarrow$ a φ
- 130⁴ izometria, akkor minden $\longrightarrow$ izometria, akkor differenciálható és minden
- 130⁹ hiszen a geodetikusok $\longrightarrow$ hiszen Hopf–Rinow-tétel miatt a geodetikusok
- 130⁹ lokálisan minimalisak $\longrightarrow$ lokálisan minimálisak
- 131⁹ *beszúrandó* $\longrightarrow$ Figyeljük meg, hogy az izometria-lemma első állítása alapján a szűrjektív izometriák mindig diffeomorfizmusok. Most belátjuk, hogy ráadásul affinok.
- 131¹⁰ egy izometria $\longrightarrow$ egy szűrjektív izometria
- 131⁻¹² $\tilde{g}_{\varphi^{-1}}\langle\tilde{\nabla}_{\varphi_*\mathbf{X}}\varphi_*\mathbf{Y}, \varphi_*\mathbf{Z}\rangle + \tilde{g}_{\varphi^{-1}}\langle\varphi_*\mathbf{Y}, \tilde{\nabla}_{\varphi_*\mathbf{X}}\varphi_*\mathbf{Z}\rangle \longrightarrow$
 $\tilde{g}_{\varphi}\langle\tilde{\nabla}_{\varphi_*\mathbf{X}}\varphi_*\mathbf{Y}, \varphi_*\mathbf{Z}\rangle + \tilde{g}_{\varphi}\langle\varphi_*\mathbf{Y}, \tilde{\nabla}_{\varphi_*\mathbf{X}}\varphi_*\mathbf{Z}\rangle$
- 131⁻¹¹ $\cdots \varphi_*\mathbf{X}\tilde{g}_{\varphi^{-1}}\langle\varphi_*\mathbf{Y}, \varphi_*\mathbf{Z}\rangle \cdots \longrightarrow \cdots \varphi_*\mathbf{X}\tilde{g}_{\varphi}\langle\varphi_*\mathbf{Y}, \varphi_*\mathbf{Z}\rangle \cdots$
- 132¹² transzverzlis $\longrightarrow$ transzverzális
- 132¹⁴ $\nabla_{\mathbf{v}}\dot{\nu}_s = \nabla_{\dot{\nu}_{s=0}(0)}\dot{\nu}_t = \cdots \longrightarrow \nabla_{\mathbf{v}}\dot{\nu}_s = \nabla_{\dot{\nu}_{t=0}(0)}\dot{\nu}_s = \nabla_{\dot{\nu}_{s=0}(0)}\dot{\nu}_t = \cdots$
- 132¹⁶ $\left(\exp(s\mathbf{v} + t s\bar{\mathbf{w}})\right) \longrightarrow \left(\exp(s\mathbf{v} + t s\bar{\mathbf{w}})\right)$
- 134¹ $\varphi(\exp_P(s\mathbf{v})) \longrightarrow \bar{G}(s) = \varphi^{-1}(\exp_P(s\mathbf{v}))$
- 134² $G(s_0 + s) = \varphi(\exp_P(s\mathbf{v})) \longrightarrow G(s_0 + s) = \bar{G}(s)$
- 134³ $= \varphi(\exp_P((s - s_0)\mathbf{v})) \longrightarrow$ *törlendő*
- 135¹⁴ Az $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ és $\mathbf{Z}$ betűkkel jelölt mennyiségek, érintő vektorok, nem vektormezők $\longrightarrow$ *helyes* jelölésük ezért egészen a 136. oldal 7. soráig bezárólag $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ és $\mathbf{z}$.
- 137³ a Jacobi-egyenlet alapján $\longrightarrow$ *ez részletesen kifejtve*
 $f_i'' = g\langle\nabla_{\dot{G}}\nabla_{\dot{G}}\mathbf{J}, \mathbf{E}_i\rangle = g\langle R(\dot{G}, \mathbf{J})\dot{G}, \mathbf{E}_i\rangle = \sum_j g\langle R(\dot{G}, f_j\mathbf{E}_j)\dot{G}, \mathbf{E}_i\rangle$
 $= \sum_j f_j g\langle R(\dot{G}, \mathbf{E}_j)\dot{G}, \mathbf{E}_i\rangle = \sum_j f_j g\langle -B(\mathbf{E}_j), \mathbf{E}_i\rangle$
 $= \sum_j f_j g\langle -\lambda_j\mathbf{E}_j, \mathbf{E}_i\rangle = -\lambda_j f_j$

$$137^3 \quad f_i'' - \lambda_i^0 f_i = 0 \longrightarrow f_i'' + \lambda_i^0 f_i = 0$$

$$137^4 \quad \begin{cases} \frac{\cos(s\sqrt{-\lambda_i})}{\cos(s_0\sqrt{-\lambda_i})}, & \text{ha } \lambda_i < 0, \\ 1, & \text{ha } \lambda_i = 0, \\ \frac{\cosh(s\sqrt{\lambda_i})}{\cosh(s_0\sqrt{\lambda_i})}, & \text{ha } \lambda_i > 0. \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \frac{\cos(s\sqrt{\lambda_i})}{\cos(s_0\sqrt{\lambda_i})}, & \text{ha } 0 < \lambda_i, \\ 1, & \text{ha } \lambda_i = 0, \\ \frac{\cosh(s\sqrt{-\lambda_i})}{\cosh(s_0\sqrt{-\lambda_i})}, & \text{ha } \lambda_i < 0. \end{cases}$$

138⁹ A metszetgörbület meghatározza a Riemann-görbületet. $\longrightarrow$ A metszetgörbület meghatározza a Riemann-görbületet, és csak argumentumai síkjától függ.

138¹¹ Ha a $\kappa_P(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ metszetgörbület nem függ az $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ bázisvektoroktól, csak az $S \subset T_P\mathcal{M}$ síktól, akkor $\longrightarrow$ Ha a $\kappa_P(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ metszetgörbület konstans, akkor

$$138^{13} \quad R(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{w} = \kappa_P(g_P\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{u} - g_P\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{v}), \longrightarrow$$

$$R(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{w} = -\kappa_P(g_P\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{u} - g_P\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{v}),$$

138¹⁴ ahol ... konstans. $\longrightarrow$ *törlendő*.

$$138^{16} \quad \tilde{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}) \longrightarrow -\tilde{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x})$$

$$138^{-8} \quad \mathbf{Z} = -\kappa(\longrightarrow \mathbf{Z} = \kappa($$

140⁶ amiből ∇R következik $\longrightarrow$ amiből $\nabla R = 0$ következik

140¹⁴ izom-etriák $\longrightarrow$ izo-metriák

$$141^{-13} \quad (1 + \frac{\kappa}{4} \sum_{i=1}^n x_i^2)^2 \longrightarrow (1 + \frac{\kappa}{4} \sum_{i=1}^n x_i^2)^{-2}$$

$$142^{-9} \quad = \lambda d_{\mathbf{X}} g\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle \longrightarrow = \lambda \mathbf{X} g\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle$$

$$142^{-8} \quad = \lambda d_{\mathbf{X}} \bar{g}\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle \longrightarrow = \lambda \mathbf{X} \bar{g}\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle$$

144⁻² hiperbolikus tér $\longrightarrow$ hiperbolikus sík

145⁴ Legyen ℓ^* az $\longrightarrow$ Legyen $\ell^* < \infty$ az

145¹⁰ négyzetek uniója. Nyilván $\mathcal{N}$ zárt, és ugyanakkor ... $\longrightarrow$ négyzetek uniójának lezártja. Ekkor $\mathcal{N}$ zárt és ...

145¹² zárt $\longrightarrow$ nyílt

145¹³ ... nyílt négyzet. Ezek a nyílt ... a $\mathcal{N} \longrightarrow$... négyzet. Ezek a nyílt ... az $\mathcal{N}$

$$145^{17} \quad s = \min_j \{ \min_i \{ \longrightarrow s = \min_i \{ \min_j \{$$

$$145^{19} \quad p = \min_j \{ \min_i \{ \longrightarrow p = \min_i \{ \min_j \{$$

145⁻⁷ egy $\ell^* + s$ fél ... négyzet $\longrightarrow$ tartalmaz egy $\ell^* + s$ fél ... négyzetet

$$146^2 \quad 0 < p < q \longrightarrow 0 < p \leq q$$

$$146^{14} \quad \partial_2 \omega(0, y) > 0 \longrightarrow \partial_2 \omega(0, y) > \partial_2 \omega(0, 0)/2 =: \varepsilon$$

146¹⁴ Eszerint ... $\pi/2$. $\longrightarrow$ *törlendő*

$$146^{-9} \quad \dots dt > \omega \dots \longrightarrow \dots dt = \omega \dots$$

$$146^{-9} \quad y) > \varepsilon, \longrightarrow y) > (y_0 - y)\varepsilon,$$

$$146^{-8} \quad 0) > \varepsilon \longrightarrow 0) > \omega(0, y) - \omega(0, 0) > y\varepsilon$$

$$146^{-8} \quad \varepsilon < \omega(x, y) < \pi - \varepsilon \longrightarrow y\varepsilon < \omega(x, y) < \pi - (y_0 - y)\varepsilon$$

$$146^{-7} \quad \sin \omega > \sin \varepsilon \longrightarrow \sin \omega(x, y) \geq \min(\sin(y\varepsilon), \sin((y_0 - y)\varepsilon))$$

- 146⁻⁵ $dx dy > \dots \rightarrow dx dy \geq x_0 \int_0^{y_0} \min(\sin(y\varepsilon), \sin((y_0 - y)\varepsilon)) dy = x_0 (\int_0^{y_0/2} \sin(y\varepsilon) dy + \int_{y_0/2}^{y_0} \sin((y_0 - y)\varepsilon) dy) = 2x_0 \int_0^{y_0/2} \sin(y\varepsilon) dy = 2x_0(1 + \cos(\varepsilon y_0/2))/\varepsilon$
- 147³ hiperbolikus tér $\rightarrow$ hiperbolikus sík
- 147⁴ Bolyai-geometria $\rightarrow$ 2-dimenziós Bolyai-geometria
- 147⁵ euklideszi $\rightarrow$ euklidészi
- 148⁻⁸ $= \bar{r}_i(x) \frac{1/\sqrt{\kappa}}{\sqrt{|x|^2 + 1/\sqrt{\kappa}}} \rightarrow = \bar{r}_i(x) \frac{1/\sqrt{\kappa}}{\sqrt{|x|^2 + 1/\kappa}}$
- 152⁻¹² ezért g_κ megegyezik $\rightarrow$ ezért g^κ megegyezik
- 152⁻⁹ $-\Gamma_{1,1}^m \bar{\Gamma}_{2,m}^2 \rightarrow -\bar{\Gamma}_{1,1}^m \bar{\Gamma}_{2,m}^2$
- 157⁻² *beszúrando* $\rightarrow$ A tenzorszorzás nyilván asszociatív művelet.
- 159⁻⁹ azonosságoot $\rightarrow$ azonosságot
- 160¹⁴ A következő állításnak kettő bizonyítását is adjuk. $\rightarrow$ Csak egy bizonyítás van. A mondat *törlendő*.
- 160¹⁷ $-B(\mathbf{u} \dots \rightarrow -2B(\mathbf{u} \dots$
- 160⁻¹² oldalán álló képlet $\rightarrow$ oldalán álló képlet
- 161⁻¹¹ E Bianchi-tenzor, normált $\rightarrow$ Egy Bianchi-tenzor normált
- 161⁻⁶ $\dots B(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) bc(bc - ad) \dots \rightarrow \dots B(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + bc(bc - ad) \dots$
- 161⁻¹ $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}) = \kappa(\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle g_P \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle - g_P \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle g_P \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle) \rightarrow$
 $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}) = \kappa(\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle).$
- 162¹ akkor $\rightarrow$ akkor a
- 162² $\kappa_P \rightarrow \kappa$
- 164⁸ $\mathbf{v}^1(\mathbf{x}_{1\sigma\tau}) \dots \mathbf{v}^r(\mathbf{x}_{r\sigma\tau}) \rightarrow \mathbf{v}^1(\mathbf{x}_{1\sigma\tau}) \dots \mathbf{v}^r(\mathbf{x}_{r\sigma\tau})$
- 164⁹ $\mathbf{v}^{r+1}(\mathbf{x}_{(r+1)\rho\tau}) \dots \mathbf{v}^k(\mathbf{x}_{(r+(k-r)\rho)\tau}) \rightarrow$
 $\mathbf{v}^{r+1}(\mathbf{x}_{(r+1)\rho\tau}) \dots \mathbf{v}^k(\mathbf{x}_{(r+(k-r)\rho)\tau})$
- 166⁻¹ kiegészítendő $\rightarrow$ Cartan lemmája a K.5. Tétel
- 170¹¹ „Theorema elegantissima” $\rightarrow$ „Theorema elegantissimum”
- 171⁶ vektormez $\rightarrow$ VEKT.MEZ

A lista elemeit magam és segítőkész emberek találták. Köszönöm nekik, hogy nem csak felfedezték, de tudomásomra is hozták a hibákat.

Kiegészítések a Bevezetés a differenciálgeometriába könyvhöz

K.1. Tétel – Síkörbék alaptétele. *Két síkgörbéhez akkor és csak akkor létezik mozgás, mely őket egymásba viszi, ha ívhossz szerinti paraméterezésben az előjeles görbület a két görbén azonosan egyenlő.*

Bizonyítás. Mielőtt belevágnánk, vegyük észre, hogy az előjeles görbület értéke -1 -szeresére vált, ha a görbét tükrözzük egy egyenesre.

A síkgörbék torziója 0 , görbülete pedig az előjeles görbület abszolútértéke, ezért a görbék alaptétele értelmében két síkgörbe térbeli mozgással egymásba vihető, ha ívhossz szerinti paraméterezésben az előjeles görbület a két görbén azonosan egyenlő. Ez a térbeli mozgás a síkon mozgás vagy átfodítás, utóbbi esetben a két görbe előjeles görbület előjele egymás ellentettje kell legyen, ami a tételt igazolja. ■

K.2. Tétel. *Elemi felület egy rögzített pontján áthaladó zárt felületi görbéken a párhuzamos eltolás elfordulása a görbék egyenletesen folytonos formálása mellett folytonosan változik.*

Bizonyítás. (Varjú Péter bizonyítása alapján.) Legyen az L hosszúságú, ívhossz szerint paraméterezett G görbét egyenletesen folytonos módon közelítő görbesereg C_n minden tagja szintén a $[0, L]$ intervallumon paraméterezve, és tegyük fel, hogy $C_n(0) = G(0) = G(L) = C_n(L)$.

Legyen $\mathbf{X}$ egy párhuzamos vektormező a G mentén, $\mathbf{X}_n$ pedig olyan párhuzamos vektormező a C_n görbe mentén, melyre $\mathbf{X}_n(C_n(0)) = \mathbf{X}(G(0))$.

Vizsgáljuk az

$$\mathbf{Y}_n(G(t)) := \mathbf{X}_n(C_n(t)) - \mathbf{m}(G(t))\langle \mathbf{m}(G(t)), \mathbf{X}_n(C_n(t)) \rangle$$

érintő vektormezőket a G görbe mentén. Világos, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{Y}_n(G(0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{X}_n(C_n(0)) - \mathbf{m}(G(0))\langle \mathbf{m}(G(0)), \mathbf{X}_n(C_n(0)) \rangle) = \mathbf{X}(G(0)),$$

hiszen $\mathbf{X}(G(0)) \perp \mathbf{m}(G(0))$. Ugyanakkor

$$\begin{aligned} d_{\dot{G}} \mathbf{Y}_n &= d_{\dot{C}_n} \mathbf{X}_n - d_{\dot{G}} \mathbf{m} \langle \mathbf{m}(G(t)), \mathbf{X}_n(C_n(t)) \rangle - \\ &\quad - \mathbf{m}(G(t)) (\langle d_{\dot{G}} \mathbf{m}, \mathbf{X}_n(C_n(t)) \rangle + \langle \mathbf{m}(G(t)), d_{\dot{C}_n} \mathbf{X}_n \rangle), \end{aligned}$$

amiért

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{G}} \mathbf{Y}_n &= (d_{\dot{C}_n} \mathbf{X}_n)^\perp - d_{\dot{G}} \mathbf{m} \langle \mathbf{m}_G, \mathbf{X}_n(C_n(t)) \rangle \\ &= d_{\dot{C}_n} \mathbf{X}_n - \mathbf{m}_G \langle \mathbf{m}_G, d_{\dot{C}_n} \mathbf{X}_n \rangle - d_{\dot{G}} \mathbf{m} \langle \mathbf{m}_G, \mathbf{X}_n(C_n(t)) \rangle \\ &= \nabla_{\dot{C}_n} \mathbf{X}_n + \mathbf{m}_{C_n} \langle \mathbf{m}_{C_n}, d_{\dot{C}_n} \mathbf{X}_n \rangle - \\ &\quad - \mathbf{m}_G \langle \mathbf{m}_G, d_{\dot{C}_n} \mathbf{X}_n \rangle - B(\dot{G}) \langle \mathbf{m}_G, \mathbf{X}_n(C_n(t)) \rangle \\ &= (\mathbf{m}_{C_n} - \mathbf{m}_G) \langle \mathbf{m}_{C_n}, d_{\dot{C}_n} \mathbf{X}_n \rangle + \mathbf{m}_G \langle \mathbf{m}_{C_n} - \mathbf{m}_G, d_{\dot{C}_n} \mathbf{X}_n \rangle + \\ &\quad + B(\dot{G}) \langle \mathbf{m}_{C_n} - \mathbf{m}_G, \mathbf{X}_n(C_n(t)) \rangle, \end{aligned}$$

ahol $\mathbf{m}_G = \mathbf{m}(G(t))$ és $\mathbf{m}_{C_n} = \mathbf{m}(C_n(t))$.

Mivel a $[0, L]$ zárt intervallumon folytonos függvények egyenletesen is folytonosak, $\mathbf{m}_{C_n} - \mathbf{m}_G \rightarrow \mathbf{0}$ egyenletesen a $[0, L]$ zárt intervallumon. Ebből a $\nabla_{\dot{G}} \mathbf{Y}_n \rightarrow \mathbf{0}$ egyenletes konvergencia következik a $[0, L]$ zárt intervallumon.

Legyenek az $\mathbf{Y}_n^i$ ($i = 1, 2$) olyan függvények a G görbe mentén, melyekre $\mathbf{Y}_n = \mathbf{Y}_n^1 \partial_1 r + \mathbf{Y}_n^2 \partial_2 r$. Ekkor a szokásos $G = r \circ g$ felbontás mellett

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{G}} \mathbf{Y}_n &= \nabla_{\dot{G}} \sum_{i=1}^2 \mathbf{Y}_n^i \partial_i r = \sum_{i=1}^2 (d_{\dot{G}} \mathbf{Y}_n^i \partial_i r + \mathbf{Y}_n^i \nabla_{\dot{G}} \partial_i r) \\ &= \sum_{i=1}^2 \left(d_{\dot{G}} \mathbf{Y}_n^i \partial_i r + \mathbf{Y}_n^i \sum_{j=1}^2 \dot{g}_j \sum_{k=1}^2 \Gamma_{j,i}^k \partial_k r \right) \\ &= \sum_{k=1}^2 \left(d_{\dot{G}} \mathbf{Y}_n^k + \sum_{i=1}^2 \mathbf{Y}_n^i \sum_{j=1}^2 \dot{g}_j \Gamma_{j,i}^k \right) \partial_k r \end{aligned}$$

és a $\nabla_{\dot{G}} \mathbf{Y}_n$ konvergenciája miatt $n \rightarrow \infty$ esetén $d_{\dot{G}} \mathbf{Y}_n^k + \sum_{i,j=1}^2 \mathbf{Y}_n^i \dot{g}_j \Gamma_{j,i}^k \rightarrow 0$ egyenletesen a $[0, L]$ zárt intervallumon. A Pickard–Lindelöf-tétel értelmében egy differenciálegyenlet megoldása folytonosan függ a peremérték feltételek egyenletesen folytonos változásától, így a $\mathbf{Z}_n$ érintő vektormezőre vonatkozó

$$d_{\dot{G}} \mathbf{Y}_n^k + \sum_{i,j=1}^2 \mathbf{Y}_n^i \dot{g}_j \Gamma_{j,i}^k = d_{\dot{G}} \mathbf{Z}_n^k + \sum_{i,j=1}^2 \mathbf{Z}_n^i \dot{g}_j \Gamma_{j,i}^k, \quad (k = 1, 2),$$

differenciálegyenlet-rendszer egyértelmű $\mathbf{Y}_n$ megoldásai (zárt intervallumon egyenletesen) konvergálnak a $\mathbf{Z}$ érintő vektormezőre vonatkozó

$$0 = d_{\dot{G}} \mathbf{Z}^k + \sum_{i,j=1}^2 \mathbf{Z}^i \dot{g}_j \Gamma_{j,i}^k, \quad (k = 1, 2),$$

egyenlet egyértelmű megoldásához.

Eszerint $\mathbf{Z} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{Y}_n$, és éppen a $\mathbf{Z}$ vektormezőt meghatározó differenciálegyenlet-rendszer értelmében $\mathbf{Z}$ párhuzamos vektormező a G görbe mentén. Minthogy $\mathbf{X}$ is párhuzamos és $\mathbf{Z}(G(0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{Y}_n(G(0)) = \mathbf{X}(G(0))$, ebből $\mathbf{X} = \mathbf{Z}$ következik, ami igazolja az állítást, hiszen eszerint

$$\begin{aligned} \angle(\mathbf{X}(G(L)), \mathbf{X}(G(0))) &= \angle\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{Y}_n(G(L)), \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{Y}_n(G(0))\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \angle(\mathbf{Y}_n(G(L)), \mathbf{Y}_n(G(0))). \end{aligned}$$

K.3. Tétel. *Összefüggő Riemann-sokaság a d távolsággal metrikus teret alkot, melynek metrikus topológiája megegyezik a sokaság topológiájával.*

Bizonyítás. Világos, hogy az összefüggőség miatt minden pontpárnak van távolsága, és — ahogy már említettük — ez szimmetrikus függvénye a pontpárnak. A háromszögegyenlőtlenség nyilván teljesül, hiszen

$$\begin{aligned} d(P, R) &= \inf\{L(G) : G \in \mathcal{G}_P^R\} \leq \inf\{L(G) : G \in \mathcal{G}_P^R \text{ és } Q \in G\} \\ &= \inf\{L(G) : G \in (\mathcal{G}_P^Q \cup \mathcal{G}_Q^R)\} \\ &= \inf\{L(G) : G \in \mathcal{G}_P^Q\} + \inf\{L(G) : G \in \mathcal{G}_Q^R\} = d(P, Q) + d(Q, R), \end{aligned}$$

ahol $\mathcal{G}_P^R$ jelöli a P pontot az R ponttal összekötő szakaszonként differenciálható görbék halmazát, $L(G)$ pedig a G görbe hosszát.

Nyilván $d(P, P) = 0$. Most igazolni fogjuk, hogy különböző $P \neq R$ pontokhoz rendelt távolság mindig pozitív. Rögzítsük a P egy olyan $(\mathcal{U}, r)$ koordinátakörnyezetét, melyben R nincs benne, és legyen $G \in \mathcal{G}_P^R$. Vegyük a G görbének a P ponthoz csatlakozó első differenciálható részgörbét, és legyen $G_P: [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$ ennek olyan részgörbéje, mely az $\mathcal{U}$ környezetben van és $P = G_P(0)$. Mivel a $r^{-1} \circ G_P$ görbe a $B^n \subset \mathbb{R}^n$ gömbön belül van, és annak középpontját köti össze annak S^{n-1} gömbfelszínével, minden $r^{-1} \circ G_P$ görbe biztosan tartalmazza az $\frac{1}{2}S^{n-1}$ egy pontját, és ezek közül is van egy első.

Elég tehát igazolni, hogy az $r(\frac{1}{2}S^{n-1})$ bármely pontját a P ponttal összekötő, és az $r(\frac{1}{2}B^n)$ környezeten belül haladó görbe hossza nem kisebb valamely pozitív konstansnál.

Az $\mathcal{U}$ környezet $T_P\mathcal{M}$ érintő tereiben vezessük be a $|\mathbf{v}| := \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$ normát, ahol $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i \partial_i$. Ekkor a $\lambda_P = \min\{g_P\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle / |\mathbf{v}| : \mathbf{v} \in T_P\mathcal{M}\}$ nyilván minden P pontban pozitív, mert $T_P\mathcal{M}$ egységgömbfelszíne ($|\mathbf{v}| = 1$) kompakt halmaz, és $g_P\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ csak a $\mathbf{0}$ origóban nulla. Minthogy g_P folytonosan függ a P ponttól, és $r(\frac{1}{2}B^n)$ kompakt halmaz, következik, hogy $\lambda = \min_{P \in r(\frac{1}{2}B^n)} \lambda_P$ pozitív.

Eszerint ha $G \in \mathcal{G}_P^{r(\frac{1}{2}S^{n-1})}$, akkor megfelelő $t > 0$ paraméterre $G = r \circ g: [0, t] \rightarrow r(\frac{1}{2}B^n)$ és $P = G(0) = r(g(0))$, $G(t) = r(g(t)) \in r(\frac{1}{2}S^{n-1})$, és

$$\begin{aligned} \int_0^t \sqrt{g_{G(x)}\langle \dot{G}(x), \dot{G}(x) \rangle} dx &= \int_0^t \sqrt{\lambda} |\dot{G}(x)| dx = \sqrt{\lambda} \int_0^t |\dot{G}(x)| dx \\ &= \sqrt{\lambda} \int_0^t |\dot{g}(x)| dx \geq \sqrt{\lambda} \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

ahol az utolsó sor azért teljesül, mert $\int_0^t |\dot{g}(x)| dx$ nem lehet kisebb, mint a $g(0)$ origó és a $g(t) \in \frac{1}{2}S^{n-1}$ pont távolsága, ami pontosan $1/2$.

Ezzel igazoltuk, hogy $\mathcal{M}$ metrikus tér.

A második állításhoz azt kell látnunk minden koordináta-környezetben, hogy bármely P pontnak bármely környezetében van a d metrika által definiált $\mathcal{V}_{g,P,\varepsilon} = \{Q : d(P,Q) < \varepsilon\}$ ε -környezet, és fordítva, bármely P pontnak bármely ε -környezetében van az $\mathcal{M}$ sokaságnak $\mathcal{U}_{P,\delta} = r(r^{-1}(P) + \delta B^n)$ δ -környezete.

Iménti formulánk alapján

$$\begin{aligned} d(P,Q) &= \inf_{G \in \mathcal{G}_P^Q} \int_0^t \sqrt{g_{G(x)} \langle \dot{G}(x), \dot{G}(x) \rangle} dx = \sqrt{\lambda} \inf_{r(g) \in \mathcal{G}_P^Q} \int_0^t |\dot{g}(x)| dx \\ &\geq \sqrt{\lambda} |g(t) - g(0)| = \sqrt{\lambda} |r^{-1}(Q) - r^{-1}(P)|, \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy $\mathcal{V}_{g,P,\varepsilon\sqrt{\lambda}} \subseteq \mathcal{U}_{P,\varepsilon}$.

A másik irány igazolásához fentebbi gondolatmenetünket követjük: a $\mu_P = \max\{g_P\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle / |\mathbf{v}| : \mathbf{v} \in T_P\mathcal{M}\}$ nyilván nem végtelen, mert $T_P\mathcal{M}$ egységgömbfelszíne ($|\mathbf{v}| = 1$) kompakt halmaz; minthogy g_P folytonosan függ a P ponttól, és $r(\frac{1}{2}B^n)$ kompakt halmaz, $\mu = \max_{P \in r(\frac{1}{2}B^n)} \mu_P < \infty$ adódik. Ebből

$$\begin{aligned} d(P,Q) &= \inf_{G \in \mathcal{G}_P^Q} \int_0^t \sqrt{g_{G(x)} \langle \dot{G}(x), \dot{G}(x) \rangle} dx = \inf_{G \in \mathcal{G}_P^Q} \int_0^t \sqrt{\mu} |\dot{G}(x)| dx \\ &= \sqrt{\mu} \inf_{G \in \mathcal{G}_P^Q} \int_0^t |\dot{G}(x)| dx = \sqrt{\mu} \inf_{r(g) \in \mathcal{G}_P^Q} \int_0^t |\dot{g}(x)| dx \\ &\leq \sqrt{\mu} |g(t) - g(0)| = \sqrt{\mu} |r^{-1}(Q) - r^{-1}(P)|, \end{aligned}$$

amiért $\mathcal{V}_{g,P,\delta\sqrt{\mu}} \supseteq \mathcal{U}_{P,\delta}$.

Ezzel a bizonyítást befejeztük. ■

Jegyezzük meg, hogy a fentebb bizonyított $\lambda|\mathbf{v}| \leq g\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \leq \mu|\mathbf{v}|$ egyenlőtlenséget szokás a normák kommenzurabilitásának nevezni.

Definíció. Az $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező *gradiensének* nevezzük azt a $\text{grad } f \in \tilde{T}\mathcal{F}$ érintővektor-mezőt, melyre $d_{\mathbf{X}}f = \langle \text{grad } f, \mathbf{X} \rangle$ minden $\mathbf{X}: \tilde{T}\mathcal{F} \rightarrow \tilde{T}\mathcal{F}$ érintővektor-mező esetén.

Mivel $d.f$ lineáris funkcionál az alsó indexében, a gradiens létezik és egyértelműen meghatározott. A síkon az f skalármező gradiense nyilván $\text{grad } f = (\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f)$.

Definíció. Az $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ skalármezőkön ható $\Delta: f \mapsto \operatorname{div} \operatorname{grad} f$ operátort *Laplace-transzformációnak* nevezzük.

Figyeljük meg, hogy a Laplace operátor a síkban $\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \operatorname{div}(\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f) = \partial_1^2 f + \partial_2^2 f + \partial_3^2 f$ alakú. A Laplace-operátor a síkban felcserélhető az izometriákkal (mozgásinvariáns), ugyanis tekintve a szokásos metrika szerint izometrikus $\iota: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (p_1, p_2) + (x, y) \begin{pmatrix} \iota_{11} & \iota_{12} \\ \iota_{11} & \iota_{12} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ transzformációt, $\Delta(f \circ \iota) = (\Delta f) \circ \iota$ teljesül, mert

$$\begin{aligned} \Delta(f \circ \iota) &= \sum_i \partial_i^2 (f \circ \iota) = \sum_i \partial_i \left(\sum_j \iota_{ij} \partial_j f \circ \iota \right) = \sum_i \left(\sum_j \iota_{ij} \partial_i (\partial_j f \circ \iota) \right) \\ &= \sum_i \left(\sum_j \iota_{ij} \sum_k \iota_{ik} \partial_k \partial_j f \circ \iota \right) = \sum_j \sum_k \left(\sum_i \iota_{ij} \iota_{ik} \right) \partial_k \partial_j f \circ \iota \\ &= \sum_j \sum_k \delta_{jk} \partial_k \partial_j f \circ \iota = \sum_j \partial_j^2 f \circ \iota = \Delta f \circ \iota. \end{aligned}$$

Meg lehet mutatni, hogy szimmetrikus Riemann tereken a mozgásinvariáns differenciáloperátor algebraját a Laplace-operátor generálja.

K.4. Tétel. (Green-formula a Laplace-operátorra). *Ha f és g skalármezők, $\mathcal{D}$ pedig megengedett tartomány az $\mathcal{F}$ felületen, melynek határa $\partial\mathcal{D}$, akkor*

$$\int_{\mathcal{D}} f \Delta g dF = \oint_{\partial\mathcal{D}} f d_{\mathbf{n}} g ds,$$

ahol az $\mathbf{n} = \mathbf{t} \times \mathbf{m}$ vektormező a $\partial\mathcal{D}$ határoló görbének az a normálisa, melyre $\mathbf{m} = \partial_1 r \times \partial_2 r / |\partial_1 r \times \partial_2 r|$ a felület normálisa, $\mathbf{t}$ pedig a $\partial\mathcal{D}$ érintője.

Bizonyítás. Stokes tételének ismeretében

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} f \Delta g dF &= \int_{\mathcal{D}} f \operatorname{div} \operatorname{grad} g dF = \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div}(f \operatorname{grad} g) dF = \oint_{\partial\mathcal{D}} \langle f \operatorname{grad} g, \mathbf{n} \rangle ds \\ &= \oint_{\partial\mathcal{D}} f \langle \operatorname{grad} g, \mathbf{n} \rangle ds = \oint_{\partial\mathcal{D}} f d_{\mathbf{n}} g ds \end{aligned}$$

adja az állítást. ■

K.5. Tétel. (Cartan-lemma). Legyen $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k$ és $\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^k$ a V^* egy részalgebra, melyre $\mathbf{v}^1 \wedge \mathbf{w}^1 + \dots + \mathbf{v}^k \wedge \mathbf{w}^k = 0$. Ha a $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k$ külsőformák (lineáris funkcionálok) függetlenek, akkor $\mathbf{w}^i = \sum_{j=1}^k m_j^i \mathbf{v}^j$, ahol az $M = (m_j^i)_{i,j=1,\dots,k}$ mátrix szimmetrikus, vagyis $m_j^i = m_i^j$.

Bizonyítás. Legyenek a $\mathbf{v}^{k+1}, \dots, \mathbf{v}^n$ külső formák olyanok, hogy $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n$ egy bázist alkot, és ebben a bázisban tekintsük az egyértelmű $\mathbf{w}^i = \sum_{j=1}^n m_j^i \mathbf{v}^j$ felbontást. Ekkor

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{v}^1 \wedge \mathbf{w}^1 + \dots + \mathbf{v}^k \wedge \mathbf{w}^k = \sum_{i=1}^k \left(\mathbf{v}^i \wedge \sum_{j=1}^n m_j^i \mathbf{v}^j \right) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n m_j^i \mathbf{v}^i \wedge \mathbf{v}^j = \sum_{i,j=1}^k m_j^i \mathbf{v}^i \wedge \mathbf{v}^j + \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^n m_j^i \mathbf{v}^i \wedge \mathbf{v}^j \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq k} (m_j^i - m_i^j) \mathbf{v}^i \wedge \mathbf{v}^j + \sum_{1 \leq i \leq k < j < n} m_j^i \mathbf{v}^i \wedge \mathbf{v}^j. \end{aligned}$$

Minthogy a $\mathbf{v}^i \wedge \mathbf{v}^j$ külső formák ($i < j$) bázist alkotnak a $\wedge^2 V^*$ vektortérben, egyenletünkben $m_j^i = 0$ adódik a $1 \leq i \leq k < j < n$ indexekre, és $m_j^i = m_i^j$ az $1 \leq i < j \leq k$ indexekre. ■

K.6. Tétel. (Hilbert). Ha egy nem umbilikus pontban a nagyobbik főgörbület maximális, a kisebb főgörbület pedig minimális, akkor abban a pontban a felület görbülete negatív.

Bizonyítás. Tekintsük egy $\mathcal{F}$ felület egy nem umbilikus Q pontját. Ekkor ennek egy $\mathcal{U}$ környezetében $\mathcal{F}$ egyetlen pontja sem umbilikus. Ebben a környezetben ezért választhatunk olyan r paraméterezést, hogy $Q = r(0, 0)$, r paramétervonalain az érintők éppen főgörbületi irányúak, és a Q ponton átmenő paramétervonalak ívhossz szerinti paraméterezésűek. Tegyük fel, hogy a Q pontban a főgörbületek $\kappa_{\min}(Q) < \kappa_{\max}(Q)$ rendre az első és a második paramétervonalra esnek. Ebből következik, hogy az $\mathcal{U}$ elemi felületen az i -edik ($i = 1, 2$) paramétervonal κ_i görbülete rendre éppen $\kappa_{\min}$ és $\kappa_{\max}$.

Ekkor a Codazzi–Mainardi egyenlet szerint $(\nabla_{\mathbf{X}} M)(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = (\nabla_{\mathbf{Y}} M)(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$, amiből kihasználva M szimmetriáját is

$$\begin{aligned} &\langle \nabla_{\partial_{i,r}} \partial_j r, -\kappa_k \partial_k r \rangle + \langle \partial_j r, \nabla_{\partial_{i,r}} (-\kappa_k \partial_k r) \rangle - \langle -\kappa_j \partial_j r, \nabla_{\partial_{i,r}} \partial_k r \rangle \\ &= \langle \nabla_{\partial_{i,r}} \partial_j r, B(\partial_k r) \rangle + \langle \partial_j r, \nabla_{\partial_{i,r}} (B(\partial_k r)) \rangle - \langle \partial_j r, B(\nabla_{\partial_{i,r}} \partial_k r) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= d_{\partial_i r} M(\partial_j r, \partial_k r) - M(\partial_j r, \nabla_{\partial_i r} \partial_k r) \\
 &= d_{\partial_j r} M(\partial_i r, \partial_k r) - M(\partial_i r, \nabla_{\partial_j r} \partial_k r) \\
 &= \langle \nabla_{\partial_j r} \partial_i r, -\kappa_k \partial_k r \rangle + \langle \partial_i r, \nabla_{\partial_j r} (-\kappa_k \partial_k r) \rangle - \langle -\kappa_i \partial_i r, \nabla_{\partial_j r} \partial_k r \rangle
 \end{aligned}$$

adódik, amiből

$$\langle \kappa_j \partial_j r, \nabla_{\partial_i r} \partial_k r \rangle - \langle \partial_j r, \nabla_{\partial_i r} (\kappa_k \partial_k r) \rangle = \langle \kappa_i \partial_i r, \nabla_{\partial_j r} \partial_k r \rangle - \langle \partial_i r, \nabla_{\partial_j r} (\kappa_k \partial_k r) \rangle$$

és így

$$\begin{aligned}
 &\kappa_j \langle \partial_j r, \nabla_{\partial_i r} \partial_k r \rangle - \kappa_i \langle \partial_i r, \nabla_{\partial_j r} \partial_k r \rangle \\
 &= \langle \partial_j r, \nabla_{\partial_i r} (\kappa_k \partial_k r) \rangle - \langle \partial_i r, \nabla_{\partial_j r} (\kappa_k \partial_k r) \rangle \\
 &= \langle \partial_j r, \partial_i \kappa_k \partial_k r + \kappa_k \nabla_{\partial_i r} \partial_k r \rangle - \langle \partial_i r, \partial_j \kappa_k \partial_k r + \kappa_k \nabla_{\partial_j r} \partial_k r \rangle \\
 &= \partial_i \kappa_k \langle \partial_j r, \partial_k r \rangle + \kappa_k \langle \partial_j r, \nabla_{\partial_i r} \partial_k r \rangle - \partial_j \kappa_k \langle \partial_i r, \partial_k r \rangle - \kappa_k \langle \partial_i r, \nabla_{\partial_j r} \partial_k r \rangle
 \end{aligned}$$

következik. Ha itt $i = k \neq j$, akkor az Euler-tétel szerint $\partial_j r \perp \partial_i r$, amiért

$$\begin{aligned}
 &\partial_j \kappa_i |\partial_i r|^2 \\
 &= \kappa_i \langle \partial_j r, \nabla_{\partial_i r} \partial_i r \rangle - \kappa_i \langle \partial_i r, \nabla_{\partial_j r} \partial_i r \rangle - \kappa_j \langle \partial_j r, \nabla_{\partial_i r} \partial_i r \rangle + \kappa_i \langle \partial_i r, \nabla_{\partial_j r} \partial_i r \rangle \\
 &= (\kappa_i - \kappa_j) \langle \partial_j r, \nabla_{\partial_i r} \partial_i r \rangle
 \end{aligned}$$

Ennek deriváltja a j -edik változó szerint

$$\begin{aligned}
 &\partial_j^2 \kappa_i |\partial_i r|^2 + 2 \partial_j \kappa_i \langle \partial_i r, \nabla_{\partial_j r} \partial_i r \rangle \\
 &= (\partial_j \kappa_i - \partial_j \kappa_j) \langle \partial_j r, \nabla_{\partial_i r} \partial_i r \rangle + \\
 &\quad + (\kappa_i - \kappa_j) (\langle \nabla_{\partial_j r} \partial_j r, \nabla_{\partial_i r} \partial_i r \rangle + \langle \partial_j r, \nabla_{\partial_j r} \nabla_{\partial_i r} \partial_i r \rangle).
 \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy az $\mathcal{U}$ elemi felületen a $\kappa_1 = \kappa_{\min}$ és $\kappa_2 = \kappa_{\max}$ főgörbületi függvények a Q pontban rendre minimális és maximális értékűek. Ekkor a Q pontban $\partial_i \kappa_{\min} = 0 = \partial_i \kappa_{\max}$ ($i = 1, 2$), $|\partial_i r| = 1$ és $\langle \nabla_{\partial_2 r} \partial_2 r, \nabla_{\partial_1 r} \partial_1 r \rangle = 0$ (mivel a Q ponton át mindkét paramétervonal ívhossz szerinti paraméterezésű és geodetikus görbületeik is merőlegesek egymásra), amiért a Q pontban

$$\partial_j^2 \kappa_i = (\kappa_i - \kappa_j) \langle \partial_j r, \nabla_{\partial_j r} \nabla_{\partial_i r} \partial_i r \rangle$$

érvényes, aminek következtében

$$\partial_2^2 \kappa_1 - \partial_1^2 \kappa_2 = (\kappa_1 - \kappa_2) (\langle \partial_2 r, \nabla_{\partial_2 r} \nabla_{\partial_1 r} \partial_1 r \rangle + \langle \partial_1 r, \nabla_{\partial_1 r} \nabla_{\partial_2 r} \partial_2 r \rangle).$$

Ugyanakkor

$$\begin{aligned}
 \langle \partial_1 r, \nabla_{\partial_1 r} \nabla_{\partial_2 r} \partial_2 r \rangle &= \langle \partial_1 r, \nabla_{\partial_1 r} \nabla_{\partial_2 r} \partial_2 r \rangle + \langle \nabla_{\partial_1 r} \partial_1 r, \nabla_{\partial_2 r} \partial_2 r \rangle \\
 &= d_{\partial_1 r} \langle \partial_1 r, \nabla_{\partial_2 r} \partial_2 r \rangle = -d_{\partial_1 r} \langle \nabla_{\partial_2 r} \partial_1 r, \partial_2 r \rangle \\
 &= -\langle \nabla_{\partial_1 r} \nabla_{\partial_2 r} \partial_1 r, \partial_2 r \rangle - \langle \nabla_{\partial_2 r} \partial_1 r, \nabla_{\partial_1 r} \partial_2 r \rangle \\
 &= -\langle \nabla_{\partial_1 r} \nabla_{\partial_2 r} \partial_1 r, \partial_2 r \rangle - |\nabla_{\partial_2 r} \partial_1 r|^2,
 \end{aligned}$$

amiben $|\nabla_{\partial_2 r} \partial_1 r|$ eltűnik a Q pontban, mert $\partial_j \kappa_i |\partial_i r|^2 = (\kappa_i - \kappa_j) \langle \partial_j r, \nabla_{\partial_i r} \partial_i r \rangle$ ($i \neq j$) és így

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla_{\partial_2 r} \partial_1 r, \partial_2 r \rangle &= -\langle \partial_1 r, \nabla_{\partial_2 r} \partial_2 r \rangle = 0, \\
 \langle \nabla_{\partial_2 r} \partial_1 r, \partial_1 r \rangle &= \langle \nabla_{\partial_1 r} \partial_2 r, \partial_1 r \rangle = -\langle \partial_2 r, \nabla_{\partial_1 r} \partial_1 r \rangle = 0.
 \end{aligned}$$

Ennek és a Gauss-egyenletnek az alkalmazásával

$$\begin{aligned}
 \partial_2^2 \kappa_1 - \partial_1^2 \kappa_2 \\
 = (\kappa_1 - \kappa_2) (\langle \partial_2 r, \nabla_{\partial_2 r} \nabla_{\partial_1 r} \partial_1 r \rangle - \langle \nabla_{\partial_1 r} \nabla_{\partial_2 r} \partial_1 r, \partial_2 r \rangle) = (\kappa_1 - \kappa_2) \kappa
 \end{aligned}$$

adódik, ami azonnal igazolja a lemma állítását. ■

K.6. Tétel. (Liebmann). *Kompakt konstans görbületű felület gömbfelület.*

Bizonyítás. Legyen az $\mathcal{F}$ felület kompakt, és tekintsük rajta az $f: \mathcal{F} \ni P \mapsto |P| \in \mathbb{R}$ skalármezőt. A kompaktság miatt f felveszi maximumát. Legyen ez a maximum R . Ez azt jelenti, hogy az $\mathcal{F}$ felület teljesen az R sugarú $\mathcal{B}_R$ zárt gömbön belül van, és a P pontban érinti a gömb $\mathcal{S}_r$ felületét. A simulókörekre gondolva, ebből következik, hogy az $\mathcal{F}$ felületnek minden a gömb középpontját és a P pontot tartalmazó síkkal vett metszete olyan görbe, melynek a P pontba nagyobb a görbülete, mint $1/R$. Eszerint az $\mathcal{F}$ görbülete a P pontban legalább $1/R^2$.

Legyen az $\mathcal{F}$ felület kompakt és konstans κ görbületű. Előbbi megfigyelésünk szerint ekkor $\kappa > 0$, a Hilbert-lemma szerint viszont emiatt nem lehet nem umbilikus pontja. Korábbi tételünk szerint így csak egy gömbfelület valamely része lehet, azonban nyílt és zárt egyszerre, tehát csakis teljes gömbfelület lehet. ■