

Görbék a számítógépen

KURUSA ÁRPÁD

Abstract. Miután a bevezetésben tisztázzuk a Bézier görbék létrejöttét és jelen szükségességét motiváló tényezőket, a második szakaszban a görbeosztály legfontosabb tulajdonságait ismertetjük. Az utolsó szakaszban a továbblépés egy lehetséges irányát mutatjuk be.

1. Bevezetés

Mindenki számára ismert, aki már próbálkozott vele, hogy milyen nehéz valamiféle szabad formájú görbét, mondjuk egy nyolcast rajzolni számítógéppel a képernyőre. Ennek általában egyik oka, hogy az emberek valamiféle függvények darabjaiból próbálják a kívánt görbét előállítani, ami viszont számítógépes szempontból legalábbis bonyolult függvények alkalmazásával jár. Éppen ezért az ilyen rajzolás igen lassú szokott lenni, és az egyszer megrajzolt görbe megváltoztatása is nehézségekbe ütközik. Ebben a cikkben az ennek a gyakorlati problémának is megoldását jelentő Bézier (Ejtsd: ‘ Bezié ’) görbékkel foglalkozunk.

Az 1960-as évek elején, amikor a nagyobb ipari központokban már eléggé elterjedt a számítógép, a fentiekben vázolthoz igen hasonló probléma vetődött fel a számítógépet használó tervezők előtt. Már szinte minden méretezési számítást a számítógéppel végeztek, de magát a tervet mégis nekik kellett a rajzasztalon megrajzolni, és annyiszor módosítani, ahányszor arra a számítások alapján szükség mutatkozott. Márpedig ez azt jelentette, hogy éppen a legnagyobb munkához nem sikerült alkalmazni a számítógépet. De más oldalról is szorított a helyzet, mert már kezdtek megjelenni az első számjegyvezérlésű maró- és esztergagépek, melyeknek meglehetősen kicsi volt a memóriájuk, ezért bonyolultabb munkadarok megmunkálását elég nehéz volt elvégeztetni velük.

Érdemes végig gondolni, hogyan is történt annak idején egy autó sorozatgyártása előtti tervezői munka.

1. A tervrajz elkészítése.
2. A rajzos adatok *konvertálása* a számítógép számára érthető formára, majd a méretezési programok futtatása. Ha valami méretezési probléma adódik, az *első lépéstől újra kezdeni*.

3. A terv és a méretezési adatok alapján *egyedi* modell elkészítése. Ha e modell alapján valami probléma derül ki, akkor az *első lépéstől újra kell kezdeni*.
4. A megfelelő modell alapján valódi méretű mintapéldányok készítése. Ha most derül ki valami probléma, akkor újra az *első lépéstől kell kezdeni*.
5. A mintapéldányok rengeteg pontjának lemérésével nyert adatok *konvertálása* a számjegy vezérlésű gépek részére.

A sok konvertálás miatt nem lehet azon csodálkozni, hogy a tervezők gyakran visszakivánták a régebbi időket, hiszen így egy új típus megtervezése bizony öt – hat évbe is beletelt. A mérnökök tehát elkezdtek álmodozni egy olyan komplett számítógépes rendszerről, mely ezt az öt lépést egybefogja, és automatizálja. Ezt a rendszert, amikor a tervező tényleg csak az érdemi szellemi munkára koncentrálhat, ma *CAD* (Ejtsd: ‘ked’) rendszernek nevezik, az angol ‘Computer Aided Design’, magyarul Számítógéppel Segített Tervezés, fogalom rövidítése alapján.

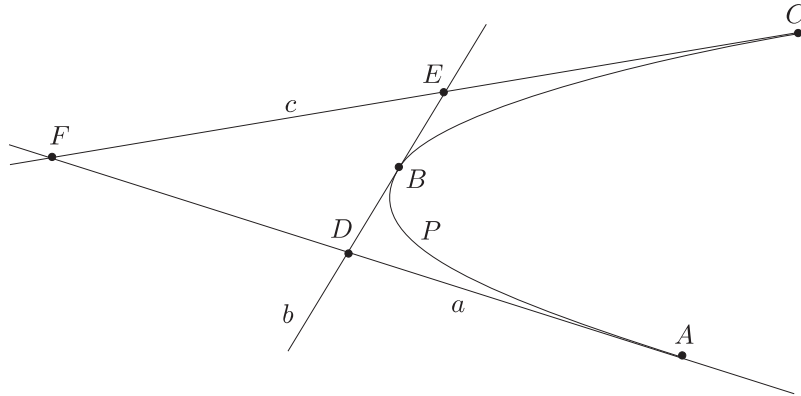
Az ehhez a rendszerhez vezető út egyik igen nagy akadályát az amerikai MIT (Massachusetts Institute of Technology) kutató intézetben I.I. Sutherland (Ejtsd: ‘Szádörrend’) vezetésével küzdötték le, kifejlesztve az első grafikus kiviteli és beviteli perifériát a számítógéphez. Ez az 1963-ban alkotott grafikus rendszer a képernyő és a fényceruza volt. Ezután már nem csak számokat lehetett közölni a számítógéppel, hanem közvetlenül a képernyőn vizuálisan kiválasztott pontokra is rá lehetett mutatni, sőt speciális programokkal már különféle ábrákat is lehetett rajzolni.

A másik és inkább elméleti problémát Európában sikerült megoldani. A probléma az volt, hogy olyan görbékre volt szükség a fentebb már részletezett okokból, melyek aránylag kevés adattal megadhatók, de ugyanakkor elég flexibilisek ahhoz, hogy gyakorlatilag mindent le lehessen rajzolni velük. Fontos feltétel volt az is, hogy az a néhány meghatározó adat ‘emberileg’ is követhetően határozza meg a görbét, valamint, hogy a számítógép gyorsan, aránylag kevés művelettel tudja felrajzolni a görbét. További feltétel volt, hogy mivel a mérnöki gyakorlatban a térbeli alakzatot annak merőleges vetületével szokás ábrázolni (lásd axonometrikus és Monge-féle ábrázolás az ábrázoló geometriában), a görbe merőleges vetületét is gyorsan lehessen számolni, rajzolni.

A megoldás két helyen gyakorlatilag egyidőben született meg, és talán senkit nem lep meg mostmár, hogy ezek a Citroën és a Renault autógyárak voltak. Azt, hogy a fenti feltételeink mennyire egyértelműen meghatározzák a megoldást, jól mutatja, hogy mind a két helyen azonos eredményre jutottak. A Citroënnél de Casteljau (Ejtsd: ‘dökaszteljó’) 1959-ben, a Renaultnál Bézier 1962-ben fedezte fel az új görbéket, melyeket ma már az első nyilvános közlés alapján egyértelműen Bézier görbéknek neveznek.

2. Bézier görbék

Mielőtt definiálnánk magukat a Bézier görbéket, álljon itt egy régről ismert elemi geometriai tétel, mely azt hiszem a Bézier görbék alapötletéül is szolgálhatott volna, ha nem szolgált is. Ez a parabola három-érintő tétele.



1. ábra. P egy parabola, a, b, c ennek három érintője. Ezek érintési pontjai rendre A, B és C . A metszéspontok $D = a \cap b$, $E = b \cap c$ és $F = c \cap a$.

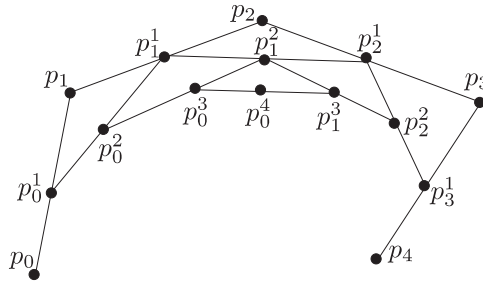
Vegyünk egy P parabola a, b és c érintőjét. Ezek érintési pontjai legyenek A, B és C , a metszéspontok pedig $D = a \cap b$, $E = b \cap c$ és $F = c \cap a$. Ekkor

$$\frac{AD}{DF} = \frac{DB}{BE} = \frac{FE}{EC},$$

vagyis a 'köztes' pontok mindhárom érintőn azonos arányban osztják a kialakuló szakaszokat (lásd 1. ábra). A bizonyítás olyan egyszerű, hogy inkább az olvasóra bízunk, és végre definiáljuk a Bézier görbéket. Mivel a vizsgált tér dimenziójától gyakorlatilag független az elmélet, csak akkor említjük a pontokat magukban foglaltó tér dimenzióját, ha annak különös jelentősége van. Az olvasó az egyszerűség kedvéért bármikor gondolhat egyszerűen a síkra is.

Definíció. [1,2] Legyen adott az $(n+1)$ -darab $p_0, \dots, p_n$ pont. Ezeket Bézier, vagy kontroll pontoknak, az általuk meghatározott poligont pedig kontroll poligonnak nevezzük. Indukcióval definiáljuk a következő pontokat, minden $t \in [0, 1]$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ és $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-k\}$ esetére:

$$(1) \quad p_i^0(t) = p_i \quad \text{és} \quad p_i^k(t) := (1-t)p_i^{k-1}(t) + tp_{i+1}^{k-1}(t).$$

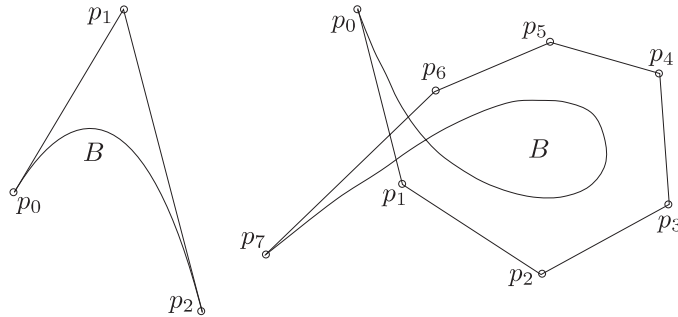


2. ábra. A p_i^k de Casteljau pontokat láthatjuk $t = 1/2$ esetén.

Ekkor azt a görbét, amit a $p_0^n(t)$ pont leír, amint a t végig fut a $[0, 1]$ intervallumon, Bézier görbének nevezzük, és $B(t)$ -vel jelöljük. A $p_i^k(t)$ pontokat de Casteljau pontoknak, az n számot pedig a görbe rendjének hívjuk.

Érdeemes a 2. ábrán megtekinteni, mit is jelent geometriailag ez a definíció.

Világosan látható, hogy a kontroll poligon oldalainak $t/(1-t)$ arányú felosztásával egy eggyel kisebb oldalszámú poligont kapunk, melynek oldalait ugyancsak $t/(1-t)$ arányban osztjuk, tovább csökkentve az oldalak számát. Végül az n -edik lépésben már csak egyetlen pontot kapunk, ami a Bézier görbe t paraméterhez tartozó pontja. Ezt a módszert a Bézier görbe generálására, de Casteljau eljárásnak nevezik. A 3. ábrán néhány Bézier görbét láthatunk a kontroll poligonjával együtt.



3. ábra. Bézier görbék a kontroll poligonjukkal.

Már most észrevehető a Bézier görbék néhány fontos alaptulajdonsága:

- A Bézier görbe mindig a kontroll poligon első pontjánál kezdődik, és az utolsó pontjánál ér véget.
- Az első rendű Bézier görbe egyenes, a másod rendű pedig parabola.
- A Bézier görbe mindig a kontroll poligon konvex burkában van.

Külön meg kell említenünk, hogy a Bézier görbe affin invariáns, ami azt jelenti, hogy egy Bézier görbe affin képe megegyezik a kontroll poligon affin képéből, mint kontroll poligonból származtatott Bézier görbével. Ez azért van így, mert az affinitások egyenes és osztóviszony tartóak, márpedig a Bézier görbe definíciójához csak e két dolgot használtuk. Ennek rendkívül fontos speciális esete a merőleges vetítés (lásd az axonometrikus és Monge-féle ábrázolást az ábrázoló geometriában), hiszen a mérnökök, mint már említettük, ezt az ábrázolási módot használják tervezéskor.

E sok jó tulajdonság láttán nincs mit csodálkozni azon, hogy a mérnökök között azonnal népszerűvé vált a Bézier görbe, de szinte azonnal kiderült az is, hogy számítógépes megvalósításuk is nagyon praktikusán és gyorsan megoldható.

Köztudomású, hogy a függvények közül leggyorsabban a polinomok számíthatók ki, mégpedig az úgynevezett Horner-sémával, vagyis az

$$(2) \quad a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 = (\dots ((a_n t + a_{n-1})t + a_{n-2})t + \dots + a_1)t + a_0$$

alakban. Az alábbiakban be fogjuk bizonyítani, hogy a Bézier görbék koordináta függvényei polinomok, az ilyen görbéket nevezik polinomiálisnak, ami azt jelenti, hogy e görbe pontjai igen gyorsan kiszámíthatóak számítógéppel.

A bizonyítás kivitelezéséhez előbb meg kell ismerkednünk az úgynevezett Bernstein polinomokkal [3]. A

$$(3) \quad B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

polinomot, ahol $0 \leq i \leq n$ és $t \in [0, 1]$, az i -edik n -ed rendű Bernstein polinomnak nevezzük. Ezek a polinomok a matematika szinte minden ágában jelentős szerepet játszanak [3]. Nekünk most csak az alábbi néhány nagyon egyszerűen igazolható tulajdonságára van szükségünk: Ezek a polinomok a $[0, 1]$ egy egységbontását adják, vagyis

$$(4/a) \quad 0 \leq B_i^n(t) \leq 1 \quad \text{és} \quad \sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1,$$

továbbá

$$(4/b) \quad B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t),$$

és

$$(4/c) \quad \frac{d}{dt} B_i^n(t) = n (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)).$$

Tétel 2.1. *A Bézier görbék polinomiálisak, vagyis a $p_0, \dots, p_n$ kontroll pontok által meghatározott Bézier görbe de Casteljau pontjaira*

$$(5) \quad p_i^j(t) = \sum_{k=0}^j p_{i+k} B_k^j(t) \quad (0 \leq j \leq n),$$

a Bézier görbére pedig ebből következőleg

$$(6) \quad B(t) = \sum_{k=0}^n p_k B_k^n(t)$$

érvényes.

Bizonyítás. A formula $j = 0$ esetén a $p_i^0(t)$ definícióját adja vissza, tehát igaz. Teljes indukciós bizonyításunkhoz tegyük fel, hogy (5) igaz j -re és minden lehetséges i -re. Ekkor (1) és (4/b) szerint

$$\begin{aligned} p_i^{j+1} &= (1-t)p_i^j(t) + tp_{i+1}^j(t) \\ &= (1-t) \sum_{k=0}^j p_{i+k} B_k^j(t) + t \sum_{k=0}^j p_{i+1+k} B_k^j(t) \\ (7) \quad &= p_i(1-t)B_0^j(t) + \sum_{k=1}^{j+1} p_{i+k} \left((1-t)B_k^j(t) + tB_{k-1}^j(t) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{j+1} p_{i+k} B_k^{j+1}(t), \end{aligned}$$

ami éppen a bizonyítandó indukciós állítás. ■

Ez a tétel nem csak azt mutatja, hogy a Bézier görbék polinomiálisak, és ezért gyorsan kiszámíthatóak. Figyelembe véve ugyanis, hogy a Bernstein polinomok egységbontást adnak a $[0, 1]$ intervallumon (4/a), ez közvetlenül bizonyítja, hogy a Bézier görbék minden pontja a kontroll poligon konvex burkában van. Azt is leolvashatjuk, hogy a Bézier pontok sorrendjét éppen ellenkezőjére változtatva, a görbe maga nem fog változni, hiszen $B_k^n(t) = B_{n-k}^n(1-t)$.

“Valóban, ezek a görbék szinte minden elképzelhető jó tulajdonsággal rendelkeznek, de vajon elég sokfélék e ahhoz, hogy olyan görbét rajzoljunk vele, amelyet csak akarunk?” – kérdezhetné valaki, és kétségkívül ez szinte a legfontosabb probléma, hiszen például az egyenesek is teljesítik mind a felsorolt jó tulajdonságokat, sőt nyilván még többet is. Szerencsére Weierstrass jól ismert tétele [4] miatt, a polinomok minden folytonos függvényt tetszőlegesen jól megközelíthetnek, így az alábbi ‘megfordítása’ a fenti tételnek határozott igen választ ad erre a kérdésre.

Tétel 2.2. Minden polinomiális görbe Bézier görbe. Ha P olyan a $[0, 1]$ szakaszon értelmezett polinomiális görbe, melynek legmagasabb fokszámú koordináta függvényének fokszáma n , akkor egyértelműen létezik egy olyan $p_0, \dots, p_n$ kontroll poligon, hogy az abból generált Bézier görbére $P(t) = B(t)$ minden $t \in [0, 1]$ esetén.

Bizonyítás. Az előző tétel (6) formulája alapján a Bézier görbe i -edik koordináta függvény polinomja

$$(8) \quad \sum_{k=0}^{j+1} p_{k,i} B_k^n(t),$$

ahol $p_{k,i}$ jelöli a p_k kontroll pont i -edik koordinátáját. Eszerint viszont elég azt megmutatnunk, hogy tetszőleges a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett X polinom egyértelműen előállítható, mint az n -ed rendű B_i^n Bernstein polinomok lineáris kombinációja. Legyen tehát

$$(9) \quad X(t) = \sum_{i=0}^n x_i t^i$$

egy n -ed fokú polinom, és keressük azokat az α_k együtthatókat, melyre

$$(10) \quad X(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k B_k^n(t).$$

A binomiális tétel alapján felbontva az $(1-t)$ hatványát a B_k^n Bernstein polinom-ban, adódik, hogy

$$(11) \quad B_k^n(t) = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} (-1)^j t^{k+j} = \sum_{i=k}^n \binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k} (-1)^{i-k} t^i.$$

Ez utóbbit összevetve a (9) és (10) formulákkal, az alábbi egyenletrendszer adódik az α_k számokra:

$$(12) \quad x_i = \sum_{k=0}^i \alpha_k \binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k} (-1)^{i-k} \quad (1 \leq i \leq n).$$

Mivel ennek az egyenletrendszernek a mátrixa alulról trianguláris és a főátló elemei nem nullák, a rendszer determinánsa nem nulla, tehát pontosan egy megoldása létezik. Ez igazolja az állítást. ■

Remélhetőleg mostmár minden olvasóban sikerült megszüntetni minden kétejt, hogy valóban a Bézier görbék osztálya a legalkalmasabb megoldás a bevezetésben felvetett problémákra. Ez a legtöbb szempontból valóban így is van, mégis a következő szakaszban végig a Bézier-féle görbeosztály egy hiányosságáról, és annak egy lehetséges feloldásáról lesz szó.

3. Összetett Bézier görbék

A Bézier görbéknek minden az előző szakaszban felsorolt jó tulajdonságuk ellenére van egy komoly hiányosságuk. Erre akkor derül fény, amikor olyan görbét szeretnénk rajzolni, amely átmegy néhány előre adott ponton.

A gyógyír erre a problémára az összetett Bézier görbe, melyet szplájnnak (az angol ‘spline’ szó magyarítása) is neveznek. Manapság szinte minden számítógépes rajzoláshoz ezeket a görbéket, illetve ezek egy alfaját, a ‘B-szplájnokat’ (ejtsd ‘beta-szplájn’) alkalmazzák.

Definíció. Egy az $[u_0, u_m]$ intervallumon paraméterezett S görbét összetett Bézier görbének nevezünk, ha létezik az $[u_0, u_m]$ intervallumnak olyan $u_0 < u_1 < \dots < u_{m-1} < u_m$ felbontása, mely esetén minden $[u_i, u_{i+1}]$ intervallumon az

$$(13) \quad S_i(t) = S(t(u_{i+1} - u_i) + u_i) \quad t \in [0, 1]$$

görbe Bézier görbe. Az u_i értékeket és az $S(u_i)$ pontokat csomópontoknak nevezzük.

Egy összetett Bézier görbét kvadratikusnak illetve kubikusnak nevezünk, ha minden darabja másod illetve harmad rendű.

Nyilvánvaló, hogy ez az S görbe átmegy az $S(u_i)$ pontokon, melyek az előre rögzített pontok lehetnek, és mivel két ilyen pont között egy-egy Bézier görbe van, a Bézier görbék majdnem minden jó tulajdonsága is öröklődik ezen görbékre. Mindezenáltal, egy nagyon is fontos tulajdonságot mégis elveszíteni tűnik az összetett Bézier görbe, és ez a simaság. Szerencsére bizonyos lehetőségek itt is adódnak amint a 3.2. tétel és a 3.3. tétel mutatja. Ezek kimondása előtt azonban még szükségünk van egy a Bézier görbékre vonatkozó állításra.

Tétel 3.1. A Bézier görbe r -edik deriváltja maga is Bézier görbe, mégpedig az $\frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r p_i$ kontroll pontokkal, vagyis

$$(14) \quad \frac{d^r}{dt^r} B(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r p_i B_i^{n-r}(t),$$

ahol $\Delta^0 p_i = p_i$ és $\Delta^{j+1} p_i = \Delta^j p_{i+1} - \Delta^j p_i$.

Bizonyítás. A tétel első mondata, és a nyilvánvaló $\Delta^1(\Delta^j p_i) = \Delta^{j+1} p_i$ azonosság mutatja, hogy elég a bizonyítást az $r = 1$ esetre elvégezni.

Ebben az esetben viszont az alábbi rövid számolás, felhasználva a (4/c) azonosságot, igazolja az állítást:

$$(15) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} B(t) &= \sum_{i=0}^n p_i \frac{d}{dt} B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n p_i n (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) \\ &= n \sum_{i=0}^{n-1} (p_{i+1} - p_i) B_i^{n-1}(t). \end{aligned}$$

■

Itt érdemes megjegyezni, hogy amint az például teljes indukcióval is igazolható,

$$(16) \quad \Delta^r p_i = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^{r-j} p_{i+j}.$$

A fenti tétel speciális eseteként nyerjük a Bézier görbe végpontjaiban a

$$(17) \quad \frac{d}{dt} B(0) = n(p_1 - p_0), \quad \frac{d}{dt} B(1) = n(p_n - p_{n-1})$$

érintőket, és a

$$(18) \quad \frac{d^r}{dt^r} B(0) = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r p_0, \quad \frac{d^r}{dt^r} B(1) = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r p_{n-r}$$

magasabb rendű deriváltakat.

Ezek azt mutatják, hogy az érintő és a többi derivált is, csak néhány, a szélső kontroll pontokhoz sorszámában közeli kontroll ponttól függ. Ez lehetőséget ad két Bézier görbe tetszőleges rendben síma csatlakoztatására, igen egyszerűen. Lényegében ennek közvetlen következménye a következő tétel.

Tétel 3.2. *A síkon tetszőlegesen adott $p_0, \dots, p_n$ pontokhoz, t_0, t_n vektorokhoz és $u_0 < u_1 < \dots < u_{n-1} < u_n$ csomópontokhoz pontosan egy olyan folytonosan differenciálható S kvadratikus összetett Bézier görbe létezik, melyre $S(u_i) = p_i$, ahol $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, és $\dot{S}(u_0) \parallel t_0$ valamint $\dot{S}(u_n) \parallel t_n$.*

Bizonyítás. Mivel a csomópontok adottak és két p_i pont között az S_i Bézier görbe másod rendű, az S_i Bézier görbének a p_i és p_{i+1} végpontjain kívül még pontosan egy q_i kontroll pontja van. Ezeket a q_i pontokat kell tehát úgy megválasztanunk, hogy az S görbe minden pontjában folytonosan differenciálható legyen, és a végpontjaiban az érintője iránya t_0 és t_n legyen.

Két csomópont között Bézier görbe van, tehát ott biztosan sima a görbe, ezért a feltételt elég a csomópontoknál felírunk:

$$(19) \quad t_0 \parallel \dot{S}(0+), \dot{S}_i(1-) = \dot{S}_{i+1}(0+) \text{ ha } 1 \leq i \leq n-1, \dot{S}_{n-1}(1-) \parallel t_n.$$

Az előző tétel és az S_i görbék definíciója miatt, ez azt jelenti, hogy

$$(20) \quad \lambda t_0 = \frac{q_0 - p_0}{u_1 - u_0}, \frac{p_i - q_{i-1}}{u_i - u_{i-1}} = \frac{q_i - p_i}{u_{i+1} - u_i} \text{ ha } 1 \leq i \leq n-1, \frac{p_n - q_{n-1}}{u_n - u_{n-1}} = \mu t_n,$$

valamely $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ számra. Mivel pedig ebből

$$(21) \quad \frac{p_{i+1} - q_i}{u_{i+1} - u_i} = \frac{p_{i+1} - p_i}{u_{i+1} - u_i} - \frac{p_i - q_{i-1}}{u_i - u_{i-1}} \quad 1 \leq i \leq n-1$$

következik, egyszerű összeadással adódik a

$$(22) \quad \frac{p_n - q_{n-1}}{u_n - u_{n-1}} = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{p_{n-j} - p_{n-j-1}}{u_{n-j} - u_{n-j-1}} + (-1)^n \frac{q_0 - p_0}{u_1 - u_0}$$

egyenlet. Behelyettesítve ide a megfelelő helyre a λt_0 és μt_n vektorokat, azonnal adódik a λ és μ értéke, amiből aztán q_0 és a (21) alapján a többi $q_1, \dots, q_{n-1}$ pont. Ezzel az állítást igazoltuk. ■

Mivel az emberi szem egy görbét már akkor simának lát, ha az folytonosan differenciálható, ez a tételünk teljesen kielégítő alapot ad a síkon adott pontokon keresztül vizuálisan sima görbék rajzolásához. Sajnos a mérnöki gyakorlatban ez kevésnek bizonyul, ezért a következő tételt szokták használni, mely már nem szorítkozik síkra, és másodrendű differenciálhatóságot biztosít.

Tétel 3.3. *Tetszőlegesen adott $p_0, \dots, p_n$ pontokhoz, $u_0 < \dots < u_n$ csomópontokhoz és t_0, t_n vektorokhoz, ha $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{u_{i+2}-u_{i+1}}{u_{i+1}-u_i} < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ minden $0 \leq i \leq n-2$ esetén, pontosan egy olyan S kubikus összetett Bézier görbe létezik, amely C^2 , vagyis kétszer folytonosan differenciálható, és amelyre $S(u_i) = p_i$ ($i \in \{0, 1, \dots, n\}$) és $\dot{S}(u_0) = t_0$, $\dot{S}(u_n) = t_n$.*

E tétel bizonyítása meglehetősen bonyolult, ezért itt mellőzzük, de az olvasó maga is bizonyíthat dimenziótól független tételt, ha csak egyszeres differenciálhatóságot követel meg, de minden p_i pontban előírja az S görbe $\dot{S}(u_i) = t_i$ érintőjét. A bizonyításhoz a (18) formulát kell használni.

Végül, egy gyakorlati szempontból érdektelen tételt mutatunk be, mely azonban mégis érdekes, ha egy kicsit a múltba pillantunk. Tudni kell ugyanis, hogy a középkorban, amikor már nagy hajókat épített az ember, a hajók tervezésénél használtak egy az angolok által ‘spline’-nak nevezett eszközt, amivel a hajók víztörő orrát tervezték. Ez egy nagyon fontos darabja volt a hajónak, mert nagyban megszabta annak maximális sebességét. A tervezéskor a hajó orrából már megszerkesztett néhány pontot kellett úgy összekötniük, hogy szép sima vonalat kapjanak. Ezt a ‘spline’-nal, amely egy kis ruganyos faléc volt, érték el, úgy, hogy azt ráfeszítették az adott pontokra, majd meghúzták mellette a vonalat. Ezzel tehát olyan görbét rajzoltak, melynek feszültségi energiája minimális volt, hiszen a faléc nyilván igyekszik ellenállni a hajlításnak. Ez a feszülési energia a vonal görbülete négyzetének integrálja. Ahhoz, hogy igazán értékelni tudjuk a következő tételt, már csak azt kell észrevennünk, hogy közel ívhossz szerinti paraméterezés esetén, a görbület nagyjából éppen a görbe második deriváltja.

Tétel 3.4. *Legyenek adottak a $p_0, \dots, p_n$ pontok és az $u_0 < \dots < u_n$ csomópontok. Legyen továbbá G olyan C^2 görbe, melyre $G(u_i) = p_i$. Ha S olyan C^2 kubikus összetett Bézier görbe, melyre $S(u_i) = p_i$, $\dot{G}(u_0) = \dot{S}(u_0)$ és $\dot{G}(u_n) = \dot{S}(u_n)$, akkor*

$$(23) \quad \int_{u_0}^{u_n} |\ddot{G}(u)|^2 du \geq \int_{u_0}^{u_n} |\ddot{S}(u)|^2 du.$$

Bizonyítás. Mivel egy vektor abszolút értékének négyzete a koordinátáinak négyzetösszege, elég ha minden egyes koordináta függvényre külön-külön bizonyítjuk (23)-at.

Legyen g és s a G és az S görbék egy-egy megfelelő koordináta függvénye. Ekkor a $g(u) = s(u) + (g(u) - s(u))$ kifejezést használva, az

$$(24) \quad \int_{u_0}^{u_n} g^2(u) - s^2(u) du = 2 \int_{u_0}^{u_n} \ddot{s}(u)(\ddot{g}(u) - \ddot{s}(u)) du + \int_{u_0}^{u_n} (\ddot{g}(u) - \ddot{s}(u))^2 du$$

azonossághoz jutunk. Parciális integrálással adódik, hogy

$$(25) \quad \int_{u_0}^{u_n} \ddot{s}(u)(\ddot{g}(u) - \ddot{s}(u)) \, du = - \int_{u_0}^{u_n} s^{(3)}(u)(\dot{g}(u) - \dot{s}(u)) \, du,$$

mert $[\ddot{s}(u)(\dot{g}(u) - \dot{s}(u))]_{u_0}^{u_n} = 0$ a feltétel szerint. Mivel $s^{(3)}(u)$ minden $[u_i, u_{i+1}]$ intervallumon konstans, így ez utóbbi integrálást elvégezve azt kapjuk, hogy az éppen

$$(26) \quad = - \sum_{i=0}^{n-1} s^{(3)}(u_{i+})[g(u) - s(u)]_{u_i}^{u_{i+1}},$$

ami viszont nulla, hiszen $g(u_i) = p_i = s(u_i)$. Eszerint

$$(27) \quad \int_{u_0}^{u_n} g^2(u) - s^2(u) \, du = \int_{u_0}^{u_n} (\ddot{g}(u) - \ddot{s}(u))^2 \, du \geq 0,$$

ami bizonyítja a tételt. ■

Irodalom

- [1] W. BÖHM, G. FARIN and J. KAHMANN, A survey of curve and surface methods in CAGD, *CAGD*, **1** (1984), 1–60.
- [2] G. FARIN, *Curves and surfaces for CAGD*, Arizona State University, Arizona, 1988.
- [3] G. LORENTZ, *Bernstein polynomials*, Toronto Press, Toronto, 1953.
- [4] W. RUDIN, *A matematikai analízis alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

Feladatok.

- (1) Adott egy π kúpszelet négy a, b, c, d érintője. Ezek érintési pontjai az A, B, C és D , metszéspontjaik pedig $E = a \cap b, F = b \cap c, G = c \cap d, H = d \cap a, I = a \cap c$ és $J = b \cap d$. Bizonyítsuk be, hogy

$$(E, H, A, I) = (H, G, D, J) = (G, F, C, I) = (F, E, B, J),$$

ahol $(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ a kettősviszonyt jelenti. (Ha X, Y, Z, T egy egyenesen lévő pontok, akkor $(X, Y, Z, T) = \frac{XZ}{ZY} / \frac{XT}{TY}$.)

- (2) Bizonyítsuk be, hogy a B_i^n Bernstein polinom maximumhelye az i/n , az integrálja pedig a $[0, 1]$ intervallumon éppen $\frac{1}{n+1}!$
- (3) Bizonyítsuk be, hogy amennyiben a $p_0, \dots, p_n$ pontok egy egyenesen vannak, akkor a rájuk átmenő egyszer folytonosan differenciálható kvadratikus összetett Bézier görbe éppen a rájuk illeszkedő egyenes!

KURUSA Á., JATE Bolyai Intézet H-6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.; e-mail: kurusa@math.u-szeged.hu