

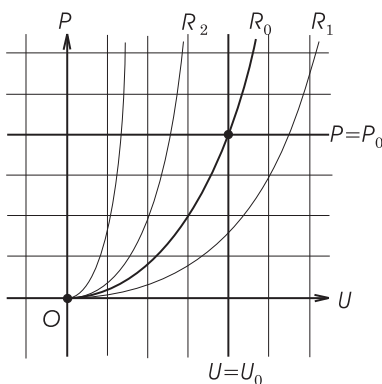
Asszociatív hálózatok geometriája

Kozma József

2014. február 14.

1. Bevezetés

A hálózatok geometriája három görbesereget vizsgál, amelyek görbéi között bizonyos kapcsolatok állnak fenn. Hálózatokkal valójában nagyon gyakran találkozunk, amikor három mennyiség összefüggését akarjuk ábrázolni. A következőkben lássunk erre egy egyszerű példát!



1. ábra.

Egy elektromos fogyasztó állapotát (amelynek ellenállása változtatható) három adat jellemzi: az R ellenállása, a rajta eső U pillanatnyi feszültség és a P pillanatnyi teljesítmény. Köztük az

$$U^2 = P \cdot R \quad (*)$$

összefüggés áll fenn.

Ha grafikusán ábrázolni akarjuk, hogy melyek a három mennyiség összetartozó értékei, a következőt tehetjük. Az R ellenállás rögzített R_0 értéke mellett ábrázoljuk az (UP) koordináta-rendszerben az összetartozó (U, P) párokat a $P = \frac{1}{R_0} U^2$ formula alapján. Ezzel egy parabolaágot kapunk az $U > 0$, $P > 0$ síknegyedben. Más-más ellenállásértékekre újabb parabolaágak adódnak (lásd az 1. ábrát). Ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy U rögzített U_0 értékéhez az

összetartozó (P, R) értékeket hogyan olvashatjuk le, akkor is a fenti ábrát használhatjuk. Az $U = U_0$ egyenletű egyenes valamely pontjában az ott áthaladó vízszintes egyenes, illetve parabolaág mutatja, hogy milyen P és R értékek tartoznak össze e pontban. Hasonlót mondhatunk el a $P = P_0$ egyenes pontjairól is.

Megállapíthatjuk, hogy a nyílt első síknegyedben a $(*)$ formula helyett 3 görbesereget (a vízszintes, a függőleges félegyeneseket és a parabolaágakat) használhatunk fel az összetartozó értékhármasok meghatározására.

Mivel egy ilyen (úgynevezett görbesereges) diagram segítségével bármely két összetartozó értékhez meg tudjuk határozni a harmadikat (amennyiben az egyes görbeseregek elég sűrűn be vannak rajzolva), ezeket gyakran számolóábrának is nevezik.

Milyen tulajdonságokkal rendelkeznek a számolóábrák? A harmadik adat egyértelmű meghatározhatóságához nyilvánvalóan szükséges, hogy a síktartomány minden pontjában mindhárom seregből éppen egy görbe menjen át, és hogy azonos sereghez tartozó görbéknek ne legyen közös pontja. Az ábránk ezzel egy olyan hálózat szerkezetét mutatja, amelyben a hosszanti és keresztszalak mellett haránt is haladnak fonalak. Ezért nevezik más vonatkozásban az ehhez hasonló geometriai konstrukciókat 3-szöveteknek.

A hálózatok geometriájának egy matematikailag érdekes jellemzője az, hogy a geometria és az algebra fogalmai találkoznak benne, s ezen túl egyik fő eszközünk az analízis.

Hálózatnak tehát három görbesereget nevezünk, amelyek külön-külön egyrétűen fedik le a síkot, és páronként hálózatot alkotnak a köznap értelemben: bármely két fonál mindegyikének pontosan egy metszete van, és ezen át a harmadik görbeseregnek is megy át görbéje.

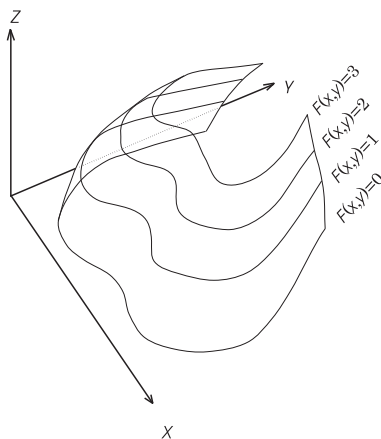
E kis dolgozatban az a célunk, hogy megvizsgáljunk egy kissé speciálisabb hálózat osztályt. E hálózatot majd geometriailag adjuk meg, a külön (specialitást kifejező) feltétel algebrai természetű lesz, s e speciális hálózat tulajdonságait az algebrai és geometriai jellemzés után, illetőleg azzal párhuzamosan az analízis nyelvén fogalmazzuk meg.

Egy görbesereg megadásának kézenfekvő módja, hogy egy kétváltozós függvény szintvonalait tekintjük (2. ábra). Vagyis a $z = F(x, y)$ függvényből adódó $z = F(x, y) = c$ egyenlet minden c -re egy görbét ad, ahol c egy intervallumot fut be, amely lehet végtelen is. Ha az F függvényről feltesszük, hogy differenciálható (totálisan) a $\mathcal{D}$ értelmezési tartomány minden pontjában (ezért mindkét változójában folytonosan parciálisan differenciálható), akkor egy ilyen szintvonal sereget az (xy) síkra a z -tengely irányából vetítve, e koordinátasíkban egy egyparaméteres görbesereget kapunk, amelynek $F(x, y) = c_1$ és $F(x, y) = c_2$ görbéi sosem metszik és nem is érintik egymást, ha $c_1 \neq c_2$.

A 3-hálózat fogalma erre az esetre most már könnyen megfogalmazható.

1.1. Definíció. Az (xy) -sík $\mathcal{D}$ (egyszeresen) összefüggő tartományán a három kétváltozós, C^1 osztályú $z = F_i(x, y)$ függvénnyel megadott

$$z = F_i(x, y) = c_i \quad c_i \in \mathcal{I}_i(\subset \mathbb{R}) \quad (i = 1, 2, 3)$$



2. ábra.

görcsesereg együttesét 3-hálózatnak nevezzük, ha

- SZ1.** A $\mathcal{D}$ minden pontján áthalad mindegyik seregnek pontosan egy görbéje. (Azonos görcsesereghez tartozó görbék nem is metszik és nem is érintik egymást.)
- SZ2.** Különböző sereghez tartozó görbék pontosan egy pontban metszik egymást.
- SZ3.** Minden görbe sima.

Az SZ1. feltétel zárójelbe tett részéről a definíció előtt már megjegyeztük, hogy mindig fennáll, ha a hálózatot $F(x, y)$ függvényekkel adjuk meg. Az SZ2. feltételbe azt is belefoglaltuk, hogy különböző sereghez tartozó görbék nem is érinthetik egymást. Az SZ3. feltétel nem újabb, csak külön is megfogalmaz egy tulajdonságot, amely az F_i függvények differenciálhatóságának következménye (görbe simaságán az öt megadó függvénynek a differenciálhatóságát értjük, akár implicit, akár explicit megadásról van szó).

Az egyszerűbb tárgyalás érdekében feltesszük, hogy $F_1(x, y) = x$ és $F_2(x, y) = y$, azaz az első sereg az x -tengellyel, a második pedig az y -tengellyel párhuzamos egyenesekből áll, továbbá hogy az origó $\mathcal{D}$ -ben van. (Be lehet bizonyítani, hogy alkalmas — folytonosan differenciálható — koordináta-transzformációval tetszőleges 3-hálózat ilyenné tehető, de ez meghaladná e cikk kereteit.) Feltesszük még, hogy a harmadik sereghez tartozó bármely görbe az origótól egyforma távol metszi a koordináta-tengelyeket, valamint hogy a hálózat $\mathcal{D}$ tartománya tartalmazza a tengelyek pozitív félegyeneseit.

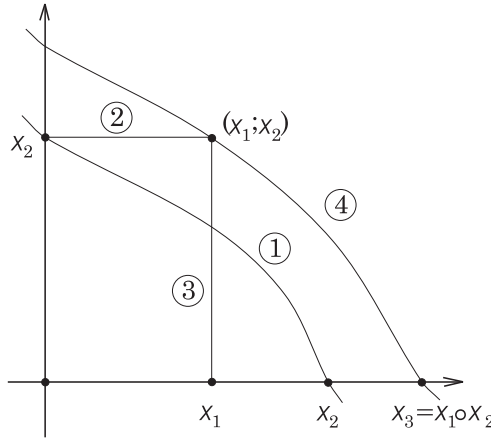
1.2. Definíció. A fent felsorolt feltételeknek megfelelő 3-hálózatot W_g -hálózatnak nevezzük.

A g index jelöli, hogy a harmadik sereg görbéi (implicit alakban megadott) függvények grafikonjai (szintvonalai). A továbbiakban F -fel fogjuk jelölni a harmadik görbesereget megadó függvényt. Az $F(x, y) = z$ implicit függvényt explicit alakban úgy fogjuk írni, hogy $f_{z_0}(x) = y$. A z_0 index arra utal, hogy ez a görbesereg z_0 állandó értékhez tartozó — azzal megparaméterezett — görbéje, vagyis $F(c, f_{z_0}(x)) = z_0$ minden x -re.

2. A W_g -hálózatok tulajdonságai.

Egy könnyű, de fontos észrevétel a következő.

2.1. Állítás. Egy W_g -hálózat harmadik seregének $F(x, y) = z_0$ alakban megadott görbéi szigorúan monoton fogyó függvények grafikonjai.



3. ábra.

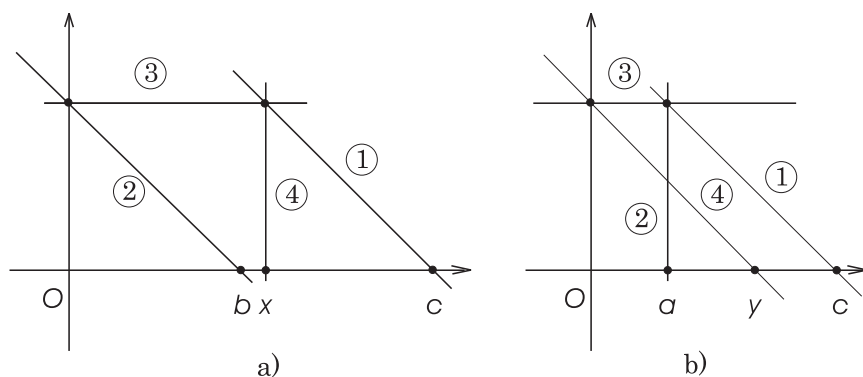
Az olvasónak elég megfigyelnie, hogy ezek a grafikonok nem metszhetik kétszer sem a vízszintes, sem a függőleges koordináta-vonalakat.

Egy W_g -hálózat segítségével új műveletet vezethetünk be az x -tengelynek a tartományba eső félegyenesén. Az $x_1 \circ x_2 = x_3$ "szorzat" eredményét úgy kapjuk meg, hogy az (x_1, x_2) pontra illeszkedő grafikonnak megkeressük az x -tengelyre eső $(x_3, 0)$ pontját. A 3. ábrán számoztuk az x_3 meghatározásának lépéseit.

Könnnyen megállapíthatók a " $\circ$ " karika művelet tulajdonságai.

A $\circ$ művelet balról megoldható adott b és c esetén, ha a $c = x \circ b$ egyenlet x -re megoldható, vagyis létezik olyan a , amelyre $c = a \circ b$ fennáll. Ha pontosan egy ilyen a van, akkor a megoldhatóság egyértelmű. Hasonlóan, jobbról megoldhatóság az azt értjük, hogy a $c = a \circ y$ megoldható, vagyis létezik olyan b , amelyre $c = a \circ b$ teljesül. Az egyértelmű megoldhatóság ezúttal is b unicitását jelenti.

Az e -t egységelemnek nevezzük, ha bármely x esetén az $x \circ e = e \circ x = x$ azonosság érvényes. Ilyenkor a " $\circ$ " műveletet egységelemesnek mondjuk.

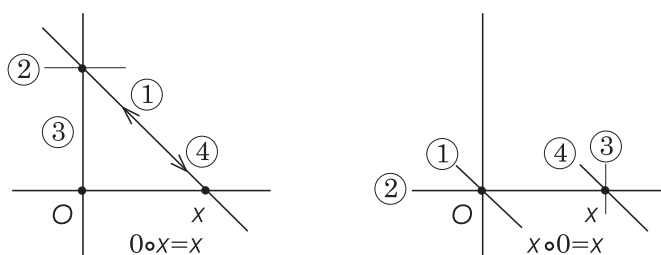


4. ábra.

2.2. Állítás. A "o" szorzásművelet

- 1) balról és jobbról egyértelműen megoldható,
- 2) egységelemes, egységeleme a 0.

Bizonyítás. . A "o" balról egyértelműen megoldható művelet. Tekintsük a $c = x \circ b$ formulát. A "o" művelet definíciója szerint egyértelműen megszerkeszthető az x érték. A szerkesztési lépéseket számozva a 4.a) ábra mutatja. Az ábrából kiolvasható, hogy a megszerkesztetten túl semmilyen további x -re az egyenlőség nem állhat fenn. A műveletünk jobbról való megoldhatósága és az egyértelműség hasonlóan látható. A szerkesztési sorrendet a 4.b) ábrán követhetjük végig. Az 5. ábrán jól látszik, hogy a "o" egységeleme a 0. $\square$



5. ábra.

2.3. Definíció. Egy kétváltozós műveletet a fenti 1)–2) tulajdonságokkal loopnak (ejtsd "lúp") nevezünk.

A loop fogalma igen közel áll a csoporthoz, hiszen csak az asszociativitás hiányzik: egy asszociatív loop csoport. Például az összeadás és a szorzás csoportot és így természetesen loopot ad (az utóbbi csak a pozitív számok halmazán).

A fentiek alapján nyilvánvaló az az észrevétel, hogy

2.4. Állítás. Egy W_g -hálózat által definiált művelet olyan loop, amelynek egyégeleme 0.

Mivel a W_g -hálózatok loop-okat definiálnak, felvetődik a kérdés, hogy mi a helyzet fordítva. Az összeadás és a szorzás esetén könnyen megkonstruálhatjuk az őket generáló W_g -hálózatot.

Lássuk először az összeadást. A 3. sereg görbéi azok az egyenesek, amelyek egyenletei $x + y = z_0$ alakúak, ahol a z_0 konstans minden valós értéket felvehet. Tehát a 3. sereg $+135^\circ$ irányszögű egyenesekből áll.

A szorzás esetében a $\mathcal{D}$ tartomány nem lehet az egész koordináta-sík. Az $x \cdot y = z_0$ egyenletű hiperbolák ugyanis nem elégítik ki a hálózat egyik feltételét sem. Ha azonban megszorítjuk a W_g -hálózat $\mathcal{D}$ tartományát az $x > 0, y > 0$ síknegyedre, akkor ezek a problémák a tengelyeknek az (1,1) pontba való eltolásával eltűnnek. Eredeti koordináta-rendszerünkben a 3. sereget tehát az

$$(x - 1) \cdot (y - 1) = z_0 + 1$$

egyenletű görbékkel kell megadnunk. (A jobb oldali konstans $+1$ -gyel való eltolása azért történik csak, hogy z_0 is a $(0, +\infty)$ intervallumot futhassa be, s ezáltal loop-hoz juthassunk.) Ekkor a generált " $\circ$ " művelet $x \circ y = (x + 1) \cdot (y + 1)$, és a $(-1, \infty)$ intervallumon van értelmezve.

Ha a számegyenes valamely félegyenesén adott egy tetszőleges loop az e egyégelemmel és a " $\circ$ " művelettel, akkor a megfelelő W_g -hálózat 3. görbeseregét a fentihez hasonló módon az $(x - e) \circ (y - e) = z_0 + e$ egyenlet adja meg.

2.5. Állítás. Egy W_g -hálózat és egy $\circ$ műveletű L loop kölcsönösen meghatározza egymást.

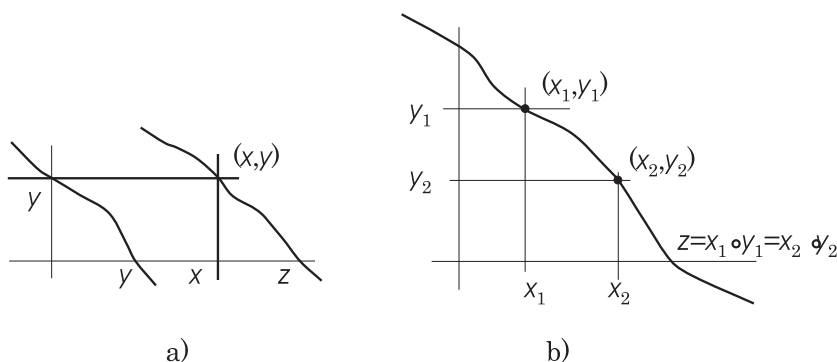
A W_g -hálózat loop-jának műveletét jelöljük $\circ$ -val. Az asszociativitás feltétele:

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z). \quad (1)$$

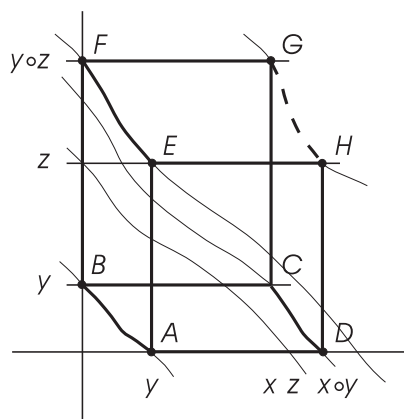
Hogyan fogalmazható át ez a feltétel a hálózatunkra? Nézzük előbb, hogyan fogalmazható meg egyszerűen az $x \circ y = z$ összefüggés: az (x, y) pontra illeszkedő görbe (a 3. seregből) a $(z, 0)$ pontban metszi az x -tengelyt (6.a) ábra).

Eszerint $x_1 \circ y_1 = x_2 \circ y_2 (= z)$ akkor és csak akkor, ha az (x_1, y_1) és (x_2, y_2) pontok ugyanazon a 3. sereghez tartozó görbén vannak, amely az x -tengelyt a $(z, 0)$ pontban metszi (6.b) ábra).

Az (1) összefüggésnek tehát az felel meg, hogy az $(x \circ y, z)$ és az $(x, y \circ z)$ pontok ugyanarra a 3. seregbeli görbére illeszkednek. A 7. ábrán a megfelelő görbéket tüntettük fel. Rendre felvettük az $A(y, 0), B(0, y), C(x, y), D(x \circ y, 0), E(y, z), F(0, y \circ z)$ pontokat s végül a $G(x, y \circ z)$ és a $H(x \circ y, z)$ pontot. Az (1) teljesülése láthatóan abban fejeződik ki, hogy az $ABCDEFGH$ egy téglatest "perspektivikus" képeinek megfelelő csúcsai. Az asszociativitás geometriai feltétele tehát az, hogy a hálózat görbéi által felvehető fenti 8 pont tetszőleges x, y, z esetén úgy helyezkedjen el, hogy egy "téglatest" hálózata záródjon: a pontok páronként egy-egy élre illeszkednek, amelyek a hálózat görbéi.



6. ábra.



7. ábra.

3. Asszociatív W_g -hálózatok

A rövidség kedvéért a továbbiakban ahelyett, hogy "asszociatív loop által generált W_g -hálózatról" beszéljünk, röviden "asszociatív W_g -hálózatot" mondunk. A 3. sereghez tartozó görbéket "3-görbének" fogjuk hívni.

Az előző geometriai jellemzés után kézenfekvő a kérdés: milyenek az asszociatív W_g -hálózatok 3-görbéi? Ezekről annyit már tudunk, hogy szigorúan monoton fogyó függvények grafikonjai, amelyek a téglatest záródását teljesítik, de szeretnénk megadni az asszociatív loopokat (csoportokat) szolgáltató $z = F(x, y)$ függvényeket. Két példát már láttunk: az $F_1(x, y) = x + y$ az összeadást és $F_2(x, y) = (x - 1)(y - 1)$ a szorzást adja.

3.1. Tétel. Egy asszociatív W_g -hálózat kommutatív: $x \circ y = y \circ x$, így a 3-görbék az $y = x$ egyenesre tengelyesen szimmetrikusak.

Az állítást több lépésben igazoljuk. Az asszociativitásra tekintettel egy x

elemet k -szor véve, és tetszőleges zárójelzéssel összeszorozva mindig ugyanazt kapjuk. Az eredményt x^k -val jelöljük, és az x elem k -adik hatványának nevezzük. Ebből közvetlenül adódik a

3.2. Állítás. *Bármely x elemre (az intervallumhoz tartozó számra), k és l természetes számra*

$$x^k \circ x^l = x^l \circ x^k .$$

Ezt kissé másképp fogalmazva:

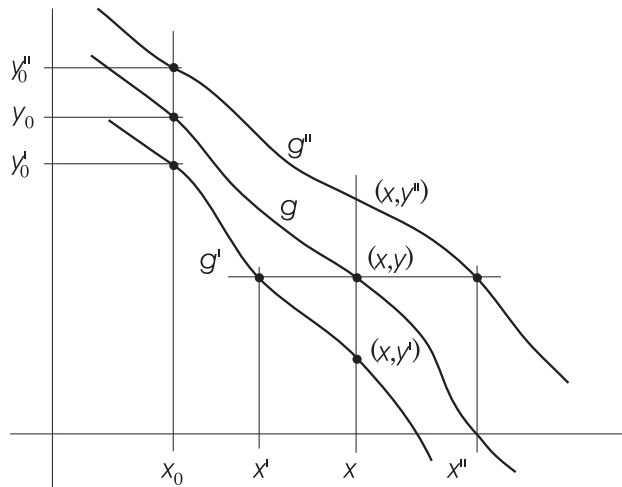
3.3. Következmény. *Mindazon u és v elemek, amelyek ugyanannak a w -nek valamilyen hatványai, a szorzatban felcserélhetők. Vagyis ha $u = w^k$ és $v = w^l$, akkor $u \circ v = v \circ u$.*

Az olyan pontokat, amelyek x és y koordinátái ugyanazon elem hatványai, hatványpontoknak fogjuk nevezni. A fenti következmény geometriai tartalma így a következő.

3.4. Következmény. *Ha egy hatványpont illeszkedik egy 3-görbére, akkor e görbén rajta van e pontnak az $y = x$ egyenesre szimmetrikus hatványpont párja is (a koordináták cserélődnek fel).*

Ezt az észrevételt fogjuk felhasználni tételünk bizonyítására, amelyet egy további részállítással folytatunk.

3.5. Állítás. *Legyen $y'_0 < y_0 < y''_0$. Ekkor az (x_0, y_0) pontra illeszkedő g 3-görbét az (x_0, y'_0) és az (x_0, y''_0) pontokra illeszkedő g' és g'' 3-görbék közrefogják: bármely x esetén $(x, y') \in g'$, $(x, y) \in g$, $(x, y'') \in g''$ -ből az következik, hogy $y' < y < y''$.*



8. ábra.

Szemléletesen szólva, ha egy helyen a g' 3-görbe (a g'' 3-görbe) a g alatt (fölött) van, akkor mindenütt alatta (fölötte) halad (ld. a 8. ábrát). Ez egyszerűen az SZ1. feltétel átfogalmazása.

A közrefogás "vízszintesen" is megnyilvánul. A megfogalmazás és igazolás hasonló az előzőhöz.

3.6. Állítás. *Legyenek g, g', g'' a W_g -hálózat 3-görbéi, $(x_0, y_0) \in g, (x_0, y'_0) \in g', (x_0, y''_0) \in g'', y'_0 < y_0 < y''_0$. Ha valamely x esetén $(x, y) \in g, (x', y) \in g', (x'', y) \in g''$, akkor $x' < x < x''$.*

Bizonyítás. . Az igazoláshoz elég azt észrevenni, hogy a g, g', g'' szigorúan monoton csökkenése miatt a feltételek mellett $g'(x)$ az y értéket x -nél kisebb x' helyen, míg $g''(x)$ ugyanezt az y értéket az x -nél nagyobb x'' helyen veszi fel (ld. most is a 8. ábrát). $\square$

A fentiek szerint tehát, ha $(x, y') \in g'$ és $(x, y'') \in g''$ olyan hatványpontok, amelyek közrefogják a vizsgált g görbe (x, y) pontját (vagyis $y' < y < y''$), akkor az $(y', x) \in g'$ és $(y'', x) \in g''$ hatványpontok közrefogják a g görbe $(\tilde{y}, x)$ pontját (vagyis $g(\tilde{y}) = x$) és az (y, x) pontot is. Ez a közrefogás adja a bizonyítás következő lépéséhez az ötletet.

3.7. Ötlet. *Ha lenne a g görbe tetszőleges (x, y) pontjához tetszőlegesen közel alatta, illetve fölötte levő (x, y') és (x, y'') hatványpont, akkor a g görbe $(\tilde{y}, x)$ pontja olyan (y', x) és (y'', x) hatványpontok közé esne, amelyek az (y, x) pontot is tetszőleges pontossággal zárják közre. Következésképpen az $(\tilde{y}, x)$ és (y, x) pontoknak egybe kell esniük, ami bizonyítaná g szimmetriáját.*

A továbbiakban a bizonyítást nemnegatív koordinátájú pontokra végezzük el, és feltesszük, hogy minden előforduló értékre a megfelelő pont a $\mathcal{D}$ tartományban van. Egyéb esetekben a követendő eljárás hasonló, és az olvasó maga is könnyen végrehajthatja azt.

Néhány egyszerű megállapítással kezdjük e gondolatmenet részletes kifejtését.

3.8. Állítás. *Az $F(x, y) = x \circ y$ függvény mindkét változójában folytonosan, szigorúan monoton növekvő.*

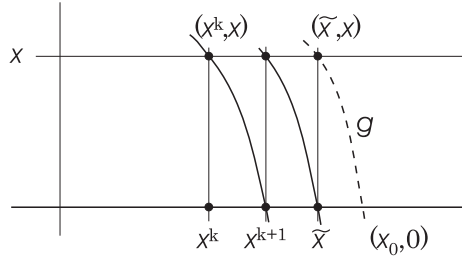
Bizonyítás. . A folytonosság és differenciálhatóság a W_g -hálózat feltételei között szerepelt. A növekedéshez elég megmutatni, hogy $x_1 \circ y_1 < x_2 \circ y_2$, ha $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$, és nincsen egyenlőség egyszerre a két esetben. Az (x_1, y_1) és (x_2, y_2) pontok elhelyezkedéséből következik, hogy ha a két pont koordinátái közül legalább az egyik eltérő, akkor az első és a második pontra illeszkedő g_1 és g_2 görbe közül a g_2 halad fölül, mert az (x_2, y_1) pontra illeszkedő g_{12} görbét, 5. és 6. Állítás szerint a g_1 és g_2 közrefogja. Ha viszont $g_2(x)$ azonos y értéket mindig nagyobb x -nél ér el, mint $g_1(x)$, akkor az y -tengelyt is nagyobb x -nél metszi, amiért $x_1 \circ y_1 < x_2 \circ y_2$. $\square$

3.9. Állítás. *Az x^k hatvány rögzített k természetes szám esetén az x alap folytonosan szigorúan monoton növekvő függvénye.*

Bizonyítás. . Az x^k hatványt számítsuk úgy ki, hogy $x^k = (\dots((x \circ x) \circ x) \circ \dots \circ x)$. Az $x \circ x$ a 7. Állítás szerint x -szel szigorúan monoton (folytonosan) nő. A következő kéttényezős szorzat, $(x \circ x) \circ x$ a növekvő $x \circ x$ -szel, illetve az x -szel szintén így változik. Ezt folytatva (szigorúan véve teljes indukciót végezve) kapjuk az állítást. $\square$

3.10. Állítás. Az x^k hatvány a kitevővel szigorúan monoton módon növekszik, és minden pozitív értéknél nagyobb értéket felvesz.

Bizonyítás. . Legyen $x > 0$ rögzített szám és $k_1 < k_2$. Ekkor $x^{k_1} = x^{k_1} \circ 0 < x^{k_1} \circ x^{k_2-k_1} = x^{k_2}$, és ez az állítás első felét igazolja.



9. ábra.

A minden határon túli növekedés igazolásához indirekt módon tegyük fel, hogy x^k korlátos, vagyis létezik A , hogy $x^k < A$ minden $k \in \mathbb{N}$ -re. Ekkor a $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x_0 < A$ határérték létezik (a szigorúan monoton növekedés miatt).

Legyen $\tilde{x}$ olyan, hogy $\tilde{x} \circ x = x_0$ teljesüljön. Ekkor $\tilde{x} < x_0$. Tudjuk, hogy bármely k -ra $x^{k+1} < x_0$, ezért $x^k < \tilde{x}$, és így a határérték miatt $x_0 \leq \tilde{x}$, és ez ellentmondás. Bizonyításunk geometriai tartalma a 9. ábrán jól látszik. $\square$

A hatványfüggvényünk szigorúan monoton növekedő tulajdonságát használja ki a következő

3.11. Állítás. Minden x -re és k természetes számra létezik egy és csak egy w szám, amelyre $w^k = x$. Ezt a w számot $x^{1/k}$ -val jelöljük.

Bizonyítás. . A 8. Állításból azonnal következik, hogy ha R_k az x^k képhalmaza, akkor az R_k -n létezik az inverz, és egyértelmű. Igazolnunk kell azonban még, hogy R_k tartalmazza az x -tengelynek a $\mathcal{D}$ -be eső részét, s ehhez elég, ha nagy x -re x^k is elég nagy lesz. De $x \leq x^k$ minden $k \in \mathbb{N}$ -re igaz, így ez nyilvánvaló. $\square$

Mivel az $x \mapsto x^k$ függvény monoton és folytonos, láthatjuk, hogy

3.12. Következmény. Az $x \mapsto x^{\frac{1}{k}}$ függvény szigorúan monoton növekvő, folytonos, és $x \rightarrow 0$ esetén 0-hoz tart.

A hatványozás és az $x^{\frac{1}{k}}$ definiálása után értelmezhetőek az $x^{\frac{l}{k}}$ törtkitevős hatványok, ahol l és k természetes számok: $x^{\frac{1}{k}} = (x^{1/k})^l$. A fentiekből azonnal adódnak e hatvány következő tulajdonságai.

3.13. Állítás. *Az $x \mapsto x^{\frac{1}{k}}$ hatvány az alapnak szigorúan monoton növekvő, folytonos függvénye, és a kitevővel együtt szigorúan monoton nő.*

Bizonyítás. Mivel mind az $x \mapsto x^{\frac{1}{k}}$, mind az $x \mapsto x^l$ szigorúan monoton és folytonos, a szorzatleképezés is ilyen lesz.

A kitevőre vonatkozó állítást a következőképpen igazolhatjuk. Legyen $\frac{l_1}{k_1} < \frac{l_2}{k_2}$, $(k_i, l_i \in \mathbb{N})$. Ekkor $l_1 k_2 < l_2 k_1$, s ezért $x^{l_1 k_2} < x^{l_2 k_1}$ a 9. Állítás miatt. Az $x \mapsto x^{\frac{1}{k}}$ szigorúan monoton növekedése miatt ezért

$$x^{\frac{l_1 k_2}{k_1 k_2}} < x^{\frac{l_2 k_1}{k_1 k_2}},$$

vagyis $x^{\frac{l_1}{k_1}} < x^{\frac{l_2}{k_2}}$. □

Most már hozzáláthatunk egy (x, y) ponthoz alulról és fölülről tartó (w^{p_i}, w^{q_i}) hatványpont sorozatok megkonstruálásához, amelyek létezése az Ötlet szerint már elegendő az 1. Tétel igazolásához.

Az 1. Tétel bizonyítása. Tekintsük a g görbén az (x, y) pontot. Legyen $k \geq 1$ természetes szám, továbbá legyen $w = x^{\frac{1}{k}}$. Jelölje l azt a természetes számot, amelyre $w^l \leq y < w^{l+1}$ teljesül. Ilyen l a 9. Állítás miatt mindig van. Azt akarjuk elérni, hogy mind w^l , mind w^{l+1} minél közelebb legyen y -hoz. Világos, hogy a w alapot kellene csökkentenünk úgy, hogy azért x még w hatványa maradjon.

A $w_m = x^{\frac{1}{2^m k}}$ sorozatot tart a 0-hoz (a 9. Állítás alapján), miközben x minden w_m -nek hatványa. Legyen l_m az a kitevő, amelyre

$$w_m^{l_m} \leq y < w_m^{l_m+1}.$$

Bebizonyítjuk, hogy a $[w_m^{l_m}, w_m^{l_m+1}]$ intervallum hossza 0-hoz tart. Ezt mutatja, hogy

$$\begin{aligned} w_m^{l_m+1} - w_m^{l_m} &= w_m^{l_m} \circ q_m - w_m^{l_m+1} \circ w_m^{-1} \leq \\ &\leq y \circ w_m - y \circ w_m^{-1} = y \circ w \frac{1}{m} - y \circ w \frac{-1}{m} \end{aligned}$$

és $w^{\frac{1}{m}} \rightarrow 0$ (ez a 10. és 9. Állítás következménye).

Eszerint $(w_m, w_m^{l_m}) \rightarrow (x, y)$, amiért

$$x \circ y \leftarrow w_m^m \circ w_m^{l_m} = w_m^{l_m} \circ w_m^m \rightarrow y \circ x,$$

tehát $x \circ y = y \circ x$, amint állítottuk.

A kommutativitás ismerete segíteni fog abban, hogy az asszociativitásra egy szükséges és elegendő feltételt fogalmazzunk meg.

3.14. Tétel. A W_g hálózat $\circ$ művelete akkor és csak akkor asszociatív, ha létezik kétszer folytonosan deriválható $y = \varphi(x)$ függvény az alábbi tulajdonságokkal:

$$i) \varphi(0) = 0$$

ii) φ invertálható (szigorúan monoton), és

iii) $x \circ y = F(x, y) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(y))$ bármely $\mathcal{I}$ -beli x, y, z szám esetén, ahol $\mathcal{I}$ az x -tengelynek a $\mathcal{D}$ tartományba eső része.

Bizonyítás. Ha φ teljesíti i – iii-t, akkor W_g nyilván asszociatív:

$$\begin{aligned} (x \circ y) \circ z &= \varphi^{-1}(\varphi(x \circ y) + \varphi(z)) = \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(y))) + \varphi(z)) = \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z)) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(\varphi^{-1}(\varphi(y) + \varphi(z))) + \varphi(z)) = \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(y \circ z)) = x \circ (y \circ z). \end{aligned}$$

A fordított állításhoz vegyük az asszociativitást kifejező

$$F(F(x, y), z) = F(x, F(y, z)) \quad (1)$$

egyenletet. Az F -re felírt implicit (2) összefüggés helyett F -et valamilyen tőle független leképezések segítségével szeretnénk előállítani.

Deriváljuk a (2) egyenletet x , majd z szerint a 0-ban. Minthogy az egyes változók hol az első, hol a második helyen állnak az F argumentumában, az egyértelműség érdekében az első, ill. második argumentum szerinti parciális deriváltakat ∂_1 -gyel, ill. ∂_2 -vel jelöljük. Eredményül a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \partial_1 F(F(0, y), z) \partial_1 F(0, y) &= \partial_1 F(0, F(y, z)) \quad (3) \\ \partial_2 F(F(x, y), 0) &= \partial_2 F(x, F(y, 0)) \partial_2 F(y, 0) \quad (4). \end{aligned}$$

Ha itt az $F(0, y) = y$ és $F(x, 0) = x$ összefüggést is figyelembe vesszük, akkor

$$\begin{aligned} \partial_1 F(y, z) \partial_1 F(0, y) &= \partial_1 F(0, F(y, z)) \\ \partial_2 F(F(x, y), 0) &= \partial_2 F(x, y) \partial_2 F(y, 0) \end{aligned} \quad (2)$$

adódik. Ha $y = x$ és $z = y$, ebből a

$$\begin{aligned} \partial_1 F(x, y) \partial_1 F(0, x) &= \partial_1 F(0, F(x, y)) \quad (3') \\ \partial_2 F(F(x, y), 0) &= \partial_2 F(x, y) \partial_2 F(y, 0) \quad (4') \end{aligned} \quad (3)$$

egyenletek adódnak.

A további számításinkhoz szükség lesz egyes parciális deriváltak adott helyeken felvett értékeire. Mivel $F(x, 0) = x$, ezért $\partial_1 F(x, 0) \equiv 1$. Hasonlóan $\partial_2 F(0, y) \equiv 1$.

Szükségünk lesz még a

$$\partial_1 F(0, y) \neq 0 \quad (5)$$

összefüggésre. A $z_0 \equiv F(x, f_{x_0}(x))$ egyenlet deriváltja az $x = 0$ pontban

$$\frac{d}{dx} (F(x, f_{x_0}(x)))|_{x=0} = \frac{d}{dx} z_0|_{x=0} = 0.$$

A kijelölt deriválásokat elvégezve kapjuk, hogy

$$\partial_1 F(0, f_{z_0}(0)) + \partial_2 F(0, f_{z_0}(0)) f'_{z_0}(0) = 0.$$

Tekintettel arra, hogy $f_{z_0}(0) = z_0$, az adódik, hogy

$$\partial_1 F(0, z_0) + \partial_2 F(0, z_0) f'_{z_0}(0) = 0.$$

Mivel bármely $z \in \mathcal{I}$ -re $f'_z(0) \neq 0$ (f_z szigorúan monoton!), és $\partial_2 F(0, z) \equiv 1$, azt kapjuk, hogy

$$\partial_1 F(0, z) = -f'_z(0) \neq 0,$$

amint (5)-ben állítottuk.

Használni fogjuk még a kommutativitást kifejező

$$\partial_1 F(x, y) \equiv \partial_2 F(y, x) \quad (6)$$

azonosságot.

Az (5) alapján definiálhatjuk a

$$G(y) = \int \frac{dy}{\partial_1 F(0, y)}$$

egyváltozós és a

$$\Phi(x, y) = G(F(x, 0)) - G(x) - G(y) + G(0)$$

kétváltozós való függvényt.

Az utóbbi parciális deriváltjairól belátjuk, hogy mindenütt 0-val egyenlőek, s ezért $\Phi(x, y)$ értéke állandó, mégpedig 0. Valóban,

$$\begin{aligned} \partial_1 \Phi(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, y) = G'(F(x, 0)) \partial_1 F(x, 0) - G'(x) = \\ &= \frac{1}{\partial_1 F(0, F(x, 0))} \partial_1 F(x, 0) - \frac{1}{\partial_1 F(0, x)} = \\ &= \frac{1}{\partial_1 F(x, 0) \partial_1 F(0, x)} \partial_1 F(x, 0) - \frac{1}{\partial_1 F(0, x)} = \quad (3') \text{ szerint} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Továbbá

$$\begin{aligned}
 \partial_2 \Phi(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \Phi(x, y) = G'(F(x, y)) \partial_2 F(x, y) - G'(y) = \\
 &= \frac{1}{\partial_1 F(0, F(x, y))} \partial_2 F(x, y) - \frac{1}{\partial_2 F(0, x)} = \\
 &= \frac{1}{\partial_2 F(F(x, y), 0)} \partial_2 F(x, y) - \frac{1}{\partial_1 F(0, y)} = (6) \text{ szerint} \\
 &= \frac{1}{\partial_2 F(x, y) \partial_2 F(y, 0)} \partial_2 F(x, y) - \frac{1}{\partial_1 F(0, x)} = (4') \text{ szerint} \\
 &= \frac{1}{\partial_2 F(y, 0)} - \frac{1}{\partial_1 F(0, x)} = \frac{1}{\partial_1 F(0, y)} - \frac{1}{\partial_1 F(0, x)} = (6) \text{ szerint.} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Eszerint Φ konstans, és értéke csak 0 lehet, hiszen $F(0,0) = 0$ miatt

$$\Phi(0,0) = G(F(0,0)) - G(0) - G(0) + G(0) = 0$$

teljesül. Más szóval

$$G(F(x, y)) = G(x) + G(y) - G(0). \quad (7)$$

Állítjuk, hogy a $\varphi(x) = G(x) - G(0)$ függvény teljesíti a tétel feltételeit:

$$i) \varphi(0) = G(0) - G(0) = 0.$$

$$ii) \varphi'(x) \neq 0 \text{ a } 0 \text{ valamely környezetében, hiszen } \varphi'(0) = 1/\partial_1 F(0,0) = 1.$$

iii) a φ definíciója szerint

$$\varphi(F(x, y)) = G(F(x, y)) - G(0) = G(x) + G(y) - G(0) - G(0) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. $\square$

3.15. Következmény. Egy W_g hálózat által meghatározott $\circ$ műveletű csoport izomorf a valós számok összeadás csoportjával.

Bizonyítás. . Ez a tételben szereplő φ függvény tulajdonságaiból következik, hiszen azok éppen azt jelentik, hogy φ a kérdéses izomorfizmus. $\square$

Figyelembe véve a 4. Állításunkat, az alábbihoz jutunk.

3.16. Következmény. Minden, a valós számegyenesen értelmezett csoport izomorf az összeadással.

Más szóval: Egyetlen egydimenziós csoport létezik!

Hivatkozások

- [1] Kurusa Árpád, Local geometric loops, Radovi Math.
- [2] Aczél János, Kvázicsoportok—hálózatok—nomogramok, Matematikai Lapok, **15** (1964), 114–162.
- [3] Kertész Andor, Kvázicsoportok, Mat. Lapok, **15**(1064), 87–113.

Kozma József, JATE Bolyai Intézet