5. POLYGON VERSENY MATEMATIKA SZAKOS TANÁRJELÖLT HALLGATÓK SZÁMÁRA 2001. dec.

Kosztolányi József - Pintér Lajos

Ezt a versenyt félévenként rendezzük olyan érdeklődő hallgatók számára, akik tanítani szeretnének. Ez az ötödik félév, így lassan hagyománya is kezd a versenynek kialakulni, ami nagyon fontos dolog. A félév során gyűjtjük az olyan példákat, amik a tanári munka során érdekesek lehetnek. Abban bízunk, hogy feladataink is egyfajta előkészületet jelentenek a későbbi tanári munkára. Talán hasznos a feladatok óráinkon való utólagos megbeszélése is. Ebben a félévben a következő feladatokat tűztük ki.

1. Észrevesszük, hogy

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}, \quad 4^2+3^2=5^2;$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}, \quad 8^2+15^2=17^2;$$
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{7}=\frac{12}{35}, \quad 12^2+35^2=37^2.$$

Fogalmazzunk meg ezek alapján egy sejtést és bizonyítsuk azt be.

2. Mutassuk meg, hogy $x, y, z \in R$ esetén

a) $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \geq 0$;

b)$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \geq \frac{3}{4}(x-y)^2$;

c) Jancsi miután igazolta a) és b)-t azt mondja: "Ez a b) állítás nem igazán "szép". Kerestem egy ehhez hasonló, szimmetrikus egyenlőtlenséget a következő módon: Mint b)-ben, az is igaz, hogy

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \geq \frac{3}{4}(y-z)^2;$$

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \geq \frac{3}{4}(z-x)^2.$$

Összeadva három egyenlőtlenséget és 3-mal osztva:

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \geq \frac{1}{4}\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right).$$

Most itt van két állítás:

A: Ha $x, y, z \in R$, akkor

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq \frac{3}{4}(x-y)^2;$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq \frac{3}{4}(y-z)^2;$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq \frac{3}{4}(z-x)^2.$$

B: Ha $x, y, z \in R$, akkor

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq \frac{1}{4}\left((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right).$$

Következik-e A-ból B, és B-ből A?"

Válaszoljunk a)-ra, b)-re és a c) végén feltett kérdésre.

3. Egy feladatgyűjteményben található a következő példa: A 4×4-es táblázatból kihagyunk két 1×1-es mezőt úgy, hogy a maradék dominókkal lefedhető. Melyik mezőket hagyhattuk ki?

Egy megoldás kezdete: Tekintsünk előbb a 4×4-es helyett 2×2-es táblázatot. Most jól látható, hogy ha egymás melletti, vagy egymás fölötti mezőket hagyunk ki, akkor a maradék dominókkal lefedhető, ha nem ilyet hagyunk ki, akkor nem fedhető le a maradék dominókkal. Ugyanezt másképpen is kimondhatjuk, ha az ábrát "sakktáblaszerűen" kifestjük, akkor két különböző színű mezőt kihagyva a maradék dominókkal lefedhető, azonos színű mezőket kihagyva a maradék nem fedhető le dominókkal. Hogyan folytatnánk a feladat megoldását?

Az eredmény megfogalmazása szempontjából számít-e, hogy 9., vagy 12. osztályban csináljuk a példát?

Milyen házi feladatot tűznénk ki?

4. Egy tanuló a következőt mondja: "Valahol a következő példát olvastam: Mutassuk meg, hogy ha x és y olyan egész számok, hogy $x^2 + y^2 + 1 - 2xy = 0$, akkor x nem lehet páros szám. Megoldásom a következő: Tegyük fel, hogy x páros szám, akkor $4|x^2$ és $4|2xy$, de akkor $4|y^2 + 1$ is igaz kell legyen. $y^2 + 1$ azonban csak úgy lesz páros, ha y páratlan. Ha $y = 2k + 1$, akkor $y^2 + 1 = (2k+1)^2 + 1 = 4k(k+1) + 2$. Ez a szám ugyan páros, de 4-gyel nem osztható, ellentmondásra jutottunk.

A példában kitűzött feladatra válaszoltam, de nem hagytam abba, most feltettem, hogy x páratlan szám $x = 2k + 1$. Ekkor $x^2 + 1 = y(2x - y)$. Itt $x^2 + 1 = (2k + 1)^2 + 1 = 4k(k + 1) + 2$, azaz páros, de 4-gyel nem osztható. Az $y(2x - y)$ páratlan, ha y páratlan, és 4-gyel is osztható páros szám, ha y páros, ezért egyik eset sem lehetséges.

Összegezve azt kaptam, hogy x nem lehet sem páros, sem páratlan, hol hibáztam?"

Ön, mint a tanuló tanára, mit mondana neki?

5. Adott tíz $(a_1, b_1, c_1), \cdots, (a_{10}, b_{10}, c_{10})$ pozitív egész számokból álló számhármas. Mindegyik számhármasban legalább egy szám páros. Melyik az a legnagyobb K szám, amelyikre igaz, hogy az $(a_1, \cdots, a_{10})$, $(b_1, \cdots, b_{10})$, $(c_1, \cdots, c_{10})$ közül legalább egyikben K számú páros szám van?

Megoldás. A 10 számhármasban legalább 10 páros szám van. Igy a három számtizesben összesen legalább tíz páros szám van, azaz legalább egyik tizesben legalább négy páros szám. $K \geq 4$, és könnyen tudunk olyan példát készíteni, hogy $K = 4$ legyen.

A feladat az, hogy hogyan tudnánk általánosítani a feladatot.

6. Állapítsuk meg, hogy a feltett kérdésre a felsorolt válaszok közül melyik jó és melyik rossz és miért?

Ha a, b, c nullától különböző számok, akkor az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei:

$$(1) \quad \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}; \ (2) \quad \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}; \ (3) \quad \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

$$(4) \quad \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}; \ (5) \quad \text{egyik sem ezek közül.}$$

A verseny díjazottjai, akik a Polygon Kiadó egy-egy általuk választott könyvét kapták, a következők:

I. díj: Kis-Tóth Attila V. évf., Szigeti Tamás II. évf.;

II. díj: Szigetiné Hornung Krisztina V. évf., Jenei Árpád IV. évf.;

III. díj: Borókay Eszter IV. évf., Hauberger Anita IV. évf., Kopasz Katalin IV. évf.;

dícséret: Cziráki György IV. évf., Kuba Péter V. évf., Mester Lívia III. évf..

Kosztolányi József - Pintér Lajos

Bolyai Intézet

6720, Szeged, Aradi Vértanúk tere 1.