

# Kötélgörbe, avagy miért hasonlítanak egymásra a kupolák

KURUSA ÁRPÁD

**Absztrakt.** Az összes kupola hasonlít egymásra, mert az általuk támasztott mechanikai feladat megoldásait adó kötélgörbék mind hasonlóak egymáshoz. A kötélgörbék a két pontra függesztett kötelek alakját írják le.

## 1. Kupolák és kötelek



A vatikáni Szent Péter bazilika kupolája 1546 és 1564 között Michelangelo irányításával készült, majd Giacomo della Porta irányításával 1593-ban fejezték be. Ez a világ legnagyobb kupolája, százhuszonhárom méteres magasságát egyetlen más kupola sem éri el.

Amikor egy bazilika kupoláján nézegetjük a freskókat, eszünkbe juthat, hogyan is volt lehetséges ilyen hatalmas tetőt építeni anélkül, hogy oszlopok tartanák. A feladat nem éppen egyszerű: úgy kell kialakítani a tető alakját, hogy megtartsa önmagát a tartófalak tetején és kisebb „behatások” se omlasszák be. A feladat nagysága sosem riasztotta el az építészeket, hogy hatalmas kupolák építésével kísérletezzenek. A sokszor balul sikerült kísérlet, vagyis a beomlás hatására el is terjedt köztük az úgy nevezett 5-perces szabály: „amely kupola 5 perc alatt nem omlik be, az 500 évig is állva marad”.

Manapság már nem megengedhető a kísérleti építkezés, tehát át kell gondolni mit is jelent egy ilyen kupola a fizika nyelvén: A kupola szerkezete *egyensúlyi helyzetben* van, és ebből külső hatások sem mozdítják ki könnyen, vagyis ez az egyensúlyi helyzet *stabil*. A stabilitás azt jelenti, hogy a szerkezet potenciális energiája az adott helyzetben minimális.

Feltételezve a bazilikáknál a kupolák alatt megszokott köralakú alaprajzot, a kupolának a kör középpontjában állított merőleges egyenesre való forgásszimmetriája adódik. Emiatt matematikai értelemben a kupola leírható egyetlen görbével, melynek tengely körüli forgása végigsúrolja a kupola felületét.

Hogyan kereshetnénk meg ezt a görbét, vagy esetleg görbéket?

Az ötlet egyszerű: gondolatban fordítsuk a kupolát fejjel lefelé! A fentiekben megfogalmazott feltételek egyike sem változik, de a potenciális energia minimumát így már könnyű megkeresni, hiszen két pont közé kifeszítve egy, a két pont távolságánál hosszabb, de nem nyújtható kötelet, a kötél a hajlékonysága miatt addig mozog, amíg nem kerül stabil nyugalmi állapotba. Ez a stabil nyugalmi helyzet éppen a potenciális energia minimumánál valósul meg, ami magától megoldja a körkupola építésének problémáját és rámutat a körkupolák egyformaságának fizikai okára.

Bár az építészet mechanikai problémáját matematika alkalmazása nélkül oldottuk meg, a tervezhetőség és a címben feltett kérdésre adandó válasz érdekében meg kell találni a nyugalmi állapotú kötél alakját leíró matematikai függvényt, melynek grafikonját a fentiek miatt kötélgörbének<sup>1)</sup> nevezzük.

## 2. A kötélgörbe

Ebben a szakaszban a kötél nyugalmi helyzetében ható erők egyensúlyából kiindulva határozzuk meg a kötélgörbét.

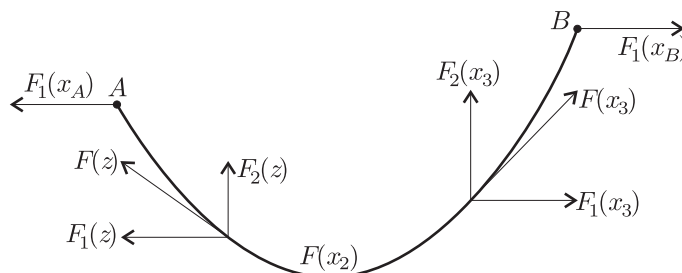
Legyen az  $\ell$  hosszúságú és  $\sigma$  „hosszsűrűségű” (a köteleket, mivel átmérőjük gyakorlatilag állandó és igen kicsiny, általában a méterenkénti súlyukkal szokás jellemezni, most is ez mutatkozik meg a  $\sigma$  számban) kötél két végénél az  $A = (x_A, y_A)$  és  $B = (x_B, y_B)$  pontokra akasztva, ahol a trivialitás kizárása érdekében feltesszük, hogy  $x_A \neq x_B$  és  $(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 < \ell^2$ . Világos, hogy a görbe két pontja nem eshet egymás fölé, ezért van egy olyan  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, amelynek grafikonja az  $[x_A, x_B]$  intervallumon éppen a kötél pontjaiba esik. A kalkulációink érdekében feltesszük, hogy  $f$  kétszer folytonosan differenciálható.

A kötél által felvett  $r(x) = (x, f(x)): [x_A, x_B] \rightarrow \mathbb{R}^2$  görbe bármely  $z < x$  abcisszájú pontjai közötti darabjának hosszát az  $\dot{r}(x) = (1, f'(x))$  érintőjének hosszából az  $\int_z^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$  formula adja [2], így annak súlya  $s(z, x) = \sigma \int_z^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$ .

Mivel a kötél nyugalmi helyzetben van, az  $r(x)$  pontjára ható erők  $\vec{F}(x) = (F_1(x), F_2(x))$  összege a görbe érintőjével párhuzamos irányba mutat, vagyis

<sup>1)</sup> Ezt láncgörbének is hívják, mert két pontra való felfüggesztésekor a hosszához képest apró szemekből álló lánc is ugyanezen görbe alakját veszi fel.

$$F_2(x) = \pm f'(x)F_1(x).$$



A kötel minden  $z < x$  abszcisszájú pontjai közötti darabját az  $\vec{F}(z)$  és  $\vec{F}(x)$  erők, valamint az  $\vec{S}(z, x) = (0, -s(z, x))$  súlyerő tartják egyensúlyban, ezért  $\vec{F}(z) + \vec{F}(x) + \vec{S}(z, x) = 0$ , amiből

$$\begin{aligned} F_2(z) + F_2(x) &= s(z, x), \\ F_1(z) + F_1(x) &= 0 \end{aligned}$$

adódik. Utóbbiból azonnal kapjuk, hogy  $F_1(x) = c$  konstans<sup>2)</sup>, és minden pontban éppen a baloldali tartópontban jelentkező  $F_1(z)$  vízszintes erő ellentettje.

Az  $F_2(z) + F_2(x) = s(z, x)$  egyenlet  $x$  szerinti deriválásával a szakasz jobboldali végpontjában  $F_2'(x) = \sigma \sqrt{1 + (f'(x))^2}$  következik. Ezt felhasználva a másodrendű

$$(*) \quad \sigma \sqrt{1 + (f'(x))^2} = F_2'(x) = (\pm f'(x)F_1(x))' = (\pm c f'(x))' = \pm c f''(x)$$

differenciálegyenlethez jutunk, aminek átrendezésével

$$\frac{\sigma}{c} f'(x) = \frac{f'(x)f''(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} = \left( \sqrt{1 + (f'(x))^2} \right)'$$

adódik, amiért

$$\frac{\sigma}{c} f(x) + d = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

valamely  $d$  valós számra.

A (\*) egyenlet baloldala a  $\sigma > 0$  konstansnál sosem kisebb, ezért a jobboldal sem lehet nulla, így az a folytonossága miatt nem válhat előjelet. Ennek következtében minden megoldásfüggvény  $f''$  második deriváltja az egész számegyenesen pozitív, vagy negatív. Előbbi esetben  $f$  alulról nézve szigorúan

<sup>2)</sup> A  $c$  persze nagyon is függ az  $A, B$  pontok megválasztásától, a kötel  $\ell$  hosszától és a kötel  $\sigma$  hosszsűrűségétől is.

konvex (a deriváltja szigorúan monoton növekvő), utóbbi esetben pedig szigorúan konkáv (a deriváltja szigorúan monoton fogyó) lenne, ami egy kötél esetében kizárt. Tehát  $f$  alulról nézve szigorúan konvex, és így  $(*)$  alapján  $f''(x) \geq \frac{\sigma}{c} > 0$ . Eszerint

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) - f'(0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int_0^x f''(t) dt = \pm\infty,$$

amiből következőleg

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{\sigma} \left( \sqrt{1 + (f'(x))^2} - d \right) = \infty.$$

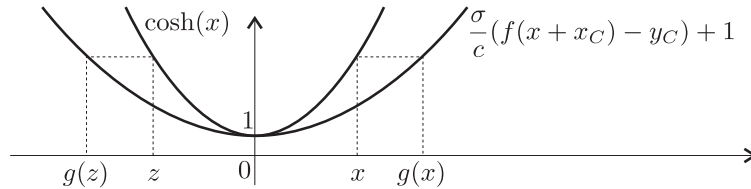
Mivel  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$  és  $f$  folytonos, minden elég nagy  $x_+$  számhoz van olyan  $x_-$ , hogy  $f(x_-) = f(x_+)$ . Az  $f$  az  $[x_-, x_+]$  zárt intervallumon folytonos, így ebben felveszi minimumát, amit viszont konvexitásának szigorúsága miatt csak pontosan egy pontban tehet. Minthogy  $x_+ \rightarrow \infty$  esetén a  $[x_-, x_+]$  zárt intervallumok lefedik a számegyenest, ebből az következik, hogy az  $f$  függvénynek pontosan egy minimumhelye van.

Legyen az  $f$  egyetlen minimumhelye  $x_C$  és a görbe ehhez tartozó pontja  $C = (x_C, y_C)$ . A fentiek szerint az  $f$  függvény az  $x_C$  előtti félegyenesen szigorúan monoton fogy, az  $x_C$  utáni félegyenesen pedig szigorúan monoton nő.

A cosh függvény<sup>3)</sup> (lásd a függelékben) a pozitív félegyenesen szigorúan monoton nő, a negatív félegyenesen pedig szigorúan monoton fogy, és mindkét félegyenesre bijektíven képezi az  $(1, \infty)$  félegyenesre, ezért a

$$\cosh(g(x)) = \frac{\sigma}{c} (f(x + x_C) - y_C) + 1 \quad \text{és} \quad \text{sign}(g(x)) = \text{sign}(x)$$

feltételek meghatároznak egy  $g: [x_A, x_B] \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt.



Ez a  $g$  függvény az  $f$  és a cosh függvény inverzének differenciálhatósága miatt differenciálható, és

$$f(x) = \frac{c}{\sigma} \cosh(g(x - x_C)) + \left( y_C - \frac{c}{\sigma} \right), \quad x \in [x_A, x_B],$$

valamint  $g(0) = 0$ .

<sup>3)</sup> Választhatunk volna más, a pozitív és negatív félegyeneset is az  $(1, \infty)$  félegyenesre bijektíven képező függvényt, de a differenciálegyenletünket ez egyszerűsíti leginkább.

Eszerint  $f'(x) = \frac{c}{\sigma} \sinh(g(x - x_C))g'(x - x_C)$ , így differenciálegyenletünk a

$$\begin{aligned} \cosh(g(x - x_C)) + \left(\frac{\sigma}{c} y_C - 1 + d\right) &= \frac{\sigma}{c} f(x) + d = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{c}{\sigma} \sinh(g(x - x_C))g'(x - x_C)\right)^2} \end{aligned}$$

formát veszi fel. Ennek mindkét oldalát az  $x = x_C$  pontban kiszámítva  $d + \frac{\sigma}{c} y_C = 1$  adódik, amit ugyanoda visszaírva

$$\cosh^2(g(x - x_C)) = 1 + \left(\frac{c}{\sigma} \sinh(g(x - x_C))g'(x - x_C)\right)^2$$

következik. A  $\cosh^2 t = 1 + \sinh^2 t$  azonosság alapján ebből  $\frac{\pm\sigma}{c} = g'(x - x_C)$  adódik, amiért  $g(x) = \frac{\pm\sigma}{c} x$ , hiszen  $g(0) = 0$ .

Visszahelyettesítéssel tehát azt kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{c}{\sigma} \cosh\left(\frac{\sigma}{c}(x - x_C)\right) + \left(y_C - \frac{c}{\sigma}\right),$$

ami a kötélgörbe matematikai alakja.

A köté pontos elhelyezkedésének meghatározásához ki kell még számolnunk a  $c$  konstans értékét és a  $C = (x_C, y_C)$  pontot.

Az  $f(x_A) = y_A$  és  $f(x_B) = y_B$  egyenletek különbségéből az

$$\begin{aligned} y_A - y_B &= \frac{c}{\sigma} \left[ \cosh\left(\frac{\sigma}{c}(x_A - x_C)\right) - \cosh\left(\frac{\sigma}{c}(x_B - x_C)\right) \right] \\ (\dagger) \quad &= \frac{2c}{\sigma} \sinh\left(\frac{\sigma}{2c}(x_A - x_B)\right) \sinh\left(\frac{\sigma}{2c}(x_A + x_B - 2x_C)\right) \end{aligned}$$

egyenlethez jutunk.

Az  $f'(x) = \sinh\left(\frac{\sigma}{c}(x - x_C)\right)$  deriváltból a köté hosszát kifejezve

$$\begin{aligned} \ell &= \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + \left(\sinh\left(\frac{\sigma}{c}(x - x_C)\right)\right)^2} dt \\ (\ddagger) \quad &= \int_{x_A}^{x_B} \cosh\left(\frac{\sigma}{c}(x - x_C)\right) dt = \frac{c}{\sigma} \left[ \sinh\left(\frac{\sigma}{c}(x - x_C)\right) \right]_{x_A}^{x_B} \\ &= \frac{c}{\sigma} \left[ \sinh\left(\frac{\sigma}{c}(x_B - x_C)\right) - \sinh\left(\frac{\sigma}{c}(x_A - x_C)\right) \right] \\ &= \frac{2c}{\sigma} \sinh\left(\frac{\sigma}{2c}(x_B - x_A)\right) \cosh\left(\frac{\sigma}{2c}(x_B + x_A - 2x_C)\right), \end{aligned}$$

adódik. Ezt előbbi egyenletünkkel összevetve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \ell^2 - (y_A - y_B)^2 &= \left(\frac{2c}{\sigma}\right)^2 \sinh^2\left(\frac{\sigma}{2c}(x_A - x_B)\right) \times \\ &\quad \times \left(\cosh^2\left(\frac{\sigma}{2c}(x_B + x_A - 2x_C)\right) - \sinh^2\left(\frac{\sigma}{2c}(x_A + x_B - 2x_C)\right)\right) \\ &= \left(\frac{2c}{\sigma}\right)^2 \sinh^2\left(\frac{\sigma}{2c}(x_A - x_B)\right). \end{aligned}$$

Ezt a praktikusabb

$$\frac{\sqrt{\ell^2 - (y_A - y_B)^2}}{(x_B - x_A)} = \frac{\sinh\left(\frac{\sigma}{2c}(x_B - x_A)\right)}{\frac{\sigma}{2c}(x_B - x_A)}$$

formában nézve világos, hogy  $\frac{\sigma}{2c}$  meghatározásához a  $h: t \in (0, \infty) \mapsto \frac{\sinh t}{t}$  függvényt kell invertálnunk. A  $h$  invertálható, mert  $h(0) = (\sinh t)'|_{t=0} = \cosh(0) = 1$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t}{2t} = \infty$  és  $0 = \sinh 0$  valamint  $(t)' = 1 \leq \cosh t = \sinh'(t)$  miatt  $h$  szigorúan monoton növekvő.

A  $h$  inverzére a  $\bar{h}$  jelölést alkalmazva az eddigiek alapján

$$c = \frac{\sigma}{2} \frac{x_B - x_A}{\bar{h}\left(\frac{\sqrt{\ell^2 - (y_A - y_B)^2}}{(x_B - x_A)}\right)}$$

adódik. A  $(\dagger)$  és  $(\ddagger)$  összefüggések hányadosából a nyilvánvaló  $|y_A - y_B| \leq \ell$  egyenlőtlenség miatt

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} - \frac{c}{\sigma} \operatorname{arctanh}\left(\frac{y_A - y_B}{\ell}\right)$$

adódik. A  $c$  és az  $x_C$  birtokában a minimumhely magasságát

$$y_C = y_B - \frac{2c}{\sigma} \sinh^2\left(\frac{\sigma}{2c}(x_B - x_C)\right)$$

adja.

Jegyezzük meg, hogy a két oszlopot egymásfelé kényszerítő  $c$  erő értékének és a minimumpont helyének és magasságának meghatározására a gyakorlatban (például a villanyvezetékek belógásának és a villanyoszlopok méreteinek kiszámításához) fenti formuláink helyett közelítő eljárásokat alkalmaznak, melyek Galileit<sup>4)</sup> idézve alapvetően a kötélgörbe parabolával való helyettesítésére épülnek.

<sup>4)</sup> Galilei azt gondolta, hogy a kötél a parabola alakját veszi fel.

Azt is vegyük észre, hogy bármely két kötélgörbe hasonló, mert az  $y$ -tengellyel párhuzamos eltolással mind egy  $f(x) = a \cosh((x - x_C)/a)$  alakú függvény grafikonjába vihető, ahonnan egy  $x$ -tengellyel párhuzamos  $x_C/a$  nagyságú eltolással egy  $g_a(x) = a \cosh(x/a)$  alakú függvény grafikonjába kerülnek. Márpedig a  $g_1(x) = \cosh(x)$  függvény grafikonjának  $a$ -szorosára nagyított/kicsinyített megfelelője éppen  $g_a$  grafikonja.

Ezzel megkaptuk a cikk címében feltett kérdésre a választ: *minden kupola hasonló, mert formájukban az egymással hasonló kötélgörbék jelennek meg.*

### 3. A potenciális energia extrémumai

Ebben a szakaszban igazoljuk, hogy a kötélgörbe minimalizálja a potenciális energiát, vagyis az összes vele azonos hosszúságú és ugyanazon tartópontokon átmenő görbék közül neki van a legalacsonyabban a súlypontja.

Szélsőértékek keresésére a differenciálszámítást szokás alkalmazni, azonban a görbék halmazát nem lehet véges sok paraméterrel leírni, így azt a megoldást választjuk, hogy egyszerre csak egy egyparaméteres függvénycsaládot vizsgálunk, viszont a minimális görbétől „elvárjuk”, hogy bármely ilyen családon belül a mérésünkre nézve minimális legyen. Ez az eljárás a *variációszámítás* legegyszerűbb megjelenési formája, melynek az alábbiakban pontosan kifejtjük a tartalmát.

Egy  $\nu: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [x_A, x_B] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\varepsilon > 0$ ) differenciálható függvényt az  $f: [x_A, x_B] \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható függvény (fix végpontú) *variálásának* nevezünk, ha  $\nu(t, x_A) = f(x_A)$ ,  $\nu(t, x_B) = f(x_B)$  és  $\nu(0, x) = f(x)$  minden  $x \in [x_A, x_B]$  argumentumra és  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  paraméterre. A  $\nu_t: [x_A, x_B] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ) függvényeket, ahol  $\nu_t(x) = \nu(t, x)$  az  $f$  variált függvényeinek nevezzük. (A  $\hat{\nu}_x: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  függvényeket, ahol  $\hat{\nu}_x(t) = \nu(t, x)$  az  $f$  transzverzális függvényeinek mondjuk.)

Az alkalmas  $g: [x_A, x_B] \rightarrow \mathbb{R}$  függvények halmazán értelmezett  $\mu: g \mapsto \mu(g)$  leképezést *mérésnek* nevezzük. Többek között ilyen például a függvény grafikonjának  $\ell$  hossza, vagy a grafikon súlypontjának  $y$ -koordinátája.

Már megfogalmazott elvárásunk szerint a minimalitás a variálás választásától független kell legyen, ezért egy  $f$  függvényt a  $\mu$  mérésre nézve akkor nevezünk *extremálisnak*, ha minden  $\nu$  variálására  $\mu'_\nu(0) = 0$ , ahol  $\mu_\nu(t) = \mu(\nu_t)$ .

**Tétel.** *A kétszer differenciálható  $f: [x_A, x_B] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, melynek deriváltja nem azonosan nulla, a vele azonos hosszúságú grafikonokkal rendelkező függvények között akkor és csak akkor extremális a súlypont  $y$ -koordinátájára nézve, ha grafikonja kötélgörbe.*

**Bizonyítás.** Legyen  $f: [x_A, x_B] \rightarrow \mathbb{R}$  kétszer differenciálható. Ennek grafikonja az  $r_f(x) = (x, f(x))$  görbe, melynek hossza

$$\ell(f) = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Az  $r_f$  görbe  $r_f(x)$  pont körüli sűrűsége

$$s(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{s(x - \varepsilon, x + \varepsilon)}{2\varepsilon} = \sigma \sqrt{1 + (f'(x))^2},$$

a  $W_f$  súlypont pedig a görbe pontjainak ezen  $s(x)$  függvénnyel súlyozott átlaga, vagyis

$$W_f = \frac{1}{\ell(f)} \left( \int_{x_A}^{x_B} x \sigma \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \int_{x_A}^{x_B} f(x) \sigma \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \right).$$

Legyen  $\nu$  az  $f$  függvény variálása. Ekkor a variált függvényhez tartozó  $(x, \nu_t(x))$  görbe hossza, és súlypontjának magassága a fentiek szerint

$$\begin{aligned} \ell_\nu(t) &= \ell(\nu_t) = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (\nu'_t(x))^2} dx, \\ \mu_\nu(t) &= w_2(\nu_t) = \frac{\sigma}{\ell_\nu(t)} \int_{x_A}^{x_B} \nu(t, x) \sqrt{1 + (\partial_2 \nu(t, x))^2} dx, \end{aligned}$$

ahol  $\partial_2$  a második változó szerinti (parciális) deriválást jelenti.

Vegyük észre, hogy az azonos hosszúságú görbék között a  $\mu$  mérésnek és a  $\lambda = \mu \ell / \sigma$  mérésnek ha van extrémuma, akkor ugyanazon görbe esetében van, ezért a  $\mu$  helyett elegendő a  $\lambda$  mérésre megkeresnünk az extrémális függvényeket. A fentiekkel összhangban legyen  $\lambda_\nu(t) = \mu_\nu(t) \ell_\nu(t) / \sigma$ .

Mivel a  $\lambda_\nu(t)$  kifejezésében szereplő integrandus folytonosan differenciálható, az integrálás felcserélhető a deriválással, amiért

$$\lambda'_\nu(t) = \int_{x_A}^{x_B} \left( \partial_1 \nu(t, x) \sqrt{1 + (\partial_2 \nu(t, x))^2} + \nu(t, x) \frac{\partial_2 \nu(t, x) \partial_1 \partial_2 \nu(t, x)}{\sqrt{1 + (\partial_2 \nu(t, x))^2}} \right) dx,$$

amely a  $t = 0$  helyen

$$\lambda'_\nu(0) = \int_{x_A}^{x_B} \left( \partial_1 \nu(0, x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} + f(x) \frac{f'(x) \partial_2 \partial_1 \nu(0, x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \right) dx.$$

A  $\lambda'_\nu(0)$  integrandusának második tagját parciálisan integrálva

$$\begin{aligned}
& \int_{x_A}^{x_B} \frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} \partial_2 \partial_1 \nu(0, x) dx \\
&= \left[ \frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} \partial_1 \nu(0, x) \right]_{x_A}^{x_B} - \int_{x_A}^{x_B} \left( \frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} \right)' \partial_1 \nu(0, x) dx \\
&= 0 - \int_{x_A}^{x_B} \left( \frac{(f'(x))^2 + f(x)f''(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} - \frac{f(x)(f'(x))^2 f''(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}^3} \right) \partial_1 \nu(0, x) dx \\
&= - \int_{x_A}^{x_B} \frac{(f'(x))^2(1+(f'(x))^2) + f(x)f''(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}^3} \partial_1 \nu(0, x) dx
\end{aligned}$$

adódik, amiért

$$\lambda'_\nu(0) = \int_{x_A}^{x_B} \partial_1 \nu(0, x) \frac{1+(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}^3} dx.$$

Ha  $f$  olyan, hogy  $1+(f'(x))^2 - f(x)f''(x) = 0$ , akkor  $\lambda'_\nu(0) = 0$  minden  $\nu$  variálásra.

Ha  $f$  olyan, hogy  $\lambda'_\nu(0) = 0$  minden  $\nu$  variálásra, akkor a  $\nu(t, x) = f(x) + t(x - x_A)(x_B - x)(1+(f'(x))^2 - f(x)f''(x))$  variálásra is  $\lambda'_\nu(0) = 0$ , amiből

$$0 = \lambda'_\nu(0) = \int_{x_A}^{x_B} (x - x_A)(x_B - x) \frac{(1+(f'(x))^2 - f(x)f''(x))^2}{\sqrt{1+(f'(x))^2}^3} dx$$

következik. Mivel ebben az integrandus sehol sem negatív, az integrál csak úgy lehet nulla, ha az integrandus azonosan nulla, tehát  $1+(f'(x))^2 - f(x)f''(x) = 0$ .

Eszerint a  $\lambda = \mu\ell/\sigma$  mérés, és ezzel együtt az azonos hosszúságú görbék között a súlypontmagasság  $\mu$  mérésének extrémális függvényei is pontosan azok, amelyekre  $1+(f'(x))^2 - f(x)f''(x) = 0$ .

Mivel  $f' \neq 0$ , differenciálegyenletünk ekvivalens a

$$(2 \ln f(x))' = 2 \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2f'(x)f''(x)}{1+(f'(x))^2} = (\ln(1+(f'(x))^2))'$$

egyenlettel, ami megegyezik az  $f^2(x) = a^2(1+(f'(x))^2)$  egyenlettel valamely alkalmas nem nulla  $a$  konstansra. Ebből  $f(x) = \pm a \sqrt{1+(f'(x))^2}$  következik, ami éppen a  $\pm a = \sigma/c$  kötélgörbét meghatározó differenciálegyenlet, aminek egyedüli megoldása  $f(x) = \frac{1}{\pm a} \cosh(\pm a(x - x_C)) + (y_C - \frac{1}{\pm a})$ .

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

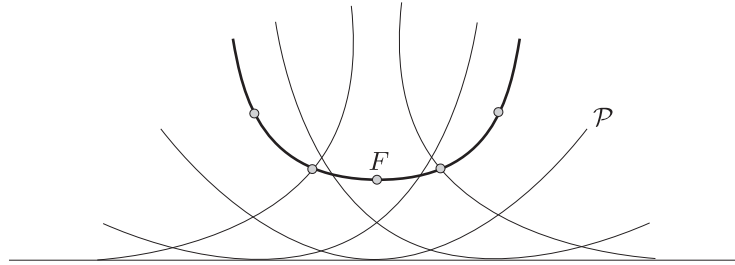
Vegyük észre, hogy az extremális görbéi a szó fizikai értelmében csak pozitív  $a$  szám esetén kötélgörbék. Ha  $a$  negatív szám, akkor igazából „kupolagörbéről” kellene beszélni, és ekkor nem minimalizálódik a potenciális energia, illetve a súlypont magassága, hanem éppenséggel maximalizálódik.

#### 4. Szerkesztés

Világos, hogy a kötélgörbének a szó hagyományos értelmében, tehát körzővel és vonalzóval való szerkeszthetőségére nem számíthatunk, de a kötelek lógatása sem igazán kivitelezhető egy rajzasztalon, ezért a régóta bevált sablonozott vonalzó eszközéhez folyamodunk. Ilyeneket használtak a műszaki rajzolóok amíg a számítógép nem vette át teljesen a rajzolás terhét, és a pontosság tekintetében is elfogadott eljárás volt, ha az egyik vonalzót vagy sablont a másikhoz igazítva, vagy amellet eltolva, görgetve kellett használni.

A kérdés tehát az, milyen sablonra van szükség a kötélgörbe megrajzolásához, ha megengedjük annak vonalzó melletti görgetését.

**Tétel.** Egy  $\mathcal{P}$  parabolát valamely  $e$  egyenes mentén görgetve a parabola fókusza egy kötélgörbén mozog.



**Bizonyítás.** Mivel a parabolák (és persze az egyenesek is) hasonlók egymáshoz, elegendő egyetlen parabola-egyenes pár esetében igazolni az állítást.

Tekintsük az  $y = x^2$  egyenletű  $\mathcal{P}$  parabolát, melynek fókusza az  $F = (0, 1/4)$  pont, vezéregyenes (direktrix) pedig az  $y = -1/4$  egyenes (mert  $\sqrt{x^2 + (y - 1/4)^2} = \sqrt{x^2 + (x^2 - 1/4)^2} = x^2 + 1/4 = y + 1/4$ ), és görgessük  $e$  parabolát az  $x$ -tengely mentén.

A  $\mathcal{P}$  parabola  $e$  érintője az  $E = (x, x^2)$  érintési pontban  $2x$  meredekségű, amiért ezen érintő egységnyi irányvektora  $\mathbf{i}_x = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}(1, 2x)$ , egységnyi normális vektora pedig  $\mathbf{n}_{x_0} = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}(-2x, 1)$ .

Az  $e$  érintő és az  $F = (0, 1/4)$  fókusz távolsága megegyezik a  $(0, 1/4) - (x, x^2)$  vektornak az érintő  $\mathbf{n}_x$  normálisára eső

$$\psi(x) = \langle (-x, 1/4 - x^2), \mathbf{n}_x \rangle = \frac{\sqrt{1 + 4x^2}}{4}$$

vetületével.

Az  $F$  fókusz és az  $E$  érintési pont távolsága  $\tau(x) = \sqrt{x^2 + (x^2 - 1/4)^2}$ .

Az  $F$  fókusz  $e$  érintőre vett merőleges vetületének  $\xi(x)$  távolsága az  $E$  érintési ponttól megegyezik a  $(0, 1/4) - (x, x^2)$  vektornak az  $e$  érintő  $\mathbf{i}_x$  irányvektorára vett vetületének hosszával, tehát

$$\xi(x) = \left\langle (-x, 1/4 - x^2), \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}}(1, 2x) \right\rangle = \frac{2x\sqrt{1 + 4x^2}}{4}.$$

A  $\mathcal{P}$  parabola  $O = (0, 0)$  és  $E = (x, x^2)$  pontjai között

$$\sigma(x) = \int_0^x \sqrt{1 + (2t)^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{2x} \sqrt{1 + z^2} dz = \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh}(2x)} \cosh^2 t dt$$

a hossza. Ezen integrál kiszámításához figyeljük meg, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^b \cosh^2 t dt + \frac{1}{2} \int_0^b \sinh^2 t dt &= \frac{1}{4} [\sinh(2t)]_0^b, \\ \frac{1}{2} \int_0^b \cosh^2 t dt - \frac{1}{2} \int_0^b \sinh^2 t dt &= \frac{1}{2} [t]_0^b, \end{aligned}$$

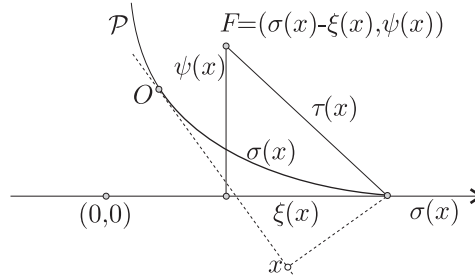
amiért

$$\int_0^b \cosh^2 t dt = \frac{1}{2} [t + \sinh t \cosh t]_0^b = \frac{b + \sinh b \cosh b}{2},$$

és így

$$\sigma(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh}(2x)} \cosh^2 t dt = \frac{\operatorname{arcsinh}(2x) + 2x\sqrt{1 + 4x^2}}{4}.$$

A  $\mathcal{P}$  parabolát  $\sigma(x)$  hosszan görgetve, az  $E = (x, x^2)$  pont az  $x$ -tengelyre kerül, az  $x$ -tengely pedig az elgörgetett parabolának érintője lesz.



Az  $F$  fókusz ezért a görgetés közben úgy halad a görgetés irányába, hogy  $x$ -koordinátája  $\sigma(x) - \xi(x)$  távolságot tesz meg, az  $x$ -tengelytől való távolsága pedig  $\psi(x)$  lesz. Az  $F$  fókusz által sűrolt görbe tehát annak az  $f$  függvénynek a grafikonja, melyre  $\psi(x) = f(\sigma(x) - \xi(x))$ , amiért

$$\frac{\sqrt{1+4x^2}}{4} = f\left(\frac{\operatorname{arcsinh}(2x)}{4}\right), \quad \text{vagyis} \quad f(x) = \frac{\cosh(4x)}{4}.$$

Ez bizonyítja az állítást. ■

## Függelék: hiperbolikus függvények

A valós számok halmazán értelmezett

$$\begin{aligned} \sinh x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (\text{szinusz-hiperbolikus}), \\ \cosh x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\text{koszinusz-hiperbolikus}), \text{ és} \\ \tanh x &:= \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad (\text{tangens-hiperbolikus}) \end{aligned}$$

függvényeket *hiperbolikus függvényeknek* nevezzük.

A definíciók alapján egyszerű számolással igazolhatók a

- $\cosh x = \cosh(-x)$ ,  $\sinh x = -\sinh(-x)$  és  $\tanh x = -\tanh(-x)$ ,
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ ,

formulák, valamint a hiperbolikus addíciós képleteknek nevezett

- $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$ ,
- $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$ ,
- $\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$ ,

azonosságok. Utóbbiak felhasználásával adódnak a speciális

- $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$  és  $\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$ ,
- $\cosh^2(x/2) = (\cosh x + 1)/2$  és  $\sinh^2(x/2) = (\cosh x - 1)/2$

egyenlőségek, amelyekből könnyen beláthatók a cikkben is használt

- $\cosh x = 1 + 2 \sinh^2(x/2)$ ,
- $\cosh x - \cosh y = 2 \sinh\left(\frac{x+y}{2}\right) \sinh\left(\frac{x-y}{2}\right)$ ,
- $\cosh x + \cosh y = 2 \cosh\left(\frac{x+y}{2}\right) \cosh\left(\frac{x-y}{2}\right)$ ,
- $\sinh x - \sinh y = 2 \cosh\left(\frac{x+y}{2}\right) \sinh\left(\frac{x-y}{2}\right)$ ,
- $\sinh x + \sinh y = 2 \sinh\left(\frac{x+y}{2}\right) \cosh\left(\frac{x-y}{2}\right)$

azonosságok.

Újra a definíciót használva könnyű számolás adja, hogy

$$\bullet \cosh' x = \sinh x, \quad \sinh' x = \cosh x \quad \text{és} \quad \tanh' x = 1 - \tanh^2 x.$$

Fentiek alapján  $\cosh'' x = \cosh x \geq 1$ , amiért a  $\cosh$  függvény alulról szigorúan konvex. A  $\cosh' x = \sinh x$  miatt ugyanakkor a  $\cosh$  függvény a negatív számok halmazán szigorúan monoton fogyó, a pozitív számok halmazán szigorúan monoton növekvő. A  $\cosh$  függvény egyetlen minimumhelye a 0,  $\cosh 0 = 1$  és  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cosh x = \infty$ .

Mivel  $\sinh' x = \cosh x \geq 1$ , a  $\sinh$  függvény szigorúan monoton növekvő a teljes számegyenesen. Minthogy  $\sinh'' x = \sinh x$ , a  $\sinh$  függvény a negatív számok halmazán alulról szigorúan konkáv, a pozitív számok halmazán pedig alulról szigorúan konvex. A  $\sinh$  függvénynek nincs szélsőértéke, egyetlen inflexiós pontja a 0,  $\sinh 0 = 0$  és  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sinh x = \pm\infty$ .

Mivel  $\tanh' x = 1/\cosh^2 x \geq 0$ , a  $\tanh$  függvény szigorúan monoton növekvő a teljes számegyenesen. Minthogy  $\tanh'' x = -2\cosh^{-3} x \sinh x$ , a  $\tanh$  függvény a negatív számok halmazán alulról szigorúan konvex, a pozitív számok halmazán pedig alulról szigorúan konkáv. A  $\tanh$  függvénynek nincs szélsőértéke, egyetlen inflexiós pontja a 0,  $\tanh 0 = 0$  és  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tanh x = \pm 1$ .

A  $\cosh$ ,  $\sinh$  és  $\tanh$  hiperbolikus függvények inverzfüggvényeit a szögfüggvényeknél megszokott módon  $\operatorname{arccosh}: (1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $\operatorname{arcsinh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és  $\operatorname{arctanh}: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$  jelöli.

## Irodalom

- [1] H. S. M. COXETER, *A geometriák alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.
- [2] KURUSA Á., *Differenciálgeometria*, Polygon, Szeged, 1996.
- [3] PAHIO, Catenary, *PlanetMath*, <http://planetmath.org/encyclopedia/ChainCurve.html>.

KURUSA Á., SzTE, Bolyai Intézet, Aradi vértanúk tere 1., 6720 Szeged; *e-mail*: kurusa@math.u-szeged.hu