

**Szókefalvi-Nagy Gyula Matematikai Emlékverseny XLVI. esztendő**  
**2007-2008. tanév**

**11. évfolyam**

**II. forduló**

1. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\log_8(2^x - 1) - \log_8(2^{-x} + 1) = 2^{-x} - 2^x + 2!$$

2. Hány olyan legfeljebb 4 jegyű természetes szám van, amelyben előfordul a 0 számjegy?
3. Egy vállalat a hozzá jelentkezőket egy 25 pontból álló teszttel vizsgálja. A legfrissebben meghirdetett állásra 20 fő jelentkezett, kiknek a teszteredményei mind különbözőek, semelyik kettő sem azonos egészen. Mutassa meg, hogy kiválasztható 19 tesztkérdés úgy, hogy a 20 teszt közül bármely kettő között lesz eltérés ezen 19 kérdés alapján is.
4. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, amelyre  $f\left(x + \frac{1}{2}\right) = 1 + \sqrt{2f(x) - f^2(x)}$  bármely  $x \in \mathbb{R}$  esetén. Igazolja, hogy  $1 - f(x) \geq 2$  és  $f\left(x - \frac{1}{2}\right) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$  bármely  $x \in \mathbb{R}$  esetén!
5. Egy sorozat tagjait a következő módon képezzük:

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 + 1}.$$

Bizonyítsa be, hogy e sorozat tagjai egészek!

6. Adott egy körvonalon egy pont, és egy pont a körvonalon belül. Határozzon meg a körvonalon másik két pontot úgy, hogy a körvonalra illeszkedő, ezen három pont alkotta háromszög beírható körének középpontja legyen az adott belső pont.

**Az állítások indoklásáról ne feledkezzünk meg!**