Halmazelmélet és matematikai logika

Definíciók

1. Definiálja a megszámlálhatóan végtelen halmaz fogalmát.
2. Definiálja a megszámlálható halmaz fogalmát.
3. Definiálja a sorozatba rendezhető halmaz fogalmát.
4. Definiálja az algebrai szám fogalmát.
5. Definiálja a halmazok ekvivalenciájának fogalmát.
6. Definiálja, hogy mikor mondjuk azt, hogy két halmaz számossága megegyezik.
7. Definiálja a kontinuum-számosságú halmaz fogalmát.
8. Definiálja a $\kappa \leq \lambda$ relációt számosságokra.
9. Definiálja egy halmaz hatványhalmazának fogalmát.
10. Definiálja a $\kappa + \lambda$ összeget számosságokra.
11. Definiálja a $\kappa \cdot \lambda$ szorzatot számosságokra.
12. Definiálja a κ^λ hatványt számosságokra.
13. Definiálja a részbenrendezett halmaz fogalmát.
14. Definiálja a rendezett halmaz fogalmát.
15. Definiálja a részbenrendezett halmazok közötti rendezéstartó leképezés fogalmát.
16. Definiálja a részbenrendezett halmazok közötti izomorfizmus fogalmát.
17. Definiálja a rendtípus fogalmát.
18. Definiálja egy rendtípus számosságának a fogalmát.
19. Definiálja a legkisebb elem illetve a minimális elem fogalmát részbenrendezett halmazokban.
20. Definiálja egy részhalmaz legnagyobb alsó korlátjának fogalmát részbenrendezett halmazokban.
21. Definiálja a lánc fogalmát részbenrendezett halmazokban.
22. Definiálja a jólrendezett halmaz fogalmát.
23. Definiálja a rendszám fogalmát.
24. Definiálja a kezdőszelet fogalmát.
25. Definiálja az $\alpha < \beta$ relációt rendszámokra.
26. Definiálja a rendezett pár fogalmát.
27. Definiálja a véges halmaz fogalmát.
28. Definiálja a $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ logikai műveleteket.
29. Definiálja az ítéletkalkulusbeli formula fogalmát.
30. Definiálja a tautológia, kontradikció és kontingens formula fogalmát az ítéletkalkulusban.
31. Definiálja a formulák ekvivalenciájának fogalmát ítéletkalkulusbeli formulákra.
32. Definiálja a teljes diszjunktív normálalak fogalmát.
33. Definiálja a Boole-függvény fogalmát.
34. Definiálja a teljes függvényrendszer fogalmát.
35. Definiálja a logikai következmény fogalmát az ítéletkalkulusban.
36. Definiálja a levezethetőség fogalmát az ítéletkalkulusban.
37. Definiálja a konzisztens formulahalmaz fogalmát az ítéletkalkulusban.
38. Definiálja a kifejezés és formula fogalmát elsőrendű nyelvekben.

39. Definiálja a struktúra fogalmát.
40. Definiálja elsőrendű nyelvek kifejezéseinek és formuláinak interpretáltját egy adott struktúrában.
41. Definiálja a logikai következmény fogalmát elsőrendű nyelvekben.

Tételek, alkalmazások

42. Ismertesse Galilei paradoxonát.
43. Ismertesse a Russell-féle paradoxont.
44. Ismertesse az összes halmazok halmazának paradoxonát.
45. Ismertesse az összes számosságok halmazának paradoxonát.
46. Ismertesse a Burali–Forti-féle paradoxont.
47. Mondja ki a Cantor–Bernstein–Schröder-féle ekvivalenciatételt.
48. Mondja ki a számosság-aritmetika alaptételét.
49. Mondja ki a kontinuum-hipotézist.
50. Ismertesse Gödel és Cohen eredményeit a kontinuum-hipotézissel kapcsolatban.
51. Mondja ki az általánosított kontinuum-hipotézist.
52. Mondja ki Zermelo jólrendezési tételét.
53. Mondja ki a Zorn-lemmát.
54. Mondja ki a kiválasztási axiómát.
55. Mondja ki a dedukció-tételt.
56. Mondja ki az ítéletkalkulus teljességi tételét.
57. Mondja ki az ítéletkalkulus kompaktsági tételét.
58. Mondja ki az elsőrendű logika teljességi tételét.
59. Mondja ki az elsőrendű logika kompaktsági tételét.
60. Mondja ki Gödel nemteljességi tételét.

A megértést ellenőrző kérdések, feladatok

61. Adja meg az egész számok halmazának egy sorozatbarendezését.
62. Adja meg a racionális számok halmazának egy sorozatbarendezését.
63. Adjunk meg bijekciót a valós számok halmaza és a $(0, \infty)$ intervallum pontjai között.
64. Adjunk meg bijekciót a $[0, \infty)$ és a $(0, \infty)$ intervallumok pontjai között.
65. Az alábbi állítások közül melyik igaz tetszőleges A és B halmazok esetén?
    (a) Ha A megszámlálható és $B \subseteq A$, akkor B is megszámlálható.
    (b) Ha A megszámlálható és $A \subseteq B$, akkor B is megszámlálható.
66. Tekintsük az összes $a + b\sqrt{2}$ alakú valós szám halmazát, ahol a és b egész számok. Mennyi a számossága ennek a halmaznak?
67. Tekintsük az összes (a, b) nyílt intervallum halmazát, ahol $a < b$ racionális számok. Mennyi a számossága ennek a halmaznak?
68. Tekintsük az összes síkbeli egyenes halmazát. Mennyi a számossága ennek a halmaznak?
69. Tekintsük az összes síkbeli kör halmazát. Mennyi a számossága ennek a halmaznak?
70. Mivel egyenlő az $1 + 2 + 3 + \cdots$ összeg?

71. Tegyük fel, hogy az $A_1, A_2, A_3, \ldots$ halmazok mindegyike kontinuum-számosságú. Mennyi a számossága az $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ halmaznak?
72. Mennyi a számossága az algebrai számok halmazának?
73. Mennyi a számossága az irracionális számok halmazának?
74. Mennyi a számossága a transzcendens számok halmazának?
75. Igazolja, hogy a valós számok halmaza nem megszámlálható.
76. Mennyi a számossága az R^n euklideszi térnek?
77. Van-e olyan valós számokból álló halmaz, amely nem megszámlálható és nem is kontinuum-számosságú?
78. Legyen κ tetszőleges számosság. Adjunk meg olyan számosságot, amely κ-nál nagyobb.
79. Legyen κ tetszőleges számosság. Adjunk meg végtelen sok olyan számosságot, amelyek mindegyike κ-nál nagyobb.
80. Mennyi a számossága a véges 0-1 sorozatok halmazának?
81. Mennyi a számossága a racionális számokból álló véges sorozatok halmazának?
82. Mennyi a számossága a végtelen 0-1 sorozatok halmazának?
83. Mennyi a számossága a racionális számokból álló végtelen sorozatok halmazának?
84. Mennyi a számossága a végtelen valós számsorozatok halmazának?
85. A következő számosságok közül melyik egyezik meg az összes valós függvények halmazának számosságával: $c \cdot c$, 2^c, $c^{\aleph_0}$, $(\aleph_0)^c$?
86. Mutassunk példát olyan részbenrendezett halmazra, amely nem rendezett.
87. Sorolja fel a $(p \to (\neg q)) \vee ((\neg r) \to q)$ formula összes részformuláját.
88. Rajzolja fel az alábbi formulák grafikonját:
    (a) $\neg((p \vee q) \wedge (\neg(q \wedge r)))$;
    (b) $(p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r)))$;
    (c) $p \to (\neg q \vee (\neg q \to \neg p))$.
89. Döntsük el, hogy tautológiák-e a következő formulák:
    (a) $(p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r)))$;
    (b) $(p \to (q \to r)) \leftrightarrow ((p \to q) \to (p \to r))$;
    (c) $p \to (\neg q \vee (\neg q \to \neg p))$;
    (d) $((p \wedge q) \to r) \leftrightarrow ((p \to r) \vee (q \to r))$.
90. Melyek ekvivalensek az alábbi formulapárok közül?
    (a) $\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)$ és $p \to (p \wedge \neg(q \vee r))$;
    (b) $(\neg p \wedge q) \vee (p \leftrightarrow q)$ és $p \to q$;
    (c) $\neg(p \to (q \wedge r))$ és $(p \to q) \to (p \wedge \neg r)$.
91. Igaz-e, hogy $\Gamma \models \phi$, ha
    (a) $\Gamma = \{(\neg p \vee q), (r \to \neg q)\}$ és $\phi = (p \to \neg r)$;
    (b) $\Gamma = \{(p \to \neg q), (q \wedge r) \to p\}$ és $\phi = (r \to \neg p)$;
    (c) $\Gamma = \{((p \wedge q) \leftrightarrow r), (r \leftrightarrow s), (\neg(p \to s)\}$ és $\phi = (q \to s)$.
92. Készítsen olyan háromváltozós ítéletkalkulusbeli formulát, amely akkor és csak akkor igaz, ha
    (a) a benne előforduló változók közül legalább kettő igaz;
    (b) a benne előforduló változók közül páros sok igaz;
    (c) a benne előforduló változók közül pontosan egy igaz.

93. Keressünk olyan teljes diszjunktív normálformát, amely ekvivalens a következő formulával:
    (a) $(p \to r) \to (q \wedge r)$;
    (b) $(p \vee q) \to (p \wedge r)$;
    (c) $(\neg p \wedge q) \vee \neg(p \to r)$.
94. Adjunk meg olyan formulát, amely ekvivalens az alábbi formulával és amelyben csak a $\neg$ és $\to$ szimbólumok szerepelnek:
    (a) $(p \vee q) \wedge r$;
    (b) $p \leftrightarrow (q \vee \neg r)$;
    (c) $p \wedge q \wedge r$.
95. Adja meg a $(p \to p)$ formula egy levezetését.
96. Igazolja, hogy $\Gamma \vdash \phi$, ha
    (a) $\Gamma = \{\alpha\}$ és $\phi = (\beta \to \alpha)$;
    (b) $\Gamma = \{(\neg\alpha \to \neg\beta),\ \beta\}$ és $\phi = \alpha$;
    (c) $\Gamma = \{(\alpha \to \beta),\ (\beta \to \gamma)\}$ és $\phi = (\alpha \to \gamma)$.
97. Melyek konzisztensek az alábbi formulahalmazok közül?
    (a) $\Gamma_1 = \{(p \to q),\ (\neg q \vee r),\ (r \to \neg p)\}$;
    (b) $\Gamma_2 = \{(p \wedge (\neg q \vee r)),\ (r \wedge (\neg p \vee q)),\ (\neg q \to \neg p)\}$;
    (c) $\Gamma_3 = \{(p \vee \neg q),\ (q \vee \neg r),\ (r \vee \neg p)\}$.
98. Egy elsőrendű nyelvben nincs függvényjel. Adja meg a nyelv összes kifejezését.
99. Egy elsőrendű nyelvben egyetlen egyváltozós függvényjel van: f. Adja meg ennek a nyelvnek az összes kifejezését.
100. Egy elsőrendű nyelvben kétfüggvényjel van: f és g, amelyekre $\sharp f = 1$ és $\sharp g = 2$. Adjon meg olyan kifejezést, amelyben mindkét függvényjel kétszer szerepel.
101. Legyen $L = \{c, f, r\}$, ahol c konstansjel, f egyváltozós függvényjel és r kétváltozós relációjel. Adjunk meg ilyen típusú struktúrát a valós számok halmazán illetve a ma élő emberek halmazán.
102. Alkalmas interpretációk választásával igazolja, hogy az alábbi formulák lehetnek igazak is és hamisak is:
    (a) $(\exists x(P(x) \wedge Q(x))) \leftrightarrow (\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x))$;
    (b) $(\forall x(P(x) \vee Q(x))) \leftrightarrow (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$;
    (c) $\forall y \exists x R(x, y) \to \exists x \forall y R(x, y)$.
103. Igazolja, hogy $\Gamma \models \phi$, ha
    (a) $\Gamma = \{\forall x(P(x) \to Q(x)), P(c)\}$ és $\phi = Q(c)$;
    (b) $\Gamma = \{\forall x(P(x) \to Q(x)),\ \forall x(Q(x) \to R(x))\}$ és $\phi = \forall x(P(x) \to R(x))$;
    (c) $\Gamma = \{\forall x P(x),\ \exists x Q(x)\}$ és $\phi = \exists x(P(x) \wedge Q(x))$.