Differenciálható görbék szépségei

Újak, és régiek új köntösben

Kurusa Árpád

http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa

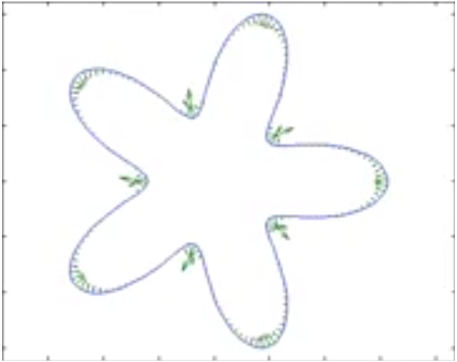
Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

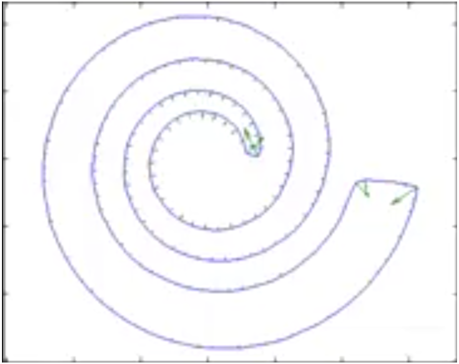
http://www.math.u-szeged.hu/

***Eötvös Loránd Kollégium Matematika Műhelyén**, Szeged, 2017. március 17. 09$^{\underline{00}}$*

A multimédia-tartalom eléréséhez Adobe PDF Reader szükséges.

Hogyan alakul egy rugalmas szalag, ha elengedjük? Tegyük mézbe, hogy lelassuljon a változás: a szalag pontjainak sebességvektora mindig az ottani görbületi vektorral egyenlő.

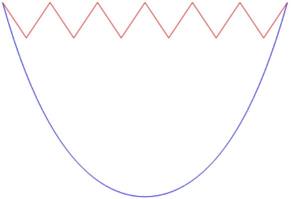




Tétel (Grayson [2], 1987). *Ha egy egyszerű zárt görbe úgy mozog, hogy minden pontjának sebességvektora a görbe ottani görbületi vektorával egyenlő, akkor a mozgás közben a görbe sosem lesz önátmetsző és véges időn belül konvex lesz.*

Tétel (Gage & Hamilton [1], 1986). *Ha egy konvex görbe úgy mozog, hogy minden pontjának sebességvektora a görbe ottani görbületi vektorával egyenlő, akkor konvex marad, egy pontra zsugorodik, az alakja pedig egy körhöz konvergál.*

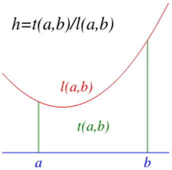
A kötél- vagy láncgörbe a két végénél fogva felfüggesztett lánc saját súlya alatt felvett alakját írja le.



Az egyensúly feltétele az, hogy a ható erők összege minden pontban az érintő irányába mutasson. Ha egy f valós függvény grafikonja írja le a görbét, azt kapjuk, hogy

$$\sigma\sqrt{1+(f'(x))^2} = \pm c f''(x),$$

ahol σ a sűrűség, c pedig a függesztési pontok között vízszintesen ható erő [4].



Ugyanerre jutunk, ha olyan f függvényt keresünk [5], mely grafikonjának bármely íve alatti terület arányos az ív hosszával, vagyis van olyan $h > 0$ konstans, hogy az f függvény értelmezési tartományának bármely $[a,b]$ intervallumára

$$\int_a^b f(x)dx = t(a,b) = h\cdot l(a,b) = h\int_a^b \sqrt{(f'(x))^2+1}\,dx.$$

Tehát $f^2(x) \equiv h^2((f'(x))^2+1)$, ami a lánc egyensúlyi helyzetét leíró egyenlet. Egy megoldás az $f \equiv h$. Egyébként pedig

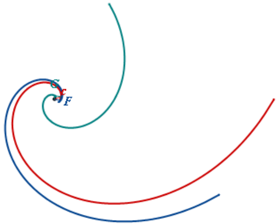
$$\frac{\pm 1}{h} = \frac{(f(x)/h)'}{\sqrt{(f(x)/h)^2-1}} = \left(\operatorname{arccosh}\left(\frac{f(x)}{h}\right)\right)',$$

vagyis $f(x) = h\cosh\left(\dfrac{x-c}{h}\right)$, ahol c tetszőleges konstans.

Mivel minden láncgörbe hasonló egymáshoz és a kupolák stabilitásának fizikai feltétele ugyanaz, mint a láncok egyensúlyának feltétele, az állva maradt kupolák mind hasonlók egymáshoz [4].

← A római Szent Péter Bazilika kupolája.

A sík egy görbéje logaritmikus spirál, ha egy rögzített ponton, a *póluson* átmenő minden egyenest fix β szögben metsz.



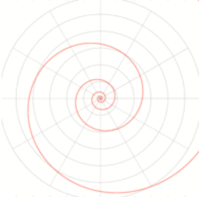
A pólusnál polárkoordinátázásban $\xi \mapsto r(\xi)$ által paraméterezett görbére teljesül, hogy

$$\cos\beta = \frac{\langle r'(\xi)\boldsymbol{u}_\xi + r(\xi)\boldsymbol{u}_\xi^\perp, r(\xi)\boldsymbol{u}_\xi\rangle}{|r'(\xi)\boldsymbol{u}_\xi + r(\xi)\boldsymbol{u}_\xi^\perp| \cdot r(\xi)},$$

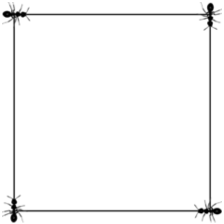
ahol $\boldsymbol{u}_\xi = (\cos\xi, \sin\xi)$ és $\boldsymbol{u}_\xi^\perp = \boldsymbol{u}_{\xi+\pi/2}$. E differenciálegyenlet megoldása

$$r(\xi) = ae^{\xi \operatorname{ctg}\beta} \quad (a \neq 0).$$

Egy spirál centrális nagyítása a pólusból ugyanaz, mint elforgatása a pólus körül, ami az ilyen alakú organizmusok számára lehetővé teszi, hogy alakváltozás nélkül növekedjenek.

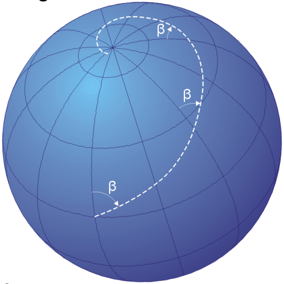


A szúnyogok repülési iránya állandó β szöget zár be a fénnyel. Emiatt egy pontszerű szúnyog végtelen sokszor megkerül egy lámpát. Repülési ideje a lámpába ϱ távolságból konstans v sebességgel mégis véges $\frac{\varrho}{v\cos\beta}$, mert sebességvektorának nagysága a lámpa felé $v\cos\beta$.



Ha egy szabályos négyszög csúcsaiból induló hangyák úgy üldözik egymást, hogy mindig az órajárás szerinti irányban következő hangya felé másznak, akkor logaritmikus spirálok mentén haladnak.

A ϱ sugarú gömbfelület egy görbéje loxodroma, ha egy rögzített ponton, a *póluson* átmenő minden főkört fix β szögben metsz.



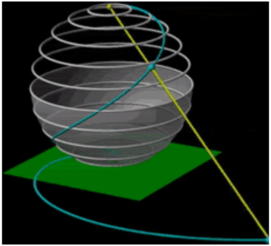
Ívhossz szerinti $\boldsymbol{r}$ paraméterezésben a görbe koordinátái

$$r_1(s) = \varrho \cos\left(\frac{s\cos\beta}{\varrho}\right)\cos\lambda(s),$$
$$r_2(s) = \varrho \cos\left(\frac{s\cos\beta}{\varrho}\right)\sin\lambda(s),$$
$$r_3(s) = \varrho \sin\left(\frac{s\cos\beta}{\varrho}\right),$$

amennyiben $\boldsymbol{r}(0) = (1,0,0)$ és $\lambda(s) = \operatorname{tg}\beta \ln\operatorname{tg}\left(s\frac{\cos\beta}{2\varrho} + \frac{\pi}{4}\right)$.

A loxodroma hossza $\ell = \frac{\varrho\pi}{\cos\beta}$, mert a pólusokat az $s = \frac{\pm\varrho\pi}{2\cos\beta}$ ívhosszaknál éri el.

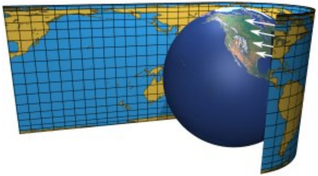
Mivel a gömbfelület sztereografikus vetítése szögtartó, minden loxodroma sztereografikus képe logaritmikus spirál.



Habár Mercator még 1569-ben készítette térképét, az általa alkalmazott

$$(\lambda,\varphi) \mapsto \varrho\left(\lambda, \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right)$$

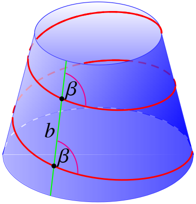
leképezést, ahol λ a hosszúsági és φ a szélességi fok, mindmáig használják a tengeri navigációban, mert szögtartó, amiért könnyű meghatározni hová jut az állandó irányba haladó hajó.



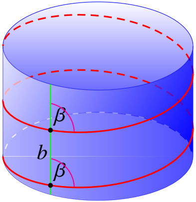
A loxodromák egyenesek a Mercator-típusú térképeken.

A párhuzamos egyeneseket konstans szögben metsző görbék éppen az egyenesek, vagyis *az egyenesek az ideális ponthoz tartozó logaritmikus spirálok*.

A csavarvonal a logaritmikus spirálból és az egyenesből keletkezik a sík kúpos illetve hengeres “feltekerésével”.



A *kúpos csavarvonal* a 2α nyílásszögű kúp alkotóit β szögben metsző görbe:
$\boldsymbol{r}(t) = \varrho e^{ct}(\cos t, \sin t, d)$,
ahol $d = \operatorname{ctg}\alpha$ és $c = \sin\alpha \operatorname{ctg}\beta$.

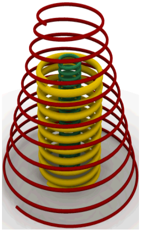


A *hengeres csavarvonal* a ϱ sugarú hengerfelület alkotóit β szögben metsző görbe:
$\boldsymbol{r}(t) = (\varrho\cos t, \varrho\sin t, ct)$,
ahol $c = \varrho \operatorname{ctg}\beta$ és $b = 2\pi c$ a menetemelkedés.

Kúpos csavarvonal görbülete és torziója arányos.

Példák a valóságban.

A DNS szerkezete ⟶
Rugók és ↓ növények



Hengeres csavarvonal teljesíti a következőket:

(0) Ívhossz szerinti paraméterezésben

$$\boldsymbol{r}(s) = \left(\varrho\cos\frac{s\sin\beta}{\varrho}, \varrho\sin\frac{s\sin\beta}{\varrho}, s\cos\beta\right).$$

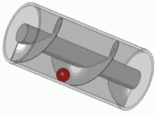
(1) bármely pontját bármely másik pontjába lehet mozgatni úgy, hogy a görbe és irányítása megmarad;

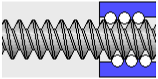
(2) az egyforma hosszú ívekhez tartozó húrok hosszai egyformák;

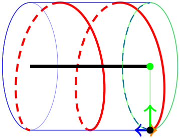
(3) konstans a görbülete és a torziója:

$$\kappa(s) = \frac{\varrho}{\varrho^2 + c^2} \text{ és } \tau(s) = \frac{c}{\varrho^2 + c^2},$$

ahol $c = b/(2\pi)$.





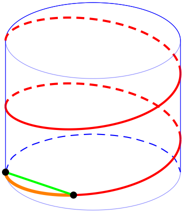


Tétel. *Az (1), (2) és (3) tulajdonságok bármelyikét teljesítő görbe csavargörbe [3].*

(1)⟹(2). Az a görbét invariánsan hagyó mozgás, amely a két azonos hosszú ív kezdőpontjait egymásba viszi, az ívek másik végpontjait is egymásba viszi, hiszen nem változtatja a görbeívek hosszát, mert távolságtartó. Eszerint az ívek által feszített húrok végpontjai is egymásba mozognak, így hosszuk megegyezik.

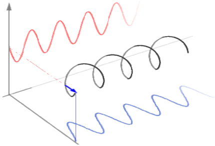
(2)⟹(3). A feltétel szerint a húrok $\boldsymbol{p}(s,h) = \boldsymbol{r}(s+h) - \boldsymbol{r}(s)$ vektoraihoz létezik egy f függvény, melyre $2f(h) = \langle \boldsymbol{p}(s,h), \boldsymbol{p}(s,h)\rangle$. Ennek h szerinti deriváltjai $f' = \langle \boldsymbol{t}, \boldsymbol{p}\rangle$, $f'' = \langle \kappa\boldsymbol{n}, \boldsymbol{p}\rangle + 1$, $f''' = \langle \dot\kappa\boldsymbol{n} + \kappa(\tau\boldsymbol{b} - \kappa\boldsymbol{t}), \boldsymbol{p}\rangle$, majd $f^{(iv)} = -\kappa^2 + \langle \ddot\kappa\boldsymbol{n} + \dot\kappa(\tau\boldsymbol{b} - \kappa\boldsymbol{t}) + \dot\kappa\tau\boldsymbol{b} + \kappa\dot\tau\boldsymbol{b} - \kappa\tau^2\boldsymbol{n} - 2\kappa\dot\kappa\boldsymbol{t} - \kappa^3\boldsymbol{n}, \boldsymbol{p}\rangle$. Ebből a konstans $\kappa(s) = \sqrt{-f^{(iv)}(0)}$ érték jön ki, amiért $f^{(iv)} = -\kappa^2 + \kappa\langle \dot\tau\boldsymbol{b} - (\tau^2+\kappa^2)\boldsymbol{n}, \boldsymbol{p}\rangle$. Ennek deriváltja

$$f^{(v)} = \kappa\underbrace{\langle \dot\tau\boldsymbol{b} - (\tau^2+\kappa^2)\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}\rangle}_{=0} + \kappa\langle \ddot\tau\boldsymbol{b} - 3\tau\dot\tau\boldsymbol{n} + (\tau^2+\kappa^2)(\kappa\boldsymbol{t} - \tau\boldsymbol{b}), \boldsymbol{p}\rangle.$$



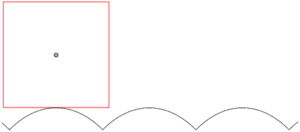
Tovább deriválva a $h = 0$ helyen, azt kapjuk, hogy $f^{(vi)}(0) = \kappa\langle \ddot\tau\boldsymbol{b} - 3\tau\dot\tau\boldsymbol{n} + (\tau^2+\kappa^2)(\kappa\boldsymbol{t} - \tau\boldsymbol{b}), \boldsymbol{t}\rangle$. A merőlegesség miatt ebből a konstans $\tau(s) = \sqrt{f^{(iv)}(0) - f^{(vi)}(0)/f^{(iv)}(0)}$ érték adódik.

A (3) tulajdonságból következik, hogy csavarvonallal van dolgunk, mert a görbék alaptétele adja, hogy a konstans κ görbülettel és konstans τ torzióval rendelkező egyetlen görbe az a csavargörbe, melyre $\varrho = \frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2}$ és $c = \frac{\tau}{\kappa^2+\tau^2}$, hiszen ennek görbülete és torziója κ és τ.



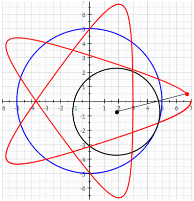
Egy másikon csúszásmenetesen gördülő görbéhez rögzített valamely pont pályáját spirogörbének nevezzük.

Láncgörbén gördülő egyeneshez rögzített megfelelő pont pályája egyenes:

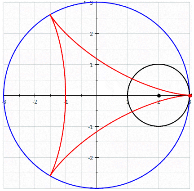


Egyenesen gördülő spirál pólusának pályája egyenes:

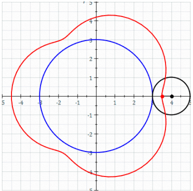
A hypotrochoid-görbe



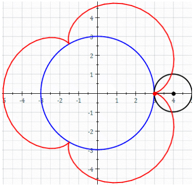
A hypocycloid-görbe

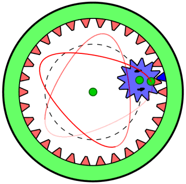


Az epitrochoid-görbe



Az Epicycloid-görbe





A spirográf a körök egymáson gördülését kihasználó játék, melynek az inspirográf remek implementálása a weben.

A fogaskerekek léte biztosítja, hogy a spirogörbe periodikus (zárt) legyen. Ha a gördülő kör és a rögzített kör sugarának aránya irracionális szám, akkor a spirogörbe nem zárt, sőt egy sűrű gyűrűt alkot.


KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!

Referenciák szerző szerinti sorban I

[1] M. Gage and R. S. Hamilton
The heat equation shrinking convex plane curves, *J. Diff. Geom.*, **23** (1986), 69–95; http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214439902. ⟨2⟩

[2] M. A. Grayson
The heat equation shrinks embedded plane curves to round points, *J. Diff. Geom.*, **26** (1987), 285–314; http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214441371. ⟨2⟩

[3] Kurusa Á.
Bevezetés a differenciálgeometriába, Polygon Jegyzettár **12**, Polygon, Szeged, 1998; http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa/_site/index.php/about/publ-to-dl/category/15. ⟨7⟩

[4] Kurusa Á.
Kötélgörbe, avagy miért hasonlítanak egymásra a kupolák?, *Polygon*, **18:1** (2009), 33–45; http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa/_site/index.php/about/publ-to-dl/category/10. ⟨3⟩

[5] E. Parker
A Property Characterizing the Catenary, *Math. Mag.*, **83** (2010), 63–64; http://www.jstor.org/stable/10.4169/002557010X485120. ⟨3⟩