10. POLYGON VERSENY A TANÍTÁS IRÁNT ÉRDEKLŐDŐ HALLGATÓK SZÁMÁRA 2004. április

Ebben a félévben is megrendezzük, immár szokásos, Polygon Versenyünket a tanítás iránt érdeklődő hallgatók számára. Kitűzött példáinkban a versenyzőknek - szándékunk szerint - olyan feladatokat kell megoldaniok, amilyennel mint tanárok is találkoznak. E verseny során most legtöbbször azt kell eldönteniök, hogy egy feladat leírt megoldását elfogadjuk-e, ha igen miért, ha nem, miért. Egy rövid "Igen", vagy "Nem" tehát nem válasz, mindig - mint a tanuló is - indoklást is várunk.

1. Ön egy példatárban a következő feladatot olvasta:

Mutassuk meg, hogy $1981 \cdot 1983 \cdot 1985 \cdot 1987 + 16$ négyzetszám!

A feladatot nyilván az 1980-as években készítették. Ön olyan feladatot akar kitűzni, amiben 2003 szerepel. Vajon igaz-e, hogy $2001 \cdot 2003 \cdot 2005 \cdot 2007 + 16$ négyzetszám?

2. Alakítsuk szorzattá az

$$S = ac(a-c) + ab(b-a) + bc(c-b)$$

kifejezést!

Jancsi a következő megoldást adja be:

"Ha $a = b$, akkor $S = ac(a-c) + ac(c-a) = 0$, ha $b = c$, akkor $S = ac(a-c) + ac(c-a) = 0$, ha pedig $c = a$, akkor $S = ab(b-a) + ba(a-b) = 0$. Ezért S szorzatalakjában $(a-b)^k, (b-c)^m$ és $(c-a)^n$ is szerepel, ahol $k, m, n \geq 1$ egész számok. Az S-ben szereplő tagok harmadfokúak, ezért $k = m = n = 1$. Tehát

$$S = (a-b)(b-c)(c-a), \quad \text{vagy} \quad S = (b-a)(b-c)(c-a).$$

Legyen $a = 1,\ b = 2,\ c = 3$, akkor

$$S = ac(a-c) + ab(b-a) + bc(c-b) = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot (1) + 6 \cdot 1 = 2.$$

Ebből következik, hogy

$$S = (a-b)(b-c)(c-a)."$$

Elfogadjuk-e Jancsi megoldását?

3. Münchausen tanár úr azt sejti, hogy ha n pozitív egész szám, és n legalább 100, akkor

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

Münchausen tanár úr bizonyítása: "Teljes indukciót fogok alkalmazni. Tegyük fel, hogy igaz az állítás n-re ($n \geq 100$), akkor megmutatom, hogy igaz $n + 1$-re is.

$$1 + 2 + \cdots + n + (n + 1) = \frac{n^2 + n + 2}{2} + n + 1 = \frac{n^2 + n + 2 + 2n + 2}{2} =$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1 + n + 1 + 2}{2} = \frac{(n + 1)^2 + (n + 1) + 2}{2}.$$

Ha tehát igaz az állítás n-re, akkor igaz $n + 1$-re is. Sejtésünket igazoltuk. "

Elfogadjuk-e azt, amit Münchausen tanár úr mond?

4. Négy nő és hét férfiből egy öttagú küldöttséget kell kiválasztani. Hány módon lehetséges ez, ha legalább két nő kell legyen a küldöttségben?

Jancsi megoldása. "Összesen 11 személy van. A négy nő közül kettőt $\binom{4}{2}$ módon tudunk kiválasztani. Ha a maradék kilenc személyből választunk még hármat, akkor biztosan teljesül az, hogy legalább két nő van a küldöttségben. A keresett szám tehát

$$\binom{4}{2}\binom{9}{3} = 6 \cdot 84 = 504."$$

Gabi most azt mondja: "Jancsinak nincs igaza, hisz ha semmi megkötést nem teszek (nem kötöm ki, hogy legalább két nő legyen a küldöttségben) és csak kiválasztok a tizenegy személyből ötöt, az

$$\binom{11}{5} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 462$$

módon lehetséges. A 462 pedig kisebb, mint 504. Jancsinak nem lehet igaza."

Ön , mint tanár mit mond a tanulóknak?

5. Münchausen tanár úr a következőt kérdezi: Van öt számom. Sorba rakom őket, az első és az utolsó 0, a többi szám pedig a mellette levők számtani közepénél nem nagyobb. A középső szám, most nem emlékszem pontosan 1, vagy -1. Mennyi lehet a második és a negyedik szám?

Egy válasz kezdete. 1 nem lehet középen, mert akkor a számok: $0, a, 1, b, 0$, így tehát $a \leq 1/2$, $b \leq 1/2$ és $1 \leq (a+b)/2$ azaz $2 \leq a+b$, ez azonban nem lehet, mert az előző egyenlőtlenségek szerint $a+b \leq 1$.

A középső szám lehet -1, mert például $0, -1, -1, -1, 0$ lehetséges öt szám.

Folytassuk a megoldást!

6. Jancsi a következőt mondja: "Olvastam, hogy ha egy kordinátarendszerben $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ egy háromszög csúcsai, akkor a háromszög területe

$$t = \frac{1}{2}(x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)).$$

Most ennek segítségével kiszámoltam annak a négyszögnek a területét, amelynek csúcsai: $(1, 4), (3, 5), (5, 3), (0, 0)$.

A $(0, 0)$-t összekötjük $(3, 5)$-tel, a kapott két háromszög területét összeadom:

$$t = \frac{1}{2}(0\cdot(4-5)+1\cdot(5-0)+3\cdot(0-4)+0\cdot(3-5)+5\cdot(5-0)+3\cdot(0-3)) = \frac{1}{2}(5-12+25-9) = \frac{9}{2}.$$

Ez azonban annak a négy és fél négyzetecskének a területe, ami benne van a négyszögben, de a négyszög területe ennél nyilván nagyobb. Valahol hibáztam, de hol?"

Válaszoljunk Jancsinak!

7. Döntsük el, hogy $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ racionális, vagy irracionális szám!

Ezt a példát adja fel az osztályban és a tanulók a következő megoldásokat adják be.

A) Jancsi: "Tegyük fel, hogy $\sqrt{3} + \sqrt{5} = r$ racionális szám. Ekkor négyzetre emelve: $3 + 2\sqrt{15} + 5 = r^2$, azaz $r^2 - 2 = 2\sqrt{15}$. Ez azonban ellentmondás, mert a bal oldal

racionális szám, a jobb oldal $2\sqrt{15}$ pedig irracionális. Ellentmondáshoz jutottunk, így $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ irracionális szám. ”

B) Pista: ”Tegyük fel, hogy $\sqrt{3}+\sqrt{5}=r$ racionális szám. Ekkor négyzetre emelve $3+2\sqrt{15}+5=r^2$, azaz $r^2-8=2\sqrt{15}$. Ismét négyzetre emelünk: $r^4-16r^2+64=4\cdot 15$. A bal oldal racionális szám, a jobb oldal is racionális szám, nem jutottam ellentmondáshoz, tehát $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ racionális szám.”

C) Gabi: ”Legyen $r=\sqrt{3}+\sqrt{5}$. Ekkor $r^2=3+2\sqrt{15}+5=8+2\sqrt{15}$. A jobb oldal irracionális szám, ezért r^2 is irracionális, de ez csak úgy lehet, hogy r, azaz $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ is irracionális.

Általánosítani is tudunk. Tegyük fel, hogy a, b pozitív egész számok és ab nem teljes négyzet. Ekkor $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ irracionális szám. Valóban az előbbi gondolatot megismételve, legyen $r=\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Négyzetre emelve $r^2=a+2\sqrt{ab}+b$. A $\sqrt{ab}$ irracionális szám, mert a feltevés miatt ab nem teljes négyzet, ezért r^2 irracionális, de ez csak úgy lehet, hogy $r=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ irracionális.

Arra a kérdésre nem tudok válaszolni, hogy ha ab teljes négyzet, akkor $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ racionális, vagy irracionális?”

Elfogadja-e ezeket a megoldásokat, ha igen miért, ha nem miért? Mit válaszolna Gabi kérdésére?