

Hallható-e a dob alakja?

KURUSA ÁRPÁD

Absztrakt. A legújabb eredményeket ismertetjük a híres Kac-féle kérdésfelvetésnek megfelelően az izospektrál problémáról.

A címben felvetett kérdés nem vice, de még csak nem is azt jelenti, hogy itt valamiféle, a dobok gyártásáról szóló téma következik.

Ebben a cikkben a matematika egy a “napokban” elért csúcsteljesítményéről lesz szó. Igyekszünk megvilágítani a kérdést, amit most mintegy 80 év után sikerült megoldani, és további adalékokkal is szolgálunk. A figyelmes olvasó ráérezhet, milyen tekervényesen fejlődik a matematika, miközben az is kiderül, hogy bizonyos problémák megoldódása nem, hogy csökkentené a művelhető, kutatni való területet, hanem éppen ellenkezőleg, új területeket nyit meg.

Nézzük tehát a problémát!

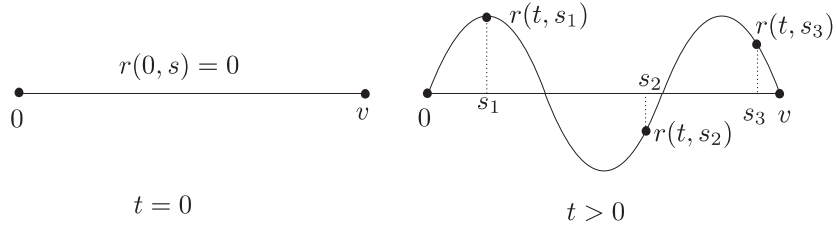
1. A húr esete

Tekintsünk egy két fix pont közé kifeszített damil húrt. A kérdésünk az, hogy milyen hangot ad, ha megpendítjük. A középiskolai fizikából tudjuk, hogy a rezgés a húr szabad rezgéseiből fog összetevődni. A szabad rezgések frekvenciáit nevezik rezonancia frekvenciának, így nekünk mindenekeelőtt ezeket a frekvenciákat kell kiszámítanunk.

Legyen a húr egyik végpontja a nulla, a másik pedig v . Ekkor a húr rezgését egy $r(t, s)$ függvénnyel modellezhetjük, amely azt mondja meg, hogy egy t időpillanatban a húr s pontja, persze $0 \leq s \leq v$, milyen “magasságban” van a húr eredeti állapotához képest.

Világos, hogy $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}(t, s)$ az s feletti pont függőleges gyorsulását adja. Ennek arányosnak kell lennie a pontra ható erővel, amit viszont a damil rugalmassága folytán a szomszédos pontok fejtenek ki. Ez az erő arányos a damilnak az adott pontban való megnyúlásával, ami arányos a $\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}(t, s)$ függvénnyel. Tehát, valamilyen $c \neq 0$ konstansra, amit a damil anyaga és feszítettsége határoz meg,

$$(1) \quad \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}(t, s) = c \frac{\partial^2 r}{\partial s^2}(t, s).$$



1. ábra $t = 0$ pillanat balra, $t > 0$ pillanat jobbra.

Tételezzük fel, hogy a húr ω frekvenciájú hangot ad. Ez azt jelenti, hogy az $r(t, s)$ függvény $\sin(t\omega)g(s)$ alakú, amit visszaírva előbbi egyenletünkbe, a

$$(2) \quad c^2 \ddot{g}(s) + \omega^2 g(s) = 0$$

egyenlethez jutunk. Szorozzuk meg ezt az egyenletet a $\dot{g}(s)$ függvénnyel. Akkor a baloldalon felismerjük egy-egy szorzat deriváltját és egy könnyű integrálással kapjuk, hogy

$$(3) \quad c^2 \dot{g}^2(s) + \omega^2 g^2(s) = \alpha^2$$

valamely megfelelő α konstansra. Ha két szám négyzetösszege egy, akkor az egyik egy megfelelő szög koszinusza, a másik pedig ugyanannak a szögnek a szinusza, ezért létezik olyan γ függvény, melyre $\omega g(s) = \alpha \sin \gamma(s)$ és $c\dot{g}(s) = \alpha \cos \gamma(s)$. Deriválva az elsőt, $\omega \dot{g}(s) = \alpha \cos \gamma(s) \dot{\gamma}(s)$ adódik, amit összevetve a $\dot{g}(s)$ függvényre kapott másik kifejezésünkkel, láthatjuk, hogy $\dot{\gamma}(s) \equiv \omega/c$. Ebből $\gamma(s) = s\frac{\omega}{c} + \delta$, valamely δ konstansra. Tehát $g(s) = \frac{\alpha}{\omega} \sin(s\frac{\omega}{c} + \delta)$. Ugyanakkor $g(0) = 0$ és $g(v) = 0$, hiszen a húr két vége rögzítve van, amiért $\frac{v\omega}{c} = 2k\pi$, ahol a k egész számot jelöl. Ezzel megkaptuk az összes lehetséges harmonikus (így nevezik a tisztán szinuszos alakú rezgéseket) rezgés frekvenciáját:

$$(4) \quad \omega_k = \frac{2kc\pi}{v} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

A fizikából tudjuk, hogy minden rezgés ilyen harmonikus rezgések szuperpozíciójából adódik, valamint azt is tudjuk, hogy tiszta harmonikus rezgést csak ideális esetben hallhatunk. Tehát, ha megpendítjük a húrt, akkor a keletkező hangban minden harmonikus rezgés szerepelni fog, persze különböző erősséggel. Mármint az emberi fülnek megvan az a felbecsülhetetlenül jó tulajdonsága, hogy az összetett hangokból is ki tudja válogatni a harmonikus hangokat – emiatt tudjuk a nagyzenekarokban egyszerre élvezni a violin csengését (magas harmonikusok) és

az üstdob dübörgését (mély harmonikusok)–, vagyis aki a húr hangját hallja, az tulajdonképpen az összes rezonancia frekvenciát megismeri. Összefoglalva, azt mondhatjuk, hogy

“képesek vagyunk hallani a húr hosszát”,

abban az értelemben, hogy az előbbiek szerint a rezgésből megtudjuk az ω_k értékeket, amiből a $v = \frac{\omega_k}{2kc\pi}$ formulával meghatározhatjuk a húr hosszát. Kevésbé képletesen szólva, ez azt jelenti, hogy bármely két különböző húr különböző hangot ad.

2. A dob esete

Természetesen vetődik fel mostmár a kérdés, hogy ha a húr alakját, ami a hossza, meg tudjuk hallani, akkor vajon a dobok alakját meg tudjuk e itélni a hangjuk alapján? Ez az a kérdés, amit a cikk címében is olvashatunk, és először M. Kac cikkében jelent meg [2]. Egy dob alakján, annak a keretnek a formáját értjük, amire a membrán ki van feszítve, és nem tekintjük a dob testét, ami pedig jelentősen befolyásolhatja a hangot. A mi “absztrakt dobunk” egy tartomány a síkban, melynek belseje a membrán, határa pedig a keret.

Ha válaszolni akarunk a címben felvetett kérdésre, akkor — ahogy a húr esetében — itt is ki kellene számolnunk az összes rezonancia-frekvenciát, és azokból valahogyan meg kellene határoznunk az alakot. A (2) egyenlethez analóg módon, most a

$$(5) \quad c^2 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) \right) + \omega^2 g(x, y) = 0$$

egyenlet adódik, ahol a g függvény a $T \subset \mathbb{R}^2$ tartományon — ez most a dob — van értelmezve, és e tartomány ∂T határán — ez a keret — nulla, mivel a keret rögzítve van. Innentől kezdve azonban komoly gondok adódnak, annak ellenére, hogy az egyenlet rettentően hasonlít a húr esetére.

Az első probléma az, hogy ezt az egyenletet roppant nehéz explicit módon megoldani. Igazából a megoldás csak nagyon speciális T tartományokra ismert, ezért aztán a következő lehetőség ami felvetődik, az az, hogy az egyenlet megoldása nélkül próbáljuk meghatározni a lehetséges ω értékeket.

Csak hogy, már az is igen érdekes probléma, hogy vajon van-e olyan ω , amire nincsen megoldása az egyenletnek! A múlt század egyik legnagyobb kérdése volt ez, amit e század elejére sikerült megoldani azzal, hogy bebizonyították, ha a T tartomány korlátos és zárt, akkor azon ω értékek halmaza, amelyre (5) megoldható, az egy ω_k sorozat, amely a végtelenbe tart, ha $k \rightarrow \infty$. Érdekes itt rágondolni egy

pillanatra, hogy ez az eredmény, vagyis, hogy a testek rezonancia frekvenciái egy diszkrét sorozatot alkotnak, valójában mindennapos tapasztalatunk.

Bár ez az eredmény nagyon kevésnek tűnik a mi kérdésünkre vonatkozóan, azért talán azt sejteti, hogy akkor ezek az értékek nem határozhatják meg a T tartományt, mert “ránézésre” jóval több tartomány létezik, mint ahányféle sorozat egyáltalán lehetséges. Csakhogy ez valójában nem így van, mert a két halmaz számossága megegyezik!

Tovább erősíti a pozitív eredménybe vetett bizalmat, hogy az ω_k sorozat valóban meghatározza a dob egy-két fő jellemzőjét.

H.A. Lorentz egy 1910-ben Göttingenben tartott előadásában hívta fel a figyelmet egy bizonyos fizikai problémából adódó sejtésére, mely szerint ha $N(\omega)$ jelöli azon ω_k értékek számát, melyre $\omega_k \leq \omega$, akkor

$$(6) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{N(\omega)}{\omega} = \frac{|T|}{2\pi},$$

ahol $|T|$ jelöli a T tartomány területét. A probléma olyan nehéznek látszott, hogy Hilbert azt jósolta, (6) nem lesz bebizonyítva az ő életében. Elég nagyot tévedett, mert egyik tanítványa, H. Weyl két évvel később bebizonyította az egyenlőséget, és ráadásul éppen az integrálegyenleteknek Hilbert által alig néhány évvel korábban kifejlesztett elméletével.

A következő eredmény jóval később született. 1954-ben A. Pleijel bizonyította be, hogy

$$(7) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} e^{-t\omega_k}}{\frac{|T|}{2\pi t} - \frac{|\partial T|}{4\sqrt{2\pi t}}} = 1,$$

ahol $|\partial T|$ jelöli a T tartomány kerületét. A bizonyítás maga igen bonyolult és bizonyos speciális függvények vizsgálatára épül.

Mindent összevetve, ez azt jelenti, hogy az ω_k sorozat meghatározza a dob területét és a kerületét. De az izoperimetrikus egyenlőtlenség szerint $|\partial T|^2 \geq 4\pi|T|$, és egyenlőség akkor, és csakis akkor áll fenn, ha a T tartomány egy körlap. Ez tehát azt bizonyítja, hogy

“a köralakú dob hangját nem lehet összetéveszteni”

egyetlen más dob hangjával sem.

Természetesen, a kör felismerhetősége igen messze van attól, hogy bármely két dobot meg tudjunk különböztetni, mégis hihetőbbé teszi a dolgot. Azonban ez a remény nagyon csalókának bizonyult.

3. Általánosított dobok

A nehéz problémák ellen gyakran alkalmazott “fegyver” a matematikusok kezében a feladat általánosítása. Most is ez vezetett célba!

Az általánosítás kiinduló pontja az, hogy a $\frac{d^2}{ds^2}$ operátor a (2) egyenletben és a $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ operátor az (5) egyenletben éppen a Laplace operátor egy, illetve kétféle dimenzióban. A mostantól L -vel jelölt Laplace operátor minden dimenzióban, minden görbén, felületen stb. jól ismert a matematikusok előtt, mivel ez a legegyszerűbb mozgásinvariáns differenciál operátor. Ez a tulajdonság lényegében definiálja is az L Laplace operátort minden Riemann sokaságon, ami alatt az olvasó nyugodtan gondolhat egyszerűen valamilyen felület darabra, habár létezik pontos matematikai definíció is (lásd differenciálgeometria). Éppen úgy, ahogy a két-dimenziós tartományok esetén, melyek szintén Riemann sokaságok, általában is be lehet bizonyítani, hogy korlátos zárt Riemann sokaságok esetén azon ω értékek, melyre a

$$(8) \quad c^2 Lg + \omega^2 g = 0$$

egyenlet, ahol g egy a sokaságon értelmezett függvény, megoldható, egy ω_k sorozatot képeznek és $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k = \infty$. Ezen sorozatot a Laplace operátor, vagy egyszerűen a *Riemann sokaság spektrumának szokás nevezni*, mivel a Laplace operátort a sokaság meghatározza. Eddig ugyan nem említettük, de mostmár muszáj felhívni a figyelmet, hogy minden olyan ω érték, amire (8) megoldható, annyiszor van felsorolva a spektrumban, ahány lineárisan független megoldása van a vele alkotott (8) egyenletnek.

Ebben az összefüggésben a mi kérdésünk így hangzik: *Adott két korlátos zárt Riemann sokaság, melyek spektruma megegyezik. Igaz-e, hogy a két sokaság is megegyezik?* Ha két sokaság spektruma megegyezik, akkor azt mondjuk, hogy azok *izospektrál sokaságok*. Annak pontos matematikai értelme, hogy mikor egyezik meg két Riemannin sokaság, meglehetősen bonyolult (lásd differenciálgeometria), de az olvasó nyugodtan gondolhat itt az egybevetőségekre.

Az első bizonyítékot arra, hogy esetleg létezik két különböző dob, amelyek ugyanazon a hangon szólnak, J. Milnor találta 1964-ben. Milnor két olyan különböző 16 dimenziós “általánosított dob” mutatott, melyeknek ugyanaz a spektrumuk. Mivel azonban ezek az izospektrál sokaságok szerkezetileg a tóruszra hasonlítottak (valójában magasabb dimenziójú tóruszok), nem látszott igazán meggyőzőnek, az eredeti, két-dimenziós dobok esetére.

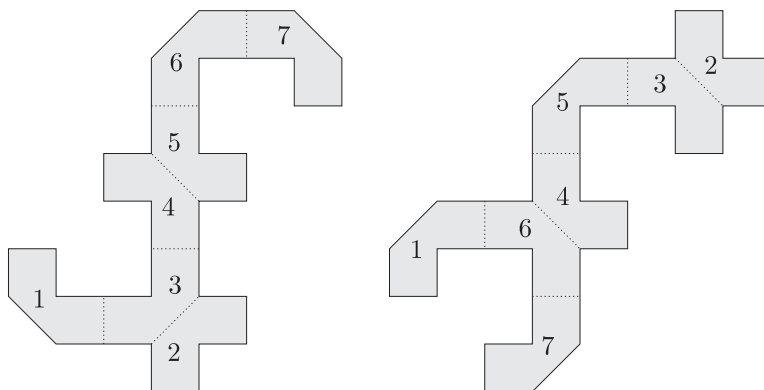
Ugyanakkor Milnor példája elindított egy folyamatot, ami a végső megoldáshoz vezetett. Japán, francia és amerikai matematikusok szinte felváltva mutattak egyre kisebb dimenziójú izospektrál sokaságokat, igaz, hogy ezek szerkezete

továbbra is a tóruszéhoz volt hasonló. Végül azonban P. Brooks és P. Buser előállt két izospektrál görbült felületdarabbal, amelyek már kettő dimenziósak. Visszatérve képletes fogalmazásunkhoz, két olyan különböző “harangot” mutattak, amelyek ugyanazon a hangon szóltak.

Közben más irányú kutatások is folytak. 1980-ban T. Sunada azt vizsgálta, hogyan lehet összehasonlítani különböző “dobok” hangját. Konkrét, jól kezelhető algebrai feltételeket is talált, amiből P. Bérard egy módszert készített arra, hogyan lehet a (8) egyenlet, vagy esetünkben a (4) egyenlet egy valamely sokaságon létező megoldását, egy másik sokaságon megkonstruálni. A módszer meglehetősen bonyolult, de a lényege mégis valami olyasmi, hogy a “dobot” feldaraboljuk, majd a darabokat újra összeragasztjuk, de most másképpen, és ha a vágások mentén a g megoldás sima marad, akkor az az új “dobon” is megoldást ad, ugyanazzal a frekvenciával.

Végül 1992-ben a probléma megoldódott [3], [4]. Szabó Zoltán magyar, illetve Carolyn Gordon, David Webb és Scott Wolpert amerikai matematikusok, is találtak két nem egybevágó, de teljesen ugyanazon a hangon szóló dobót. Szabó Zoltán általánosabbnak tetsző megoldásával szemben az utóbbiaknak ez a következőképpen sikerült. Gordon egy geometriai konferencián a Brooks–Buser “harangokról” beszélt, és történetesen Wolpert is ott volt, aki észrevette, hogy ezek a “harangok” olyan szimmetriával rendelkeznek, amelyek esetleg lehetővé teszik a síkba “lapításukat”. A Gordon-Webb házaspár ennek hatására hosszú napokig igyekezett a papírból kivágott harangokat a síkba hajtogatni, míg végül rátaláltak a két izospektrál dobra, amit a 2. ábrán láthatunk.

Azóta további azonosan szóló dobokat is találtak. Érdekes azonban megjegyezni, hogy ezen dobok spektruma nem ismeretes, csak azt tudjuk, hogy azok megegyeznek.



2. ábra Izospektrál dobok.

Úgy tűnik tehát, hogy a geometria egy nagy problémája megoldódott, azonban látni kell, hogy ettől csak szaporodott a megválaszolandó kérdések száma. A ma ismert összes példa-pár például pontosan hét darabból van összerakva, amint az ábrán is láthatjuk, és csak példa-párok vannak. Vajon más számú darabokból is lehet izospektrál dobokat konstruálni? Van három izospektrál dob? A dob milyen tulajdonságait határozza meg a spektrum? És persze további kérdések tömegét kell még a jövőben megválaszolni.

Irodalom

- [1] B. CIPRA, You can't hear the shape of a drum, *Science*, **255** (1992), 1642–1643.
- [2] M. KAC, Can you hear the shape of a drum?, *Amer. Math. Monthly*, **73/II** (1960), 1–23.
- [3] C. GORDON, Isospectral closed Riemannian manifolds which are not locally isometric, *Journal of Differential Geometry*, **37** (1993), 639–649.
- [4] C. GORDON, One cannot hear the shape of a drum, *Bulletin (new Series) of the AMS*, **27** (1992), 134–138.

Feladat. Mi a spektruma egy r sugarú körlapnak?

KURUSA Á., JATE Bolyai Intézet, Szeged, Aradi vértanúk tere 1.;
e-mail: kurusa@math.u-szeged.hu