Geometria

A megértést ellenőrző kérdések, feladatok

1. Válasszuk ki az egységkocka három kitérő élét. Mekkora területű az ezen élek felezőpontjai által meghatározott háromszög?
2. Számítsa ki $\sin(\arctan 2)$ pontos értékét.
3. Számítsa ki $\cot\left(\arcsin \frac{1}{5}\right)$ pontos értékét.
4. Adott egy ABC háromszög oldalaira kifelé rajzolt ABC', BCA' és CAB' szabályos háromszög A', B' és C' csúcsa. Szerkessze meg az ABC háromszöget.
5. Adott a síkon az $F_1, F_2, \ldots, F_n$ pont (n tetszőleges páratlan szám). Szerkessze meg azt az $A_1A_2\ldots A_n$ sokszöget, amelynek ezek a pontok az egymás után következő oldalfelező pontjai.
6. Szerkessze meg a háromszöget, ha adott a három súlyvonala.
7. Szerkesszen kört, amely érint két adott, egymást metsző egyenest és átmegy egy adott ponton.
8. Írjunk egy adott ABC háromszögbe olyan háromszöget, melynek oldalai adott l_1, l_2 és l_3 egyenessel párhuzamosak.
9. Milyen transzformáció egy szabályos háromszög a, b, c oldalegyenesére vonatkozó σ_a, σ_b, σ_c tükrözések $\sigma_a\sigma_b\sigma_c$ szorzata?
10. Egy háromszög A, B, C csúcsa körül rendre 2α, 2β, 2γ szögű forgatást végzünk (α, β, γ a háromszög szögei). Milyen transzformáció a három forgatás szorzata?
11. Adott a térben az O ponton átmenő páronként egymásra merőleges a, b, c egyenes. Az ezekre az egyenesekre vonatkozó tükrözéseket jelölje ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c. Milyen transzformáció a $\varrho_a\varrho_b\varrho_c$ szorzat?
12. Adott a térben egy közös egyenesre illeszkedő öt sík. Milyen transzformáció az ezekre vonatkozó öt tükrözés szorzata?
13. Egy ABC háromszög beírt körének az a, b, c oldalakon levő érintési pontjait jelölje E_a, E_b, E_c. Igaz-e, hogy az AE_a, BE_b, CE_c egyenesek egy pontban metszik egymást?
14. Egy háromszöget tükrözünk a súlypontjára. Hogyan aránylik a két háromszög metszetének területe az eredeti háromszög területéhez?
15. Egy tetraéder csúcsai $A(0,1,0)$, $B(2,1,0)$, $C(3,0,0)$ és $D(0,1,-4)$. Mekkora a súlypontját az A csúccsal összekötő szakasz hossza?
16. Az $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ vektorok végpontjai által meghatározott sík milyen arányban osztja fel az ezen vektorok által kifeszített parallelepipedon O csúcsból induló testátlóját?
17. Bontsa fel az $\mathbf{a}(4,2,-3)$ vektort a $\mathbf{b}(5,4,7)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges összetevőre.
18. Adott $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok esetén mivel egyenlő az $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-\mathbf{b})$ szorzat és mi a geometriai tartalma?
19. Számítsa ki az $A(0,1,0)$, $B(2,1,0)$, $C(3,2,1)$, $D(1,2,1)$ és $E(2,0,3)$ pontok konvex burkának térfogatát.
20. Hányszorosa a $2\mathbf{a}+3\mathbf{b}+4\mathbf{c}$, $\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $2\mathbf{a}+4\mathbf{b}-\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített parallelepipedon térfogata az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített parallelepipedon térfogatának?
21. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorokra mivel egyenlő az $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{a}+(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b}$ összeg?

22. Mekkora szög alatt látszik az AB szakasz a C pontból, ha $A(1,2,4)$, $B(11,3,7)$ és $C(-1,10,11)$?
23. Az $\mathbf{a}(6,2,-3)$, $\mathbf{b}(-3,6,-2)$ és $\mathbf{c}$ vektorok egy kockát feszítenek ki. Határozza meg a $\mathbf{c}$ vektor koordinátáit.
24. Számítsa ki az $x-2y+4z=10$ és $x-2y+4z=31$ egyenletű síkok távolságát.
25. Adja meg annak az egyenesnek egy paraméterezését, amelyre illeszkedik a $P(2,-1,3)$ pont és merőleges a $(2t-3,-t+1,5t-7)$ és $(3t+1,t,2t)$ paraméterezésű egyenesek mindegyikére.
26. Számítsa ki az $\frac{x+2}{3}=\frac{2y}{3}=\frac{z+1}{5}$ és $\frac{x-3}{3}=-\frac{y+3}{2}=\frac{z}{5}$ egyenesek hajlásszögét.
27. Számítsa ki a $P(10,11,12)$ pontnak az $x+2y+z=7$ egyenletű síkra vonatkozó merőleges vetületét.
28. Elválasztja-e a $2x+2y-2z-2=0$ egyenletű sík az $A(2,1,1)$ és a $B(2,1,3)$ pontot?
29. Az $A(0,1,0)$, $B(2,0,0)$, $C(3,1,1)$ és D pontok konvex burkának térfogata 4. Írja fel D mértani helyének egyenletét.
30. Számítsa ki annak a tetraédernek a térfogatát, amelyet a koordinátasíkok és a $2x+3y+6z-18=0$ egyenletű sík határol.
31. Írja fel az $(x-2)^2+(y+1)^2+z^2=25$ egyenletű gömböt a $P(11,8,\sqrt{7})$ pontjában érintő sík egyenletét.
32. A $P(\sqrt{3},2,3)$ és $Q(1,\sqrt{6},3)$ pontok az $x^2+y^2+z^2=16$ egyenletű gömbön vannak. Milyen hosszú az őket összekötő rövidebb főkörív?
33. Számítsa ki a szabályos tetraéder és oktaéder lapszögét.
34. Számítsa ki a szabályos dodekaéder és ikozaéder lapszögét.
35. Az egységgömb középpontjából kiinduló $\mathbf{a}(3,-1,2)$, $\mathbf{b}(6,4,3)$, $\mathbf{c}(1,4,2)$ vektorok kidöfik egy gömbháromszög csúcsait. Határozza meg a gömbháromszög oldalait és szögeit.
35. Egy gömbháromszög csúcsai: $A(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$, $B(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$, $C(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$. Mekkora a területe?
36. Adott a gömbháromszög a, b és c oldala. Készítsen tervet a gömbháromszög köré írt kör sugarának meghatározására.
37. Határozza meg a $P(-5,-5,2)$ és $Q(1,3,4)$ pontokon átmenő projektív egyenes egyenletét.
38. Határozza meg az $e:-2X-Y+4Z=0$ és $f:3Y+4Z=0$ projektív egyenesek metszéspontját.
39. Adja meg homogén koordinátákkal a $P(-2,3)$ és $Q(-5,-4)$ közönséges pontokat összekötő egyenes ideális pontját.
40. Határozza meg az $x^2=y^3$ g"orbe ideális pontját.
41. Határozza meg az $a:y=-x+4$, $b:y=4x-1$, $c:y=5x-2$ és $d:y=x+2$ közönséges egyenesek $(abcd)$ kettősviszonyát.
42. Határozza meg az $A(1,1,-1)$, $B(4,-5,4)$, $C(-5,4,-3)$, és $D(-5,13,-11)$ projektív pontok kettősviszonyát.
43. Határozza meg az $a:-2x+2y+z=0$, $b:4x+3y-z=0$, $c:-30x-19y+8z=0$ és $d:-14x+7y+6z=0$ projektív egyenesek kettősviszonyát.
44. Adottak az $A(1,4,0)$, $B(-7,7,1)$, és $C(9,1,-1)$ projektív pontok. Határozza meg azt a D pontot, melyre $(ABCD)=1/4$ teljesül.

46. Adottak az $a: -3x+4y+3z=0$, $b: -3x+5z=0$ és $c: 12x-10y-15z=0$ projektív egyenesek. Határozza meg azt a d egyenest, melyre $(abcd)=-\frac{9}{5}$ teljesül.
47. Adott az AB szakasz és a felezőpontja, valamint az AB egyenesre nem illeszkedő P pont. Szerkessze meg csak vonalzóval a P ponton áthaladó, AB-vel párhuzamos egyenest.
48. Adott az AB szakasz és a vele párhuzamos a egyenes. Szerkessze meg csak vonalzóval az AB szakasz felezőpontját.
49. Adott az AB átmérőjű k kör és egy sem a körre, sem pedig az AB egyenesre nem illeszkedő C pont. Szerkessze meg csak vonalzóval a C ponton átmenő, AB egyenesre merőleges egyenest.
50. Adottak az $A(1,0,-1)$, $B(-2,5,-1)$ és $C(11,-25,4)$ projektív pontok. Határozza meg a D pontot oly módon, hogy az A és B, valamint a C és D párok harmonikusan válasszák el egymást.
51. Adottak az

$$a: 7x-7y-6z=0, \quad b: -5x+4y+7z=0 \quad \text{és} \quad c: 39x-34y-47z=0$$

projektív egyenesek. Határozza meg a d egyenest oly módon, hogy az a és b, valamint a c és d párok harmonikusan válasszák el egymást.
52. Lehet-e affinitásnál ez euklidészi sík parabolájának képe hiperbola? És tetszőleges kollineációnál?
53. A Π: $ABC \mapsto BCA$ projektivitás a D pontot E-be viszi, E-t pedig F-be. Mit tesz F-fel?
54. Írja fel a kör és ellipszis egy-egy paraméterezését.
55. Írja fel a hiperbola és parabola egy-egy paraméterezését.
56. Számítsa ki a kör és az ellipszis görbületét.
57. Számítsa ki a hiperbola és a parabola görbületét.
58. Számítsa ki az $(x=a\cos t, y=a\sin t, z=ct)$ csavargörbe görbületét és torzióját.
59. Határozza meg a (t^2-1, t^3+1) paraméterezésű síkgörbe $2x-y+3=0$ egyenessel párhuzamos érintőjének egy paraméterezését.
60. Számítsa ki az $y=\ln\cos x$ egyenletű síkgörbe $x_1=0$ és $x_2=\frac{\pi}{3}$ abszcisszájú pontjai közé eső szakaszának ívhosszát.
61. Írja fel a $(2\cos t, 2\sin t, 4t)$ paraméterezésű görbe simulósíkjának egyenletét a $t_0=0$ pontban.
62. Számítsa ki a $(\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$ paraméterezésű görbe binormális egységvektorát a $t_0=\pi$ pontban.
63. Számítsa ki a $(\cosh t, \sinh t, t)$ paraméterezésű görbe görbületét a $t_0=1$ pontban.
64. Számítsa ki az $(e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$ paraméterezésű görbe torzióját a $t_0=2$ pontban.
65. Írja fel az $(u+v, u-v, uv)$ paraméterezésű felület $u_0=2$ és $v_0=1$ értékekhez tartozó pontjában az érintősík egyenletét.
66. Számítsa ki az (u^2+v^2, u^2-v^2, uv) paraméterezésű felület $u_0=1$, $v_0=1$ paraméterekhez tartozó pontjában a szorzatgörbületet.