POLYGON VERSENY TANITÁS IRÁNT ÉRDEKLŐDŐ HALLGATÓK SZÁMÁRA 2002. december

1. a és b legyenek olyan valós számok, hogy

$$a(3-a)+b(3-b) \leq 2(ab+1).$$

Ön azt kérdezi, hogy mit mondhatunk $a+b$-ről? Osztályából három tanuló megszólal és a következőt mondják:

Pisti: A feltevésből következik, hogy $a+b<-1$.

Anna: A feltevésből következik, hogy $a+b \geq 2$, vagy $a+b \leq 1$.

Xavér: A feltevésből következik, hogy $a+b=3/2$.

Mit mond Ön a tanulóknak?

2. Egy tanuló elmondja önnek, hogy a következő két példát olvasta:

"A: Ha $x_1, x_2 \geq 0$ és $x_1x_2=1$, akkor

$$1+x_1 \geq 2\sqrt{x_1} \quad \text{és} \quad 1+x_2 \geq 2\sqrt{x_2}, \quad \text{ezért}$$

$$(1+x_1)(1+x_2) \geq 2^2\sqrt{x_1x_2} = 2^2.$$

B: Ha $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$, akkor

$$(1+x_1)(1+x_2) \leq 2+2x_1x_2.$$

Valóban, elvégezve a szorzást

$$1+x_1+x_2+x_1x_2 \leq 2+2x_1x_2, \quad \text{azaz}$$

$$0 \leq 1+x_1x_2-x_1-x_2 = (1-x_1)(1-x_2).$$

Ez pedig a feltevés miatt igaz."

Tanárnő (Tanár úr) lehet ez, nincs itt ellentmondás?

3. Az $f: R \to R$ és $g: R \to R$ függvények legyenek periodikusak. Jóska azt mondja, hogy akkor $f+g$ is periodikus, mert legyen például $f(x)=\sin \pi x$, ennek egyik periódusa

2, a g-t pedig úgy értelmezzük, hogy az egész pontokban az értéke 1, máshol 0, így egyik periódusa 1. Ekkor az $f+g$ függvény is periodikus és egyik periódusa 2. Igaza van-e Jóskának?

4. Osztályában a tanulók azon vitatkoznak, hogy vajon igaz-e, hogy az $\{a_n+b_n\}$ sorozat akkor és csak akkor szigorúan monoton növekvő, ha mindkét sorozat, $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ is szigorúan monoton növekvő?

Mit mond Ön a tanulóknak?

5. Münchausen tanár úr ezt mondja: "Van két sorozatom $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$. Mindkét sorozatra teljesül ugyanaz a két feltétel:

$$a_n^2 < 5, \quad a_{n+1}^2 < a_n^2; \quad b_n^2 < 5, \quad b_{n+1}^2 < b_n^2$$

minden pozitív egész n esetén. Az $\{a_n\}$ sorozat konvergens, a $\{b_n\}$ sorozat pedig divergens."

Igaza lehet-e Münchausen tanár úrnak?

6. Münchausen tanár úr ezt mondja: "Van olyan öt páronként különböző P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 pontom a síkban, hogy bármelyik három, páronként különböző pontot veszem is, az általuk alkotott $P_iP_jP_k\angle$ nem nagyobb 90^0-nál."

Igaza lehet-e Münchausen tanár úrnak?

7. Ön osztályában (tagozatos osztály) az összetett függvény differenciálhányadosát kezdi tanítani. Az egyszerűség kedvéért felteszi, hogy az f és g függvények mindenütt értelmezve vannak és mindenütt differenciálhatóak is. Véve egy tetszőleges x_0 pontot azt kérdezi, hogy differenciálható-e az $f(g)$ függvény az x_0 pontban?

Egy tanuló a következőt írja a táblára (mondja is):

$$\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0} = \frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \to f'(g(x_0))g'(x_0),$$

ha $x \to x_0$. Ez pedig igaz, mert a feltevés miatt g az x_0-ban differenciálható, ezért, ha $x \to x_0$, akkor $g(x) \to g(x_0)$." Mit mond Ön a tanulónak? Milyen érdemjegyet adna erre a feleletre?