Orsókonvexitás

Vígh Viktor

SZTE Bolyai Intézet, Geometria Tanszék

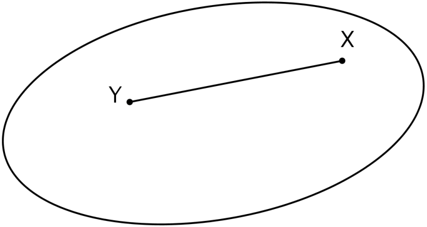
2012. április 28.

Lineáris konvexitás

Az előadás folyamán végig a síkban dolgozunk. A konvexitás fogalma jól ismert:

Konvexitás

A H halmaz konvex, ha bármely $X, Y \in H$ pontokra $\overline{XY} \subseteq H$ is teljesül, ahol $\overline{XY}$ az X és Y pontokat összekötő szakaszt jelöli.

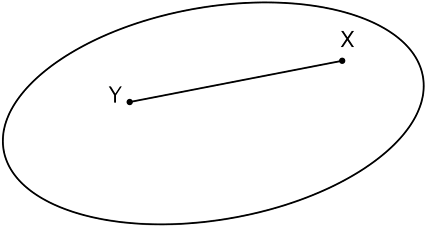


Lineáris konvexitás

Az előadás folyamán végig a síkban dolgozunk. A konvexitás fogalma jól ismert:

Konvexitás

A H halmaz konvex, ha bármely $X, Y \in H$ pontokra $\overline{XY} \subseteq H$ is teljesül, ahol $\overline{XY}$ az X és Y pontokat összekötő szakaszt jelöli.



Példák konvex halmazra: szakasz, kör, négyzet, háromszög, félsík, négyzet a csúcsai nélkül, szakasz a végpontjai nélkül, stb.

Konvex lemezek

A könnyebb érthetőség (és a matematikai precizitás) kedvéért a továbbiakban mindig feltesszük, hogy a halmazunkhoz hozzátartoznak a határpontjai is (azaz zárt), lefedhető egy megfelelően nagy körrel (korlátos) és nem tartalmazza egy egyenes, vagyis nem fajul szakasszá, esetleg ponttá.

Konvex lemez

A H síkbeli halmazt konvez lemeznek hívjuk, ha H konvex, zárt, korlátos és H-t nem tartalmazza egy egyenes.

Konvex lemezek

A könnyebb érthetőség (és a matematikai precizitás) kedvéért a továbbiakban mindig feltesszük, hogy a halmazunkhoz hozzátartoznak a határpontjai is (azaz zárt), lefedhető egy megfelelően nagy körrel (korlátos) és nem tartalmazza egy egyenes, vagyis nem fajul szakasszá, esetleg ponttá.

Konvex lemez

A H síkbeli halmazt konvez lemeznek hívjuk, ha H konvex, zárt, korlátos és H-t nem tartalmazza egy egyenes.

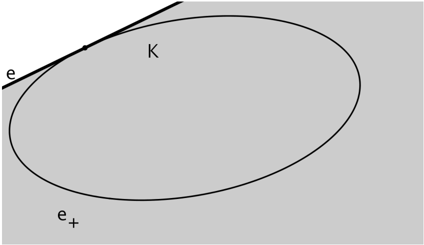
A konvex lemezeket más módon is leírhatjuk. Ehhez további fogalmakra lesz szükségünk.

Támaszegyenes

Támaszegyenes, támaszfélsík

Az e egyenes a K konvex lemez támaszegyenese, ha $e \cap K \neq \emptyset$, és az e-hez tartozó e_+ (zárt) félsík tartalmazza K-t. Az e_+-t K egy támaszfélsíkjának nevezzük.

Megjegyzés: ha $x \in K$ pontra igaz, hogy egyértelműen létezik egy e támaszegyenese K-nak, ami tartalmazza x-t, akkor az e-t érintőnek nevezzük.



Támaszfélsíkok metszetei

Tétel (Konvex lemezek mint félsíkok metszetei)

K ponthalmaz egy konvex lemez pontosan akkor, ha K korlátos, nem tartalmazza egy egyenes és

$$\bigcap_{e_+ \supseteq K} e_+ = K.$$

Bizonyítás: Világos, hogy bármilyen K ponthalmazra

$$\bigcap_{e_+ \supseteq K} e_+ \supseteq K.$$

Tegyük fel, hogy K konvex lemez. Ekkor definíció szerint korlátos és nem tartalmazza egyenes.

Támaszfélsíkok metszetei (bizonyítás)

Legyen $X \notin K$, és vegyünk egy olyan e egyenest X-n keresztül, ami nem metszi K-t. (Van ilyen?) Ezt K-nak „nekitolva” olyan támaszfélsíkját konstruáljuk, ami nem tartalmazza X-t, így

$$\bigcap_{e_+ \supseteq K} e_+ \subseteq K.$$

Támaszfélsíkok metszetei (bizonyítás)

Legyen $X \notin K$, és vegyünk egy olyan e egyenest X-n keresztül, ami nem metszi K-t. (Van ilyen?) Ezt K-nak „nekitolva” olyan támaszfélsíkját konstruáljuk, ami nem tartalmazza X-t, így

$$\bigcap_{e_+ \supseteq K} e_+ \subseteq K.$$

Most tegyük fel, hogy K előáll a fenti metszetként. Konvex, zárt halmazok metszete konvex és zárt, a másik két tulajdonságot pedig feltettük, így K konvex lemez valóban. $\square$

A metszettulajdonság

A fenti karakterizáció lehetőséget ad arra, hogy egy újfajta konvexitásfogalmat definiáljunk.

Definíció (Orsókonvexitás)

$B(X)$ jelöli az X középpontú, egység sugarú körlapot. Az S konvex lemezt **orsókonvexnek** nevezzük, ha

$$\bigcap_{B(X) \supseteq S} B(X) = S.$$

A H ponthalmaz $conv_S(H)$ orsókonvex burkán az őt tartalmazó legszűkebb orsókonvex lemezt értjük.

Megjegyzés: ha P és Q pontok távolsága legfeljebb kettő, akkor $conv_S(P, Q)$ egy orsóra hasonlít, innen az elnevezés.

Orsókonvexitásról általában

A fenti gondolatmenetben több dolgot „feleslegesen” tettünk fel (pl. zártság). Az orsókonvex halmazok általános definíciója lényegében az, hogy bármely két pontjukkal együtt a két pont által definiált orsót is tartalmazzák. A definíció minden dimenzióban analóg módon értelmes. Elsőként Mayer, német matematikus munkájában jelenik meg 1935-ben. („Eine Überkonvexität”)

Orsókonvexitásról általában

A fenti gondolatmenetben több dolgot „feleslegesen" tettünk fel (pl. zártság). Az orsókonvex halmazok általános definíciója lényegében az, hogy bármely két pontjukkal együtt a két pont által definiált orsót is tartalmazzák. A definíció minden dimenzióban analóg módon értelmes. Elsőként Mayer, német matematikus munkájában jelenik meg 1935-ben. („Eine Überkonvexität")

Véges sok kör metszetét körpoligonnak nevezzük. Az orsókonvex lemezekre gondolhatunk úgy is, mint azokra a konvex lemezekre, amiket tetszőlegesen közelíthetünk körpoligonokkal.

Orsókonvexitásról általában

A fenti gondolatmenetben több dolgot „feleslegesen” tettünk fel (pl. zártság). Az orsókonvex halmazok általános definíciója lényegében az, hogy bármely két pontjukkal együtt a két pont által definiált orsót is tartalmazzák. A definíció minden dimenzióban analóg módon értelmes. Elsőként Mayer, német matematikus munkájában jelenik meg 1935-ben. („Eine Überkonvexität”)

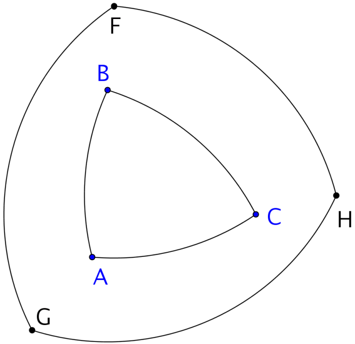
Véges sok kör metszetét körpoligonnak nevezzük. Az orsókonvex lemezekre gondolhatunk úgy is, mint azokra a konvex lemezekre, amiket tetszőlegesen közelíthetünk körpoligonokkal.

A körpoligonok (illetve magasabb dimenziós megfelelőik) természetes módon jelennek meg nevezetes diszkrét geometriai problémáknál, pl.: Kneser-Poulsen sejtés vagy a Vázsonyi-probléma.

Duális

Legyen S orsókonvex lemez, és tekintsük a következő halmazt:

$$S^* = \{P \mid S \subseteq B(P)\}.$$



Duális

Állítás

S^* orsókonvex lemez.

Duális

Állítás

S^* orsókonvex lemez.

Bizonyítás:

$$S^* = \{P \mid S \subseteq B(P)\} = \{P \mid \forall X \in S : |PX| \leq 1\} = \bigcap_{X \in S} B(X).$$

$\square$

Duális

Állítás

S^* orsókonvex lemez.

Bizonyítás:

$$S^* = \{P \mid S \subseteq B(P)\} = \{P \mid \forall X \in S : |PX| \leq 1\} = \bigcap_{X \in S} B(X).$$

$\square$

Állítás

$S = S^{**}$.

Duális

Állítás

S^* orsókonvex lemez.

Bizonyítás:

$$S^* = \{P \mid S \subseteq B(P)\} = \{P \mid \forall X \in S : |PX| \leq 1\} = \bigcap_{X \in S} B(X).$$

$\square$

Állítás

$S = S^{**}$.

Bizonyítás: Definíció szerint

$$S = \bigcap_{P \in S^*} B(P),$$

ami a fenti számolással együtt bizonyítja az állítást. $\square$

Megjegyzések

A matematikába sokféle dualitás létezik, általában elvárás, hogy kétszer alkalmazva a dualitást (bármilyen értelemben is szerepeljen) jussunk vissza az eredeti állapotba. Ez most a második állítás szerint teljesül, vagyis jogos a szóhasználat. A szakirodalom ennek ellenére nem használja a dualitás kifejezést.

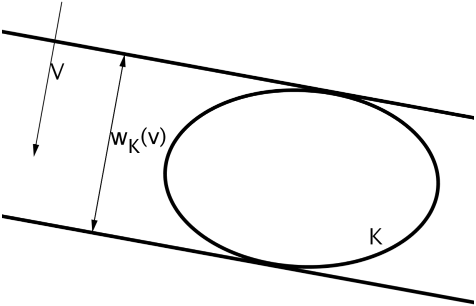
Megjegyzések

A matematikába sokféle dualitás létezik, általában elvárás, hogy kétszer alkalmazva a dualitást (bármilyen értelemben is szerepeljen) jussunk vissza az eredeti állapotba. Ez most a második állítás szerint teljesül, vagyis jogos a szóhasználat. A szakirodalom ennek ellenére nem használja a dualitás kifejezést.

Az orsókonvex dualitásnak semmi köze a lineáris konvexitásból ismert dualitáshoz (polaritáshoz), ilyen értelemben talán valóban kissé zavaró lehet az elnevezés.

Szélesség

Egy K konvex lemez $\overrightarrow{v}$ irányú szélességének nevezzük $\overrightarrow{v}$-re merőleges támaszegyeneseinek távolságát, jele $w_K(\overrightarrow{v})$.

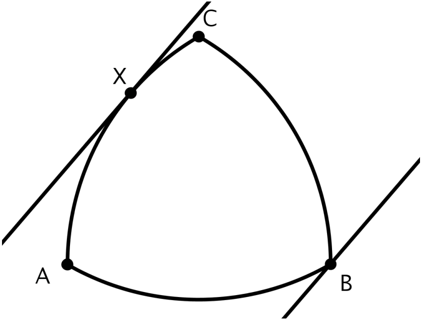


Állandó szélességű alakzatok

Definíció

K konvex lemez 1 állandó szélsességű, ha minden $\overrightarrow{v}$ vektorra $w_K(\overrightarrow{v}) = 1$.

Például ilyen az egység átmérőjű kör, vagy a Reauleaux-háromszög.



Dualitás és szélesség

Tétel

K konvex lemez 1 állandó szélességű pontosan akkor ha K önduális orsókonvex lemez, azaz $K = K^*$.

Dualitás és szélesség

Tétel

K konvex lemez 1 állandó szélességű pontosan akkor ha K önduális orsókonvex lemez, azaz $K = K^*$.

Lemma

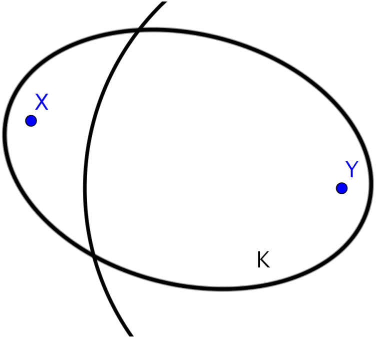
Legyen

$$K^* = \bigcap_{X \in K} B(X).$$

Ekkor minden $\overrightarrow{v}$ vektorra $w_K(\overrightarrow{v}) \leq 1$ feltétel ekvivalens azzal, hogy $K \subseteq K^*$.

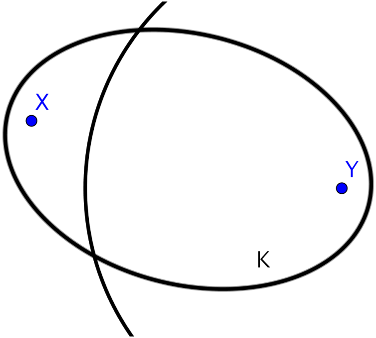
A lemma bizonyítása

Tegyük fel, hogy a szélesség minden irányban legfeljebb 1 és $X \in K \setminus K^*$. Ekkor létezik $Y \in K$, amire $|XY| > 1$, s így K $\overrightarrow{XY}$ irányú szélessége is nagyobb, mint 1.



A lemma bizonyítása

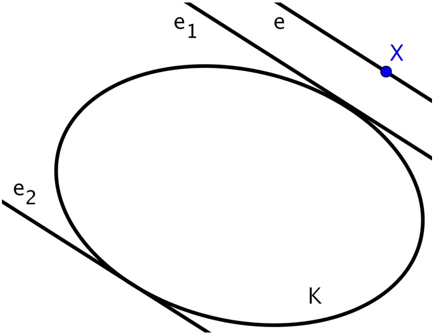
Tegyük fel, hogy a szélesség minden irányban legfeljebb 1 és $X \in K \setminus K^*$. Ekkor létezik $Y \in K$, amire $|XY| > 1$, s így K $\overrightarrow{XY}$ irányú szélessége is nagyobb, mint 1.



Most tegyük fel, hogy $K \subseteq K^*$, és $w_K(\overrightarrow{v}) > 1$. Ekkor létezik $X, Y \in K$, hogy $|XY| > 1$, így $X \notin K^*$.

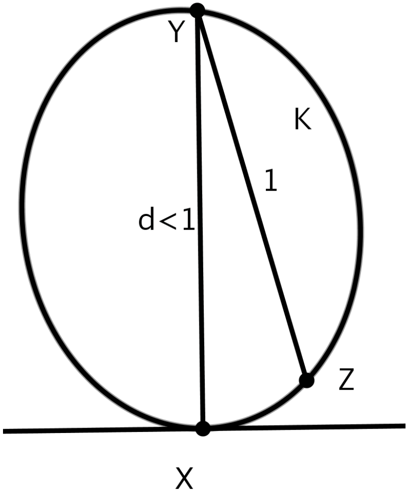
A tétel bizonyítása

Tegyük fel, hogy K 1 állandó szélességű. Az eddigiekből $K \subseteq K^*$. Tegyük fel, hogy a tartalmazás szigorú, vagyis létezik $X \in K^* \setminus K$. Vegyük észre, hogy minden $Y \in K$ esetén $|XY| \leq 1$, mert $X \in B(Y)$. Hasonlóan mint korábban legyen e egyenes olyan, ami tartalmazza X-t, de elkerüli K-t, legyenek K e-vel párhuzamos támaszegyenesei e_1 és e_2. Ezek távolsága kisebb, mint 1.

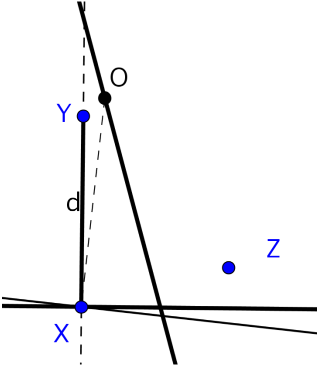


A tétel bizonyítása

Most tegyük fel, hogy $K = K^*$, de $w_K(\overrightarrow{v}) < 1$ valamely $\overrightarrow{v}$-re. Használjuk az ábra jelöléseit.



A tétel bizonyítása



Így $conv_S(X, Z)$-t átmetszi e, így $conv_S(X, Z)$ „kilóg” K-ból. $\square$

Köszönöm a figyelmet!