AZ 1. POLYGON VERSENY FELADATAI MATEMATIKA SZAKOS TANÁRJELÖLTEK SZÁMÁRA 1999.

Kosztolányi József-Pintér Lajos

Tanárjelölt hallgatókkal foglalkozva arra gondoltunk, hogy ők a későbbiek során sok esetben találkoznak a következő problémával: van egy feladat és a segédkönyvben, vagy máshol megtalálják ennek a feladatnak egy megoldását. Ez a megoldás tökéletes lenne akkor, ha vizsgán kellene elmondani, de nem kielégítő, ha egy osztályba visszük be. Amikor egy megoldásban például azt olvassuk, hogy "Tekintsük" ezeket és ezeket a számokat és bizonyítsuk be, hogy ezek eleget tesznek a feladat követelményeinek, akkor ezt osztályban nehezen tudjuk megcsinálni, mert reménytelen, hogy egy gyerek erre rátaláljon. A tanári munka itt most azt jelenti, hogy úgy kell feldolgozni a megoldást, hogy az "tanítható" legyen. Reményük legyen a gyerekeknek, hogy megtalálják a megoldás kulcsát. Ezért elhatároztuk, hogy egy kissé szokatlan versenyt rendezünk. Az itt következő feladatok olyanok, amelyek olyan könyvekből származnak, amiket a tanárok sokat forgatnak. A feladatnak általában tudjuk a megoldását, ami azonban ahhoz, hogy osztályban is megcsináljuk nem igazán megfelelő. Kiváncsian vártuk, hogy mit szólnak a hallgatók a feladatokhoz, és hogyan boldogulnak velük. Örömmel láttuk, hogy sokan jelentkeztek a versenyre, és két órán át tényleg komolyan dolgoztak. Az biztos, hogy a kérdések kissé szokatlanok voltak, de minden feladattal kapcsolatban találtunk nagyon érdekes megoldásokat. A gyerekek verseny utáni nyilatkozatai is azt mutatták, hogy tetszett nekik ez a fajta verseny és sokan most gondoltak először olyan problémákra, amiket a feladatok felvetettek. Azt gondoljuk, hogy a következő félévben is megrendezzük ezt a fajta versenyt. A feladatokat próbáljuk tovább szinesíteni. Megjegyezzük, hogy egyáltalán nem gondoljuk, hogy minden feladatnál sikeresen el tudjuk érni, hogy a megoldást a gyerekekhez közel hozzuk, ez nem minden esetben sikerül. Ha azonban kísérletet teszünk, akkor biztos, hogy az órai feldolgozás sokkal jobb lesz, tanításunk eredményesebbé válik. A következő feladatokat tűztük ki:

"1. Igazoljuk, hogy minden $n \in N^+$ esetén

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Az igazolás teljes indukcióval történik, ez sok könyvben megtalálható. Egy tanulónk viszont az osztályban azt kérdezi, hogy hogyan lehet ezt a formulát megsejteni? Mit válaszolnánk a tanulónak?

2.

a) A tanulók már tudják, hogy minden $n \in N^+$ esetén

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Mutassuk meg, hogy minden $n \in N^+$ esetén

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

b) Az a)-t figyelembe véve sejtsünk meg, majd igazoljunk az előbbihöz hasonló formulát a következő összeg esetén $n \in N^+$:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + ... + n(n+1)(n+2) =?$$

3. Osztályunkban kitűzzük a következő példát: Mi lesz az $abcd$ szorzat maximuma, ha a, b, c, d pozitív egész számok és $a + b + c + d = 18$?

Amikor bementünk az osztályba a következő megoldás volt a "zsebünkben": $abcd$-nek van maximuma, mert a feltevés miatt a, b, c, d pozitív egész számok, $a + b + c + d = 18$, ezért $abcd$ véges sok értéket vehet fel, ezek között van legnagyobb. Azt sejtjük, hogy $abcd$ akkor lesz a legnagyobb, ha $a = 4$, $b = 4$, $c = 5$, $d = 5$. Tegyük fel, hogy $a \leq b \leq c \leq d$. A feltételek miatt $a = d$ nem lehet. Ha $d - a = 1$, akkor az előbbi négyest kapjuk. Tegyük fel most, hogy $d - a \geq 2$. Ilyen az esetben viszont $abcd$ nem lehet maximális, mert $(a+1)bc(d-1) = abcd + (d-a-1)bc > abcd$. Igy a maximum valóban $4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 = 400$.

Kitűzzük a feladatot és egy tanuló azt javasolja, hogy próbáljuk alkalmazni a számtani és mértani középre vonatkozó egyenlőtlenséget. Ez egy nagyon természetes ötlet, megpróbáljuk. Tudjuk, hogy ha a, b, c, d pozitív számok, akkor

$$\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a+b+c+d}{4},$$

és egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $a = b = c = d$. Feltételünk szerint $a+b+c+d = 18$, ezért

$$abcd \leq \left(\frac{18}{4}\right)^4 = \left(\frac{9}{2}\right)^4.$$

Az $abcd$ szorzat tehát mindig $4,5^4$ alatt marad, és akkor és csak akkor egyenlő vele, ha $a = b = c = d = 4,5$. Ez viszont lehetetlen, mert a feltevés miatt a, b, c, d pozitív egész számok. Feladjuk a számtani és mértani közép alkalmazására vonatkozó ötletet, vagy valamilyen módon meg tudjuk menteni?

4. Sierpinski: 200 feladat az elemi számelméletből című szakköri füzetének 3. példája így szól:

Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan n természetes szám létezik, amelyekre a $4n^2 + 1$ szám egyszerre osztható 5-tel is, 13-mal is.

A könyvben a következő megoldást találjuk (pontosan idézzük): "Ilyenek például mindazok az n természetes számok, amelyek a $65\,k + 56$ számtani sorozat tagjai, ahol $k = 0, 1, 2, ...$ Ugyanis, ha $n = 65\,k + 56$, ahol k a 0-nál nem kisebb egész szám, akkor $n \equiv 1\,(mod\,5)$ és $n \equiv 4\,(mod\,13)$, ahonnan $4n^2 + 1 \equiv 0\,(mod\,5)$, valamint $4n^2 + 1 \equiv 0\,(mod\,13)$, vagyis $5|4n^2 + 1$, valamint $13|4n^2 + 1$."

Az első kérdés az, hogy hogyan lehet a $65\,k + 56,\ k = 0, 1, ...$ (vagy hasonló) alkalmas számtani sorozatot kitalálni?

A második kérdés az, hogy hogyan lehet az összes olyan n pozitív egész számot megtalálni, amire $65|4n^2 + 1$?

A harmadik kérdés a következő: A példában két prímszám szerepel $p = 5$ és $q = 13$. Igaz-e, hogy ha p, q két prímszám, akkor végtelen sok pozitív egész n szám van, amire $pq|4n^2 + 1$?

5. Egy könyvben a következő példát olvassuk:

Adott a síkban az ABC háromszög, amelynek a csúcsai rácspontok. Ha a háromszög oldalait a, b, c-vel, körülírt körének sugarát pedig R-rel jelöljük, akkor mutassuk meg, hogy

$$abc \ \geq \ 2R.$$

Megoldás is található a könyvben, az így szól: "Ha a háromszög területe t, akkor

$$t = \frac{bc\,sin\,\alpha}{2} = \frac{abc}{4R},$$

azaz $abc = 4Rt$. Megmutatható, hogy $2t$ egész szám, ebből pedig következik, hogy $2t \geq 1$, azaz

$$abc = 4Rt \geq 2R."$$

Milyen kérdések merülhetnek fel e megoldással kapcsolatban, amiket a tanulók is feltehetnek, tehát, ha lehet, fel kell ezekre készülni.

Mindegyik példával kapcsolatban szabad további kérdéseket feltenni és vizsgálni, de nem érdemes egyetlen példával tölteni az egész időt."

A verseny eredménye a következő:

1. díj: Huszka Gyöngyi IV., Kovács Péter IV., Seres Imre IV.;

2. díj: Csatári Márta V., Kis-Tóth Attila III., Köles Valéria IV.;

3. díj: Dobler Tamás II., Kiss Judit V., Kóródi László V., Molnár Zita IV., Sógor László IV., Vasi Zoltán IV..

A díjazottak a Polygon Kiadó egy-egy könyvét kapták jutalmul.

Kosztolányi József-Pintér Lajos

Bolyai Intézet

6720, Szeged, Aradi Vértanúk tere 1.