Tudáselemek a matematikus, alkalmazott matematikus és matematikatanár mesterszakok felvételijén

1. Kötelező tudáscsoport (összesen 44 pont)

1.1.1. Mátrixok, vektorterek (2 pont)
Műveletek mátrixokkal. Determináns. A determinánsok szorzástétele, mátrixok inverze. Lineáris egyenletrendszerek, Gauss-elimináció, Cramer–szabály. Vektortér, altér, generátorrendszer. Lineárisan független vektorrendszerek, bázis, dimenzió. Vektorrendszer, ill. mátrix rangja. Kronecker−Capelli-tétel. Rangszámtétel.

1.1.2. Lineáris transzformációk és kvadratikus alakok (2 pont)
Lineáris leképezések és transzformációk. Magtér, képtér, dimenziótétel. Lineáris leképezés, ill. transzformáció mátrixa. Bázisátmenet, hasonló mátrixok. Szimmetrikus bilineáris alak, kvadratikus alak, kanonikus alakra hozás. Valós kvadratikus alakok: tehetetlenségi tétel, definitség.

1.1.3. Számelméleti alapok 1. (2 pont)
A számelmélet alaptétele. Lineáris diofantoszi egyenletek. A modulo n kongruencia, maradékosztály-gyűrűk. Lineáris kongruenciák és kongruenciarendszerek. Euler, Fermat és Wilson tételei. Számelméleti függvények. Pitagoraszi számhármasok. Prímszámok.

1.1.4. Polinomok (2 pont)
Komplex számok. Egyértelmű irreducibilis felbontás test fölötti polinomgyűrűkben. Bézout tétele. A klasszikus algebra alaptétele, irreducibilis valós, ill. komplex polinomok. A harmad- és a negyedfokú polinomok zéróhelyei. Schönemann−Eisenstein-tétel. Polinomok közös és többszörös zéróhelyei. A modulo f(x) kongruencia polinomgyűrűben. Véges testek konstrukciója. Szimmetrikus polinomok.

1.1.5. Integritástartományok (2 pont)
Integritástartományok (polinomgyűrűk, a Gauss-egészek és az Euler-egészek gyűrűje). Oszthatóság integritástartományokban. Euklideszi gyűrűk, főideálgyűrűk, egyértelmű irreducibilis felbontás.

1.1.6. Absztrakt algebrai alapok (2 pont)
Csoport, részcsoport, izomorfizmus, homomorfizmus. Ciklikus csoportok, permutációcsoportok. Lagrange-tétel. Normálosztó, faktorcsoport. Homomorfiatétel. Egyszerű csoportok.

1.2.1. Sorozatok (2 pont)
Valós számok fogalma. Számsorozatok. Monotonitás, korlátosság. Számsorozatok határértéke. Műveletek és határérték. Egyenlőtlenségek és határérték. Részsorozat, átrendezés, fésűs egyesítés. Nevezetes sorozatok. Rekurzív sorozatok. Divergens sorozatok. Torlódási pont. Bolzano−Weierstrass-tétel. Sorozat alsó és felső határértéke. Cauchy-féle belső konvergenciakritérium. Topológiai alapismeretek a számegyenesen és az R^k térben. Sorozatok az R^k térben.

1.2.2. Sorok és függvénysorok (2 pont)
Számsorok; műveletek sorokkal. Mértani sor, harmonikus sor. Csoportosítás, átrendezés, szorzatsor. Abszolút és feltételes konvergencia. Konvergenciakritériumok. Függvénysorozatok, függvénysorok, hatványsorok. Egyenletes konvergencia. Cauchy−Hadamard-tétel.

1.2.3. Függvények folytonossága (2 pont)
Folytonosság pontban, intervallumon, egyenletes folytonosság. A közbenső értékekről szóló tétel. Műveleti szabályok. Az egyenletes konvergencia és a folytonosság kapcsolata. Hatványsor összegfüggvénye, összetett függvény, inverzfüggvény folytonossága. Elemi függvények; a hatványozás kiterjesztése valós kitevőkre. Véges zárt intervallumon folytonos függvény tulajdonságai. Függvény határértéke. Nevezetes határértékek. A folytonosság és a határérték kapcsolata. A határérték Heine-és Cauchy-féle definíciója. Féloldali határérték.

1.2.4. Differenciálszámítás (2 pont)
A differenciálhatóság fogalma. Deriválási szabályok, a derivált tulajdonságai. Elemi függvények deriválása. Középértéktételek. Függvényvizsgálat (szélsőérték, monotonitás, konvexitás, aszimptota).

L'Hospital-szabályok. Taylor-formula. Taylor-sor; néhány elemi függvény Taylor-sora. A határátmenet és a differenciálás kapcsolata. Hatványsor tagonkénti differenciálása.

1.2.5. Integrálszámítás (2 pont)
Primitív függvény, a primitív függvény keresésének módszerei. Riemann-integrál. Darboux-tétel. Kritériumok (oszcillációs, Riemann-kritérium). Monoton vagy folytonos függvények integrálhatósága. Newton−Leibniz-formula. Műveleti szabályok. Az integrálfüggvény folytonossága, differenciálhatósága. Az egyenletes konvergencia és az integrálhatóság. Hatványsor tagonkénti integrálhatósága.

1.2.6. Az integrál alkalmazásai (2 pont)
Improprius integrálok. Integrálkritérium sorokra. Az integrálok alkalmazásai (terület, ívhossz, felszín, térfogat). Közönséges differenciálegyenletek. Elemi úton megoldható differenciálegyenletek.

1.2.7. Többváltozós függvények (3 pont)
Az R^k tér. Metrika, norma, egyenlőtlenségek. Többváltozós függvények. Folytonosság, határérték. Parciális, totális, iránymenti differenciálás. Középértéktételek, Taylor-formula. Szélsőérték. Implicitfüggvény-tétel. Jordan-mérték. Többváltozós függvény Riemann-integrálhatósága. Integrálhatósági kritériumok. A szukcesszív integrálás módszere. Integráltranszformáció. Görbementi integrál. A kvadratúraprobléma. A többváltozós integrálok alkalmazásai (terület, felszín, térfogat). Elemi úton integrálható differenciálegyenletek, egzakt differenciálegyenletek.

1.3.1. Szintetikus geometria (3 pont)
Axiomatikus alapok (illeszkedés, rendezés, metrika, tükrözés). Izometriacsoport. Osztályozási tétel sík- és térizometriákra. Izometriák előállítása tükrözésekből. Tükrözések, forgatások, eltolások, csavarmozgások tulajdonságai. Szimmetriacsoport. Szabályos alakzatok (poligonok és poliéderek). Hasonlóságok. Fixpont létezése, dilatáció. Affinitások, affinitások alaptétele. Inverzió.

1.3.2. Analitikus geometria (3 pont)
Kötött vektor, szabad vektor, helyvektorok. Sík és tér koordinátázása, koordináta-transzformáció, bázisváltás, determináns, sík és tér irányítása. Skaláris szorzat, vektoriális szorzat, vegyes szorzat. Terület- és térfogatformák.

1.4.1. Halmazelmélet (2 pont)
Halmazok megadása, halmazműveletek, hatványhalmaz. Halmazok ekvivalenciája. Számosságok és összehasonlításuk, műveletek számosságokkal. Rendezett halmazok, hasonlóság, rendtípus, jólrendezett halmazok. Kiválasztási axióma. Transzfinit indukció és rekurzió. Rendszámok és összehasonlításuk.

1.4.2. Matematikai logika (2 pont)
Logikai műveletek, az ítéletkalkulus formulái. Igazságfüggvények, Boole-függvények. Normálformák. Levezetések. Az ítéletkalkulus teljességi tétele. Kompaktsági tétel. Elsőrendű nyelvek és struktúrák. Az elsőrendű logika kifejezései és formulái. Levezetések, ellentmondás-mentesség. Teljességi és nemteljességi tétel.

1.4.3. Kombinatorika (3 pont)
Binomiális és polinomiális tétel. Alapvető leszámlálási eljárások. Szitaformula. Generátorfüggvények módszere. Rekurzív sorozatok. Gráfelméleti alapfogalmak. Speciális gráfok, tulajdonságaik. Gráfok színezése, az ötszíntétel. Páros gráfok és független élrendszerek, párosítási algoritmusok, Kőnig tétele. Euler-vonal, Hamilton-kör. Síkba rajzolható gráfok jellemzése. Fák, Kruskal-algoritmus.

1.5.1. A valószínűségszámítás klasszikus problémái (2 pont)
Diszkrét valószínűségi modellek, szerencsejátékok, mintavételi eljárások. Nevezetes egydimenziós diszkrét eloszlások. A valószínűség és tulajdonságai, valószínűségi mezők. A szitaformula és általánosításai. Független ismétlések. Bernoulli nagyszámtörvénye. A normális integrál, a Stirling-formula; a centrális határeloszlás tétele és alkalmazásai.

1.5.2. Véletlen változók (2 pont)
Diszkrét változók és eloszlásaik. Véletlen permutációk. Feltételes valószínűség, függetlenség, a teljes valószínűség tétele, Bayes tétele. Geometriai valószínűség. Folytonos véletlen változók. Véletlen változók numerikus jellemzői. A nagy számok törvénye. Generátorfüggvények, elágazó folyamatok, kihalási tétel. Kvantilisfüggvény, szimuláció.

----

2. Választható tudáscsoport (mindegyik tudáselem 2 pont; matematikus és alkalmazott matematikus MSC-n legfeljebb 26 pont, matematikatanár MA-n legfeljebb 16 pont választható)

2.1.1. Számelméleti alapok 2.
Magasabb fokú kongruenciák. Primitív gyökök és indexek. Négyzetes maradékok, Legendre-szimbólum. Természetes számok fölbontása két négyzetszám összegére. A prímszámok reciprokaiból álló sor divergenciája, a prímszámok eloszlása.

2.1.2. Absztrakt algebra
Gyűrű, ideál, faktorgyűrű. Test, prímtest, karakterisztika. Véges testek. Direkt felbontás csoportokban és gyűrűkben, véges Abel-csoportok, maradékosztály-gyűrűk. Egyszerű csoportok és gyűrűk. Főideálgyűrűk faktortestei. Integritástartomány hányadosteste. Egyszerű, ill. véges fokú testbővítések. Polinom felbontási teste. Általános algebrai konstrukciók.

2.1.3. Csoportelmélet 1.
Osztályegyenlet, Cauchy-tétel, Sylow-tételek. Véges p-csoportok. Nilpotens, illetve feloldható csoportok. A véges nilpotens csoportok jellemzése.

2.1.4. Csoportelmélet 2.
Permutációcsoportok, a Cayley-ábrázolás általánosítása. Csoport automorfizmusai, szemidirekt szorzat. Konjugáltság, normalizátor, centralizátor, centrum. Szabad csoportok, definiáló relációk. Szabad Abel-csoportok. A végesen generált Abel-csoportok alaptétele. Lineáris csoportok.

2.1.5. Lineáris algebra
Alterek direkt összege, invariáns altér, sajátaltér. Euklideszi terek. Szimmetrikus és ortogonális transzformációk, mátrixok. Főtengely-transzformáció, spektráltétel. Mátrixok hasonlósága. Mátrixok Jordan-féle normálalakja. Cayley−Hamilton-tétel.

2.1.6. Alkalmazott algebra
Véges testek és algebrai kódok. Kriptográfia. Prímtesztek, RSA-titkosítás. Véges automaták és reguláris nyelvek.

2.1.7. Testelmélet
Felbontási test, normális testbővítés, tökéletes testek. Galois-csoport, a Galois-elmélet főtétele. Radikálbővítés, Ruffini−Abel-tétel. Algebrai feltétel geometriai alakzat szerkeszthetőségére körzővel és vonalzóval.

2.1.8. Számelmélet és alkalmazásai
Véges és végtelen lánctörtek és alkalmazásuk (Pell-egyenlet). Véletlen sorozatok generálása. Algebrai számtestek, kvadratikus testek és alkalmazásuk (pl. az $x^3+y^3=z^3$ egyenlet). Transzcendens szám létezése. A Riemann-féle ζ-függvény és alkalmazásai. Prímtesztek, faktorizáció.

2.1.9. Kódoláselmélet
Shannon tétele. Véges testek, minimálpolinom. Lineáris kódok, generátor- és paritásellenőrző mátrix. Hamming-, Hadamard-, Golay- és Reed−Müller-kódok. Kódok minimális távolságára vonatkozó korlátok. Ciklikus kódok. BCH-kódok. Reed−Solomon-kódok. QR (kvadratikus maradék)-kódok. Hibajavító kódok a digitális audiotechnikában.

2.1.10. Komputeralgebra
Műveletek számokkal. Függvényábrázolás. Egyéb adattípusok. Egyenletrendszerek pontos, illetve közelítő megoldása. Egyszerű MAPLE-programok: elágazások, eljárások. Alkalmazások a lineáris algebrában, számelméletben, analízisben, geometriában és kombinatorikában.

2.2.1. Komplex függvénytan 1.
Komplex függvények differenciálhatósága, a Cauchy−Riemann-egyenletek. Harmonikus függvények. Törtlineáris függvények. Nevezetes egész függvények: az exponenciális és a trigonometrikus függvények, hatványsoraik és inverzeik. A görbementi integrál. A Cauchy-féle integráltétel és integrálformula, Morera tétele.

2.2.2. Komplex függvénytan 2.
Analitikus függvények és tulajdonságaik: hatványsorba fejtés, zéróhelyek, a maximumtétel. Az algebra alaptétele. Analitikus függvények egyenletesen konvergens sorozatai. Laurent-sorok, az izolált szinguláris helyek osztályozása. A reziduumtétel, a reziduumszámítás alkalmazásai határozott integrálok kiszámítására.

2.2.3. Lebesgue-integrál
Mérték, mértéktér, mérték kiterjesztése félalgebráról szigma-algebrára, külső mérték. Mérhető és integrálható függvények. Az integrál és tulajdonságai. Konvergenciatételek: Lebesgue tételei, Fatou lemmája. Borel-mértékek, regularitás, Luzin-tétel. Pozitív Borel-mértékek megadása az egyenesen és R^n-en, a Lebesgue-mérték. A Riemann- és a Lebesgue-integrál kapcsolata. Mértékterek szorzata, Fubini-tétel, végtelen sok valószínűségi mértéktér szorzata.

2.2.4. Fourier-sorok
A Fourier-sor fogalma, példák. A Fourier-sor lokális konvergenciája, Fejér és Lebesgue tételei. A Dini- és Dini−Lipschitz-feltételek és következményeik, lokalizációs tétel. A sor összegzése számtani közepekkel. Fejér példája. Normában szummálhatóság. A Fejér- és a Dirichlet-féle magfüggvények. Konjugált sor. Abszolút konvergencia. Approximáció trigonometrikus polinommal.

2.2.5. Funkcionálanalízis
Az L^p terek duálisai; Banach-tér reflexivitása. Folytonos függvények terének duálisa. Hahn−Banach-tétel, Banach-limesz. A nyílt leképezések tétele, a zárt-gráf-tétel, Banach−Steinhaus-tétel. Ortonormált rendszerek Hilbert-terekben, Bessel-egyenlőtlenség, Parseval-azonosság, a teljesség jellemzése, Hilbert-tér dimenziója. Stone−Weierstrass-tétel. A trigonometrikus rendszer teljessége.

2.2.6. Közönséges differenciálegyenletek
A kezdetiérték-probléma megoldásának létezése és egyértelműsége, folytathatósága. Magasabb rendű lineáris differenciálegyenletek és -rendszerek megoldásainak tere; alaprendszer, alapmátrix, Wronski-determináns. Konstansvariáció. Konstans együtthatós egyenletek és rendszerek. Autonóm rendszerek. Stabilitási eredmények.

2.2.7. Parciális differenciálegyenletek
Elsőrendű kvázilineáris egyenletek. Másodrendű lineáris egyenletek osztályozása. Húrok rezgései. Fourier-módszer. Membránok rezgései. Többdimenziós alakzatok rezgései. Hővezetési és diffúziós problémák. Maximum-elv. Poisson-integrál. Laplace-egyenlet. Harmonikus függvények. Peremérték-feladatok.

2.2.8. Dinamikus rendszerek
Poincaré–Bendixson-tétel. Nyeregpont-tulajdonság, invariáns sokaságok. Periodikus megoldás stabilitása, orbitális stabilitás. Stabilitáselmélet. Strukturális stabilitás. Bifurkációelmélet. Diszkrét dinamikus rendszerek, Poincaré-leképezések, kaotikus viselkedés.

2.3.1. Görbék differenciálgeometriája
Görbék három dimenzióban: paraméterezés, ívhossz, görbület, simulósík, simulókör, torzió, Frenet-formulák, a görbék alaptétele, speciális görbék. Felületi görbék, geodetikusok.

2.3.2. Felületek differenciálgeometriája
A felület definíciója, paramétervonalak, érintősík, vektormezők, iránymenti derivált, kovariáns deriválás, Christoffel-szimbólumok, párhuzamosság. Felületi görbék, geodetikusok, differenciálegyenletek és extremalitás. Gauss- és Minkowski-görbület, Gauss−Bonnet-tétel. Theorema egregium.

2.3.3. A projektív és a gömbi geometria alapjai
Axiómarendszerek. Projektív geometria: a projektív tér, a projektív transzformációcsoport és nevezetes részcsoportjai. Harmonikus pontnégyes. Homogén koordináták. Konjugáltság, pólus, poláris. Másodrendű görbék. Pascal-, Brianchon- és Steiner-tétel. Másodrendű felületek; főtengely-transzformáció. Gömbi geometria: metrika, trigonometria, területmérés, izometriacsoport és ennek diszkrét részcsoportjai.

2.3.4. Hiperbolikus geometria
A hiperbolikus geometria axiomatikus tárgyalása, a párhuzamosság, párhuzamossági szög, terület és szögdefektus, körök, horociklusok, ekvidisztáns görbék, Poincaré-modell.

2.3.5. Konvex geometria
Caratheodory-tétel, Radon-tétel, Helly-tétel. Konvex halmazok polaritása. Hausdorff-metrika. Konvex halmazok térfogata, felszíne. Minkowski-összeg, Brunn−Minkowski-egyenlőtlenség. Izoperimetrikus tétel. Poliéderek algebrai leírása, a lineáris programozás alapfeladata, Farkas-lemma. Politópok laphálója, Euler-tétel, felsőkorláttétel. Politópok kombinatorikus típusa. Steinitz tétele.

2.3.6. Számítógépes geometria
Algoritmikus geometria: poligonok és pontrendszerek triangulálása, konvex burkot kereső algoritmusok, poliéderek reprezentációja, DV-cella keresése. A geometriai statisztika alapjai: geometriai valószínűség (sűrűség és mérték pont-, egyenes-, pontpár- és egyenespár-halmazokon). Integrálgeometria (elemi integrálformulák hosszra, területre és térfogatra vetületekből és metszetekből, izoperimetrikus tétel). Lagrange-görbék, Bézier-görbék, összetett Bézier-görbék. B-szplájnfügvények, B-szplájngörbék. Bernstein-polinomok. Bézier-háromszögfelületek és -négyszögfelületek.

2.5.1. A matematikai statisztika alapjai
Mintavételezés, alapstatisztikák. Pontbecslések; torzítatlanság, konzisztencia, hatásosság. A maximum-likelihood becslés. Konfidenciaintervallumok. Statisztikai próbák, hipotézisvizsgálat. Első- és másodfajú hibák, erőfüggvény; az u-, t- és F-próba. Lineáris regresszió.

2.5.2. Valószínűségelmélet
Kolmogorov-féle valószínűségi mezők, mértékek szigma-additivitása, folytonossága. Véletlen változók és vektorváltozók, diszkrét, abszolút folytonos és szinguláris eloszlások. Események, eseményosztályok és véletlen változók függetlensége. Szorzat-valószínűségi mezők. Várható érték, szórás, momentumok, kovariancia, korreláció; lineáris függetlenség. A többdimenziós normális eloszlás. Sztochasztikus, majdnem biztos és L^p-konvergencia. Kolmogorov és Etemadi tételei. A Kolmogorov-féle 0-1-törvény és következményei. A centrális határeloszlás-tétel: Lévy, Ljapunov és Lindeberg tételei.

2.5.3. Statisztikai programcsomagok
AZ SPSS számítógépes statisztikai programcsomag; alkalmazásai adathalmazok vizsgálatára: bevitel, adatmanipuláció, ábrák, grafikonok tervezése; alapstatisztikák számítása. Véletlenszám-generálás. Illeszkedésvizsgálatok, grafikus tesztek; diszkrét homogenitás- és függetlenségvizsgálat. Átlagok tesztelése, összehasonlítása, gyakorisági táblázatok. Egy- és többváltozós regresszióanalízis, szórásanalízis; faktor- és klaszteranalízis. Idősor-analízis.

2.6.1. Numerikus módszerek
Lineáris egyenletrendszerek megoldása Gauss-eliminációval, főelem-kiválasztás. Mátrixok invertálása Jordan-eliminációval. Mátrixok trianguláris és Cholesky-felbontása. A sajátérték-feladat. Mátrixok unitér hasonlósági transzformációja trianguláris alakra, főtengelytétel és Gersgorin körtétele. A hatvány-iteráció. Az RHR-algoritmus. Vektor- és mátrixnormák. Mátrixsorozatok és sorok konvergenciája. Lineáris egyenletrendszerek megoldása iterációval: a Jacobi- és Gauss–Seidel-iteráció. Polinomok gyökeinek korlátai. A Newton–Raphson-módszer. Függvények közelítése interpolációval: Lagrange, Newton és Hermite interpolációs formulái. Függvények közelítése a legkisebb négyzetek módszerével. A diszkrét Fourier-transzformáció. Numerikus integrálás: Newton−Cotes- és Gauss-típusú kvadratúraformulák. Ortogonális polinomrendszerek.

2.6.2. Operációkutatás
Lineáris programozási feladatra vezető problémák. Optimumszámítási modellek. A lineáris programozás általános feladata, standard feladat. A szimplex-módszer. A kétfázisú módszer. A szimplex-algoritmus változatai. Ciklizálás. A lexikografikus szimplex-módszer. Érzékenységvizsgálat. Gyakorlati alkalmazások. Dualitás. Farkas-tétel. A lineáris programozás és a geometria kapcsolata. A szállítási feladat megoldása disztribúciós módszerrel. A hozzárendelési feladat megoldása magyar módszerrel. A szállítási feladat megoldása magyar módszerrel.

Csak matematikatanári MA-n választhatóak az alábbi tudáselemek (mind 2 pont)

2.7.1. Matematikatörténet
A folyammenti kultúrák, a görög klasszikus kor és a hellenizmus matematikája. Középkor: az indiai és az iszlám kultúrkör matematikája. Az európai matematika kezdete: pisai Leonardo. A projektív geometria kialakulása a reneszánsz festészetben. A számfogalom kialakulása. Szemelvények a XIX. és a XX. század matematikájából.

2.7.2. Elemi matematika 1.

2.7.3. Elemi matematika 2.

2.7.4. Elemi matematika 3.

Az elemi matematika tudáselemek egyetemen vagy főiskolán, matematika szakos tanári képzésben teljesített "elemi matematika" című tárgyakkal teljesíthetők.