

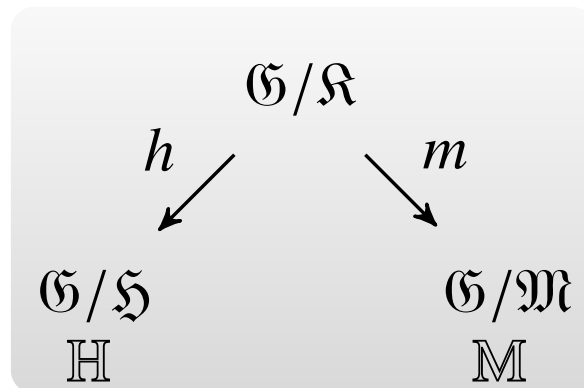
Matematikai Tomográfia

Steinhaus-probléma

Kurusa Árpád

Szegedi Tudományegyetem
TTIK, Bolyai Intézet, Geometriai Tanszék

Szeged, 2011. november 30.



Eötvös Kollégium felkérésére nagy örömmel

Amiről szó lesz

1 A probléma eredete és matematikai megfogalmazása

- Problémafelvetések
- Matematikai definíció
- Legfontosabb kérdések

2 Fő kutatási területek

- Geometriai analízis – (modern) integrálgeometria
- Analitikus tomográfia
- Geometriai tomográfia
- Diszkrét tomográfia

3 Kapcsolat más területekkel

4 Egy konkrét probléma: Felismerhető-e egy alakzat az árnyékképeiből?

Problémafelvetések

Függvényekkel kapcsolatban

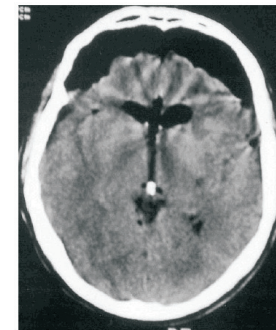
- *főkörökön illetve egyeneseken eltűnő integrálok* – P. Funk (1916) és J. Radon (1917)
- *egybevágó tartományokon eltűnő integrálok* – D. Pompeiu (1929)
- *differentiálegyenletek síkhullámokkal* – G. Herglotz (1931)

Alakzatokkal kapcsolatban

- izoperimetrikus egyenlőtlenség: *konvex testek síkmetszetei* – W. Blaschke (1916)
- konstans szélességű alakzatok: *konvex testek párhuzamos vetületei* – W. Alekszandrov (1937)
- Crofton-formula „inverze”: *görbe karakterisztikus Crofton-függvénye* – H. Steinhaus (1954)
- *konvex testek Röntgen-képei* – P. C. Hammer (1961)

Diagnosztikai eszközökkel kapcsolatban

- *röntgen-tomográfia*¹ – A. M. Cormack (1963)
- *MRI-tomográfia* – Lauterbur (1973)
- *SPE-tomográfia* – Budinger, Gullberg, Huesman (1979)



Más mérésekkel kapcsolatban

- *szeizmológia, rádiócsillagászat, gázsűrűség eloszlása* – Herglotz, Wiechert (1930) – R. N. Bracewell (1956) – Kershaw (1962)
- *SAR - Szintetikus apertúrájú rádiólokátor* – C. A. Wiley (1951)
- *krisztallográfiás* (diffrakciós) *elektronmikroszkópia* – A. Klug (1962-1972)

¹ Ennek működési elve vezetett a tomográfia szó kialakulásához a szeleteket jelentő görög *τομωσ* szóból kiindulva. Semmi köze a latinból jövő *tumor* szóhoz, mely duzzanatot jelent.

Matematikai definíció

Legyen $\mathbb{M}$ egy sokaság, melyben a $\mathcal{H}$ részsokaságok egy $\mathbb{H}$ sokaságának minden elemén adott egy $\chi_{\mathcal{H}}$ mérték. A megfelelő $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények $\mathbf{R}: f \mapsto \mathbf{R}f$ leképezését *Radon-transzformációnak* nevezzük, ha $\mathbf{R}f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ és

$$(1.1) \quad \mathbf{R}f(\mathcal{H}) = \int_{M \in \mathcal{H}} f(M) d\chi_{\mathcal{H}}(M).$$

Ha minden $M \in \mathbb{M}$ ponthoz adott egy μ_M mérték az M pontot tartalmazó $\mathcal{H}$ részsokaságok sokaságán, akkor a megfelelő $F: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények halmazán működő $\hat{\mathbf{R}}: F \mapsto \hat{\mathbf{R}}F$ leképezést *duális Radon transzformációnak* nevezzük, ha $\hat{\mathbf{R}}F: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ és

$$(1.2) \quad \hat{\mathbf{R}}F(M) = \int_{\mathcal{H}} F(\mathcal{H}) d\mu_M(\mathcal{H}).$$

A vizsgálatok legfontosabb terepe a homogén terek és totálgeodetikusaik által természetesen adódó Radon-transzformációk. A legtöbbet tanulmányozott eset pedig a klasszikus sík és egyenesein adott sokféle mérték által definiált (általánosított) Radon-transzformációk.

Legfontosabb kérdések

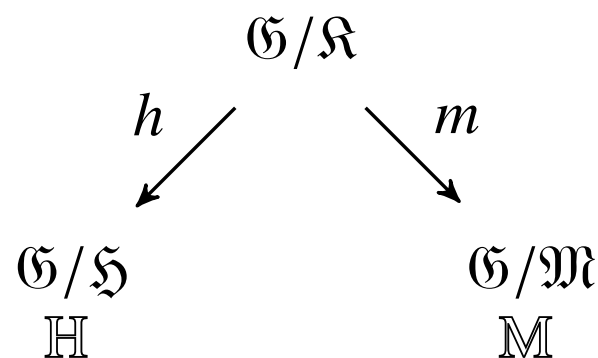
- K-1** Milyen feltételek mellett teljesül az *invertálhatóság*?
- K-2** Milyen függvényterek esetén teljesül a *tartó tulajdonság*, vagyis ha egy függvény Radon-transzformáltja kompakt tartójú, akkor milyen feltételek mellett garantálható a függvény tartójának kompaktsága?
- K-3** Milyen függvénytereken *folytonos* a Radon-transzformáció?
- K-4** Milyen a *képtér és magtér* különféle függvényterekre?
- K-5** Van-e olyan $\mathbf{M}: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ *csere-operátor*, melyhez léteznek $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ és $h: \mathbb{H}_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények, hogy minden $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény esetén $(hR_{\mathbb{N}}f) \circ \mathbf{M} = R_{\mathbb{M}}((gf) \circ \mathbf{M})$?
- K-6** Van-e és ha igen, akkor miféle az a $\mathbf{D} \mapsto \hat{\mathbf{D}}$ *indukált leképezés* az $\mathbb{M}$ sokaságon mozgásinvariáns differenciáloperátorok halmazán, melyre $R \circ \mathbf{D} = \hat{\mathbf{D}} \circ R$?

A kérdések érdemi tartalma természetesen jelentősen függ a sokaság, a részsokaságai és a mértékek választásától, de a válaszok akkor is jelentősen változnak, ha a vizsgálatokban „csak” a függvényterek térnek el.

Geometriai analízis – (modern) integrálgeometria I

(Előbbi elnevezés S. Helgason, utóbbi I. M. Gelfand nevéhez fűződik.)

Gyakori és eredményes módszer a csoport-elméleti *dupla fibrációs modell*.



Adott egy $\mathfrak{G}$ lokálisan kompakt Lie-csoport, ebben $\mathfrak{H}$ és $\mathfrak{M}$ olyan zárt részcsoporthok, melyek $\mathfrak{H}\mathfrak{M}$ szorzata is zárt (például legalább egyikük kompakt). Ekkor a $\mathfrak{R} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}$ csoport által meghatározott $h: g\mathfrak{R} \mapsto g\mathfrak{H}$ és $m: g\mathfrak{R} \mapsto g\mathfrak{M}$ projekciókat alkalmazva azt mondjuk, hogy *a $\mathcal{H} = g_h\mathfrak{H} \in \mathbb{H}$ elem illeszkedik az $\mathcal{M} = g_m\mathfrak{M} \in \mathbb{M}$ elemre*, ha $h^{-1}(\mathcal{H}) = m^{-1}(g_m\mathfrak{M})$. Ezt az illeszkedést kifejező „ $\in$ ” jellel $\mathfrak{G}/\mathfrak{R} \cong \{(M, \mathcal{H}) : M \in \mathbb{M}\} \subseteq \mathbb{M} \times \mathbb{H}$.

Ha a $\mathfrak{H}/\mathfrak{R}$ és $\mathfrak{M}/\mathfrak{R}$ csoportokon van a $\mathfrak{H}$ és $\mathfrak{M}$ szerint rendre invariáns pozitív μ és χ mérték (például ha $\mathfrak{R}$ kompakt), akkor a Radon-transzformációt ezekkel a mértékekkel (1.1), duálisát pedig (1.2) definiálja, mely a homogén tereken éppen a leginkább vizsgált eseteket adja.

Legyen például $\mathfrak{G}$ a sík mozgáscsoportja, $\mathfrak{M} = SO(2)$ az origó körüli forgások csoportja, $\mathfrak{H}$ pedig egy rögzített irányra merőleges eltolások csoportja. Ekkor $\mathfrak{R} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M} = \{\text{id}\}$ és így

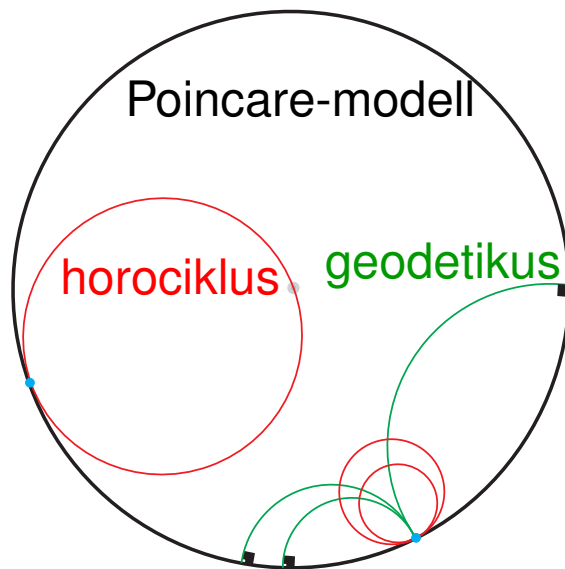
$$\mathfrak{G}/\mathfrak{R} = \mathfrak{G} \cong \{\text{félegyenesek}\} \cong \mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1, \quad \mathbb{M} = \mathfrak{G}/\mathfrak{M} \cong \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{H} = \mathfrak{G}/\mathfrak{H} \cong \{\text{egyenesek}\},$$

hiszen az $\mathfrak{G} \ni g \mapsto g\ell_+ \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1$ leképezés bijektív bármely ℓ_+ félegyenesre. Az egyetlen $\mathfrak{G}$ -invariáns mérték az $\mathfrak{M}/\mathfrak{R} \cong \mathfrak{M}$ és $\mathfrak{H}/\mathfrak{R} \cong \mathfrak{H}$ csoportokon a szög- illetve a hosszmérték, így ebben a példában *a modell a klasszikus Radon-transzformációt adja* vissza.

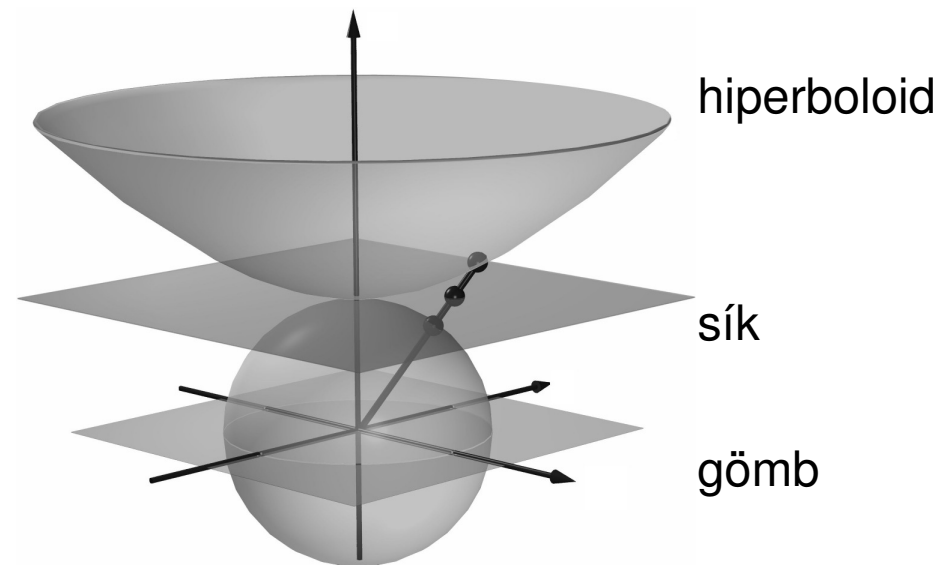
Geometriai analízis – (modern) integrálgeometria II

E terület néhány szép eredménye:

- Kétponthomogén terek természetes és horociklusos Radon-transzformációi invertálhatók és tartó-tulajdonságúak (S. Helgason – 1956-1965);
- Szimmetrikus terek invariáns differenciáloperátorain a Radon-transzformáció lineáris leképezést indukál (S. Helgason – 1959);
- Konstans görbületű terek természetes Radon-transzformációihoz létezik csere-operátor (Kurusa – 1992);



Geodetikusok és horociklusok



Csere-operátor

Analitikus tomográfia I

(Az elnevezés A. Markoe nevéhez fűződik.)

Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ ($2 \leq n \in \mathbb{N}$) tér k -dimenziós affin altereinek $\mathbb{H}^{k,n}$ Grassmann-sokaságát úgy, hogy annak minden $\mathcal{H}$ elemén adott egy $\chi_{\mathcal{H}}$ mérték. A megfelelő $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények $\mathbf{R}: f \mapsto \mathbf{R}f$ leképezését *általánosított Radon-transzformációnak* nevezzük, ha az $\mathbf{R}f: \mathbb{H}^{k,n} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre

$$(2.3) \quad \mathbf{R}f(\mathcal{H}) = \int_{M \in \mathcal{H}} f(M) d\chi_{\mathcal{H}}(M).$$

Röntgen-transzformációnak nevezzük az általánosított Radon-transzformációt, ha $k = 1$ és χ minden egyenesen a hosszmérték.

A legáltalánosabb eredmény szerint a *Bolker-feltétel* teljesítő χ mérték-függvény esetén $\mathbf{R}$ *elliptikus Fourier-integrál* és a (1.2) definícióban megválasztható úgy a μ mérték-függvény, hogy $\hat{\mathbf{R}}$ az $\mathbf{R}$ *duálisa* legyen és ekkor $\hat{\mathbf{R}} \circ \mathbf{R}$ *elliptikus pseudodifferenciál-operátor* lesz (Guillemin–Sternberg — 1977), tehát invertálható. Quinto megmutatta, hogy $\hat{\mathbf{R}} \circ \mathbf{R}$ inverze akkor és csak akkor differenciáloperátor, ha eltolásinvariáns.

Analitikus tomográfia II

Néhány szép eredmény:

- forgásinvariáns C^1 vagy analitikus χ mérték-függvény esetén a (2.3) szerinti Radon-transzformáció invertálható (Quinto – 1983, és Boman & Quinto – 1987),
- exponenciális Radon-transzformáció egyetlen nem forgásinvariáns függvény transzformáltjának ismeretében azonosítható és invertálható (Hertle – 1985, Solmon – 1995),
- a $k < n - 1$ dimenziós affin alterek által adott természetes Radon-transzformáció képtere pontosan azon függvényekből áll, melyek egy ultrahiperbolikus differenciálegyenlet megoldásai (John – 1938, Gonzalez – 1991, Kurusa – 1992).

Pár negatív meglepetés:

- Van a síkon olyan nem konvergens korlátos kompakt tartójú függvényssorozat, melynek Radon-transzformáltjai nullához tartanak (Hertle – 1983),
- Van a síkon olyan C^∞ pozitív χ mérték-függvény, melyhez van olyan C_c^∞ nem nulla f függvény, melynek (2.3) szerinti Radon-transzformáltja eltűnik (Boman – 1985),
- Van olyan $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, mely nem integrálható a egyetlen $k \geq n/p$ dimenziós affin altéren sem. (Smith & Solmon – 1975).

Geometriai tomográfia I

(Az elnevezés R. J. Gardner nevéhez fűződik.)

A geometriai tomográfia a (legtöbbször konvex, vagy csillagszerű) tartományok karakterisztikus függvényeinek Radon-transzformáltjait tanulmányozza. A függvénytér ilyen erős specialitása miatt a Radon-transzformált olyan sok információt tartalmaz, hogy az invertálásához legtöbbször nincs szükség a teljes Radon-transzformáltra.

Egy $\mathbf{R}f$ Radon-transzformált argumentumainak egy kiválasztott csoportján $\mathbf{R}f$ által felvett értékek rendezett halmazát, vagy valamely rögzített függvénynek ezen felvett értékét **kép**nek nevezzük.

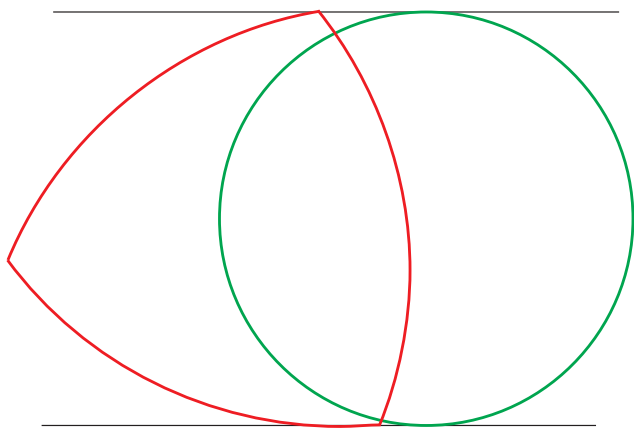
Gyakran használt képek a következők:

- **Röntgen-kép**: a Röntgen-transzformáció valamely iránnyal párhuzamos, vagy valamely ponton átmenő egyeneseken vett értékeit tartalmazza (előbbit iránymentinek — természetes mértékre ez a Steiner-szimmetrizált —, utóbbit pontbelinek mondjuk).
- **Árnyék-kép**: a Röntgen-kép tartója, vagy e tartónak a mértéke.
- **Metszet-kép**: levágott darab felszíne, vagy térfogata.

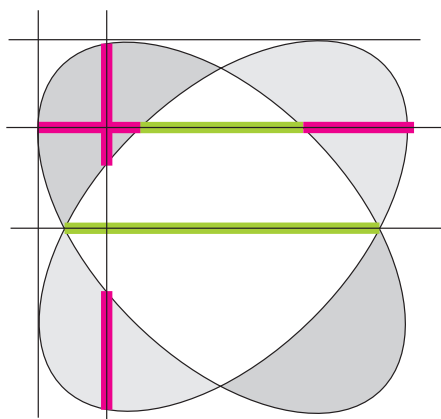
Geometriai tomográfia II

Néhány szép eredmény.

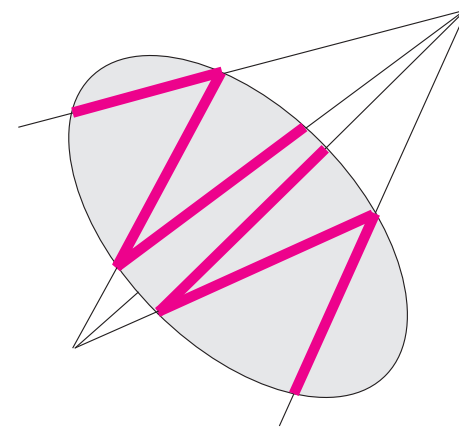
- Közepponatosan szimmetrikus testet meghatározza összes iránymenti árnyékkép-területe (Alekszandrov — 1937; nem csak síkban!)
- A gömbnek látszó tárgyak gömbök (A. Matsuura – 1961; minden pontból középpontosan szimmetrikusnak látszó testek ellipszoidok – Gruber & Ódor 1999)
- Van olyan iránynégyes, mely irányokban felvett négy Röntgen-kép minden síkbeli konvex testet meghatároz (Gardner & McMullen — 1980)
- Kettő pontban felvett két Röntgen-kép alapján minden olyan síkbeli konvex test meghatározható, amely a pontok egyenesét úgy metszi, hogy mindkettő pontot tartalmazza, vagy egyiket se. (Falconer — 1983; a többi esetben nem ismert!)



Iránymenti árnyék-képek



Iránymenti Röntgen-képek



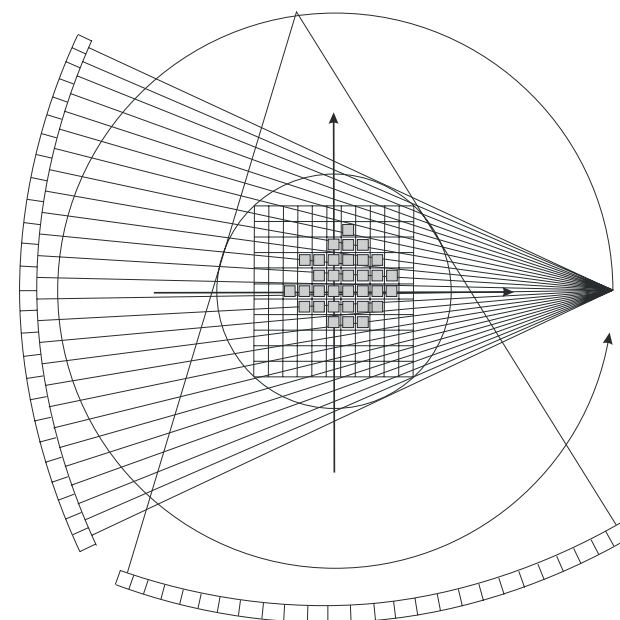
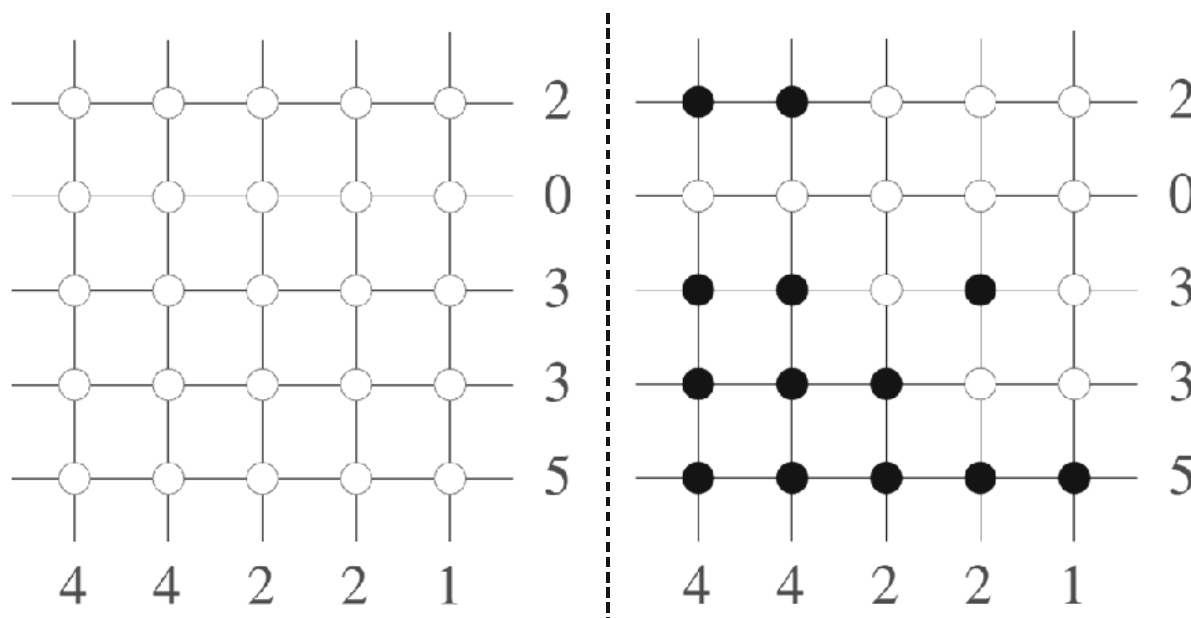
Pontbeli Röntgen-képek

Diszkrét tomográfia

(Az elnevezés L. Shepp nevéhez fűződik.)

A diszkrét tomográfia olyan függvények Radon-transzformálását tanulmányozza, melyek tartója csak néhány, ismert alakú tartományból áll, értékészlete pedig csak véges sok előre adott konstans halmaza.

Például egy 01-mátrix sor- és oszlopösszegeinek halmazai egy-egy Röntgen-képet alkotnak, így a mátrix rekonstruálása érdekében egy általában alulhatározott lineáris egyenletrendszerrel kell vizsgálni. Sokkal összetettebb a feladat, ha néhány a síkon szabadon „qldobált” ellipszislapot kell megtalálni kettő, vagy akár több Röntgen-kép alapján.



Kapcsolatok más területekkel

Manapság a matematikai tomográfia a matematika szinte minden ágával kapcsolatban van (globális analízis – harmonikus analízis – integráltranszformációk – geometriai integrálás – sztochasztikus geometria) néhol kiemelkedő fontosságú eredményekhez is hozzájárulva:

- negyedrendű *ultrahiperbolikus differenciálegyenletek* megoldása (F. John – 1938),
- szimmetrikus terek *mozgás invariáns differenciálegyenleteinek* megoldódása van (S. Helgason – 1959),
- Hilbert IV. problémája 1900-ból: folytonos *projektív metrikák* megadása (Z. I. Szabó – 1986).

A matematikán túli világban, akár a gyakorlatban is hasznosul (ásványok utáni kutatás – régészeti keresés – statika!) már e tudomány, néhol elképesztő eredményekre vezetve:

- *Röntgen-tomográfia* (A. M. Cormack & G. Hounsfield – 1979: orvosi Nobel-díj)
- *Krisztallográfiás elektronmikroszkópia* (A. Klug – 1982: kémiai Nobel-díj)

A probléma megfogalmazása I

Csak síkban dolgozunk. Testen egy konvex, nem üres belsejű, zárt tartományt értünk.

Definíció. Egy testet el metsző valamely iránnyal párhuzamosan egyenesek egymástól mért távolságainak maximumát *iránymenti árnyékképnek* nevezzük.

Világos, hogy egy test összes iránymenti árnyékképe sem feltétlen azonosítja be a testet a többiek között, hiszen például az ugyanolyan állandó szélességű testek minden iránymenti árnyékképe megegyezik.

Ha azonban csak a *középpontosan szimmetrikus testeket* tekintjük, a helyzet megváltozik, mert Alekszandrov tétele (1937) szerint ezeket *eltolástól eltekintve megkülönbözteti egymástól* összes iránymenti árnyékképük. (A síkban erre nagyon egyszerű a magyarázat, hiszen a szakasz hossza az alakját is meghatározza!)

A probléma megfogalmazása II

Definíció. Egy testet elmesző valamely ponton átmenő egyenesek szögeinek maximumát *pontbeli árnyékképnek* nevezzük.

Kincses János kérdése

Igaz-e, hogy egy kör belsejében lévő két test egybeesik, ha pontbeli árnyékképeik a kör minden pontjában egyformák?

A kérdést a [6] cikkben poligonokra pozitívan válaszoltuk meg:

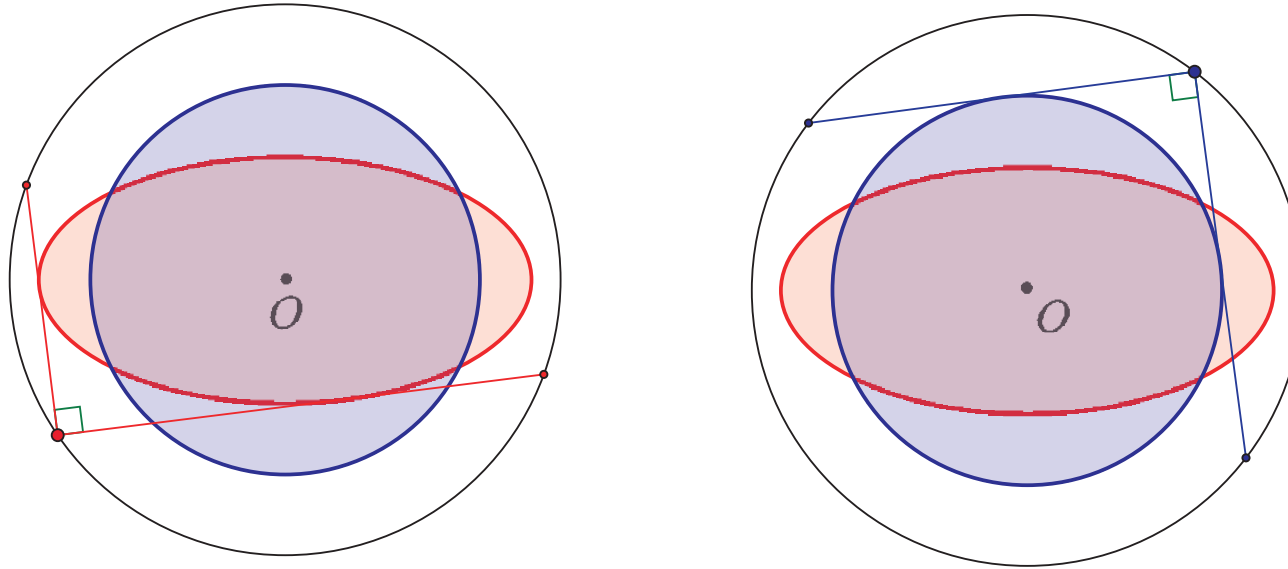
Tétel. (Kincses & Kurusa – 1991).

Ha egy $\mathcal{B}$ poligon, vagy analitikus határú test belsejében lévő két poligon árnyékképei a $\mathcal{B}$ határpontjaiban egyformák, akkor a két poligon egybeesik.

Felmerül, hogy a *poligonok a többi testtől megkülönböztethetők e*, de a válasz egyelőre ismeretlen.

A probléma megfogalmazása III

Ugyanakkor már a [6] cikk megmutatja, hogy *a válasz általában negatív.*



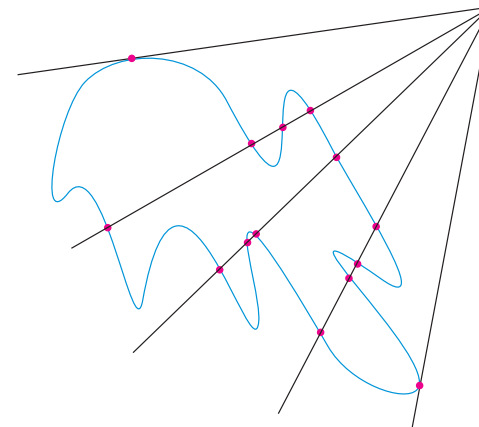
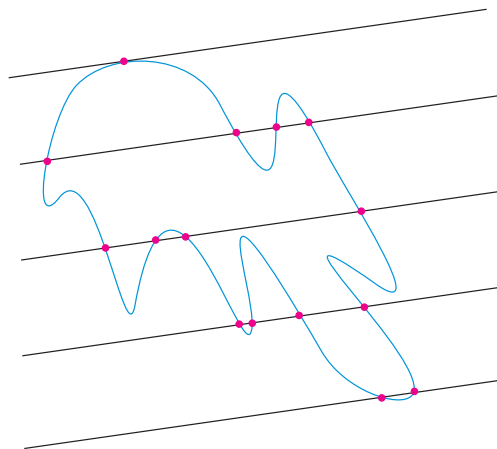
Tétel 4.1. (Kurusa – 1992).

Ha az egymás határait nem nulla szögben, vagy a végtelenben metsző $\mathcal{B}_1$ és $\mathcal{B}_2$ konvex tartományok metszetének belsejében lévő két test árnyékképei a $\mathcal{B}_1$ és $\mathcal{B}_2$ határpontjaiban egyformák, akkor a két test egybeesik.

A bizonyítás erősen kihasználja, hogy a metszés szöge pozitív, de nem ismert, hogy ez szükséges e.

Steinhaus-probléma I

Egy differenciálható görbe *Crofton-függvényének* nevezzük azt az egyenesek halmazán értelmezett függvényt, mely minden egyenesen megadja annak a görbével vett metszésszámát.



Crofton formulája szerint ezt a függvényt integrálva az egyenesek halmazán, éppen a görbe hosszát kapjuk. Az egyenesek halmazán lévő egyetlen mozgásinvariáns mérték, nem más mint az ℓ egyenes pozitív irányú normálisának φ szögével és az origótól mért p távolságával való $\ell(\varphi, p)$ paraméterezéséből adódó $d\varphi dp$ mérték.

Steinhaus-probléma II

Definíció. (Kurusa – 1992).

Egy testben lévő differenciálható görbe *pontbeli illetve iránymenti Crofton-képének* nevezzük a Crofton-függvénye integrálját az adott ponton átmenő illetve az adott iránnyal párhuzamos egyenesek halmazán.

Amennyiben a testben lévő differenciálható görbe a test határa, akkor a Crofton-képek megegyeznek az árnyékkép-területekkel.

Kurusa Árpád kérdése (1992)

Igaz-e, hogy egy kör belsejében lévő két differenciálható görbe egybeesik, ha pontbeli Crofton-képeik a körön kívüli kompakt gyűrű minden pontjában egyformák?

Később kiderült, hogy *H. Steinhaus* 1954-ben [11] már megkérdezte, hogy *lehet-e különböző görbéknek ugyanaz a Crofton-függvénye*. Erre mindenféle feltételek mellett születtek is általában pozitív válaszok Horwitz (1989), Fast (1993,1995) és Richardson (1996,1997) cikkeiben.

Steinhaus-probléma III

Világos, hogy a Crofton-képekre megfogalmazott probléma többet állít, mint amit a Steinhaus-kérdés elvár, és az is látszik, hogy a metsző görbékkel adott 4.1 tétel a konvex görbékre többlet feltétel mellett, de jelentős erősítése a Steinhaus-kérdésre adott többi válasznak.

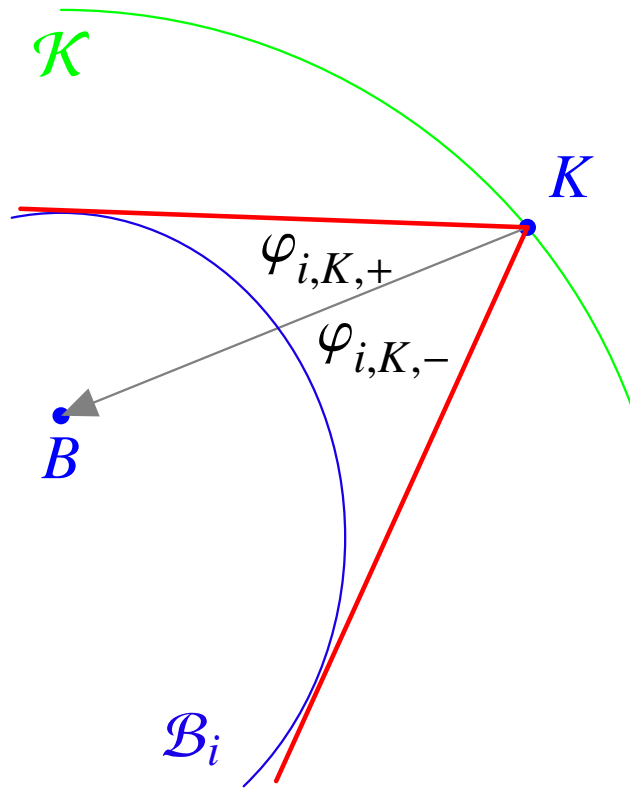
Itt most csak egy mindezekről különböző, eredetileg Green által 1950-ben igazolt eredményt bizonyítunk. (J. C. C. Nitsche 1990-ben belátta, hogy két koncentrikus körrel egyszerre konstans szög alatt látszó, a kisebbik belsejében lévő test körlap.)

Tétel. *Ha egy kör belsejében lévő test a kör minden pontjából konstans ν szög alatt látszik és $1 - \nu/\pi$ irracionális, vagy olyan racionális m/n szám, amelyben $m \in \mathbb{N}$ páros melyhez $n \in \mathbb{N}$ relatív prím, akkor a test kör.*

Bizonyítás. Látsszon a $\mathcal{K}$ kör belsejében lévő $\mathcal{B}_1$ és $\mathcal{B}_2$ test konstans $\nu \in (0, \pi)$ szög alatt. E testek egyike se tartalmazhatja a másikat, ezért vannak közös érintőik. Elválasztó közös érintőik azonban nem lehetnek, mert az azok által kimetszett azon síknegyedben, amely a $\mathcal{B}_1$ testet tartalmazza, a körrel a $\mathcal{B}_1$ nagyobb szög alatt látszana.

Steinhaus-probléma IV

Tehát létezik a testeknek egy közös B pontja.

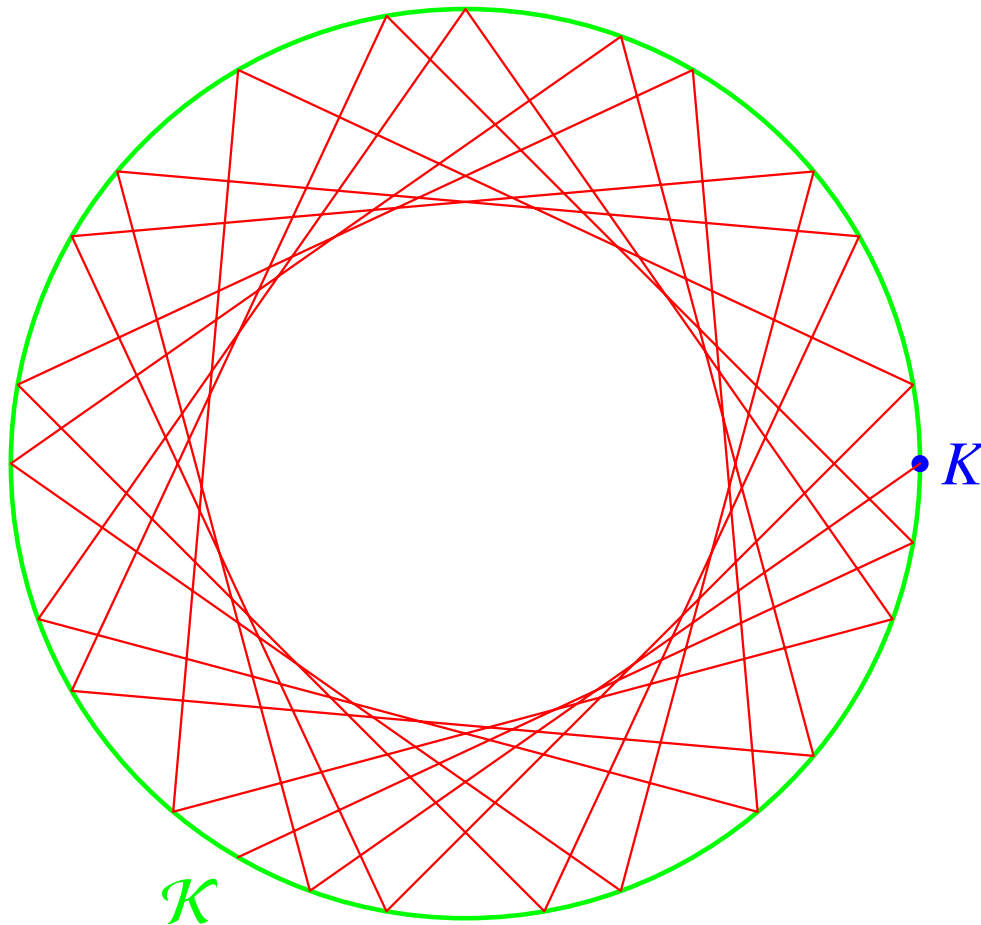


Valamely $K \in \mathcal{K}$ ponton átmenő, a $\mathcal{B}_i$ testet a $\overrightarrow{KB}$ vektor jobb- illetve baloldalán érintő $\ell_{\pm}$ érintőkhöz rendeljük hozzá az $\ell_{\pm}$ érintők és a $\overrightarrow{KB}$ vektor irányított $\varphi_{i,K,\pm}$ szögét. Ekkor a $\nu = \varphi_{i,K,+} - \varphi_{i,K,-}$ teljesül.

Messe a testek egy ℓ_0 közös érintője a $\mathcal{K}$ kört a K_{-1} és K_1 pontokban, ahol a jeleket úgy választjuk, hogy K_1 a $\overrightarrow{K_{-1}B}$ vektor jobboldalára esik. Ekkor a $K_{\pm 1}$ pontokon át a testeknek újabb közös $\ell_{\pm 2}$ érintői van, melyek újabb $K_{\pm 3}$ pontokban metszik a $\mathcal{K}$ kört. A közös érintők ezen $\{\ell_{\pm 2i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ sorozatában a szomszédos elemek normálisainak egymással bezárt szöge $\bar{\nu} := \pi - \nu$ állandó.

Steinhaus-probléma V

$\bar{\nu}/\pi$ irracionális.



Ekkor $\{k\bar{\nu} \pmod{2\pi} : k \in \mathbb{N}\}$ a teljes $(0, 2\pi)$ intervallumban sűrű, ami azt jelenti, hogy tetszőleges irányhoz van közös érintők olyan sorozata, melyek normálisainak sorozata az adott irányhoz tart.

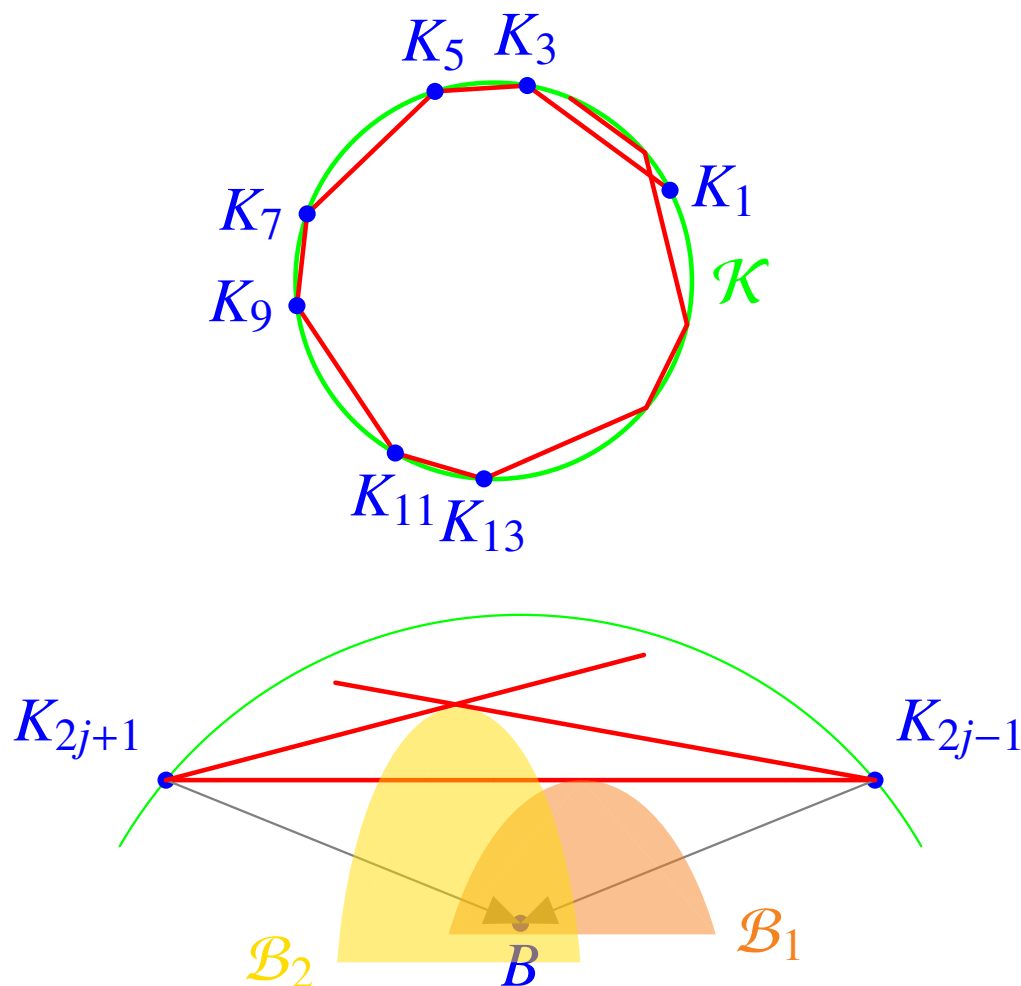
Márpedig közös érintők konvergens sorozata közös érintőhöz tart, tehát a $\mathcal{B}_1$ és $\mathcal{B}_2$ minden irányban közös érintővel rendelkezik, így egybe kell esniük.

Steinhaus-probléma VI

Ha $\bar{v}/\pi = m/n$, ahol $m \in \mathbb{N}$ páros és relatív prím az $n \in \mathbb{N}$ nevezőhöz.

Ekkor a $\mathcal{K}$ bármely pontjából is indulunk, a $\mathcal{B}_i$ ($i = 1, 2$) testhez húzott érintők sorozata periodikus lesz, és a körbe eső húrjaik egy a $\mathcal{K}$ körbe írt n -oldalú $K_1, K_3, \dots, K_{2n-3}, K_{2n-1}$ sokszöget alkotnak, mert $n\bar{v} = m\pi$ és m páros.

A $\varphi_{i,j,\pm} := \varphi_{i,K_{2j-1},\pm}$ jelöléssel, ha $\varphi_{1,j,+} < \varphi_{2,j,+}$, akkor $\varphi_{1,j+1,-} < \varphi_{2,j+1,-}$, és így $\varphi_{1,j+1,+} > \varphi_{2,j+1,+}$. Mivel a sokszögnek n csúcsa van, és az páratlan, hiszen n relatív prím a páros m számhoz, ez ellentmondás, ami bizonyítja a tételt.



Steinhaus-probléma VII

Ha $\bar{\nu}/\pi = m/n$, ahol $m \in \mathbb{N}$ páratlan és relatív prím az $n \in \mathbb{N}$ nevezőhöz, akkor némi számolással igazolható, hogy sok olyan körtől eltérő test van, mely konstans ν szög alatt mutatkozik a kör minden pontjában.

Erre példa a $\nu = \pi/2$ esetben már látott ellipszis, de a

$$p_{\mathcal{G}}(\varphi) = \varrho \frac{\cos(\bar{\nu}/2 + \varepsilon \sin(n\varphi))}{\cos(\bar{\nu}/2)}$$

támaszfüggvénnyel megadott $\mathcal{G}$ test is konstans ν szög alatt látszik a ϱ sugarú körről, ami akár elemi trigonometrikus összefüggésekkel igazolható.

Érdemes még megfigyelni, hogy voltaképpen a következő került bizonyításra.

Tétel. *Ha a $\mathcal{B}_1$ test $\mathcal{B}_1^\nu$ konvex ν -izoptikusában lévő $\mathcal{B}_2$ testre $\mathcal{B}_1^\nu \equiv \mathcal{B}_2^\nu$ és $1 - \nu/\pi$ irracionális, vagy olyan racionális m/n szám, melynek számlálója páros és relatív prím a nevezőhöz képest, akkor $\mathcal{B}_1 \equiv \mathcal{B}_2$.*

Vajon $\mathcal{B}_1^\mu \equiv \mathcal{B}_2^\nu$ esetén milyen feltételek mellett következik $\mathcal{B}_1 \equiv \mathcal{B}_2$?



KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!

Könyvek szerző szerinti sorban



R. J. Gardner

Geometric tomography, Encyclopedia of Math. and its Appl. **58**, Cambridge University Press, Cambridge, 2006 (first edition in 1996).



G. T. Herman and A. Kuba

Advances in Discrete Tomography and its Applications, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Springer, Basel, 2007.



S. Helgason

Integral geometry and Radon transforms, Springer, New York, 2011.



S. Helgason

Geometric Analysis on Symmetric Spaces, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.



A. Markoe

Analytic tomography, Encyclopedia of Math. and its Appl. **106**, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

Cikkek szerző szerinti sorban I



S. K. Butler

Tangent line transformations, *The College Math. J.*, **34** (2003), 105–106.



H. Fast

Inversion of the Crofton transform for sets in the plane, *Real Anal. Exchange*, **19** (1993/94), 59–80.



H. Fast

The injectivity of the Crofton transform, *Real Anal. Exchange*, **21** (1995/96), 615–621.



J. W. Green

Sets subtending a constant angle on a circle, *Duke Math. J.*, **17** (1950), 263–267.



A. Horwitz

Reconstructing a function from its tangent lines, *Amer. Math. Monthly*, **96** (1989), 807–813.



J. Kincses and Á. Kurusa

Can you recognize the shape of a figure from its shadows?, *Beiträge zur Alg. und Geom.*, **36** (1995), 25–34; (magyarul: Felismerhető-e egy alakzat az árnyékképeiből?, *Polygon*, **2** (1991), 69–80).

Cikkek szerző szerinti sorban II



Á. Kurusa

You can recognize the shape of a figure by its shadows!, *Geom. Dedicata*, **59** (1996), 103–112.



J. C. C. Nitsche

Isoptic characterization of a circle, (Proof of a conjecture of M.S. Klamkin), *Amer. Math. Monthly*, **97** (1990), 45–47.



T. J. Richardson

Planar rectifiable curves are determined by their projections, *Discrete Comput. Geom.*, **16** (1996), 21–31.



T. J. Richardson

Total curvature and intersection tomography, *Advances Math.*, **130** (1997), 1–32.



H. Steinhaus

Length, shape, and area, *Colloq. Math.*, **3** (1954), 1–13.