Akinek az ereiben is matematika folyik ...

Ha valaki kezébe veszi a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok háború előtti – a betiltását megelőző – számait, a lapot rövid ideig „pótló" Mennyiségtani és Természettudományi Didaktikai Lapok tanulószámait, a háború után beindított Középiskolai Matematikai Lapok füzeteit, illetve a középiskolát „kinövőknek" lehetőséget nyújtó Matematikai Lapokat, a feladatmegoldók, a különböző versenyeket nyerők – később a feladat kitűzők között – számtalanszor találkozik a Gehér-gyerekek (Gehér István és László) nevével. Nem egyszer áll egy-egy közölt feladat megoldás alatt: Gehér István (zalaegerszegi gimnázium), illetve Gehér László (zalaegerszegi gimnázium) aláírás. A harmadik Gehér fiú – a középső – is matematika–fizika szakos tanár lett, de ő inkább a fizikához vonzódott. A beszélgetés címét is Császár Ákos professzortól kölcsönöztem, amely Gehér Laciról hangzott el valamelyik versenyének, vagy kitüntetésének méltatásánál, és ami nyomtatásban is megjelent.

A Gehér Laci-gyöngyszemekből, (ahogy kollégái nevezzük az „elhíresült" feladat-megoldásait) egy egész jubileumi kötetet lehetne összeállítani. Két feladatról viszont külön is szeretnék szólni, sőt a beszélgetés végén a feladatokat, illetve a Gehér-féle megoldásokat közölni. Biztos vagyok benne, amikor a 200. évforduló kötetét szerkesztik és átfutják a 100. évforduló kiadványát a szerkesztésben résztvevő matematikus kollégák, a megoldások áttekintése után, hosszú időn keresztül csak annyit tudnak mondani, ez igen, ...ez igen.

A Középiskolai Matematikai Lapokat – a háború után – a szegedi matematikusok indították újra, egyúttal elhatározták, hogy minden tanév végén országos versenyt is rendeznek. Az első versenyt 1947. június 14-én délután 3–8-ig tartották, egyidőben s azonos feltételek mellett Békéscsaba, Budapest, Csurgó, Debrecen, Nagykőrös, Nyíregyháza, Orosháza, Pannonhalma, Pécs, Szeged és Zalaegerszeg városokban. A versenyt kezdők és haladók részére hirdették meg, de a VII–VIII. osztályos gimnazisták csak a haladó csoportban indulhattak.

A kezdők versenyében I. díjat nyert: Gehér László, a zalaegerszegi gimnázium VI. osztályos tanulója. (Négy díjat osztottak ki.) A haladók versenyében II. díjat nyert: Izsák Imre, a zalaegerszegi gimnázium VIII. osztályos tanulója. (Még két versenyző ért el 2. helyezést ebben a csoportban, és volt 2 első és 4 harmadik helyezett.) A felsorolás nem statisztikai ismertetést jelent, hanem Gehér Laci első helyezésének Surányi Jánostól (ma az ELTE nyugalmazott egyetemi tanára) származó hiteles történetét. Surányi akkor a szegedi matematikai intézet tanársegéde, a Középiskolai Matematikai Lapok egyik újraindítója, szerkesztője, a versenydolgozatok javításának irányítója (középiskolás korában „jegyzett" feladatmegoldó). A versenydolgozatok kijavítása után (a javításban középiskolai tanárok is részt vettek) az összesítésre került a sor. A kezdőknél kettő 1. és kettő 2. díjat javasoltak. Surányi hiányolta a Gehér nevet, tudta, hogy versenyzett, s az „előélete" alapján kitűnő feladatmegoldó. Éppen ezért megkérdezte, ki találkozott Gehér dolgozatával. Némi tanakodás, keresgetés után kiderült, hogy aki a versenyfeladatait javította, a verseny 2. feladatának Gehér-féle megoldását rossznak vélte, mert a megoldás egyetlen képletet, egyetlen sor számolást sem tartalmazott. Az illető szövegelésnek vélte az egészet, félredobta és tovább nem is foglalkozott vele.

Az előbányászott dolgozat hibásnak hitt feladatáról kiderült, hogy nem csak hibátlan, hanem pimaszul egyszerű, és mivel a versenyzők közül az ő megoldása az egyetlen jó megoldás, elkövetője egyedül érdemes az első díjra (persze az összes többi feladat megoldása is jó volt).

A második gyöngyszem nincs még kétéves. Peresztegi tanár úr, a szombathelyi Nagy Lajos Gimnázium tanára hívta fel a figyelmet arra, hogy a Középiskolai Matematikai Lapokban 20–25-éve kitűztek egy feladatot. Azóta várja a megoldást, de csak nem „jön". Számítógépen csinált egy iteratív megoldást, de az nem az igazi. Agyam borotva élesen vágott és azonnal azt feleltem: egy hét múlva küldöm Gehér Laci megoldását. Igazam lett, a feladatot öt nap múlva postára adhattam. Nyomtatott formában a jubileumi évkönyvben olvasható.

A beszélgetéshez még annyit: Gehér Lacival 1971-ben ismerkedtem meg, addig az iparban dolgoztam (Dunaújvárosban) kutató mérnökként, a matematikával műegyetemista koromban jegyeztem el magam, a munka mellett matematikát tanultam a szegedi egyetemen egyéni levelezőként. Elmúltam 30 éves, mikor Kalmár professzor úr ajánlatott tett.

Az első szegedi munkanapomon, mikor Kalmár professzor úrnak feltett szándéka volt, hogy bemutat munkatársainak, tanszéki kollégáimnak, senkit nem találtunk. De a folyosón találkoztunk egy közepes termetű, feszes járású, élénk tekintetű, kezében cigarettát szorongató úrral. Csípőjéből tüzelve kezet fogtak egymással, majd felém fordult, kezet nyújtott és megszólalt: engem Gehér Lacinak hívnak. Mikor bemutatkoztam, az első kérdésed az volt: te nem „vazsi" vagy? Mondtam: de igen „vazsi" vagyok, vasvári. Kalmár magunkra hagyott, te pedig ettől a perctől kezdve olyan lettél, mintha hosszú idő óta ismernénk egymást.

– Igen, az első szavad után tudtam, dunántúli vagy, a mondatod után, hogy vazsi.

– Ezután nem telt el félév, együtt indultunk beiskolázási körútra, természetesen Zalába és Vasba. Az érettségi után mikor voltál egykori középiskoládban?

– Egyszer, úgy 1957 vagy 1958 körül. Már nem tudom, mi miatt utaztam haza, de a gimit nem hagytam ki. Mindig szerettem azt az iskolát. Sanits Géza bácsit, volt fizikatanárunkat, bent találtam az iskolában. Felidéztünk egy-két régi emléket, és azt is mondta, hogy Móra tanár urat betegsége ágyhoz köti. Ő volt az egyik kedvenc tanárom.

– Matematikát tanított?

– Nem, magyart és latint. Otthon kerestem fel őt, nagyon örült, én nemkülönben. Móra János tanár úr igazi vonzó egyéniség volt, szigorú, igazságos és következetes.

– No majd ezekről később. Mikor 1972 elején az egyik dékánhelyettes, vagy a dékán a környék jó diákjainak „bekebelezését" tűzte ki célul, együtt eszeltük ki, hogy mi a Dunántúlra megyünk.

– Te egyből azt mondtad, irány Zala, Vas.

– Már könnyű volt folytatni, Győr-Sopron, de útba esik Veszprém is. Nem? Fehérvár miként marad ki, ma sem tudom. De maradjunk Zalánál. Én, bár 24 km-re laktunk Egerszegtől, akkor jártam ott először, egy jó idegenvezetővel, veled. No de ne nosztalgiázzunk. Ha jól tudom 1929-ben születtél.

– Igen, szeptember 5-én a legkisebb fiúként. Fivéreim, Pista 1925-ben, Jóska 1927-ben.

– A házatok helyét is mutattad. Ha jól emlékszem, az egerszegi gázművek helyén állt.

– Igen, anyám otthon volt, bennünket nevelt, akkor még a „dolgozó nő" volt a ritkább. Apám lakatosmester volt, iparos.

– A kis öreggel én is többször találkoztam Szegeden. Amikor először megláttam, azt hittem, ő a harmadik Gehér, mivel a Pistát már ismertem, a Jóskával viszont még nem találkoztam. Te mutattad be édesapádat.

– Akkor ismerted meg, mikor hazatelepült Amerikából. Egészen más volt, mint régen. Komorabb, szótlanabb, zárkózottabb lett.

– Na jó. Tudom, hogy a Jókai úti elemi iskolába jártál.

– Utána mindhárman a Deák Ferenc Gimnáziumot választottuk, a mostani Zrínyi-gimnázium elődjét.

– Miért?

– A polgári szóba sem került, azt gondolom azért, mert minden szülő többet szeretne adni a gyermekeinek annál, mint amit ő kapott. A kereskedelmi meg egy iparosnál szóba sem jöhetett, de nem is érdekelt. 1939-ben írattak be a gimnáziumba.

– A németek elkezdték a háborút, te a gimit, csak te később fejezted be. No, de komolyra fordítva a szót: mikor „vetetted" bele magad a matematikába? Kik voltak a matematikatanáraid?

– A gimnázium elkezdésekor csakhamar rájöttem, hogy engem a nyelvek és a természettudományok érdekelnek igazán. Matematikatanáraim? Először Csernay László tanította nálunk a matematikát, keze alatt a matematika csak egy tárgy volt a sok közül. Aztán Kóbor Vilmos kezdte „kibontakoztatni" a tárgy szépségét, meg tudta teremteni az alapokat. Takács János a történelmet, Szigeti Gusztáv a német nyelvet tanította. Hatodikos gimnazista voltam, amikor 1945 januárjában elvittek bennünket leventeként Németországba. 1946 májusáig angol fogságban voltunk. A matematikát igazán itt szerettem meg. A fogságban tanárokkal voltunk együtt. Volt ott egy Szeliánszky Ferenc nevű matematikatanár, vele sokat tudtam matekozni. Hazatérve, 1946-ban iratkoztam be a VI. osztályba.

– Ekkor már együtt tudtál matekozni Pistával, hiszen ő már ismert feladatmegoldó volt.

– Ekkor ő már egyetemista Pesten, tőle könyveket kaptam kölcsön. A fogságban

„felszedett" angol tudásom, s a német nyelvismeretem alapján olvasni tudtam felsőbb matematikát is.

– Közben szorgalmas, főleg eredményes feladatmegoldója lettél a Középiskolai Matematikai Lapoknak, és elindult versenykarriered is.

– Ez akkor már családi hagyomány lett. 1947-ben sikerült megnyernem az V–VI. osztályosoknak kiírt tanulmányi versenyt, egy év múlva a VII–VIII. osztályosok versenyében is első lettem. 1949-ben felvettek az ELTE matematika–fizika szakára és Eötvös-kollégista lettem, hasonlóan Izsák Imre volt gimnazista társamhoz, aki egy évvel felettem járt.

– Mivel „Gehérékből" alaposan készültem, és mikor készültem, sokszor a hátam borsózott, mert sok esetben krimibe illő dolgokra akadtam.

– Mire gondolsz?

– A bátyád 1949-ben II. helyezést ért el az első „Schweitzer Miklós", egyetemistáknak kiírt matematikai versenyen. 1950-ben mint végzős szintén II. díjat nyert. (I. díjat nem adtak ki.) Az egyetemen megszerezte az abszolutoriumot, de a diplomavédés, hát hogy röviden fogalmazzak, internálás miatt elmaradt.

– Tényleg készültél. Apám két háborút ért meg katonaként. Az első után, 1919-ben a katonai egysége átállt a vörösökhöz, de eltervezett harci cselekedetük az volt, hogy minél előbb az otthonukban lehessenek. Ez sikerült is hamarosan. A II. világháború végén az egységük felesküdött a Szálasi-hatalomra, mert már mindenkinek elege volt a frontból. A fejesek felénk menekültek nyugatra, és azt hitték apámék, ezzel segíthetnek legtöbbet környezetüknek. Meg is próbálták nemegyszer, hol sikerrel, hol sikertelenül. Csak a véletlenen múlott, hogy a szombathelyi Gestapo be nem gyűjtötte őket. Emiatt kapta Pista a „jutalmat". Apám, hogy bennünket megmentsen az üldözésektől, 1952-ben nyugatra emigrált, majd Amerikába került.

– Sokan mondják, téged a tehetséged mentett meg.

– Talán enyhítette a „büntetésemet". Az egyetemről való eltávolításomat Ács Pali tudta megakadályozni. Sokan ismerik, évtizedeken keresztül volt a Középiskolai Matematikai Lapok szerkesztője, a tankönyvkiadó egyik vezetője.

– Azt hallottam, hogy Rényi Alfréd is kiállt a Gehér-gyerekekért.

– Igen, később az elhelyezkedésben is segített bennünket, talán átérezte, mit jelent, ha valakit vétlenül bántanak. Őt - aki igen kiváló tehetség volt - 1945 előtt akadályozták a tanulmányaiban.

– Az egyetemen aztán tovább folytatódhattak versenyzői sikereid.

– Igen. Harmadik évfolyamon a „Schweitzer"-versenyen II., egy évvel később I. díjat nyertem.

– Persze, szokásod szerint ezt is szólóban.

– Így sikerült.

– Másnak végzés után, ilyen előélettel, az aspirantúra következett.

– Nekem nem, végzéskor erről álmodni sem lehetett. Örültem annak, hogy álláshoz juthattam. Miskolcra kerültem a Kilián-gimnáziumba, itt dolgoztam 1957-ig.

Aztán Rényi révén a Matematikai Kutató Intézet szegedi kutatócsoportjához kerültem. Pista az Automatizálási Kutató Intézetbe került Budapestre, onnét is ment nyugdíjba. Ezután, amikor a Matematikai Kutató Intézet vidéki részlegeit megszüntették, egy darabig Szőkefalvi professzor analízis kutatócsoportjában dolgoztam, később a geometriai tanszéken a nyugdíjazásomig.

– Most is ott dolgozol, nyugdíjasként. No, de egy kicsit fékezd le magadat, van egy két kényes kérdésem is (persze ezt ne vedd komolyan). Az első találkozásunk után, Kalmár elmesélte, hogy milyen sokoldalú és kiváló matematikus vagy. Soha nem kérdeztem, de mindig tudni akartam, tudományos fokozatra soha nem pályáztál?

– De igen, szegedi éveimben már mertem rá gondolni. Szegeden doktoráltam, és utána többször próbálkoztam, sikertelenül. Az ötvenes évek végén, a hatvanas évek elején ez még számomra elérhetetlen volt, mindig elakadt valahol.

– Kértél valakitől segítséget?

– Nem, a kuncsorgás nem az én világom. Később meg beleuntam az egészbe.

– Zárszóként vehetjük, hogy a végén rajtad is múlott a dolog?

– Igen a végén rajtam is, talán a legvégén csak rajtam múlott. Igen, azt hiszem.

Az utolsó kérdésemre adott válasz egy kicsit meghatott. Eszembe jutott, mikor előadáson a hallgatókkal szembefordulva, bal tenyerét táblának, mutatóujját krétának használva topológiai tételt bizonyított. Mikor ránknézve látta értetlenségünket, a táblához ment, derékmagasságban felrajzolt egy nagykabát gomb nagyságú kört: „Legyen ez egy tartomány és vegyünk fel benne két diszjunkt tartományt..." – mindenki hangosan felnevetett. A „kis" Gehér ekkor rájött, hogy nem kutat, hanem most előad, s világossá varázsolta a problémát.

Végezetül még egy dolgot kell elmondanom: amióta ismerem, „iskola időben" minden héten általában péntek délután, a környék érdeklődő középiskolásainak két olimpia szakkört tartanak az intézet erre fenntartott termeiben. Egyiket Gehér Laci, a másikat Pintér Lajos kollégám. Amikor megkapom a KÖMAL-t, és a versenyeredményeket tartalmazó számait átnézem, sokszor eszembe jut, hány olyan szegedi, vásárhelyi, csabai, ..., helyezett szerepel itt, ahol a felkészítő tanár neve mellől hiányzik egy név: GEHÉR LÁSZLÓ csupa nagybetűvel.

Az inkriminált 2. feladat: Egy egész számokból álló számsorozat minden tagja a harmadiktól kezdve az előző két tag összege. Bizonyítsuk be, hogy bizonyos tagtól kezdve a sorozat tagjai mind egyforma előjelűek.

A feladat megoldása:

Elegendő azt bebizonyítani, hogy van két egymás után következő tag, melyeknek előjele egyenlő, vagy előfordul a 0. Tekintve, hogy különböző előjelű számokat úgy vonunk össze, hogy a kisebbiket kivonjuk a nagyobbikból és a nagyobb előjelét írjuk eléje, míg az előjelek váltakoznak, minden tag abszolút értéke kisebb, mint az előtte levő abszolút értéke ($|a_{n+1}|<|a_n|$), tehát a sorozat számainak abszolút értéke csökken. Bizonyos számú tag után a csökkenés lehetetlensége miatt (pozitív egész számok csökkenő sorozata csak véges számú tagokból állhat) az abszolút értéknek növekednie kell, tehát a kérdéses tag abszolút értéke nagyobb lesz, mint az előtte levőé. Az összevonás szabályai szerint a nagyobb tartja meg előjelét, tehát a kérdéses tag után a következő tag előjele olyan lesz, mint az előzőé. Tehát két egymás után következő tag előjele egyenlő, a tétel be van bizonyítva.

A feladat, amely oly sokat váratott magára:

Legyen adott egy általános háromszög, és ebben egy r_0 sugarú kör, mely érinti a háromszög két oldalát. Válasszunk egy körüljárási irányt. Első lépésben rajzoljunk egy r_1 sugarú kört úgy, hogy érintse a háromszög harmadik oldalát, az r_0 sugarú kört, továbbá a sorrendben következő oldalt. Majd ezt folytatjuk úgy, hogy minden lépésben az új kör érintse az utolsó kört és a sorrendben következő oldalpárt. Jelölje a körök sugarait r_0, r_1, r_2, ..., r_k, ... Mutassuk meg, hogy $r_6=r_0$.

A feladat megoldása:

Induljunk ki valamelyik forgásirányban a háromszög valamelyik szögének szárait érintő r_0 sugarú körből. A feladat szerint szerkesztett további körök sugarai legyenek rendre

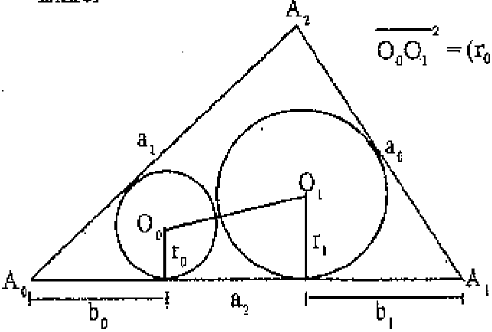
r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, ...

Ha $r_0=r_6$, azaz a körök egy hatos ciklust alkotnak, ez ekvivalens azzal, hogy az r_0 sugarú körből mindkét forgásirányba haladva a harmadik lépésben ugyanahhoz az r_3 sugarú körhöz jutunk.

Ebből egyenlőszárú háromszögre az állítás egyszerűen következik. Induljunk ki ugyanis a szárakat érintő körből, akkor a szimmetria miatt nyilvánvaló az állítás. Ha egy alapon lévő szögből indulunk, akkor az első vagy második lépés után az előbbi esethez jutunk, tehát a körök ekkor is hatos ciklus alkotnak.

Legyen most $A_0A_1A_2$ általános háromszög, oldalai a_0, a_1, a_2, a köröknek és a szög szárainak érintési pontjai és a szög csúcsa közötti szakaszok hossza rendre b_0, b_1, b_2, ..., középpontjai 0_0, 0_1, 0_2, ...

Ekkor

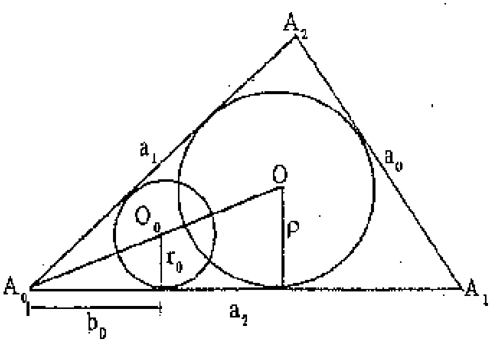


$$\overline{O_0O_1}^2=(r_0+r_1)^2=(a_2-b_0-b_1)^2+(r_0-r_1)^2, \text{ azaz}$$

$$a_2-b_0-b_1=2\sqrt{r_0r_1}$$

$$a_2=b_0+b_1+2\sqrt{r_0r_1}.$$

Jelöljük ρ-val a háromszögbe írt kör sugarát, ekkor (s a félkerület)



$$\frac{r_0}{\rho}=\frac{b_0}{s-a_0}, \quad r_0=\frac{b_0\rho}{s-a_0}$$

$$\frac{r_1}{\rho}=\frac{b_1}{s-a_1}, \quad r_1=\frac{b_1\rho}{s-a_1}.$$

Felhasználva a $\rho=\dfrac{t}{s}$ egyenlőtlenséget és a Heron-formulát:

$$r_0 r_1 = \frac{b_0 b_1 s(s-a_0)(s-a_1)(s-a_2)}{s^2(s-a_0)(s-a_1)} = b_0 b_1 \frac{s-a_2}{s},$$

ezt helyettesítve:

$$a_2 = b_0 + b_1 + 2\sqrt{b_0}\sqrt{b_1}\sqrt{\frac{s-a_2}{s}}.$$

Mivel az állítás hasonlóságtól független, feltehetjük, hogy s=1, azaz

$$a_2 = b_0 + b_1 + 2\sqrt{b_0}\sqrt{b_1}\sqrt{1-a_2}.$$

$0 < \sqrt{1-a_1} < 1$, ebből következik, hogy a $\sqrt{a_2}, \sqrt{b_0}, \sqrt{b_1}$ szakaszokból háromszög szerkeszthető. Ha ezt a formulát összehasonlítjuk a $\sqrt{a_2}, \sqrt{b_0}, \sqrt{b_1}$ oldalú háromszög $\sqrt{a_2}$ oldalára vonatkozó cosinus tétellel azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{1-a_2} = \cos\alpha_2,$$

ahol α_2 a $\sqrt{a_2}, \sqrt{b_0}, \sqrt{b_1}$ oldalú háromszög $\sqrt{a_2}$ oldallal szemközti csúcsnál lévő külső szöge.

$$(\sqrt{a_2})^2 + (\sqrt{1-a_2})^2 = 1,$$

tehát $\sqrt{a_2} = \sin\alpha_2$. Ebből következik, hogy ennek a háromszögnek $\frac{1}{2}$ sugarú a köré írt köre és így

$$\sqrt{b_0} = \sin\beta_0, \quad \sqrt{b_1} = \sin\beta_1,$$

ahol β_0 és β_1 a $\sqrt{b_0}$ és $\sqrt{b_1}$ oldalakkal szemközti szögek. Tehát

$$\alpha_2 = \beta_0 + \beta_1$$

Az eljárást folytatva ugyanúgy nyerjük, hogy

$$\sqrt{a_1} = \sin\alpha_1, \sqrt{a_0} = \sin\alpha_0, \sqrt{b_2} = \sin\beta_2, \sqrt{b_3} = \sin\beta_3 \text{ és}$$

$$\alpha_0 = \beta_1 + \beta_2$$

$$\alpha_1 = \beta_2 + \beta_3,$$

Ebből a három egyenlőtlenségből:

$$\beta_3 = \alpha_1 - \alpha_0 + \alpha_2 - \beta_0,$$

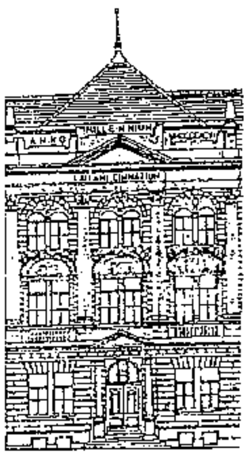
ami független a körüljárási iránytól, így b_3 és r_3 is független, s ezt kellett bizonyítani.

Dr. Varga Antal

EMLÉKKÖNYV

A

ZRÍNYI MIKLÓS GIMNÁZIUM
FENNÁLLÁSÁNAK 100. ÉVFORDULÓJÁRA
1896-1996



ZALAEGERSZEG