

Záróvizsga tételek matematikából – osztatlan tanárszak

A: szakmai ismeretek; **B:** szakmódszertani ismeretek

Középiskolai specializáció

1. Lineáris algebra

A: Lineáris egyenletrendszerek, mátrixok. A valós elem- n -esek vektortere és euklideszi tere, lineáris függetlenség, ortogonalitás. Determináns, mátrix rangja. Vektortér, altér, bázis, dimenzió. Lineáris leképezések. Euklideszi terek.

B: Egyenletrendszerek tanítása az általános és középiskolában. Egyenlőtlenségek és egyenlőtlenségrendszerek grafikus megoldása.

2. Számelmélet

A: Osztathóság, euklideszi algoritmus, diofantoszi egyenletek, kongruenciák. Prímszámok, a számelmélet alaptétele. Számelméleti függvények, osztók száma, osztók összege, tökéletes számok. Az Euler-féle ϕ függvény, Euler–Fermat-tétel. Pitagorasz-számhármasok.

B: A számelmélet tanítása az általános és középiskolában. Néhány számelméleti feladat.

3. Klasszikus algebra

A: Komplex számok. Test feletti polinomok számelmélete, irreducibilitás a komplex, a valós és a racionális számok teste felett, az algebra alaptétele, Schönemann–Eisenstein-tétel. Polinom és polinomfüggvény, Lagrange-interpoláció, polinomok (többszörös) gyökei. Harmad- és negyedfokú egyenletek, Viète-formulák, szimmetrikus polinomok.

B: Egyenletek, egyenlőtlenségek tanítása az általános és középiskolában. Néhány elemi módszer egyes magasabb fokú egyenletek megoldására. (Pl. reciprok egyenletek.)

4. Absztrakt algebra

A: Műveletek, műveleti tulajdonságok, algebrai struktúrafajták (csoportok, gyűrűk, testek), nevezetes példák. Csoportok izomorfiaja, ciklikus csoportok, Lagrange-tétel. Normálosztó, homomorfia-tétel, direkt szorzat. Osztathóság integritástartományokban, euklideszi gyűrűk, Gauss-egészek. Gyűrű, ideál, homomorfia-tétel, direkt szorzat, főideálgyűrűk. Számtestek egyszerű algebrai bővítései, geometriai szerkeszthetőség. Magasabb fokú egyenletek megoldhatósága.

B: A legfontosabb algebrai struktúrák megismertetésének lehetőségei a középiskolában. Néhány konkrét, a középiskolában megjelenő algebrai struktúra.

5. Sorozatok és sorok

A: Sorozatok határértéke, a fogalom tulajdonságai. Nevezetes példák. Rekurzív sorozatok. Numerikus sorok, konvergenciakritériumok, példák, alkalmazások. Függvénysorozatok. Hatványsorok, függvények sorelőállításai.

B: A határérték fogalmának kialakítása a középiskolában. Néhány konkrét végtelen sorozatra, végtelen sorra vezető feladat.

6. Határérték és folytonosság

A: A függvények határértékének különböző esetei, példák. Folytonosság, folytonos függvények tulajdonságai. Elemi függvények. Az exponenciális függvény definíciója. Inverzfüggvények.

B: A folytonosság fogalmának kialakítása a középiskolában. Az elemi függvények tanítása az általános és középiskolában (függvénytranszformációk, az egyes függvények tulajdonságai).

7. Differenciálás

A: Egyváltozós függvények differenciálása, tulajdonságok, szabályok. Középérték-tételek és alkalmazásai. Monotonitás és konvexitás jellemzése, szélsőérték-vizsgálat. Többváltozós függvények differenciálása, gradiensvektor, többváltozós szélsőérték.

B: A differenciálhányados fogalmának kialakítása a középiskolában. Szélsőérték-feladatok a középiskolában. Néhány differenciálással illetve elemi módszerekkel is megoldható szélsőérték-feladat.

8. Integrálás

A: Egyváltozós függvények Riemann integrálja, tulajdonságok. Középérték-tétel, Newton–Leibniz-formula. Integrálfüggvény, improprius integrál. Alkalmazások, terület-, térfogat-, felszín- és ívhosszképletek.

B: Az integrálfogalom kialakítása és az integrál alkalmazásai a középiskolában.

9. Transzformációk

A: Síkizometriák fixpontjai, típusai, mozgások, egybevágóságok. Párhuzamos szelők tétele, dilatációk, fixponttétel, centrális homotécia, hasonlóságok. Térizometriák.

B: Az egybevágóság és a hasonlóság tanítása az általános és középiskolában. Néhány geometriai transzformáció segítségével megoldható feladat.

10. Alakzatok

A: Kúpszeletek fokális egyenlete, síkgeometriai definíciója, kanonikus egyenletek, érintők. Kúp síkmetszetei. Sokszögek átdarabolása, terület definíciója, vektoriális szorzat. Affin kép területe. Térfogat, Cavalieri-elv. Poliéderek Euler-tétele, szabályos poliéderek.

B: A terület és a térfogat tanítása az általános és középiskolában. Néhány, síkidomok átdarabolásával kapcsolatos feladat.

11. Geometriák

A: Euklideszi sík projektív bővítése, dualitás. Homogén koordináták, perspektivitás, Papposz tétele, kettősviszony, harmonikus elválasztás, teljes négyoldal. Gömbi geometria és a hiperbolikus sík Cayley–Klein modellje. Görbék, ívhossz. Véges projektív sík, projektív sík másodrendű görbéi. Frenet-formulák és kísérő triéder, alaptétel, körülfordulási tétel. Felületek, érintősík, geodetikusok.

B: A vektor fogalmának kialakítása az általános és középiskolában. Néhány vektorokkal megoldható feladat.

12. Kombinatorika

A: Összeszámlálási feladatok; binomiális tétel, szitaformula. Gráfok.

B: A kombinatorika tanítása az általános és középiskolában. Néhány kombinatorikai feladat.

13. Halmazelmélet

A: Megszámlálható és kontinuum számosságú halmazok, műveletek számosságokkal, paradoxonok.

B: A végtelen megjelenése, tárgyalása az általános és középiskolában. A „többféle végtelen” bemutatásának lehetősége.

14. Matematikai logika

A: Ítéletkalkulus, logikai következmény, normálformák. Predikátumkalkulus: alapfogalmak és példák.

B: Elemi logikai feladatok tanítása az általános és középiskolában. Néhány halmazműveletekre vezető logikai feladat.

15. Valószínűségszámítás

A: A valószínűség definíciója és fontosabb tulajdonságai. Klasszikus és geometriai valószínűségi mezők. Feltételes valószínűség, események függetlensége. Véletlen változók, diszkrét és abszolút folytonos eloszlások. A várható érték és a szórás. A nagy számok törvénye és a centrális határeloszlás-tétel.

B: A valószínűségszámítás és statisztika tanítása az általános és középiskolában. Néhány, a véletlenre vonatkozó feladat.

Általános iskolai specializáció

1. Lineáris algebra

A: Lineáris egyenletrendszerek, mátrixok. A valós elem-n-esek vektortere és euklideszi tere, lineáris függetlenség, ortogonalitás. Determináns, mátrix rangja. Vektortér, altér, bázis, dimenzió. Lineáris leképezések. Euklideszi terek.

B: Szöveges feladatok megoldási módszerei következtetéssel, egyenlettel a felső tagozaton.

2. Számelmélet

A: Oszthatóság, euklideszi algoritmus, diofantoszi egyenletek, kongruenciák. Prímszámok, a számelmélet alaptétele. Számelméleti függvények, osztók száma, osztók összege, tökéletes számok. Az Euler--féle ϕ függvény, Euler–Fermat-tétel. Pitagoraszi számhármakok.

B: Számelmélet tanítása a felső tagozaton.

3. Klasszikus algebra

A: Komplex számok. Test feletti polinomok számelmélete, irreducibilitás a komplex, a valós és a racionális számok teste felett, az algebra alaptétele, Schönemann–Eisenstein-tétel. Polinom és polinomfüggvény, Lagrange-interpoláció, polinomok (többszörös) gyökei. Harmad- és negyedfokú egyenletek, Viète-formulák, szimmetrikus polinomok.

B: Számrendszerek, helyi értékes számírás.

4. Absztrakt algebra

A: Műveletek, műveleti tulajdonságok, algebrai struktúrafajták (csoportok, gyűrűk, testek), nevezetes példák. Csoportok izomorfiája, ciklikus csoportok, Lagrange-tétel. Oszthatóság integritástartományokban, euklideszi gyűrűk, Gauss-egészek. Számtestek egyszerű algebrai bővítései, geometriai szerkeszthetőség.

B: Törtek bevezetése, műveletek törtekkel.

5. Sorozatok és sorok

A: Sorozatok határértéke, a fogalom tulajdonságai. Nevezetes példák. Rekurzív sorozatok. Numerikus sorok, konvergenciakritériumok, példák, alkalmazások. Függvénysorozatok. Hatványsorok, függvények sorelőállításai.

B: Sorozatok a felső tagozaton. Számítási, mértani sorozat. Tizedes törtek.

6. Határérték és folytonosság

A: A függvények határértékének különböző esetei, példák. Folytonosság, folytonos függvények tulajdonságai. Elemi függvények. Az exponenciális függvény definíciója. Inverzfüggvények.

B: Néhány elemi függvény tanítása az általános iskolában, függvénytranszformációk, az egyes függvények tulajdonságai.

7. Differenciálás

A: Egyváltozós függvények differenciálása, tulajdonságok, szabályok. Közéérték-tételek és alkalmazásai. Monotonitás és konvexitás jellemzése, szélsőérték-vizsgálat. Többváltozós függvények differenciálása, gradiensvektor, többváltozós szélsőérték.

B: Arányossági feladatok a felső tagozaton. Az egyenes arányosság és a fordított arányosság ábrázolása.

8. Integrálás

A: Egyváltozós függvények Riemann integrálja, tulajdonságok. Közéérték-tétel, Newton–Leibniz-formula. Integrálfüggvény, improprius integrál. Alkalmazások, terület-, térfogat-, felszín- és ívhosszképletek.

B: Hosszúság, terület, térfogat mérése, számítása.

9. Transzformációk

A: Síkizometriák fixpontjai, típusai, mozgások, egybevágóságok. Párhuzamos szelők tétele, dilatációk, fixponttétel, centrális homotécia, hasonlóságok. Térizometriák.

B: Síkbeli egybevágósági transzformációk a felső tagozaton.

10. Alakzatok

A: Kúpszeletek fokális egyenlete, síkgeometriai definíciója, kanonikus egyenletek, érintők. Kúp síkmetszetei. Sokszögek átdarabolása, terület definíciója, vektoriális szorzat. Affin kép területe. Térfogat, Cavalieri-elv. Poliéderek Euler-tétele, szabályos poliéderek.

B: Testek építése, térszemlélet fejlesztése a felső tagozaton.

11. Geometriák

A: Euklideszi sík projektív bővítése, dualitás. Homogén koordináták, perspektivitás, Papposz tétele, kettősviszony, harmonikus elválasztás, teljes négyoldal. Gömbi geometria és a hiperbolikus sík Cayley–Klein modellje. Görbék, ívhossz.

B: Gráfok alkalmazása felső tagozaton, kombinatorikus geometria feladatok.

12. Kombinatorika

A: Összeszámlálási feladatok; binomiális tétel, szitaformula. Gráfok.

B: A kombinatorika tanítása az általános iskolában. Néhány kombinatorikai feladat.

13. Halmazelmélet

A: Megszámlálható és kontinuum számosságú halmazok, műveletek számosságokkal, paradoxonok.

B: Halmazok megjelenése, tárgyalása az általános iskolában.

14. Matematikai logika

A: Ítétekalkulus, logikai következmény, normálformák. Predikátumkalkulus: alapfogalmak és példák.

B: Elemi logika megjelenése az általános iskolában.

15. Valószínűségszámítás

A: A valószínűség definíciója és fontosabb tulajdonságai. Klasszikus és geometriai valószínűségi mezők. Feltételes valószínűség, események függetlensége. Véletlen változók, diszkrét és abszolút folytonos eloszlások. A várható érték és a szórás. A nagy számok törvénye és a centrális határeloszlás-tétel.

B: A valószínűségszámítás és statisztika tanítása az általános iskolában.