Projektív metrikák euklidészi tulajdonságokkal

Kozma József

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet, Geometria Tanszék
(www.math.u-szeged.hu/tagok/kozma)

BME GEOMETRIA TANSZÉK
Budapest, 2016. április 19.

***

Az előadás a Kurusa Árpáddal végzett közös munkán alapszik

Hilbert IV. problémája, 1900

Mai nyelven azt jelenti, hogy keressük meg és osztályozzuk az az n-dimenziós $\mathbb{P}^n$ projektív tér valamely $\mathcal{D}$ részhalmazán értelmezett olyan metrikákat, melyekre teljesül a szigorú háromszög-egyenlőtlenség, vagyis nem kollineáris pontokra szigorúan szubadditív, kollineáris pontokra pedig additív. Ezeket nevezzük *projektív metrikáknak*.

Hamel (1901)

Három osztály: elliptikus, affin és hiperbolikus (maximális kiterjedés: a teljes projektív tér, annak egy affin része, valamely affin tér szigorúan konvex része).

Busemann (1961)

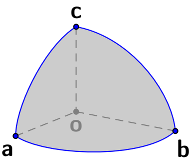
Általános konstrukció. Alap: Crofton-tétel. Görbe hossza = őt metsző egyenesek halmazának mértéke/2. Az eljárás minden projektív metrikát megad. (Pogorelov, 1973; csak síkban, Szabó (1986) minden metrika, minden dimenzió)

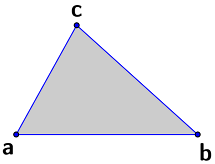
Beltrami tétele, 1865

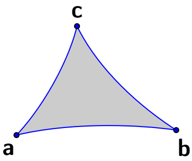
Ha egy síkbeli projektív metrika Riemann-féle, akkor konstans Gauss-görbületű. Tehát ekkor csak az elliptikus, Euklidészi vagy Bolyai-féle lehet.

Projektív metrikák és klasszikus példák

kiterjedés	Az egész $\mathbb{P}^n$	$\mathbb{P}^n \setminus \ell$	$\mathcal{H} \subsetneq \mathbb{P}^n$
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
metrika	Elliptikus metrika	Affin metrika	Hiperbolikus metrika
példaosztály		Minkowski-metrika	Hilbert-metrika
		$\cup$	$\cup$
példa	Gömbi*	Euklidészi	Bolyai







Affin osztóviszony: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\rangle \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \mathbf{c} - \mathbf{a}$

A metrikus osztóviszony

Legyen d egy projektív metrika a projektív tér $\mathcal{D}$ részhalmazán. A kollineáris $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{D}$ pontok (ilyen sorrendben vett) *metrikus osztóviszonyán* az

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{c}\rangle_d = \begin{cases} \begin{cases} -\frac{\sin d(\mathbf{a},\mathbf{c})}{\sin d(\mathbf{c},\mathbf{b})}, & \text{ha } \mathbf{c} \in \overline{\mathbf{ab}}, \\ \frac{\sin d(\mathbf{a},\mathbf{c})}{\sin d(\mathbf{c},\mathbf{b})}, & \text{egyébként}, \end{cases} & \text{ha } d \text{ elliptikus}, \\ \begin{cases} -\frac{d(\mathbf{a},\mathbf{c})}{d(\mathbf{c},\mathbf{b})}, & \text{ha } \mathbf{c} \in \overline{\mathbf{ab}}, \\ \frac{d(\mathbf{a},\mathbf{c})}{d(\mathbf{c},\mathbf{b})}, & \text{egyébként}, \end{cases} & \text{ha } d \text{ affin típusú,}^a \\ \begin{cases} -\frac{\sinh d(\mathbf{a},\mathbf{c})}{\sinh d(\mathbf{c},\mathbf{b})}, & \text{ha } \mathbf{c} \in \overline{\mathbf{ab}}, \\ \frac{\sinh d(\mathbf{a},\mathbf{c})}{\sinh d(\mathbf{c},\mathbf{b})}, & \text{egyébként}, \end{cases} & \text{ha } d \text{ hiperbolikus} \end{cases}$$

valós számot értjük.

[a] Affin típusú d-re: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{c}\rangle_d = |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{c}\rangle|$.

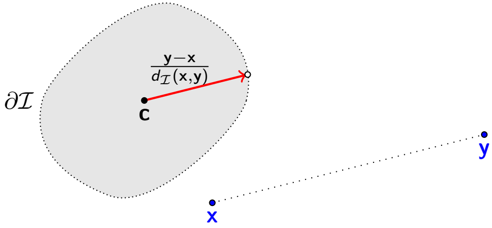
Az affin metrikák között a *Minkowski-metrikák* alkotják a legfontosabb osztályt, mert ezekre a metrikus osztóviszony és az affin osztóviszony megegyezik.

Minkowski-metrika

Legyen $\mathcal{I}$, az *indikátrix*, egy nyílt, szigorúan konvex, középpontosan szimmetrikus, korlátos tartomány az $\mathbb{R}^n$ térben. Az a $d_{\mathcal{I}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény, melyet

$$d_{\mathcal{I}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \inf\{\lambda > 0 : (\mathbf{y} - \mathbf{x})/\lambda \in \mathcal{I}\}$$

definiál, egy metrika az $\mathbb{R}^n$ téren. Ezt *Minkowski-metrikának* nevezzük.



A hiperbolikus metrikák között a Bolyai-metrikát általánosító *Hilbert-metrikák* alkotják a legfontosabb osztályt.

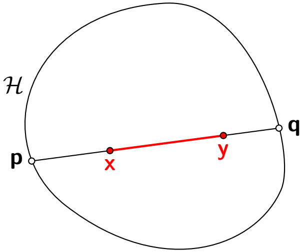
Hilbert-metrika

Legyen $\mathcal{H}$ egy nyílt, szigorúan konvex halmaz az $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ térben. Az a $d_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ függvény, melyet

$$d_{\mathcal{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 0, & \text{if } \mathbf{x} = \mathbf{y}, \\ \frac{1}{2}\left|\ln|(\mathbf{p}, \mathbf{q}; \mathbf{x}, \mathbf{y})|\right|, & \text{if } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \text{ ahol } \overline{\mathbf{pq}} = \mathcal{H} \cap \mathbf{xy}, \end{cases}$$

definiál, egy metrika. Ezt a metrikát *Hilbert-metrikának* nevezzük.

Utóbbi formulában a négy kollineáris ponthoz rendelt $(\mathbf{p}, \mathbf{q}; \mathbf{x}, \mathbf{y}) := (\mathbf{p}, \mathbf{q}; \mathbf{x})/(\mathbf{p}, \mathbf{q}; \mathbf{y})$ arány, ahol $(\mathbf{p}, \mathbf{q}; \mathbf{x})$ három kollineáris pont osztóviszonya, a *kettősviszony*. Ez projektív mennyiség.



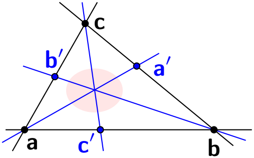
Nem elfajuló háromszög = NEH

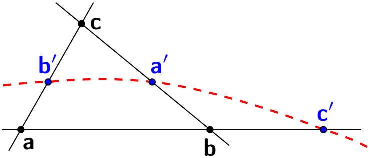
Ceva- és Menelaosz-ponthármas

Az **abc** NEH $(\mathbf{c}', \mathbf{a}', \mathbf{b}')$ *hármasa*: rendre **ab**, **bc** és **ca** egyeneseken vannak.

(p1) *Ceva-ponthármas*: ha az **aa**′, **bb**′ és **cc**′egyenesek konkurrensek, illetve

(p2) *Menelaosz-ponthármas*: ha a **c**′, **a**′, **b**′ pontok kollineárisak.





Ceva- és Menelaosz-számhármas

Egy (α, β, γ) valós számhármast

(n1) *Ceva-számhármasnak* nevezünk, ha $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = +1$, illetve

(n2) *Menelaosz-számhármasnak* nevezünk, ha $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = -1$.

Metrikus Ceva-tulajdonság

Egy **abc** NEH-ben $(\mathbf{c}', \mathbf{a}', \mathbf{b}')$ akkor és csak akkor Ceva-ponthármas, ha

$$(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}' \rangle_d, \langle \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}' \rangle_d, \langle \mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}' \rangle_d)$$

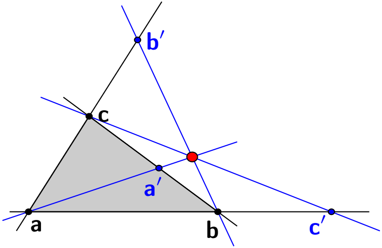
egy Ceva-számhármas.

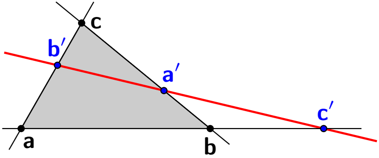
Metrikus Menelaosz-tulajdonság

Egy **abc** NEH-ben $(\mathbf{c}', \mathbf{a}', \mathbf{b}')$ akkor és csak akkor Menelaosz-ponthármas, ha

$$(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}' \rangle_d, \langle \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}' \rangle_d, \langle \mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}' \rangle_d)$$

egy Menelaosz-számhármas.





Tétel

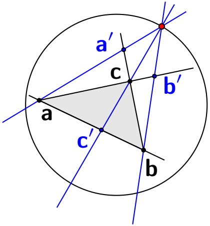
A klasszikus geometriák Ceva- és Menelaosz-tulajdonságúak.

Tétel

A Minkowski-geometriák Ceva- és Menelaosz-tulajdonságúak.

Tétel ([10] KÁ—KJ, 2014): Menelaosz típusú jellemzés

Ha az n-dimenziós $\mathcal{H}$ Hilbert-geometriában minden egyes **abc** NEH esetén *létezik egy* $(\mathbf{c}', \mathbf{a}', \mathbf{b}')$ Menelaosz-ponthármas, melyre $(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}' \rangle_{d_{\mathcal{H}}}, \langle \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}' \rangle_{d_{\mathcal{H}}}, \langle \mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}' \rangle_{d_{\mathcal{H}}})$ Menelaosz-számhármas, akkor a Hilbert-geometria Bolyai-geometria.



Tétel ([10] KÁ—KJ, 2014): Ceva típusú jellemzés

Ha az n-dimenziós $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ Hilbert-geometriában minden egyes **abc** NEH esetén *létezik egy* $(\mathbf{c}', \mathbf{a}', \mathbf{b}')$ Ceva-ponthármas, melyre $(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}' \rangle_{d_{\mathcal{H}}}, \langle \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}' \rangle_{d_{\mathcal{H}}}, \langle \mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}' \rangle_{d_{\mathcal{H}}})$ Ceva-számhármas, akkor $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ a Bolyai-geometria.

A megtalált jellemzés szükséges és elegendő feltételt ad.

A Ceva típusú jellemzés igazolásához azt kell belátni, hogy $\mathcal{H}$ egy ellipszoid.

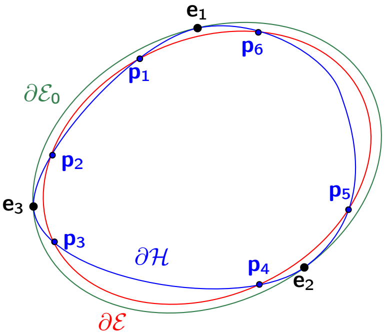
Lemma ([2] Gruber, P.M. 2007)

Az $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ térben egy korlátos, nyílt konvex $\mathcal{H}$ halmaz akkor és csak akkor ellipszoid, ha minden síkmetszete ellipszis.

Elég tehát síkban dolgozni.

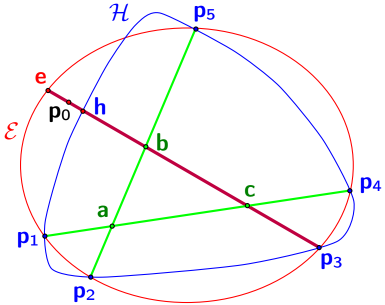
John-tétel. ([3] Gruber, P.M.—Schuster, F.E., 2005)

Legyen $\mathcal{H}$ egy korlátos, nyílt konvex halmaz az $\mathbb{R}^2$-ben. Ekkor létezik egy olyan $\mathcal{E}$ ellipszis, amely tartalmazza $\mathcal{H}$-t, és vele legalább 3 pontban érintkezik: $|\partial\mathcal{H} \cap \partial\mathcal{E}| \geq 3$.



Tegyük fel, hogy a bizonyítandóval szemben, a $\mathcal{H}$ nem ellipszis.

- $\exists$ legalább 6 különböző $\mathbf{p}_i$ $(i = 1, \ldots, 6)$ pont $\partial\mathcal{E} \cap \partial\mathcal{H}$ halmazban, továbbá $\mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$ tartalmaz nyílt halmazokat.



- $\exists\ \mathbf{p}_0 \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$: $\mathbf{p}_0 \in \mathcal{U} \subset \mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$
- $\mathbf{p}_1 \prec \mathbf{p}_2 \prec \mathbf{p}_3 \prec \mathbf{p}_4 \prec \mathbf{p}_5$
- $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_3$ elválasztja a $\mathbf{p}_5$ és $\mathbf{p}_2$, illetve a $\mathbf{p}_4$ és $\mathbf{p}_1$ pontokat $\Rightarrow \exists \mathbf{b}, \exists \mathbf{c}$
- $\mathbf{a} \notin \overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_3} \Rightarrow \mathbf{abc}$ NEH,
- $\exists(\mathbf{c}', \mathbf{b}', \mathbf{a}')$ Ceva-ponthármas: $(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}' \rangle_{d_\mathcal{H}} \langle \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}' \rangle_{d_\mathcal{H}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}' \rangle_{d_\mathcal{H}})$ Ceva-számhármas
- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}' \rangle_{d_\mathcal{E}} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}' \rangle_{d_\mathcal{H}}$
  $\langle \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}' \rangle_{d_\mathcal{E}} \neq \langle \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}' \rangle_{d_\mathcal{H}}$
  $\langle \mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}' \rangle_{d_\mathcal{E}} = \langle \mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}' \rangle_{d_\mathcal{H}}$

$$1 = \langle \mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}' \rangle_{d_\mathcal{E}} \langle \mathbf{b}\mathbf{c}\mathbf{a}' \rangle_{d_\mathcal{E}} \langle \mathbf{c}\mathbf{a}\mathbf{b}' \rangle_{d_\mathcal{E}} \neq \langle \mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}' \rangle_{d_\mathcal{H}} \langle \mathbf{b}\mathbf{c}\mathbf{a}' \rangle_{d_\mathcal{H}} \langle \mathbf{c}\mathbf{a}\mathbf{b}' \rangle_{d_\mathcal{H}} = 1$$

Talppont

Az $\mathbf{f} \in \ell$ a $\mathbf{g}$ *talppontja ℓ-en*, ha $d(\mathbf{g}, \mathbf{x}) \geq d(\mathbf{g}, \mathbf{f})$ minden $\mathbf{x} \in \ell$ esetén.

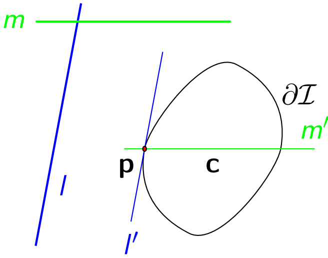
Merőlegesség [1]

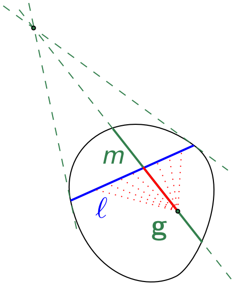
Az ℓ egyenest az $\mathbf{f}$ pontban metsző *m egyenes merőleges az ℓ egyenesre* ($m \perp_{bal} \ell$, $\ell \perp_{jobb} m$), ha $\mathbf{f}$ a $\mathbf{g}$ talppontja ℓ-en minden $\mathbf{g} \in \ell' \setminus \{\mathbf{f}\}$ pontra.

Tétel.

A két merőlegesség akkor és csak akkor egyezik meg

- Minkowski-síkban, ha az indikátrix egy Radon-görbe ([7] 4.7), illetve
- Hilbert-síkban, ha a tartomány egy ellipszis [6].





Ortocentricitás háromszögekben

Egy háromszög $\left\{ \begin{array}{c} \text{csúcsra} \\ \text{felezőpontra} \end{array} \right\}$ (bal/jobb) *ortocentrikus*, ha az oldalakra a $\left\{ \begin{array}{c} \text{szemközti csúcsból} \\ \text{felezőpontjukban} \end{array} \right\}$ állított (bal/jobb) merőlegesek projektív egyenesei konkurrensek[1].

Tétel.

Klasszikus geometriákban[2] minden háromszög

- csúcsra (= magasságok konkurrensek) és
- felezőpontra (= oldalfelező merőlegesek konkurrensek) is

ortocentrikus.

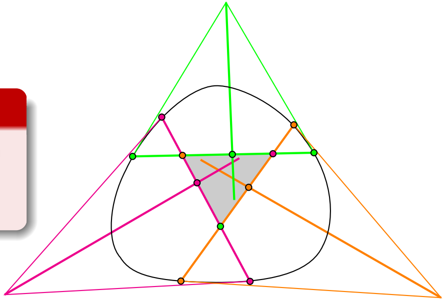
A Minkowski- és a Hilbert-féle geometriákban azonban általában nem ez a helyzet.

[1] Hilbert-geometriában tehát lehetnek aszimptotikusak vagy ultraparallelek.

[2] Ezekben a bal- és jobb-ortocentrikusság ugyanazt jelenti.

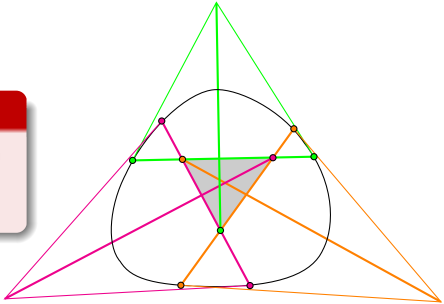
Tétel. (KÁ–KJ, 2015, [9])

Ha egy $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ Hilbert-geometriában minden NEH felezőpontra jobb-ortocentrikus, akkor a geometria Bolyai-féle.



Tétel. (KÁ–KJ, 2015, [9])

Ha egy $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ Hilbert-geometriában minden NEH csúcsra jobb-ortocentrikus, akkor a geometria Bolyai-féle.

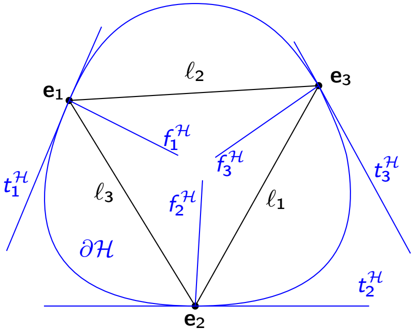


Bolyai-karakterizáció bizonyítása a felezőpontra jobb-ortocentrikussággal

Az ábrán minden megfelelő i, j, k esetén $(\ell_i, \ell_j; t_k^{\mathcal{H}}, f_k^{\mathcal{H}}) = -1$.

Ellipszis-karakterizáció. (KÁ–KJ, 2015, [9])

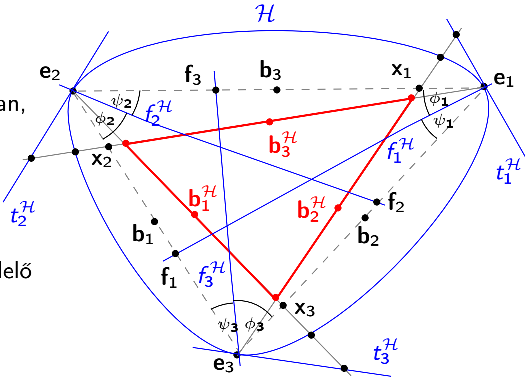
1. Ha a $\mathcal{H}$ egy ellipszis, akkor az $f_1^{\mathcal{E}}, f_2^{\mathcal{E}}, f_3^{\mathcal{E}}$ egyenesek minden $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \partial\mathcal{H}$ ponthármasra konkurrensek.
2. Ha az $f_1^{\mathcal{H}}, f_2^{\mathcal{H}}, f_3^{\mathcal{H}}$ egyenesek minden $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \partial\mathcal{H}$ ponthármasra konkurrensek, akkor $\mathcal{H}$ egy ellipszis.



E tétel duálisa a Ceva- és Menelaosz-tételeken keresztül Segre tételével ekvivalens [11].

Bolyai-karakterizáció bizonyítása a felezőpontra jobb-ortocentrikussággal

- $\mathcal{H}$ szig. konvex, sima görbe,
- $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \mathcal{H}$ tetszőleges,
- $t_i^{\mathcal{H}}$ az érintők a megfelelő pontokban,
- ℓ_i a megfelelő oldalegyenesek;
- $\mathbf{x}_i$ az $\mathbf{e}_i$-hez közeli pontok a megfelelő ℓ_i egyeneseken;
- $\mathbf{b}_i$ az euklidészi felezőpontok a megfelelő oldalakon,
- $\mathbf{b}_i^{\mathcal{H}}$ a Hilbert-felezőpontok a megfelelő oldalakon,
- minden megfelelő i, j, k esetén $f_k^{\mathcal{H}} : (\ell_i, \ell_j; t_k^{\mathcal{H}}, f_k^{\mathcal{H}}) = -1.$



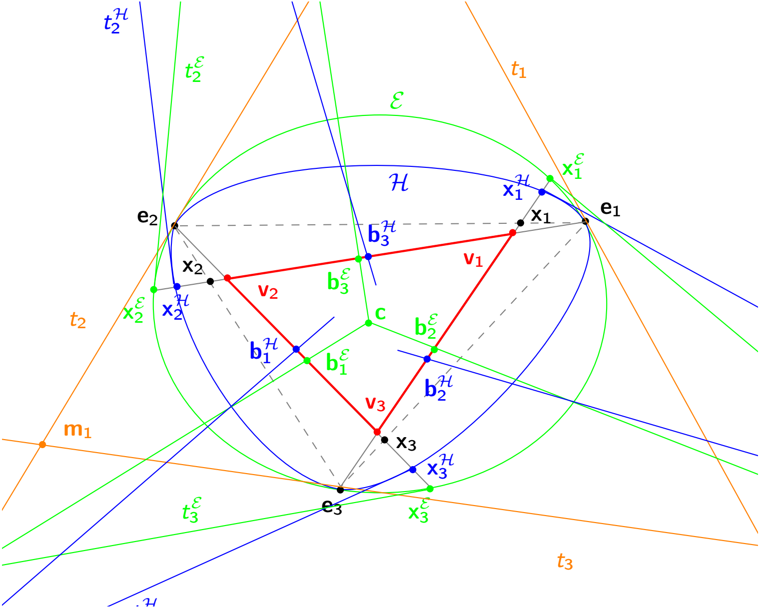
Ellipszis-karakterizáció. (KÁ–KJ, 2015, [9])

Az $f_1^{\mathcal{H}}, f_2^{\mathcal{H}}, f_3^{\mathcal{H}}$ egyenesek akkor és csak akkor konkurrensek, ha minden $\varepsilon, \delta > 0$ esetén az $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ and $\mathbf{x}_3$ pontok megválaszthatók úgy, hogy

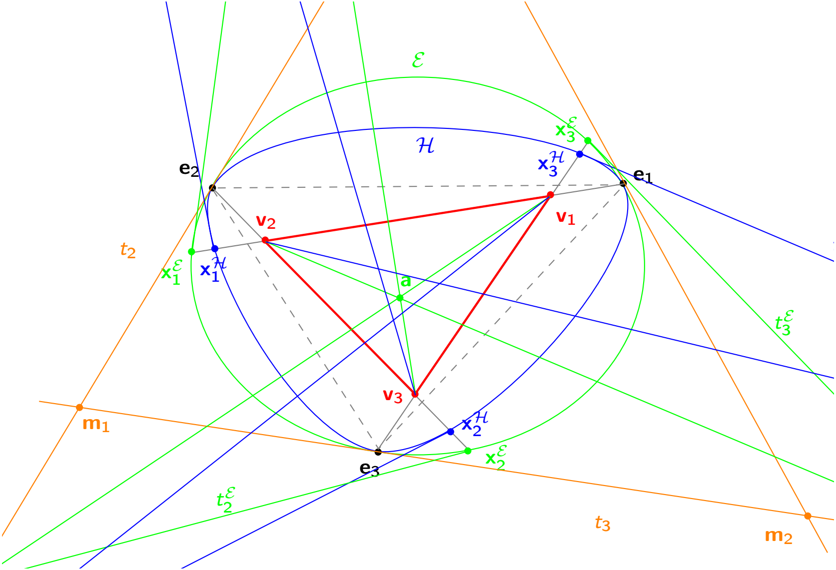
$$|\mathbf{b}_1^{\mathcal{H}} - \mathbf{b}_1| + |\mathbf{b}_2^{\mathcal{H}} - \mathbf{b}_2| + |\mathbf{b}_3^{\mathcal{H}} - \mathbf{b}_3| < \varepsilon,$$

$$|\mathbf{x}_1 - \mathbf{e}_1| + |\mathbf{x}_2 - \mathbf{e}_2| + |\mathbf{x}_3 - \mathbf{e}_3| < \delta.$$

Bolyai-karakterizáció bizonyítása a felezőpontra jobb-ortocentrikussággal



Bolyai-karakterizáció bizonyítása a csúcsra jobb-ortocentrikussággal



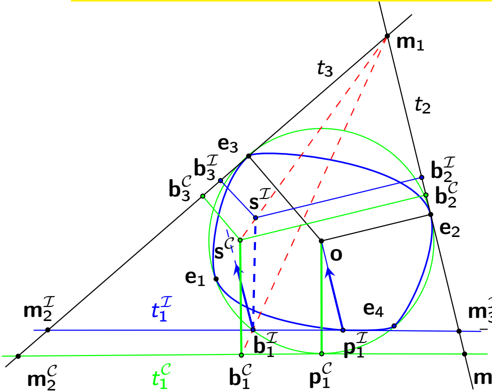
Tétel. ([8] KJ, 2015)

Ha egy Minkowski-geometriában minden NEH felezőpontra akár jobb-, akár bal-ortocentrikus, akkor a metrika euklidészi.

Euklidészi karakterizáció bizonyítása a felezőpontra jobb-ortocentrikussággal

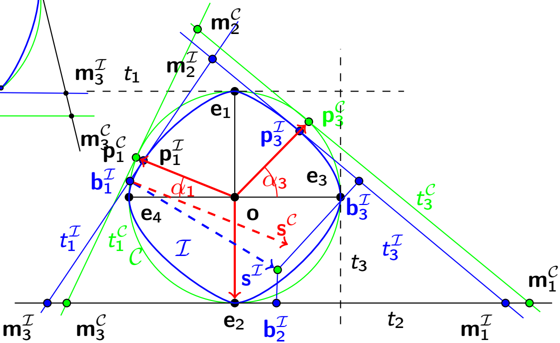
1. elegendő síkban igazolni (Gruber-lemma)
2. $(\mathcal{I}', \mathcal{E})$: (indikátrix,Löwner—John-ellipszis)
3. affinitással: $(\mathcal{I}', \mathcal{E}) \to (\mathcal{I}, \mathcal{C})$: (CSzSzKG,kör)
4. $\mathcal{I}$-érintők jobb-merőlegessége $\to$ euklidészi merőlegesség
5. $|\partial\mathcal{I} \cap \partial\mathcal{C}| \geq 5 \Rightarrow \exists$ közös érintési pontbeli érintők $t_1 \parallel t_2$, $t_3 \not\perp t_2$
6. $\mathcal{C}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_4) \neq \mathcal{I}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_4)$
7. $\exists\ \mathbf{p}_1^{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_4)\ \exists\ \mathbf{p}_1^{\mathcal{I}} \in \mathcal{I}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_4)$:
   - $\mathbf{p}_1^{\mathcal{I}} \nparallel \mathbf{p}_1^{\mathcal{C}}$, $t_1^{\mathcal{I}} \parallel t_1^{\mathcal{C}}$ (Lemma),
   - $t_1^{\mathcal{I}}, t_1^{\mathcal{C}}$ metszi t_2, t_3-t
   - $\mathbf{p}_1^{\mathcal{I}}, \mathbf{p}_1^{\mathcal{C}}$ nem merőleges t_2, t_3-ra
8. $\mathcal{C}$ érintők háromszöge: OFM-ek konkurrensek
9. $\mathcal{I}$ érintők háromszöge: OFM-ek konkurrensek
10. $|\partial\mathcal{I} \cap \partial\mathcal{C}| \ngeq 5$ (alesetekkel) ...

*Euklidészi karakterizáció bizonyítása a felezőpontra jobb-ortocentrikussággal**



ha $\mathbf{s}^{\mathcal{C}} \neq \mathbf{p}_1^{\mathcal{C}}$

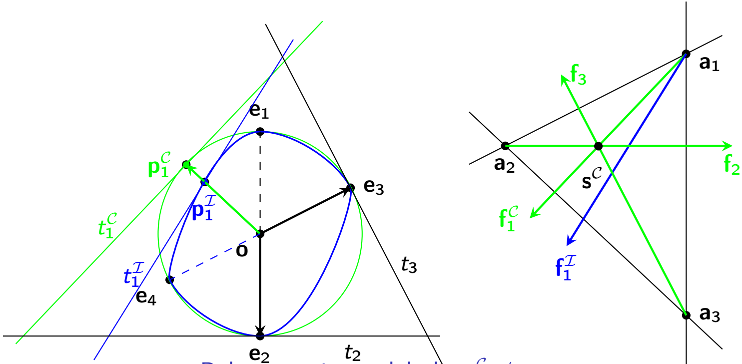
Jobb-oldalfelező merőlegesek $\longrightarrow$ ha $\mathbf{s}^{\mathcal{C}} = \mathbf{p}_1^{\mathcal{C}}$



Tétel. ([8] KJ, 2015)

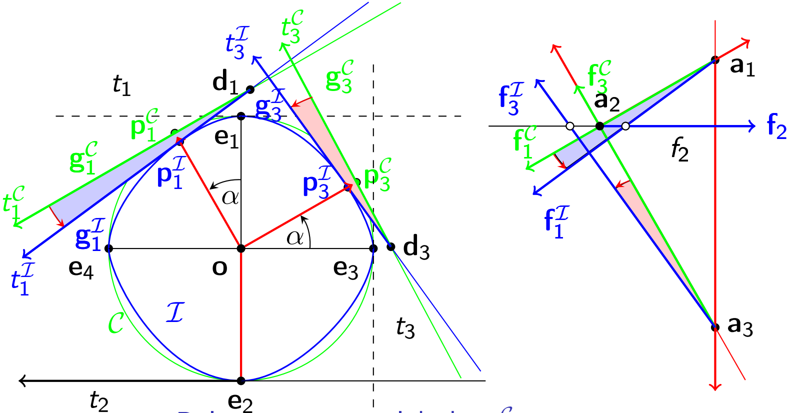
Ha egy Minkowski-geometriában minden NEH csúcsra akár jobb-, akár bal-ortocentrikus, akkor a metrika euklidészi.

Euklidészi karakterizáció bizonyításához a csúcsra bal-ortocentrikussággal



Bal-magasságvonalak, ha $\mathbf{s}^{\mathcal{C}} \neq \mathbf{a}_2$

Euklidészi karakterizáció bizonyításához a csúcsra bal-ortocentrikussággal



Bal-magasságvonalak, ha $\mathbf{s}^{\mathcal{C}} = \mathbf{a}_2$.

Köszönöm a figyelmet!

Hivatkozások I

[1] H. Busemann és P. J. Kelly, *Projective Geometry and Projective Metrics*, Academic Press, 1953.

[2] P. M. Gruber, *Convex and Discrete Geometry*, Springer-Verlag, (2007)

[3] P. M. Gruber and F. E. Schuster, An arithmetic proof of John's ellipsoid theorem, *Arch. Math.* 85 (2005), 82–88.

[4] D. Hilbert, Mathematical problems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 37(2001), 407 – 436.

[5] G. Hamel, Über die Geometrien, in denen die Graden die Kürzestens sind, *Math. Ann.* (57) (1903), 231-264.

[6] P. J. Kelly and L. J. Paige, Simmetric parpendicularity in Hilbert geometry, *Pacific. J. Math.* 2 (1952), 319–322.

[7] A. C. Thompson, *Minkowski Geometry*, Cambridge University Press, (1996)

[8] J. Kozma, Characterization of Euclidean Geometry by existence of circumcenter or othocenter, *Acta SCI. Math. Szeged* 81:3-4(2015), 685-698. (10.14232/actasm-015-518-0)

Hivatkozások II

[9] J. Kozma, Á. Kurusa, Ceva's and Menelaus' theorems characterize the hyperbolic geometry among Hilbert geometries, *Journal of Geometry* 10:(10) Paper 10.1007/s00022-014-0258-7. (2015)

[10] J. Kozma, Á. Kurusa, Hyperbolic is the only Hilbert geometry having circumcenter or orthocenter generally, *Beiträge zur Algebra und Geometrie* 10:(10) Paper 10.1007/s13366-014-0233-3. (2014)

[11] Kurusa Á. és Kozma J., Háromszögek perspektivitása, Polygon (Szeged), benyújtva.

[12] B. Segre, Ovals in a finite projective plane, *Can. J. Math.* 7 (1955), 414?416. doi:10.4153/CJM-1955-045-x

[13] Z. I. Szabó, Hilbert's fourth problem I, Adv. Math. 59 (1986), 185-301.

Az előadás felépítése

1. Projektív metrikák
   - Típusok és jellemzők
   - Minkowski-metrikák
   - Hilbert-metrikák
2. Menelaosz és Ceva típusú karakterizáció
   - Menelaosz- és Ceva-tulajdonság
   - Menelaosz és Ceva típusú projektív metrikák
   - A Ceva típusú karakterizáció igazolása
3. Ortocentrikussági karakterizáció
   - Ortocentrikus háromszögek
   - Bolyai-metrika karakterizációja
   - Euklidészi metrika karakterizációja

Absztrakt

Olyan projektív metrikák jellemzését vizsgáljuk, amelyek az euklidészi geometriából jól ismert bizonyos geometriai konfigurációkkal kapcsolatosak.
Ebben a kontextusban jellemző eredmények:

- egy Hilbert-geometria akkor és csak akkor hiperbolikus, ha minden háromszögre teljesül a Ceva-tétel vagy a Menelaosz-tétel;
- egy Hilbert-geometria akkor és csak akkor hiperbolikus, ha tetszőleges háromszög magasságvonalai konkurrensek;
- egy Minkowski-geometria akkor és csak akkor euklideszi, ha tetszőleges háromszögnek van ekvidisztáns centruma.

Eredményeink bármely dimenzió esetén érvényesek.
E vizsgálatokban fontos szerepet játszanak a Löwner–John-ellipszoidok, minthogy a bizonyítások a vizsgált metrikáknak a klasszikus metrikákkal való összehasonlításával történnek.
Az előadás a Kurusa Árpáddal folytatott közös munkán alapszik.