

*POLYGON VERSENY MATEMATIKA SZAKOS TANÁRJELÖLT*

*HALLGATÓK SZÁMÁRA 2002. ápr.*

*Kosztolányi József - Pintér Lajos*

Hatodik alkalommal rendeztük meg ezt a fajta versenyt. Azt gondoljuk, hogy az itt szereplő feladatok közel állnak a tanári munkához, ezért tanulságosak lehetnek. Jó feladatokat nem könnyű találni. Örömmel vesszük, ha valaki feladatot javasol, és még nagyobb öröm, ha az kitűzhető is. E félévi feladataink a következők:

1. Megrajzoltuk az  $y = x^2$  parabola ívet a  $[-2, 2]$  intervallumon, és egy olyan kört, amelyiknek az  $x = 0$  pontban az érintője ugyanaz, mint a paraboláé, tehát az  $x$  tengely, továbbá a kör éppen úgy, mint a parabola ív az  $x$  tengely fölött van. Legfeljebb mekkora lehet a kör sugara, ha a körnek és a parabola ívnek egyetlen közös pontja van az  $x = 0$ .

a) Gabi így kezdi a feladat megoldását: Ha a kör "jó", akkor középpontja az  $y$  tengelyen kell legyen:  $(0, r)$ . A parabola bármely  $(x, x^2)$  pontja távolabb van  $(0, r)$ -től, mint  $r$ , kivéve a  $(0, 0)$  pontot, ami éppen  $r$  távolságra van.

Hogy lehet folytatni ezt a megoldást?

b) Tóni azt mondja: Olyan  $r$ -et keresek ( $r$  a kör sugara), hogy az  $y = x^2$ ,  $(x - 0)^2 + (y - r)^2 = r^2$  egyenletrendszernek egyetlen megoldása legyen, és az alkalmas  $r$ -ek közül veszem a legnagyobbat.

Felhasználható-e ez az elindulás?

2. Néhány évvel ezelőtt egy középiskolai matematika versenyen tűzték ki a következő példát: Igazoljuk, hogy bármely háromszögben található két olyan oldal, melyek hosszai különbségének abszolút értéke kisebb, mint a háromszög területének hatodrésze.

A versenyről szóló jelentésben ezt a megoldást találjuk: "Tegyük fel, hogy  $a \leq b \leq c$  és  $b - a \leq c - b$ . Ebből

$$2b \leq a + c < a + a + b = 2a + b \Rightarrow b < 2a.$$

Ezért

$$5b = 3b + 2b < 6a + a + c = 7a + c,$$

azaz

$$6b - 6a < a + b + c.$$

Ha  $c - b < b - a$  hasonlóan számolhatunk.”

Egy tanuló azt kérdezi: Tényleg ”hasonlóan számolhatunk”? Ön mit válaszolna a tanulónak?

3. Egy példatárban ezt olvassuk: ”A rajzból leolvasható, hogy a zárt félkörlap lefedhető olyan zárt szakaszokkal, amelyek között nincs két vagy több olyan, amelyeknek közös pontja lenne.”

Egy tanuló azt mondja, hogy neki ez egyáltalán nem nyilvánvaló. Ön hogyan magyarázná meg a tanulónak, hogy hogyan is húztuk ezeket a szakaszokat?

4.  $D$  és  $E$  harmadolják az  $ABC$  háromszög  $BC$  oldalát. Lehetséges-e, hogy  $AD$  és  $AE$  az  $A$ -nál levő szöveget harmadolja?

5. Münchhausen tanár úr azt mondja, hogy van egy olyan kilenctagú számsorozata:  $a_1, a_2, \dots, a_9$ , amelyikből nem lehet kiválasztani sem olyan négyet  $a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, a_{k_4}$ , hogy  $k_1 < k_2 < k_3 < k_4$  és  $a_{k_1} \geq a_{k_2} \geq a_{k_3} \geq a_{k_4}$ , sem pedig olyan négyet  $a_{m_1}, a_{m_2}, a_{m_3}, a_{m_4}$ , hogy  $m_1 < m_2 < m_3 < m_4$  és  $a_{m_1} \leq a_{m_2} \leq a_{m_3} \leq a_{m_4}$ . Elhisszük-e amit Münchhausen tanár úr mond?

6. Seholsincs szigetén háromfajta ember él: az igazmondók mindig igazat mondanak, a hazugmondók mindig hazudnak, és a normálisok, akik véletlenszerűen hol igazat mondanak, hol hazudnak. A törvény szerint igazmondó csak hazugmondóval, hazugmondó csak

igazmondóval léphet házasságra.

Öt beszélgetést hallunk. Az a kérdés, hogy el tudjuk-e dönteni, hogy az egyes esetekben a beszélgetők igazmondók, hazugmondók, vagy normálisok.

a) Kisné: A férjem nem normális;

Kis: A feleségem nem normális.

b) Nagyné: A férjem normális;

Nagy: A feleségem normális.

c) Magyarné: A férjem hazugmondó;

Magyar: A feleségem hazugmondó.

d) Németné: A férjem igazmondó;

Német: A feleségem igazmondó.

e) Kovácsné: Szabó úr igazmondó;

Kovács: Szabó tényleg igazmondó;

Szabóné: A férjem (Szabó) igazmondó.

A verseny eredménye a következő:

I.díj: Kopasz Katalin,

II. díj: Jenei Árpád, Szigeti Tamás,

III. díj: Barák Gábor, Borókay Eszter, Szigetiné Hornung Krisztina.

A felsorolt hallgatók a Polygon Kiadó egy-egy könyvét kapták jutalmul.

Kosztolányi József - Pintér Lajos

Bolyai Intézet

6720, Szeged, Aradi Vértanúk tere 1.