Mintafeladatsorok a zárószigorlathoz
matematikatanár mesterszak, 2010. ősze

1. feladatsor

1. Egy gráfban van záródó Euler-vonal (azaz megrajzolható egyetlen önmagába visszatérő vonallal). Mit tudunk mondani a gráf fokszámairól?

2. Mondja ki a páros tökéletes számokat leíró tételt.

3. Számítsa ki az $x - 2y + 4z = 10$ és az $x - 2y + 4z = 31$ egyenletű síkok távolságát.

4. Adott két, egymást metsző egyenes és egy rájuk nem illeszkedő pont. Szerkesszen kört, amely az adott egyeneseket érinti és az adott ponton átmegy. (Írja le a szerkesztés lépéseit és indokolja a helyességét.)

5. Mennyi a számossága az összes síkbeli kör halmazának?

6. Adja meg kanonikus alakban az $(1 - i)^{2010}$ komplex számot.

7. Mely p prímekre lesz $p + 7$ is prím?

8. Ábrázolja az $f(x) := \frac{3x+4}{4x+5}$ függvény grafikonját. Jellemezze a függvényt (értelmezési tartomány, értékkészlet, monotonitás, korlátosság).

9. Mutasson példát olyan $[0, 1] \to \mathbb{R}$ függvényre, amely a $[0, 1]$-en nem szigorúan monoton, de invertálható.

10. Egy (szabályos) kockát ismételten feldobunk. Mi a valószínűsége annak, hogy éppen a 4. dobásban dobunk először négyest?

2. feladatsor

11. Mit értünk egy mátrix inverzén? Mikor mondjuk, hogy két mátrix hasonló?

12. a) Írja fel a tízes számrendszerbeli 2010 számot a hármas számrendszerben! b) Írja fel a hármas számrendszerbeli 2010 számot a tízes számrendszerben!

13. Mit tud a mértani sor konvergenciájáról és az összegéről?

14. Adjon meg olyan sorozatot, amelynek (pontosan) három torlódási pontja van.

15. Van-e megoldása az $x^5 + x = 1$ egyenletnek a $[0, 1]$ intervallumon?

16. Számítsa ki a koordinátasíkok, valamint a $2x + 3y + 6z - 18 = 0$ egyenletű sík által határolt tetraéder térfogatát.

17. Adjon meg bijekciót a valós számok halmaza és a $(0, \infty)$ intervallum pontjai között.

18. Hány páros elemszámú részhalmaza van egy n elemű halmaznak?

19. Definiálja az $N(m, \sigma^2)$ normális eloszlást.

20. N termék között M darab selejtes (és $N - M$ darab jó) van. A termékek közül egyszerre kimarkolunk egy n ($n \leq N$) elemű mintát. Mekkora annak a valószínűsége, hogy éppen k ($k \leq n$) darab lesz a mintában selejtes?

3. feladatsor

21. Mit ért az alatt, hogy két szám kongruens modulo m?

22. Mit ért az alatt, hogy egy (a_n) számsorozat monoton növő?

23. Definiálja a Hamilton-kör fogalmát.

24. Határozza meg az $f(x) := x^3 + 3x + 2$ polinom gyökeinek négyzetösszegét.

25. Igaz-e, hogy ha az f ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú) függvény valamely a pontban differenciálható és $f'(a) = 0$, akkor a függvénynek a-ban helyi szélsőértéke van?

26. Egy háromszöget tükrözünk a súlypontjára. Hogyan aránylik a két háromszög metszetének területe az eredeti háromszög területéhez?

27. Tekintsük az összes $a + b \cdot \sqrt{2}$ alakú valós számokat, ahol a és b egész számok. Mi a számossága ennek a halmaznak?

28. Hány részhalmaza van egy n elemű halmaznak?

29. Jellemezze a páros gráfokat.

30. A $[0, 1]$ intervallumon egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint választunk két pontot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy távolságuk $\frac{1}{2}$-nél kisebb?

Megoldások

Az általunk adott megoldás egy lehetséges jó megoldás, de természetesen más gondolatmenetű, más szövegezésű jó megoldások is adhatók. Természetesen dolgozatíráskor esetleg fésületlenebb mondatok születnek; de valamilyen indoklást mindenképpen elvárunk.

1. Egy összefüggő gráfban pontosan akkor van zárt Euler-vonal, ha minden pont fokszáma páros (és legalább 2).

2. Egy (pozitív) páros szám pontosan akkor tökéletes szám, ha $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ alakú, ahol p és $2^p - 1$ is prímszámok.

Megjegyzés. Tökéletes számnak nevezzük azokat a pozitív egészeket, amelyek megegyeznek (pozitív) osztóik összegének kétszeresével (ilyen például a 28, $1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56$). Nem ismert, hogy van-e páratlan tökéletes szám.
A $2^p - 1$ alakú (p prím) prímszámok az ún. Mersenne-prímek.

3. Az $S : x - 2y + 4z = 10$ sík egy normálvektora az $(1, 2, 4)$ vektor, normálegyenlete

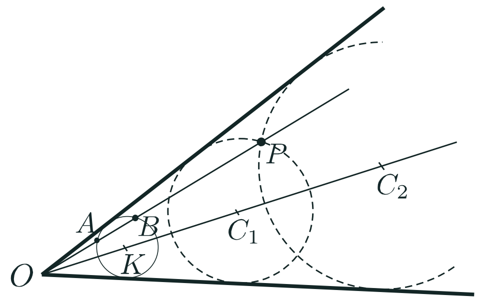
$$\frac{1}{\sqrt{21}}x - \frac{2}{\sqrt{21}}y + \frac{4}{\sqrt{21}}z - \frac{10}{\sqrt{21}} = 0.$$

Tudjuk, hogy ha a baloldalba behelyettesítjük egy pont koordinátáit, megkapjuk a pont és a sík (előjeles) távolságát.
Mivel az $x - 2y + 4z = 31$ sík normálvektora is $(1, 2, 4)$, a két sík párhuzamos. Ennek a síknak nyilván pontja a $(3, 0, 7)$. Ennek a pontnak a távolsága az S síktól

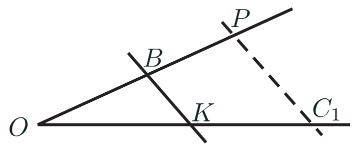
$$\frac{1}{\sqrt{21}} \cdot 3 + \frac{4}{\sqrt{21}} \cdot 7 - \frac{10}{\sqrt{21}} = \frac{21}{\sqrt{21}} = \sqrt{21},$$

a párhuzamosság miatt a két sík távolsága is $\boxed{\sqrt{21}}$.

4. Készítsünk ábrát!



Azoknak a köröknek, melyek mindkét egyenest érintik, a középpontja a szögfelezőn van. A K középpontú kör egy ilyen (tetszőleges sugarú) kör, mely az OP félegyenest az A és a B pontokban metszi. Mivel az OAK és az OPC_2 háromszögek, valamint az OBK és az OPC_1 háromszögek is hasonlóak, a keresett körök C_1 és C_2 középpontjainak O-tól való távolságát úgy kapjuk meg, hogy az OK szakaszt $\frac{OP}{OB}$, illetve $\frac{OP}{OA}$ arányban nagyítjuk.
Ez a nagyítás a szokásos módon végezhető el („negyedik arányos szerkesztése").



A feladat feltételei mellett mindig két ilyen kör van.

5. A síkbeli körök kölcsönösen egyértelműen jellemezhetők középpontjuk két koordinátájával és a sugarukkal, azaz egy olyan valós számhármassal, ahol az első két komponens tetszőleges, a harmadik pozitív.
Mivel a valós számok és a pozitív valós számok halmazának számossága is kontinuum (c), a keresett számosság $c \cdot c \cdot c = c$, azaz szintén kontinuum.

6. Trigonometrikus alakban $1 - i = \sqrt{2}(\cos \frac{-\pi}{4} + i \sin \frac{-\pi}{4})$, így hatványozva

$$(1-i)^{2010} = \left(\sqrt{2}(\cos \frac{-\pi}{4} + i \sin \frac{-\pi}{4})\right)^{2010} = (\sqrt{2})^{2010}\left(\cos 2010\frac{-\pi}{4} + i \sin 2010\frac{-\pi}{4}\right).$$

A sin és a cos függvények 2π szerint periodikusak és $2010 = 8 \cdot 251 + 2$, tehát

$$(1-i)^{2010} = (\sqrt{2})^{2010}(\cos 2\frac{-\pi}{4} + i \sin 2\frac{-\pi}{4}) = 2^{1005}(\cos \frac{-\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi}{2}) = -2^{1005}i.$$

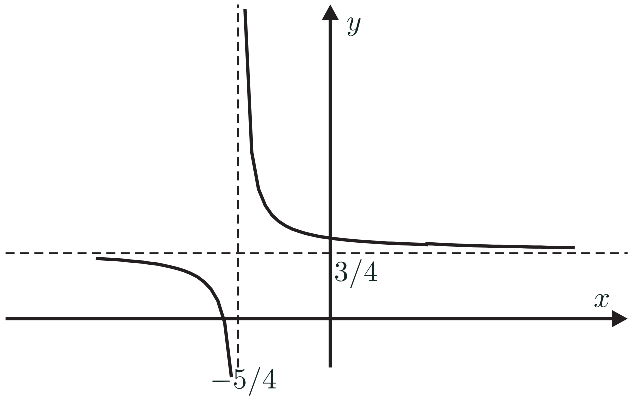
7. Ha a p prím páros, akkor csak 2 lehet, de ekkor $p + 7 = 9$ nem prím. Ha a p prím páratlan, akkor $p + 7$ páros, azaz $p + 7 = 2$, ebből $p = -5$, ami nem megoldás. Tehát ilyen prímszám nincs.

Megjegyzés. Ha az összes egész számok körében értelmezzük a feladatot, a -5 az egyetlen megoldás.

8. Mivel

$$\frac{3x+4}{4x+5} = \frac{3}{4}\frac{x+\frac{4}{3}}{x+\frac{5}{4}} = \frac{3}{4}\frac{x+\frac{5}{4}+\frac{1}{12}}{x+\frac{5}{4}} = \frac{3}{4}\left(1+\frac{\frac{1}{12}}{x+\frac{5}{4}}\right),$$

a függvényt az ismert $\frac{1}{x}$ grafikonjának lineáris transzformációjával ábrázolhatjuk.
Az $\frac{1}{x}$ hiperbolát $\frac{5}{4}$ egységgel jobbra toljuk; y irányban nyújtunk $\frac{1}{12}$ arányban; 1 egységgel felfelé toljuk, majd a grafikont még egyszer nyújtjuk y irányban $\frac{3}{4}$ arányban.



Az ábráról leolvasható, hogy az értelmezési tartomány $\mathbb{R} \setminus \{\frac{-5}{4}\}$, az értékkészlet $\mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{4}\}$, a függvény nem korlátos, a $(-\infty, \frac{-5}{4})$ és a $(\frac{-5}{4}, \infty)$ félegyeneseken egyaránt szigorúan növő.

Megjegyzés. Mondhattuk volna azt is, hogy a fenti átalakítás alapján a grafikon biztosan hiperbola, az aszimptotái is könnyen látszanak, csak az a kérdés, hogy a hiperbola milyen helyzetű; mivel például $x \to \infty$ esetén $\frac{3}{4}\frac{x+\frac{4}{3}}{x+\frac{5}{4}}$ alulról tart $\frac{3}{4}$-hez (mert a nevező nagyobb, mint a számláló), a hiperbola növekvő.
Természetesen csinálhattunk volna teljes függvényvizsgálatot is, határérték-számítással és differenciálással.

9. A szokásos példa:

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ -x, & \text{ha } x \text{ irracionális,} \end{cases} \qquad 0 \le x \le 1.$$

Ez a függvény kölcsönösen egyértelmű, hiszen ha $x \neq y$ mindketten racionálisak (vagy irracionálisak), akkor nyilván $f(x) \neq f(y)$; ha pedig az egyik racionális, a másik nem, akkor $f(x)$ és $f(y)$ is ilyenek, tehát ismét $f(x) \neq f(y)$. Ugyanakkor a függvény egyetlen intervallumon sem monoton (mert minden intervallumban vannak racionális és irracionális számok is).
Egy másik jó példa:

$$f(x) := \begin{cases} 2x, & \text{ha } 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 177 - 3x, & \text{ha } \frac{1}{2} < x \le 1; \end{cases}$$

ez a függvény az egyik részintervallumon növekszik, a másikon csökken, tehát az egészen nem monoton.

10. A kérdéses esemény pontosan akkor következik be, ha az első négy dobás nem négyes és a negyedik négyes. A „négyes” dobásának valószínűsége $\frac{1}{6}$, a „nem négyes” dobásának valószínűsége $\frac{5}{6}$. Az „és” kapcsolat miatt a valószínűségek összeszorzódnak, így a keresett valószínűség

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}.$$

11. Egy A négyzetes ($n \times n$-es) mátrix inverzén azt a B mátrixot értjük, amelyre $A \cdot B = B \cdot A = I_n$ (itt $\cdot$ a mátrix-szorzás és I_n az $n \times n$-es egységmátrix). (Az I_n $n \times n$-es egységmátrix főátlójában minden elem 1, az összes többi eleme 0.)
Az A és a B négyzetes mátrixok hasonlóak, ha van olyan négyzetes C mátrix, hogy $A = C^{-1} \cdot B \cdot C$ (C^{-1} a C mátrix inverze).

Megjegyzés. Egy négyzetes mátrix pontosan akkor invertálható, ha determinánsa nem 0; ha $A \cdot B = I_n$, akkor $B \cdot A = I_n$ is teljesül; a mátrixok hasonlósága ekvivalenciareláció.
A nem négyzetes mátrixok esetében csak bal-, illetve jobboldali inverz definiálható.

12. a) $2010_{(10)} = 2202110_{(3)}$, mert

$$2010 = 2 \cdot 729 + 2 \cdot 243 + 2 \cdot 27 + 1 \cdot 9 + 1 \cdot 3 = 2 \cdot 3^6 + 2 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3.$$

Az előállítást könnyen megkaphatjuk az alábbi módon:

$$\begin{array}{r|l} 2010 & 0 \\ 670 & 1 \\ 223 & 1 \\ 74 & 2 \\ 24 & 0 \\ 8 & 2 \\ 2 & 2 \\ 0 & \end{array}$$

A bal oldali oszlopban mindig 3-mal osztunk, és a jobb oldali oszlopba írjuk a maradékot; a jobb oldali oszlopot alulról fölfelé olvasva kapjuk a hármas számrendszerbe átírt szám jegyeit.
A b) esetben

$$2010_{(3)} = 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 0 \cdot 1 = 2 \cdot 27 + 1 \cdot 3 = 57.$$

13. Mértani sornak nevezzük a

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots$$

sort, a q (valós vagy akár komplex) szám a sor hányadosa. A mértani sor pontosan akkor konvergens, ha $|q| < 1$; ekkor az összege $\frac{1}{1-q}$.

14. Egy ilyen sorozat lehet például az

$$a_n := \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ 3-as maradéka 1;} \\ 1, & \text{ha } n \text{ 3-as maradéka 2;} \\ 113, & \text{ha } n \text{ osztható 3-mal.} \end{cases}$$

A sorozat jól definiált; az $n = 3k$, $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$ indexsorozatokhoz tartozó részsorozatok külön-külön konvergensek.

15. Legyen $f(x) := x^5 + x$, ez a függvény folytonos a $[0, 1]$-en, Mivel $f(0) = 0$ és $f(1) = 2$, a folytonosság miatt a függvény minden 0 és 2 közötti értéket, így az 1 értéket is fölveszi valahol az intervallum belsejében, tehát az egyenletnek van (legalább egy) valós megoldása a $[0, 1]$-en.

Megjegyzés. Az intervallumon folytonos függvényeknek ezt a tulajdonságát (két értéke közötti bármely értéket fölvesz), Bolzano–Darboux tulajdonságnak nevezzük.

16. Messe a kérdéses sík az x, y, z tengelyeket rendre az A, B, C pontokban. Nyilván

$$A = (9, 0, 0), \quad B = (0, 6, 0), \quad C = (0, 0, 3).$$

A kérdéses tetraéder negyedik csúcsa az O origó, az itt összefutó élei páronként merőlegesek. A tetraéder térfogata (mint minden gúláé) $\frac{1}{3} \cdot$ (alapterület) $\cdot$ (magasság).
A mi tetraéderünk alaplapja az AOB derékszögű háromszög, ennek területe $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6 = 27$, magassága az OC szakasz, melynek hossza 3, így a keresett térfogat 27.

17. Legyen például $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto 2^x$. Értelmezési tartománya az $\mathbb{R}$, értékkészlete a $(0, \infty)$ félegyenes, és szigorúan monoton növekedő, tehát kölcsönösen egyértelmű hozzarendelés.

Megjegyzés. Kicsit precízebben: belátható, hogy

$$\lim_{x\to-\infty} 2^x = 0^+ \quad \text{és} \quad \lim_{x\to\infty} 2^x = \infty.$$

Ebből a függvény folytonossága (s így Bolzano–Darboux tulajdonsága) alapján adódik, hogy az értékkészlet csakugyan a $(0, \infty)$.

18. A kérdéses számot úgy kapjuk, hogy összeszámoljuk a 0 elemű, 2 elemű, $\ldots 2 \cdot \left[\frac{n}{2}\right]$ elemű részhalmazokat, azaz a keresett szám

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]} = 2^{n-1}.$$

Az, hogy az összeg éppen 2^{n-1}, azt jelenti, hogy ugyanannyi páros elemszámú részhalmaza van egy halmaznak, mint páratlan elemszámú. (Tudjuk, hogy az összes részhalmaz száma 2^n.) Ezt könnyen beláthatjuk, ha n páratlan, hiszen ekkor a páros elemszámú részhalmazok kölcsönösen egyértelműen párba állíthatók a (páratlan elemszámú) komplementerükkel. Ha az n páros, fessük az egyik elemet (legyen ez x) pirosra, és a H részhalmaz párja legyen $H \setminus \{x\}$, ha $x \in H$, és $H \cup \{x\}$, ha $x \notin H$; ez is kölcsönösen egyértelmű párba állítás a páros és a páratlan elemszámú részhalmazok között.

19. Az $X : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változót $N(m, \sigma^2)$ normális eloszlásúnak nevezünk, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Megjegyzés. Természetesen az eloszlás várható értéke m és szórása σ. Az $m = 0$, $\sigma = 1$ esetben kapjuk a standard normális eloszlást.

20. A feladat szempontjából „kedvező esetnek” számít, ha pontosan k darab selejtes terméket választunk az M közül (ezt $\binom{M}{k}$-féleképpen tehetjük meg); és ettől függetlenül $n - k$ darab jót is ki kell választanunk az $N - M$ közül (ezt pedig $\binom{N-M}{n-k}$-féleképpen tehetjük meg). Az „összes eset” száma annyi, ahányféleképpen az n elemű mintát kiválaszthatjuk az N termékből, így a keresett valószínűség

$$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

21. Legyenek a, b, c egész számok. $a \equiv b \pmod{c}$ pontosan akkor, ha van olyan k egész szám, hogy $a - b = k \cdot c$ (azaz, ha $c \mid a - b$).

Megjegyzés. A kongruencia ekvivalenciareláció. Lehetséges definíció az is, ha a, b, c tetszőleges számok, k ekkor is egész.

22. Az (a_n) sorozat monoton növő, ha minden $n \in \mathbb{N}$ indexre $a_n \leq a_{n+1}$ teljesül.

23. Hamilton-körnek hívjuk egy gráf olyan körét, amely minden csúcson pontosan egyszer halad át. (Formalizáltan: a gráf csúcsait meg tudjuk számozni: C_1, C_2, $\ldots$, C_n (minden csúcs pontosan egyszer szerepel) úgy, hogy minden $1 \leq k \leq n-1$ esetén C_k és C_{k+1}, valamint $C_n$és C_1 között is van él.)

24. A polinom gyöktényezős alakjából

$$x^3 + 0x^2 + 3x + 2 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

leolvashatók a Viète-formulák:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -0; \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 3; \quad x_1x_2x_3 = -2.$$

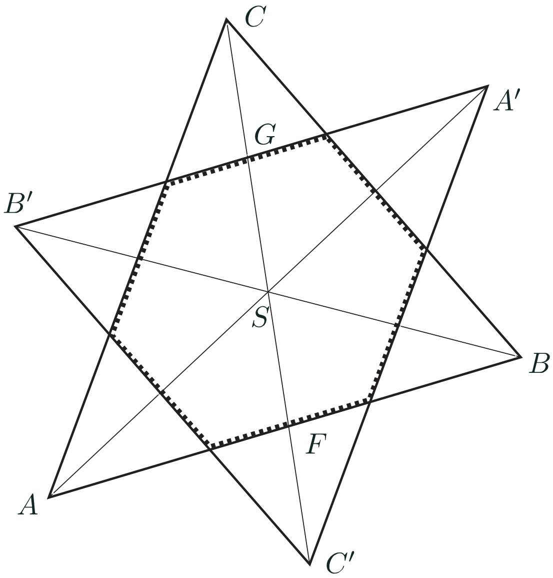
Ebből

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = -6.$$

25. Nem szükségképpen igaz, például az $f(x) := x^3$ függvény esetén $f'(0) = 0$, de a függvénynek nincs szélsőértéke (hiszen szigorúan növő).

Megjegyzés. Az $f'(a) = 0$ mellett további feltételek (például az f' függvény jelváltása) már elegendőek a szélsőérték létezéséhez (de általában nem szükségesek).

26. Az ábrán az ABC az eredeti, az $A'B'C'$ a tükrözött háromszög; a kérdéses terület a szaggatott vonallal jelölt hatszög, melyet az eredeti háromszögből úgy kapunk, hogy a csúcsoknál 3 kis háromszöget levágunk.



A tükrözéskor $SF = SG$ és $B'A' \parallel AB$. Mivel $SF = \frac{1}{3}CF$, így $CG = \frac{1}{3}CF$; tehát a C csúcsnál levő (levágandó) kis háromszög $\frac{1}{3}$ arányban hasonló az eredeti háromszöghöz, területe annak $\frac{1}{9}$-e. A hatszög területe tehát

$$T - 3 \cdot \frac{1}{9}T = \frac{2}{3}T,$$

ahol T az ABC háromszög területe.

27. A halmaz lényegében az egész számokból alkotott számpárok halmaza, ennek számossága $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$, azaz szintén megszámlálható.
(Az egész számokat rendezzük sorozatba: 0, 1, -1, 2, -2, …; ezután a számpárokat egy „jobbra és lefelé végtelen táblázatba” rendezhetjük. A táblázat elemeit a szokásos módon „átlósan” egy sorozatba tudjuk rendezni.)

28. Az n elemű halmaz összes részhalmazainak száma

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n .$$

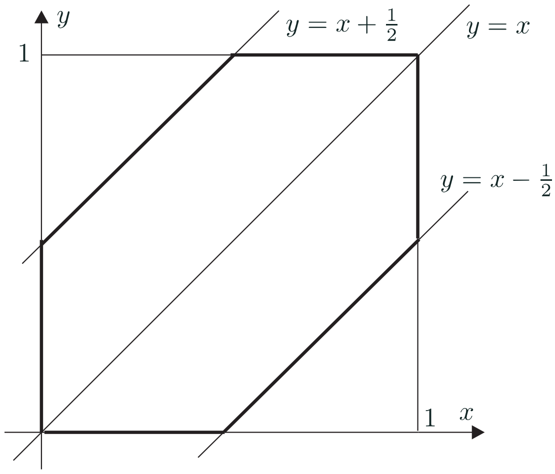
Az összes részhalmazt megszámoljuk, ha megszámoljuk előbb a 0 elemű, majd az 1 elemű, 2 elemű, …, n elemű részhalmazokat, ez adja az egyenlet bal oldalát. Másrészt, egy részhalmazt úgy kaphatunk, hogy minden elemet (egymástól függetlenül) vagy kiválasztunk, vagy nem; ez elemenként 2 lehetőség, innen a jobb oldal.

29. Egy gráf páros, ha csúcsai két osztályba sorolhatók úgy, hogy a gráf minden élének egyik végpontja az egyik, másik végpontja a másik osztályban van.
Egy gráf pontosan akkor páros, ha minden köre páros hosszúságú.

30. A két szám legyen x és y; az (x, y) pont az egységnégyzetbe esik és a feladat feltételei szerint annak a valószínűsége, hogy az (x, y) pont az egységnégyzet valamely részhalmazába esik, az illető részhalmaz területével arányos. A feladat szerinti „kedvező esetben”

$$|x - y| < \tfrac{1}{2}, \qquad \text{azaz} \qquad x - \tfrac{1}{2} < y < x + \tfrac{1}{2};$$

ez akkor teljesül, ha az (x, y) pontot a jelölt hatszögben választjuk:



A keresett („geometriai”) valószínűség a hatszög és az egységnégyzet területének aránya, azaz $\frac{3}{4}$.