

EULER ARÁNYÖSSZEG-TÉTELE

KURUSA ÁRPÁD AND KOZMA JÓZSEF

KIVONAT. Bemutatjuk Euler arányösszeg-tételének történetét, adunk rá egy új bizonyítást, és egy érdekes egyenlőséggé alakítjuk Euler arányösszeg-formuláját.

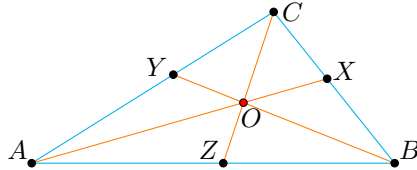
1. BEVEZETÉS

Leonhard Euler (1707–1783), korának legnagyobb matematikusa, a geometriát is számos azóta híressé vált tétellel gazdagította. Ebben a dolgozatban¹ a Magyarországon kevésbé ismert arányösszeg-tételével foglalkozunk, amelynek nemzetközi irodalma sem túlságosan bőséges, habár időről időre feltűnnek újabb bizonyításokat, illetve lehetséges általánosításokat tárgyaló cikkek (lásd [4, 5, 6, 9, 10]).

1.1. Tétel (Euler arányösszeg-tétele [2]). *Az euklideszi sík minden $ABC\triangle$ háromszögének bármely O belső pontjára*

$$\frac{d(A, O)}{d(O, X)} + \frac{d(B, O)}{d(O, Y)} + \frac{d(C, O)}{d(O, Z)} + 2 = \frac{d(A, O)}{d(O, X)} \cdot \frac{d(B, O)}{d(O, Y)} \cdot \frac{d(C, O)}{d(O, Z)}, \quad (1.1)$$

ahol $X = AO \cap BC$, $Y = BO \cap CA$, $Z = CO \cap AB$.



Habár Euler már 1780. május 1-jén benyújtotta a kiadónak az arányösszeg-tételt tartalmazó tanulmányát [2], az csak 1783-ban bekövetkezett halála után 22 évvel jelent meg. Sok munkája jutott erre a sorsa, aminek legfőbb oka az volt, hogy valósággal ontotta magából a cikkeket (élete során több mint 800-at írt a 28 nagyobb mű mellett), így az általa preferált Berlini, illetve Szentpétervári Akadémiák folyóiratainál kiadatlan művei igencsak feltorlódtak.

A kortársak azonban ismerték Euler arányösszeg-tételét, amit jól mutat, hogy Anders Johan Lexell (1740–1783), aki az Euler-család jó barátja volt, és haláláig ugyanannak a Szentpétervári Akadémiának volt a tagja, már 1784-ben publikálta a tétel gömbháromszögekre érvényes változatát [3].

Jelen szerzőknek is egy általánosabb problémával, a projektív-metrikus terek karakterizációjával [8] összefüggésben került látóterébe az arányösszeg-tétel [7].

1991 *Mathematics Subject Classification.* 53A35.

Key words and phrases. háromszög, osztóviszony, Euler.

Ez a kutatás az NKFIH K-116451 és KH_18 129630 projektjei támogatásával készült.

¹Ugyanez angol nyelven is elérhető, lásd [7].

Még az arányösszeg-tételnél is kevésbé ismert, pedig már Euler [2] dolgozatában is szerepelt, hogy az $ABC\triangle$ háromszög megszerkeszthető a (1.1) formulában szereplő hosszak ismeretében.

1.2. Tétel (Szerkeszthetőség). *Ha adottak egy ismeretlen $ABC\triangle$ valamely O közös pontjára illeszkedő $\overline{AX}$, $\overline{BY}$ és $\overline{CZ}$ szakaszok hosszai valamint azok O pont általi felosztásának arányai, akkor az $ABC\triangle$ háromszög megszerkeszthető.*

Ebben a dolgozatban nem csak a fenti tételeket igazoljuk, de a 2.1. Tételben pontosan megadjuk annak feltételeit is, hogy három olyan szakaszt, amelyek belsőjében adott egy-egy pont, mikor lehet ezen belső pontjaikban úgy összeilleszteni, hogy a valamely három kiválasztott végpontjuk által meghatározott háromszögnek a kiválasztott végponttal szemben lévő oldalai tartalmazzák a szakaszok nem kiválasztott végpontjait².

Végül, bár bemutatjuk a közvetlen általánosítás lehetőségét is, inkább egy az (1.1) egyenlőségből született egyenlőtlenséget bizonyítunk, mely éppenséggel pontosan akkor válik egyenlőséggé, ha az AX , BY és CZ szakaszok egy ponton mennek át. A 3.1. Tétel határozottan emlékeztet Routh tételére ([1, 13.55], [11]).

2. AZ ARÁNYÖSSZEG-TÉTEL ÉS MEGFORDÍTÁSÁNAK BIZONYÍTÁSA

Jelöléseink többnyire a szokásosak: a pontokat nagybetűkkel jelöljük; $d(A, B)$ az A és B pont távolságát, AB , illetve $\overline{AB}$ az általuk meghatározott egyenest, illetve szakaszt jelöli. Az A , B és C pontok által meghatározott háromszög $ABC\triangle$, míg annak az A csúcsnál lévő szöge $\angle(BAC)$. A terület-függvényt $t(\cdot)$, az $ABC\triangle$ területét $t(ABC) = t(ABC\triangle)$ adja.

A 1.1. tétel bizonyítása. Áttekinthetőbbé válik Euler (1.1) formulája, ha bevezetjük az $a = \frac{d(A,O)}{d(O,X)}$, $b = \frac{d(B,O)}{d(O,Y)}$ és $c = \frac{d(C,O)}{d(O,Z)}$ jelöléseket:

$$a + b + c + 2 = abc. \quad (2.1)$$

Mindkét oldalhoz hozzáadva az $1 + a + b + c + ab + bc + ca$ kifejezést, a jobboldal újra szorzatalakba írható és a baloldal is szorzatok összegévé válik:

$$(1 + b)(1 + c) + (1 + a)(1 + c) + (1 + a)(1 + b) = (1 + a)(1 + b)(1 + c)$$

Az a, b és c értéke nyilván nem -1 , ezért a jobboldallal leosztva az ekvivalens

$$\frac{1}{1 + a} + \frac{1}{1 + b} + \frac{1}{1 + c} = 1 \quad (2.2)$$

²A [9] tanulmány igazolta, hogy amennyiben csak az (1.1) egyenletben szereplő arányok betartása fontos, akkor (1.1) elegendő: minden további feltétel nélkül van olyan háromszög, amelyben éppen az (1.1) egyenletben szereplő arányok lépnek fel. Sőt, a szerző megjegyzi, hogy egy ilyen háromszög minden affin képe is megteszi.

egyenlőséghez jutunk, vagyis (1.1) ekvivalens a

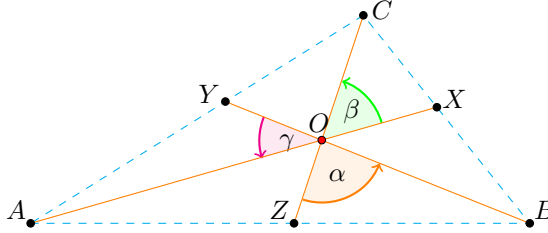
$$\frac{d(O, X)}{d(A, X)} + \frac{d(O, Y)}{d(B, Y)} + \frac{d(O, Z)}{d(C, Z)} = 1 \quad (2.3)$$

egyenlőséggel. Ez azonban közvetlenül adódik a

$$\frac{d(O, X)}{d(A, X)} = \frac{t(OBC)}{t(ABC)}, \quad \frac{d(O, Y)}{d(B, Y)} = \frac{t(OCA)}{t(ABC)}, \quad \frac{d(O, Z)}{d(C, Z)} = \frac{t(OAB)}{t(ABC)}$$

egyenlőségekből. $\square$

A 1.2. tétel bizonyítása. Annak érdekében, hogy elkerüljük az áttekinthetetlenül összetett formulákat, most is alkalmazzuk az $a = \frac{d(A, O)}{d(O, X)}$, $b = \frac{d(B, O)}{d(O, Y)}$ és $c = \frac{d(C, O)}{d(O, Z)}$ jelöléseket, melyekre a feltétel szerint (2.1), vagy ami ugyanaz, (2.2) teljesül. Bevezetjük még az $\alpha = \angle(ZOB)$, $\beta = \angle(XOC)$, és $\gamma = \angle(YOA)$ szögeket, amelyekre nyilván $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ érvényes.



Feladatunk tehát az α , β és $\gamma = \pi - \alpha - \beta$ értékek megtalálása.

Az X pont akkor és csak akkor esik a $\overline{BC}$ szakaszra, ha

$$d(B, O)d(O, C) \sin \alpha = t(BOC) = d(B, O)d(O, X) \sin \gamma + d(C, O)d(O, X) \sin \beta,$$

vagyis

$$\frac{d(A, O)}{d(O, X)} \frac{\sin \alpha}{d(O, A)} = \frac{\sin \alpha}{d(O, X)} = \frac{\sin \gamma}{d(O, C)} + \frac{\sin \beta}{d(B, O)}.$$

A csúcsok ciklikus permutációjával ugyanígy látjuk, hogy $Y \in \overline{CA}$ és $Z \in \overline{AB}$ akkor és csak akkor, ha rendre

$$\begin{aligned} \frac{d(B, O)}{d(O, Y)} \frac{\sin \beta}{d(O, B)} &= \frac{\sin \alpha}{d(O, A)} + \frac{\sin \gamma}{d(C, O)}, \\ \frac{d(C, O)}{d(O, Z)} \frac{\sin \gamma}{d(O, C)} &= \frac{\sin \beta}{d(O, B)} + \frac{\sin \alpha}{d(A, O)}. \end{aligned}$$

Az $x = \frac{\sin \alpha}{d(A, O)}$, $y = \frac{\sin \beta}{d(O, B)}$, és $z = \frac{\sin \gamma}{d(O, C)}$ bevezetésével azt kapjuk, hogy ezek teljesítik az

$$\begin{aligned} ax - y - z &= 0, \\ -x + by - z &= 0, \\ -x - y + cz &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

homogén lineáris egyenletrendszer. A (2.4) egyenleteinek különbségéből rögtön adódik, hogy a megoldásokra $(1+a)x = (1+b)y = (1+c)z$ teljesül, vagyis minden megoldás $(\frac{\lambda}{1+a}, \frac{\lambda}{1+b}, \frac{\lambda}{1+c})$ alakú, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$. Eszerint

$$\lambda \frac{d(A, O)}{1+a} = \sin \alpha, \quad \lambda \frac{d(B, O)}{1+b} = \sin \beta, \quad \text{és} \quad \lambda \frac{d(C, O)}{1+c} = \sin \gamma. \quad (2.5)$$

Ebből

$$\frac{d(O, B)}{1+b} \sin \alpha = \frac{d(O, A)}{1+a} \sin \beta,$$

és

$$\begin{aligned} \frac{d(O, C)}{1+c} &= \frac{\sin \gamma}{\lambda} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\lambda} = \frac{\sin \alpha}{\lambda} \cos \beta + \cos \alpha \frac{\sin \beta}{\lambda} \\ &= \frac{d(O, A)}{1+a} \cos \beta + \frac{d(O, B)}{1+b} \cos \alpha \end{aligned}$$

is következik. Utóbbi egyenlőség mindkét oldalából kivonva a $\frac{d(O, B)}{1+b} \cos \alpha$ kifejezést, majd az eredményt négyzetre emelve és hozzáadva az első egyenlethez, azt kapjuk, hogy

$$\frac{d^2(O, B)}{(1+b)^2} \sin^2 \alpha + \left(\frac{d(O, C)}{1+c} - \frac{d(O, B)}{1+b} \cos \alpha \right)^2 = \frac{d^2(O, A)}{(1+a)^2}.$$

Ebből a baloldalon a különbség négyzetre emelését elvégezve

$$\frac{d^2(O, B)}{(1+b)^2} - 2 \frac{d(O, C)}{1+c} \frac{d(O, B)}{1+b} \cos \alpha + \frac{d^2(O, C)}{(1+c)^2} = \frac{d^2(O, A)}{(1+a)^2} \quad (2.6)$$

adódik. Ez a koszinusz-tétel értelmében azt jelenti, hogy van egy olyan $PQR\triangle$ háromszög, amelynek a csúcsokkal szembeni oldalhosszaira rendre $p = \frac{d(O, A)}{1+a}$, $q = \frac{d(O, B)}{1+b}$ és $r = \frac{d(O, C)}{1+c}$ érvényes, és szögei a csúcsoknál rendre α , β és $\gamma = \pi - \alpha - \beta$.

Az eredeti háromszöget tehát úgy tudjuk megszerkeszteni, hogy a $p = \frac{d(A, O)d(O, X)}{d(A, X)}$, $q = \frac{d(B, O)d(O, Y)}{d(B, Y)}$ és $r = \frac{d(C, O)d(O, Z)}{d(C, Z)}$ hosszakat kiszámítjuk, ezekből a $PQR\triangle$ háromszöget megszerkesztjük, ennek szögei megadják az α , β és $\gamma = \pi - \alpha - \beta$ szögeket amelyek alapján az $\overline{AX}$, $\overline{BY}$, és $\overline{CZ}$ szakaszok egymáshoz képest beállíthatók. $\square$

Az 1.1. tétel és az 1.2. tétel bizonyítása alapján világos, hogy az alábbi tétel feltételeit nem lehet könnyíteni.

2.1. Tétel (Az arányösszeg-tétel megfordítása). *Ha adott közös O pontra illeszkedő $\overline{AX}$, $\overline{BY}$ és $\overline{CZ}$ szakaszokra érvényes Euler (1.1) formulája, valamint a $p = \frac{d(A, O)d(O, X)}{d(A, X)}$, $q = \frac{d(B, O)d(O, Y)}{d(B, Y)}$ és $r = \frac{d(C, O)d(O, Z)}{d(C, Z)}$ számok mindegyike kisebb a másik kettő összegénél, akkor az $\overline{AX}$, $\overline{BY}$ és $\overline{CZ}$ szakaszokat el lehet forgatni O körül úgy, hogy az X, Y, Z pontok rendre az $ABC\triangle$ háromszög megfelelő oldalaira essenek.*

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért legyen $a = \frac{d(A,O)}{d(O,X)}$, $b = \frac{d(B,O)}{d(O,Y)}$ és $c = \frac{d(C,O)}{d(O,Z)}$. A feltétel szerint

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 1. \quad (2.7)$$

Szerkesszünk egy olyan $PQR\triangle$ háromszöget, melynek csúccsal szembeni oldalainak hossza rendre p, q, r . A csúcsoknál lévő szögek legyenek rendre α, β és $\gamma = \pi - \alpha - \beta$.

Forgassuk el az $\overline{AX}$, $\overline{BY}$ és $\overline{CZ}$ szakaszokat úgy, hogy $\angle(ZOB)$ legyen α , $\angle(XOC)$ legyen β , és $\angle(YOA)$ legyen γ . Eszerint

$$\begin{aligned} q^2 - 2rq \cos \alpha + r^2 &= p^2, \\ p^2 - 2rp \cos \beta + r^2 &= q^2, \\ p^2 - 2qp \cos \gamma + q^2 &= r^2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Most igazoljuk, hogy a kialakult $ABC\triangle$ háromszög olyan, melynek csúcsokkal szemközti oldalai rendre tartalmazzák az X, Y , és Z pontokat.

Legyen $\hat{X} = AX \cap BC$, $\hat{Y} = BY \cap CA$, és $\hat{Z} = CZ \cap AB$, továbbá $\hat{a} = \frac{d(A,O)}{d(O,\hat{X})}$, $\hat{b} = \frac{d(B,O)}{d(O,\hat{Y})}$ és $\hat{c} = \frac{d(C,O)}{d(O,\hat{Z})}$. Az $ABC\triangle$ háromszögre is érvényes (1.1), így

$$\frac{1}{1+\hat{a}} + \frac{1}{1+\hat{b}} + \frac{1}{1+\hat{c}} = 1 \quad (2.9)$$

adódik. Bevezetve a $\hat{p} = \frac{d(A,O)d(O,\hat{X})}{d(A,\hat{X})}$, $\hat{q} = \frac{d(B,O)d(O,\hat{Y})}{d(B,\hat{Y})}$ és $\hat{r} = \frac{d(C,O)d(O,\hat{Z})}{d(C,\hat{Z})}$ jelöléseket, (2.6) és a szerkesztés menete alapján

$$\begin{aligned} \hat{q}^2 - 2\hat{r}\hat{q} \cos \alpha + \hat{r}^2 &= \hat{p}^2, \\ \hat{p}^2 - 2\hat{r}\hat{p} \cos \beta + \hat{r}^2 &= \hat{q}^2, \\ \hat{p}^2 - 2\hat{q}\hat{p} \cos \gamma + \hat{q}^2 &= \hat{r}^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Az (2.8) egyenleteket összevetve az (2.10) egyenletekkel, mivel mindkét egyenlethármas azonos szögű, tehát hasonló háromszögekre vonatkozik, adódik, hogy $\hat{p} = \lambda p$, $\hat{q} = \lambda q$ és $\hat{r} = \lambda r$ valamely $\lambda > 0$ számra. Tekintve p, q, r és $\hat{p}, \hat{q}, \hat{r}$ definícióit, ebből $\frac{1}{1+\hat{a}} = \frac{\lambda}{1+a}$, $\frac{1}{1+\hat{b}} = \frac{\lambda}{1+b}$, és $\frac{1}{1+\hat{c}} = \frac{\lambda}{1+c}$ adódik, amiből (2.7) és (2.9) összevetésével $\lambda = 1$ következik. Eszerint $\hat{a} = a$, $\hat{b} = b$, és $\hat{c} = c$, vagyis $\hat{X} = X$, $\hat{Y} = Y$, és $\hat{Z} = Z$.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. $\square$

3. ÁLTALÁNOSÍTÁS HELYETT EGY EGYENLŐTLENSÉG

Belátható, hogy Euler arányösszeg-tétele igaz marad akkor is, ha a háromszög csúsaiból kiinduló egyenesek metszéspontjáról csak annyit teszünk fel, hogy az nem esik a háromszög egyik oldalegyenesére se. Sőt, ezen általánosabb eset megfordítása is érvényben marad ha az X, Y, Z pontoktól csak azt várjuk el, hogy a megfelelő

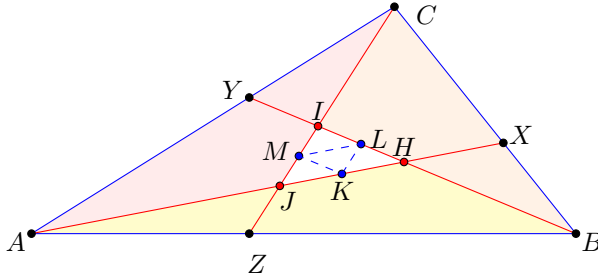
oldalegyenesekre essenek. Ennek bizonyítását itt nem végezzük el, helyette egy Routh tételére ([1, 13.55], [11]) emlékeztető egyenlőtlenséget mutatunk.

Az arányösszeg-formulát tekintsük most az ekvivalens (2.3) alakjában. Ez a formula a három szakasz egy ponton áthaladása esetén érvényes. Ha a szakaszok páronként különböző H, I, J pontokban metszik egymást, akkor is képezhetünk minden szakaszon arányt, ha a két metszéspont által meghatározott szakasz felezőpontját tekintjük új osztópontnak.

3.1. Tétel. *Legyenek X, Y, Z az $ABC\triangle$ háromszög rendre A, B, C csúccsal szemközti oldalainak pontjai, legyenek továbbá őket a szemközti csúcsokkal összekötő szakaszok metszéspontjai $H = AX \cap BY$, $I = BY \cap CZ$ és, $J = CZ \cap AX$. Végül legyenek ez utóbbiak által meghatározott $HIJ\triangle$ oldalfelező pontjai $K = (J + H)/2$, $L = (H + I)/2$ és $M = (I + J)/2$. Ekkor*

$$\frac{d(K, X)}{d(A, X)} + \frac{d(L, Y)}{d(B, Y)} + \frac{d(M, Z)}{d(C, Z)} \geq 1, \quad (3.1)$$

ahol egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $K = L = M$.



Bizonyítás. Rendre azonos alapú háromszögek területének arányait írhatjuk fel a következőképpen $\frac{t(HBC)}{t(ABC)} = \frac{d(H, X)}{d(A, X)}$, $\frac{t(JBC)}{t(ABC)} = \frac{d(J, X)}{d(A, X)}$, $\frac{t(ICA)}{t(ABC)} = \frac{d(I, Y)}{d(B, Y)}$, $\frac{t(HCA)}{t(ABC)} = \frac{d(H, Y)}{d(B, Y)}$, $\frac{t(JAB)}{t(ABC)} = \frac{d(J, Z)}{d(C, Z)}$, $\frac{t(IAB)}{t(ABC)} = \frac{d(I, Z)}{d(C, Z)}$. Ezeket a (3.1) baloldalának duplájába helyettesítve, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \frac{d(H, X) + d(J, X)}{d(A, X)} + \frac{d(I, Y) + d(H, Y)}{d(B, Y)} + \frac{d(J, Z) + d(I, Z)}{d(C, Z)} \\ &= \frac{t(HBC)}{t(ABC)} + \frac{t(JBC)}{t(ABC)} + \frac{t(ICA)}{t(ABC)} + \frac{t(HCA)}{t(ABC)} + \frac{t(JAB)}{t(ABC)} + \frac{t(IAB)}{t(ABC)} \\ &= \frac{t(HBC)}{t(ABC)} + \frac{t(HCA)}{t(ABC)} + \frac{t(ICA)}{t(ABC)} + \frac{t(IAB)}{t(ABC)} + \frac{t(JBC)}{t(ABC)} + \frac{t(JAB)}{t(ABC)} \\ &= 1 - \frac{t(HAB)}{t(ABC)} + 1 - \frac{t(IBC)}{t(ABC)} + 1 - \frac{t(JAC)}{t(ABC)} = 3 - \frac{t(ABC) - t(HIJ)}{t(ABC)} \\ &= 2 + \frac{t(HIJ)}{t(ABC)}. \end{aligned}$$

Ezzel a tételünket bizonyítottuk. $\square$

HIVATKOZÁSOK

- [1] H. S. M. COXETER *A geometriák alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.
- [2] L. EULER, Geometria et sphaerica quaedam, *Memoires de l'Academie des Sciences de Saint-Petersbourg*, **5** (1815), 96–114; Opera Omnia Series 1, vol. XXVI, 344–358; eredeti: <http://eulerarchive.maa.org/docs/originals/E749.pdf>; angol fordítás: <http://eulerarchive.maa.org/Estudies/E749t.pdf>.
- [3] A. J. LEXELL, Solutio problematis geometrici ex doctrina sphaericorum, *Acta academiae scientiarum imperialis Petropolitinae*, **5:1** (1784), 112–126; <http://www.17centurymaths.com/contents/euler/lexellone.pdf>.
- [4] A. PAPADOPOULOS and W. SU, On hyperbolic analogues of some classical theorems in spherical geometry, *arXiv*, (2015), <http://arxiv.org/abs/1409.4742>.
- [5] B. GRÜNBAUM and M. S. KLAMKIN, Euler's Ratio-Sum Theorem and Generalizations, *Mathematics Magazine*, **79:2**(Apr) (2006), 122–130; <http://www.jstor.org/stable/27642919>.
- [6] B. GRÜNBAUM, Cyclic ratio sums and products, *Cruz Mathematicorum*, **24:1** (1998), 20–25; <https://cms.math.ca/cruz/v24/n1/page20-25.pdf>.
- [7] Á. KURUSA and J. KOZMA, Euler's ratio-sum theorem revisited, *Forum Geom.*, **19** (2019); <http://forumgeom.fau.edu/FG2019volume19/FG2019index.html>.
- [8] Á. KURUSA and J. KOZMA, Euler's ratio-sum formula in projective-metric spaces, *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, (2018); <https://doi.org/10.1007/s13366-018-0422-6>.
- [9] G. C. SHEPHARD, Euler's Triangle Theorem, *Cruz Mathematicorum*, **25:3** (1999), 148–153; <https://cms.math.ca/cruz/v25/n3/page148-153.pdf>.
- [10] C. E. SANDIFER, 19th century Triangle Geometry (May 2006), *How Euler did it*, Math. Ass. Amer., 2007, 19–27; <http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2006-05.pdf>.
- [11] https://en.wikipedia.org/wiki/Routh's_theorem; Accessed 2019. március 28..

KURUSA Á., Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem, Aradi vértanúk tere 1, 6725 Szeged; és Rényi Alfréd Matematikai Intézet, Magyar Tudományos Akadémia, Reáltanoda u. 13-15, 1053 Budapest; E-mail: kurusa@math.u-szeged.hu .

KOZMA J., Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem, Aradi vértanúk tere 1, 6725 Szeged, Magyarország; E-mail: kozma@math.u-szeged.hu .