Valószínűségszámítás

Definíciók

1. Definiálja az eseménytér (az események σ-algebrája) fogalmát.
2. Mit jelent a valószínűség additivitása, illetve végtelen (σ-)additivitása?
3. Definiálja a klasszikus valószínűségi mezőt.
4. Definiálja a geometriai valószínűségi mezőt. Mit jelent az egyenletességi hipotézis?
5. Definiálja a feltételes valószínűséget.
6. Definiálja a teljes eseményrendszereket.
7. Definiálja két esemény függetlenségét.
8. Mit ért egy véges, illetve végtelen eseményrendszer teljes függetlenségén?
9. Definiálja a valószínűségi változó, valamint eloszlásfüggvénye fogalmát.
10. Definiálja a diszkrét valószínűségi változó fogalmát.
11. Definiálja a folytonos valószínűségi változó és sűrűségfüggvénye fogalmát.
12. Definiálja egy esemény indikátorát.
13. Definiálja két változó függetlenségét.
14. Mit ért valószínűségi változók teljesen független (véges vagy végtelen) rendszerén?
15. Definiálja a valószínűségi vektorváltozó és eloszlásfüggvénye fogalmát.
16. Definiálja diszkrét változó várható értékét.
17. Definiálja folytonos változó várható értékét.
18. Definiálja diszkrét változó szórását.
19. Definiálja folytonos változó szórását.
20. Definiálja két változó kovarianciáját.
21. Definiálja két változó korrelációját.
22. Definiálja valószínűségi változók egy sorozatának erős (pontonkénti) konvergenciáját.
23. Definiálja valószínűségi változók egy sorozatának gyenge (sztochasztikus) konvergenciáját.
24. Definiálja az n, p paraméterű binomiális eloszlást.
25. Definiálja a $\lambda > 0$ paraméterű Poisson-eloszlást.
26. Definiálja az (a, b) intervallumon egyenletes eloszlást.
27. Definiálja a $\lambda > 0$ paraméterű exponenciális eloszlást.
28. Definiálja az $N(m, D^2) \sim N(m, \sigma^2)$ normális eloszlást.
29. Mit nevezünk relatív gyakoriságnak, illetve átlagnak?
30. Mit nevezünk módusznak, illetve mediánnak?

Tételek, alkalmazások

1. Fogalmazza meg az események uniójának, illetve metszetének komplementereiről szóló (de Morgan-féle) azonosságokat.
2. Fogalmazza meg a valószínűség véges és végtelen (σ-)additivitását.
3. Mondja ki a Boole-egyenlőtlenséget (felső becslés eseményunió valószínűségére).
4. Írja föl a Poincaré-féle (szita)formulát.
5. Fogalmazza meg a Bayes-formulát és a szorzási szabályt.
6. Mondja ki a teljes eseményrendszerek valószínűségéről szóló tételt.

7. Mondja ki a teljes valószínűség tételét.
8. Mondja ki a Bayes-tételt.
9. Fogalmazza meg az események komplementereikre való kicserélésével nyert rendszer teljes függetlenségéről szóló tételt.
10. Fogalmazza meg a teljesen független eseményrendszer 0, illetve 1 valószínűségű eseményekkel való kibővítéséről szóló tételt.
11. Mondja ki a valószínűségi változó eloszlásfüggvényének monotonitásáról és (egyoldali) folytonosságáról szóló tételt.
12. Mennyi egy valószínűségi változó határértéke a mínusz, illetve plusz végtelenben?
13. Mondja ki a valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvényének monotonitási és (egyoldali) folytonosságáról szóló tételt.
14. Adja meg egy kétdimenziós valószínűségi vektorváltozó $F(x_1, x_2)$ eloszlásfüggvényének határértékét, ha $x_1 \to -\infty$, illetve ha $x_1, x_2 \to +\infty$.
15. Fogalmazza meg a valószínűségi változók teljesen független rendszerének konstans változóval való kiegészítéséről szóló tételt.
16. Adja meg az események és indikátoraik rendszereinek teljes függetlenségei közötti kapcsolatot.
17. Mondja ki a független változók szorzatának várható értékéről szóló tételt.
18. Mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy egy változó szórása nulla legyen?
19. Mi a kapcsolat két változó függetlensége és korrelálatlansága között?
20. Mi a kapcsolat indikátorváltozók függetlensége és korrelálatlansága között?
21. Fogalmazza meg a páronként korrelálatlan változók összegének szórásnégyzetéről szóló tételt.
22. Mondja ki a Markov-egyenlőtlenséget.
23. Mondja ki a Csebisev-egyenlőtlenséget.
24. Mondjon ki egy gyenge (sztochasztikus) konvergenciára vonatkozó nagy számok törvényt.
25. Mondjon ki egy erős (pontonkénti) konvergenciára vonatkozó nagy számok törvényt.
26. Mondja ki a centrális határeloszlás-tételt.
27. Mondja ki a Poisson-eloszlás tagjainak „monotonitásáról” szóló tételt.
28. Mondja ki a binomiális eloszlás tagjainak „monotonitásáról” szóló tételt.
29. Fogalmazza meg a valamely esemény n-szeri független ismétlés során történő bekövetkezésének gyakoriságáról szóló tételt.
30. Mondja ki a diszkrét valószínűségi változó (vagy eloszlás) eloszlásfüggvényéről szóló tételt.
31. Mondja ki exponenciális eloszlás várható értékéről szóló tételt.
32. Mondja ki a normális eloszlás várható értékéről és szórásáról szóló tételt.

A megértést ellenőrző kérdések, feladatok

1. Létezhet-e két olyan A és B esemény, amelyekre $A \cup B \equiv A + B = A$?
2. Ha az A, B eseményekre $A \supseteq B$, akkor A maga után vonja-e B-t?
3. Egy kockával ismételten dobva mennyi a p_n valószínűsége annak, hogy éppen az n-edik ismétlésnél dobunk először 6-ost?

4. Egy kockával addig dobunk, míg 6-os nem lesz az eredmény. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ismétlések száma végtelen lesz?
5. N termék közül M db selejtes, $N - M$ db hibátlan. Az N termékből egyszerre kimarkolva egy n elemű mintát, mennyi annak a $p_{n,k}$ valószínűsége, hogy k db lesz a mintában selejtes?
6. N termék közül M db selejtes, $N - M$ db hibátlan. Az N termékből egyenként, egymásután n darabot kiválasztva, mennyi annak a $p^*_{n,k}$ valószínűsége, hogy k db lesz a mintában selejtes?
7. A $[0, 1]$ intervallumban egyenletes eloszlás szerint, egymástól függetlenül választunk két pontot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a távolságuk kisebb, mint $1/2$?
8. A $[0, 1]$ intervallumban egyenletes eloszlás szerint, egymástól függetlenül választunk két pontot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a távolságuk kisebb, mint $1/3$?
9. Határozza meg tetszőleges A_1, A_2, A_3 események esetén a következő események valószínűségét a Poincaré-féle (szita)formula alapján kifejtve:
   (a) $P(A_1 \cup A_2) \equiv P(A_1 + A_2)$;
   (b) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \equiv P(A_1 + A_2 + A_3)$.
10. Hogyan fejezhető ki $P(A \backslash B)$ $P(A)$-val, illetve $P(B)$-vel, ha $A \supseteq B$?
11. Legyenek $P(A) = 0{,}4$ és $P(B) = 0{,}3$. Mivel egyenlőek az $m := \min\limits_{A,B \in \mathcal{A}} P(A \cup B)$ és $M := \max\limits_{A,B \in \mathcal{A}} P(A \cup B)$ mennyiségek?
12. Fejezze ki egy növő $A_1, A_2, \ldots$ eseménysorozat limeszét halmazelméleti műveletekkel. (Nincs-e ez ellentmondásban az analízis „növő sorozat nem feltétlenül konvergens” állításával?)
13. Fejezze ki egy csökkenő $A_1, A_2, \ldots$ eseménysorozat limeszét halmazelméleti műveletekkel. (Hasonlítsa össze ezt a tételt az analízis „egymásba skatulyázott nyitott intervallumok sorozatának nem feltétlenül van közös pontja” tételével.)
14. A $P(A|B)$ feltételes valószínűség lehet-e nagyobb (vagy kisebb), mint $P(A)$?
15. Melyik igaz az alábbi két állításból:
   (a) $P(A|B) + P(\overline{A}|B) = 1$;
   (b) $P(A|B) + (A|\overline{B}) = 1$ (ahol $\overline{A}$ az A esemény komplementere, és $0 < P(B) < 1$)?
16. Bizonyítsa be, hogy ha az A és B események függetlenek, akkor az A és $\overline{B}$ események is azok (ahol $\overline{B}$ a B esemény komplementere).
17. Hozzon példát 3 olyan páronként független A_1, A_2, A_3 eseményre, amelyek nem teljesen függetlenek.
18. Lehetnek-e függetlenek az A és $\overline{A}$ események (ahol $\overline{A}$ az A esemény komplementere)?
19. Lehet-e független két diszjunkt (egymást kizáró) A és B esemény?
20. Ha egy valószínűségi változó eloszlásfüggvénye konstans egy (a, b) intervallumon, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy e változó felvesz a és b közötti értékeket?
21. Legyen egy valószínűségi változó eloszlásfüggvényének értékkészlete kételemű. Rajzolja fel az eloszlásfüggvény egy általános esetét, és adja meg az összes aktuális valószínűségi változót.
22. Definiálja a valószínűségi változó F eloszlásfüggvényét, majd rajzolja is fel F-et, ha a változó az 1, 2, ..., 6 értékeket veheti fel csupán, s mindet $1/6$ valószínűséggel.

23. Mely állítások igazak az alábbiak közül, ha $F(x_1, x_2)$ valószínűségi eloszlásfüggvény:
    (a) $F(-\infty, -\infty) = 0$,
    (b) $F(-\infty, x_2) = 0$, ahol $x_2 \in \mathbb{R}$ fix,
    (c) $F(x_1, -\infty) = 0$, ahol $x_1 \in \mathbb{R}$ fix,
    (d) $F(x_1, \infty) = 1$, ahol $x_1 \in \mathbb{R}$ fix,
    (e) $F(\infty, \infty) = 1$?
24. Egy $F(x)$ töröttvonalfüggvény lehet-e valószínűségi eloszlásfüggvény? Ha nem, bizonyítson; ha igen, adjon példát az F-hez tartozó valószínűségi változóra.
25. Két valószínűségi változó eloszlásfüggvénye legyen $F_1(x_1)$ és $F_2(x_2)$. Lehetséges-e, hogy az együttes $F(x_1, x_2)$ eloszlásfüggvényükre fennáll
    (a) $F(x_1, x_2) = F_1(x_1) + F_2(x_2)$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;
    (b) $F(x_1, x_2) = F_1(x_1) \cdot F_2(x_2), (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$?
26. Lehet-e két változó összegének a várható értéke ugyanaz, mint a várható értékük szorzata? Ha lehet, adjon rá példát; ha nem, precízen cáfoljon.
27. Két független valószínűségi változó várható értéke 2, illetve 1. Mennyi a két változó szorzatának várható értéke?
28. Mit tud mondani egy valószínűségi változóról, ha a szórása nulla?
29. Két változó korrelálatlansága és függetlensége között mi a kapcsolat?
30. Hogyan viselkedik a nulla várható értékű és $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ szórású normális eloszlások serege, ha $n \to \infty$?
31. Hogyan viselkednek a $\lambda = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ paraméterű exponenciális eloszlások, ha $n \to \infty$?